Über die Störungen der von Kepler verwendeten Marsbeobachtungen

Felix Schmeidler

Es wird nachgeprüft, ob die von Kepler zur Ableitung der Gesetze der Planetenbewegung verwendeten Beobachtungen infolge der Störungen merkliche Abweichungen von einer elliptischen Bahn aufwiesen. Die Berechnung der Störungsbeträge mit Hilfe der modernen Planetentheorien ergibt einige Bogenminuten im geozentrischen Ort. Die Darstellung der Oppositionsbeobachtungen des Mars durch elliptische Bahnelemente wird ohne und mit Berücksichtigung von Störungen gerechnet und gelingt in beiden Fällen gleich gut. Damit ist erwiesen, daß die Vernachlässigung der Störungen in Keplers Rechnungen keinen schädlichen Einfluß ausgeübt hat.

1. Die Problemstellung.
2. Plan der Arbeit und Auswahl der Beobachtungen.
3. Bestimmung einer ersten Bahn für Mars.
4. Kritische Reduktion der Beobachtungsdaten.
5. Berechnung der Störungen.
6. Die Bahnverbesserung.
7. Diskussion der Resultate.

1. Die Problemstellung

Keplers Entdeckung der drei nach ihm benannten Gesetze der Bewegung der Planeten war einer der wichtigsten Fortschritte der Astronomie der damaligen Zeit. Die Bedeutung dieser Entdeckung und der Ruhm des Entdeckers erfahren nicht die geringste Einschränkung, wenn gesagt wird, daß die drei Keplerschen Gesetze sich später durch die von Newton gemachte Entdeckung als Folge eines einzigen allgemeinen Gesetzes, nämlich des Gesetzes der Gravitation, erklären ließen. Die Ableitung der Keplerschen Gesetze der Bewegung von zwei Körpern aus dem Gravitationsgesetz kann heute in jedem Lehrbuch der Himmelsmechanik nachgelesen werden.

Prof. Dr. Felix Schmeidler, Universitäts-Sternwarte, 8000 München 80, Schreinerstraße 1
Privat: Mauerkircher Straße 17

So hat Kepler, unter dem Gesichtspunkt späterer Erkenntnisse gesehen, einen besonders einfachen Fall der Bewegung der Himmelskörper behandelt. Es war ihm nicht bekannt und konnte ihm beim damaligen Stand der astronomischen Wissenschaft unmöglich bekannt sein, daß in Wirklichkeit die Bewegungen der Planeten komplizierter sind, weil außer der Anziehungskraft der Sonne auch die Anziehungskräfte der übrigen Planeten wirken. Die Vernachlässigung dieser Effekte, die man heute als Störungen bezeichnet, hat den Erfolg von Keplers Bemühungen nicht beeinträchtigt; denn wegen der bekannten Tatsache, daß die Sonne alle Planeten an Masse erheblich überragt, sind die Störungen gegenüber der Attraktion der Sonne sehr klein und hat ihre Vernachlässigung nur geringe Fehler zur Folge. So ist es verständlich, daß Kepler trotz Unkenntnis der Planetenstörungen die richtigen Gesetze der Planetenbewegung finden konnte.

Es liegt nun nahe, die Frage zu stellen, ob in den von Kepler zur Ableitung seiner Gesetze der Planetenbewegung verwendeten astronomischen Beobachtungen die Störungen wirklich so klein waren, daß ihre völlige Vernachlässigung zulässig war, ohne daß der Erfolg von Keplers Arbeiten gefährdet wurde. Dieser Frage ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Gegen die Fragestellung als solche könnte eingewendet werden, daß der geschichtliche Ablauf der Dinge gewissermaßen die Antwort schon gegeben hat; denn Kepler hat ja tatsächlich die richtigen Gesetze der Bewegung im Zweikörperproblem gefunden, was sicher nicht möglich gewesen wäre, wenn die Störungen sehr groß gewesen wären.

Durch diese Feststellung werden aber nicht alle Fragen beantwortet. Allein die Überlegung, daß möglicherweise nur gerade zufällig zur Zeit der von Kepler benutzten Beobachtungen die Störungen klein gewesen sein könnten, beweist die Notwendigkeit einer genaueren Untersuchung der Frage. Und schließlich gehört es zu einer durchgreifenden Klärung des Problems dazu, daß durch eine exakte Rechnung ein Nachweis geführt wird, wie groß der Einfluß der Störungen durch die übrigen Planeten auf die von Kepler benutzten Beobachtungen tatsächlich gewesen ist.

Auch die Tatsache, daß einige der größten Störungsglieder in den Bewegungen des Mondes und der Planeten seit dem Altertum empirisch bekannt waren, ändert das Problem nicht. Denn Kepler hat bei der Bearbeitung der Planetenbeobachtungen in der „Astronomia nova" nur da Änderungen der Bahnelemente des Mars mit der Zeit untersucht, wo er die Beobachtungen seiner Zeit mit antiken Beobachtungen verglich; innerhalb desjenigen Zeitraums, der die von ihm verwendeten Beobachtungen seiner Zeit (nämlich der Jahre 1580—1604) enthält, hat er die Bahn des Mars als unveränderlich behandelt und somit keine Störungen berücksichtigt.

Schon ein erster Überblick ergibt, daß die Störungen nicht so klein sind, daß sie ohne jeden Zweifel vernachlässigt werden können. Die neueste Berechnung der Störungen der Bahn des Planeten Mars stammt von *Clemence* (1949) und stellt die durch die periodischen Störungen verursachten Änderungen der Koordinaten in der üblichen Form von Gliedern dar, die gleich periodischen Funktionen der Zeit sind. Jedes einzelne Glied ist dabei gleich dem Sinus (oder Cosinus) eines zeitlich veränderlichen Winkels, multipliziert mit einem konstanten Zahlenfaktor. Da die Funktionen Sinus und Cosinus maximal den Wert 1 erreichen können, ist der betreffende

Zahlenfaktor gleich dem größten Wert, den jedes einzelne Störungsglied annehmen kann. Auf den Seiten 471 bis 475 gibt *Clemence* die Koeffizienten der Störungsglieder der mittleren Länge für jeden der störenden Planeten und jedes in Frage kommende Argument numerisch an. Greift man aus den Tabellen alle diejenigen Glieder heraus, deren Amplitude mindestens 10 Bogensekunden beträgt, dann findet man unter den Störungen durch Erde ein Glied mit 12″ Amplitude und unter den Störungen durch Jupiter zwei Glieder mit etwas mehr als 20″ sowie ein weiteres mit 14″ Amplitude. Da es in ungünstigen Fällen eintreten kann, daß alle diese Glieder mit ihrem vollen Betrag und gleichem Vorzeichen wirken, ergäbe sich eine Summe von mehr als einer Bogenminute. Von der gleichen Größenordnung ist die Meßgenauigkeit der von Tycho Brahe gemachten und von Kepler verwendeten Beobachtungen des Mars, so daß schon unter diesem Gesichtspunkt eine genaue Nachrechnung der Störungen recht erwünscht erscheint.

In Wirklichkeit ist der Einfluß der Störungen noch erheblich größer, weil die von *Clemence* angegebenen Zahlen heliozentrische Störungsbeträge darstellen. Geozentrisch werden diese Beträge in der Oppositionsstellung des Mars um einen Faktor vergrößert, der gleich dem Verhältnis der Entfernung Sonne — Mars zur Entfernung Erde — Mars ist; dieser Faktor erreicht gerade in den besonders erdnahen Oppositionen fast den Wert 4. Man hat demnach in Fällen, die zwar sehr ungünstig, aber durchaus nicht unmöglich sind, mit Störungen bis zu 4′ im geozentrischen Ort zu rechnen. Solche Beträge sind aber auf keinen Fall mehr völlig vernachlässigbar.

Allgemein gesprochen, sind bei einer näheren Nachrechnung des Einflusses der Störungen auf die von Kepler zur Ableitung seiner Gesetze benutzten Marsbeobachtungen vier verschiedene Ergebnisse denkbar:

1) Die Störungen waren durchweg völlig vernachlässigbar klein.
2) Die Störungen waren in dem mit Beobachtungen besetzten Zeitraum nicht vernachlässigbar, hatten aber zu den Zeitpunkten der von Kepler verwendeten Beobachtungen nur kleine Beträge.
3) Die Störungen hatten eine merkliche Größe, aber als Funktion der Zeit genähert einen solchen Verlauf, daß ihre Wirkung derjenigen von kleinen Änderungen der elliptischen Bahnelemente entsprach.
4) Die Störungen erreichten erhebliche Beträge und waren auch nicht genähert durch Abänderungen der elliptischen Bahnelemente darstellbar.

In den drei ersten Fällen war die von Kepler bei der Ableitung der Gesetze der Planetenbewegung vorgenommene Vernachlässigung aller Störungen unbedenklich. Für die Fälle 1) und 2) leuchtet das unmittelbar ein; im Fall 3) hätte Kepler durch seine Rechnungen trotz der unrichtigen Voraussetzungen das richtige Resultat erhalten, daß die Bahnen der Planeten elliptisch sind und dem Flächensatz sowie dem dritten Keplerschen Gesetz gehorchen; nur die Zahlenwerte der Bahnelemente wären um kleine Beträge falsch ausgefallen. Da Kepler die wahren Werte der Bahnelemente ohnehin unbekannt waren, hätte dieser Fehler an keiner Stelle seiner Rechnungen Anlaß zu irgend einem Widerspruch gegeben. Im Fall 4) jedoch wäre die Vernachlässigung der Störungen bedenklich gewesen und hätte u. U. den ganzen Erfolg von Keplers Bemühungen in Frage stellen können.

2. Plan der Arbeit und Auswahl der Beobachtungen

Die Nachprüfung der zur Diskussion gestellten Frage, ob bei der Ableitung der Keplerschen Gesetze die Störungen vernachlässigt werden durften, erfodert genauere Rechnungen mit den Methoden der modernen Himmelsmechanik. Es sind zunächst mit Hilfe der heute vorliegenden Theorien die Beträge der Störungen der Marsbahn zur Zeit der Beobachtungen von Tycho Brahe, d. h. etwa für den Zeitraum von 1580 bis 1600 zu berechnen. Wegen der oben unter 3) erwähnten Möglichkeit, daß die Störungen trotz erheblicher Beträge durch fehlerhafte Werte der erhaltenen Bahnelemente unschädlich gemacht werden konnten, müssen die von Kepler verwendeten Beobachtungen des Mars sowohl ohne Berücksichtigung von Störungen als auch mit Berücksichtigung derselben durch Elemente einer elliptischen Bahn dargestellt werden. Wenn in beiden Fällen die Darstellung gleich gut ist und die erhaltenen Bahnelemente innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen, ist die Vernachlässigung der Störungen durch Kepler unbedenklich zulässig gewesen, d. h. es liegt einer der beiden Fälle 1) oder 2) vor, die oben erwähnt wurden. Wenn die beiden Rechnungen, die ohne und mit Berücksichtigung von Störungen gemacht wurden, eine gleich gute Darstellung der Beobachtungen, aber erheblich verschiedene Zahlenwerte der Bahnelemente ergeben, lag Fall 3) vor, welcher bedeutet, daß die Störungen eigentlich zwar nicht hätten vernachlässigt werden dürfen, aber durch kleine Änderungen der Bahnelemente effektiv berücksichtigt wurden. Der Fall 4), der Unzulässigkeit der Vernachlässigung der Störungen bedeutet, würde sich dadurch kenntlich machen, daß die Darstellung der von Kepler benutzten Beobachtungen durch die Rechnung ohne Störungen erheblich schlechter ausfällt als bei der Rechnung mit Störungen.

Man könnte statt des hier erläuterten und im weiteren Verlauf befolgten Arbeitsplans auch daran denken, alle Rechnungen, die Kepler selbst gemacht und in der „Astronomia nova" beschrieben hat, durchgehend unter Berücksichtigung der Störungsbeträge zu wiederholen. Auch dieser Weg zur Entscheidung der Frage, ob die Vernachlässigung der Störungen zulässig war, wurde geprüft; eine genaue Nachprüfung des Ganges der Rechnungen, durch die Kepler selbst schließlich zu seinen beiden ersten Gesetzen geführt wurde, ergab, daß dieses Vorgehen für die vorliegende Arbeit sehr viele unnötige Rechenarbeiten erfordert hätte. Die Methoden der modernen Astronomie machen es eben möglich, die Kernpunkte des Problems schneller und unmittelbarer zu erfassen, als das mit den Methoden der Zeit Keplers möglich war.

Für die Berechnung der Störungen wurde nicht die oben erwähnte Publikation von *Clemence* (1949) benutzt, sondern die ältere Theorie von *Newcomb* (1898). Zwar sind die Resultate von Clemence etwas genauer als die von Newcomb, aber im Hinblick auf die für moderne Begriffe niedrige Genauigkeit der Beobachtungen zur Zeit Keplers ist dieser Unterschied bedeutungslos. Andrerseits hat die Newcombsche Theorie den großen Vorzug, daß für ihre Anwendung bequeme Tafeln vorliegen; außerdem ist sie noch heute die Grundlage der Berechnung der Marsbewegung für die Jahrbücher. Die später von *Ross* (1916) berechneten Korrektionen der Newcombschen Theorie wurden nicht berücksichtigt, weil ihre Beträge im Verhältnis zur Genauigkeit der Beobachtungen Tycho Brahes vernachlässigbar klein sind.

Weiter mußte entschieden werden, welche Beobachtungen für die Rechnung verwendet werden sollten. Kepler selbst ist, wie sich aus der „Astronomia nova" ergibt, in dieser Frage verhältnismäßig unsystematisch vorgegangen, indem er für jede seiner zahlreichen Hypothesenrechnungen jeweils die Beobachtungen verwendet hat, die ihm im Einzelfall die geeignetsten erschienen. Es wäre sehr schwer, ein Bild darüber zu gewinnen, welche der vielen Beobachtungen, die an irgend einer Stelle in der „Astronomia nova" benutzt sind, den größten Beitrag zum Endresultat geliefert haben. Glücklicherweise gibt es andere Kriterien für die Auswahl der Beobachtungen für die vorliegende Arbeit. Alle diejenigen Beobachtungen, bei denen die Störungen klein waren, sind für die untersuchte Frage unwichtig; damit scheiden alle Beobachtungen in weitem Zeitabstand vor oder nach den Oppositionen aus, weil zu diesen Zeiten der Abstand Erde—Mars groß und infolgedessen der Einfluß der Störungen auf den geozentrischen Ort klein ist. Es verbleiben also nur Beobachtungen in Oppositionsnähe, die zu unserer Frage einen Beitrag leisten können. Da andrerseits alle wesentlichen Störungsglieder solche Funktionen der Zeit sind, die sich innerhalb von einigen Wochen nur geringfügig ändern, ist es zulässig und sinnvoll, die beobachteten Oppositionsörter allein zu benutzen, die Kepler im Kapitel 15 der „Astronomia nova" mit viel Sorgfalt zusammengestellt hat.

3. Bestimmung einer ersten Bahn für Mars

Wenn die auf p. 150 der im Jahre 1937 von *Max Caspar* (1937) gemachten Edition der „Astronomia nova" zusammengestellten 12 Oppositionsbeobachtungen des Mars, von denen die beiden letzten von Kepler selbst beobachtet wurden, als Grundlage einer Bahnbestimmung gewählt werden, ist die Verwendung der später von Gauß erdachten Methode der ersten Bahnbestimmung unzweckmäßig. Denn diese Methode beruht wesentlich auf der Voraussetzung, daß die Zwischenzeiten zwischen den vorliegenden Einzelbeobachtungen klein sind, was für den vorliegenden Fall nicht zutrifft. In solchen Fällen ist es besser, zunächst ungefähr richtige Zahlenwerte der Bahnelemente zu ermitteln und diese durch das Verfahren der Bahnverbesserung in endgültige zu verwandeln.

Für die Ermittlung solcher erster Bahnelemente können die von Kepler mitgeteilten Beobachtungen auf p. 150 der „Astronomia nova" (*Caspar* 1937) verwendet werden, ohne daß einige kleine Korrektionen angebracht werden, über die weiter unten noch ausführlich zu sprechen sein wird. Die Ableitung von ungefähr richtigen Elementen kann durch einige Überschlagsrechnungen sehr schnell gemacht werden. Am einfachsten ist die Knotenlänge Ω zu bestimmen; sie ist gleich derjenigen Länge, in der die heliozentrische und mit ihr die geozentrische Breite den Wert Null annimmt. Man findet, daß dieser Fall zwischen den Oppositionen von 1589 und 1591 und dann wieder zwischen denen von 1593 und 1595 eintritt. Nimmt man an, daß zwischen den jeweiligen Örtern sowohl Länge als auch Breite linear variieren, dann findet man durch Interpolation

> aus den Beobachtungen von 1593 und 1595 die Länge des aufsteigenden Knotens gleich 46° 6,4′ und
> aus den Beobachtungen von 1589 und 1591 die Länge des absteigenden Knotens gleich 224° 12,1′.

Als mittlere Länge des (aufsteigenden) Knotens folgt also 45° 9′.

Die Neigung der Bahn ist gleich dem Maximalwert, den die heliozentrische Breite erreicht. Die allein beobachtbaren geozentrischen Breiten sind in der Opposition genähert gleich der heliozentrischen Breite, multipliziert mit Verhältnis der Entfernungen Sonne—Mars und Erde—Mars. Da es hier nur auf eine genäherte Berechnung ankommt, kann man beide Entfernungen durch ihre mittleren Werte ersetzen und hat:

> mittlere Entfernung Sonne—Mars gleich 1,52 astron. Einh.,
> mittlere Entfernung Erde—Mars in Opposition eine astronomische Einheit kleiner, also 0,52 astron. Einh.

Die größte vorkommende Breite ist 6°, das Verhältnis zwischen den Entfernungen Sonne—Mars und Erde—Mars ist ungefähr gleich 3. Die Bahnneigung wäre also nahe 2°. Eine etwas genauere Rechnung, deren Details nicht wiedergegeben werden sollen, führte auf den Wert $i = 1° 46'$.

Für die Umlaufszeit bzw. für die ihr reziproke mittlere tägliche Bewegung des Mars wurde der moderne Wert $n = 1886{,}52''$ (*Newcomb* 1898) übernommen. Dieses Bahnelement konnte auch zur Zeit Kepler's durch Vergleich mit antiken Marsbeobachtungen schon mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Es bleibt noch die Bestimmung der restlichen drei Bahnelemente, der Exzentrizität, der mittleren Anomalie zu einer beliebig wählbaren Ausgangszeit und der Perihellänge. Diese drei Bahnelemente sind durch die Gleichungen

$$E - e \sin E = M_0 + n\,(t - t_0) \qquad \text{(Keplersche Gleichung)}$$

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

$$\lambda = v + \pi$$

verbunden, in denen M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit $t = t_0$, e die Exzentrizität, E die exzentrische Anomalie, v die wahre Anomalie und π die Perihellänge bedeuten. Die Größe λ, die sich aus der dritten Formel ergibt, ist im Fall verschwindender Neigung genau gleich der heliozentrischen Länge, im Fall kleiner Neigung (der hier vorliegt) ihr sehr nahe gleich. Da Mars in allen Fällen in Opposition zur Sonne steht, ist wiederum die heliozentrische Länge gleich der beobachteten geozentrischen Länge λ.

Es wurden nun drei Beobachtungen aus der Tabelle auf p. 150 der „Astronomia nova“ (*Caspar* 1937) herausgegriffen und die für sie angegebenen Längen nach mehreren Versuchsrechnungen durch die Werte $M_0 = 307° \, 0{,}7'$, $e = 0.093$ und $\pi = 328° \, 46{,}7'$ dargestellt. Als Ausgangsepoche $t = t_0$ wurde dabei die Zeit der Beobachtung der Opposition von 1591 gewählt, die ungefähr in der Mitte des gesamten Zeitraums der Beobachtungen liegt.

Die erhaltenen Werte der vorläufigen Bahnelemente lauten also in nochmaliger-Zusammenstellung:

Anfangsepoche		1591, Juni 8 um 7.43 Uhr
mittlere Anomalie	M_0	$= 307° \, 0{,}7'$
tägl. Bewegung	n	$= 1886{,}52'' = 0{,}524033°$ pro Tag
Exzentrizität	e	$= 0{,}093$
Perihellänge	π	$= 328° \, 46{,}7' + 0{,}83' (t - t_0)$
Neigung	i	$= 1° \, 46'$
Knotenlänge	Ω	$= 45° \, 9'$

Das bei der Perihellänge auftretende, der Zeit proportionale Glied trägt der Präzession der Äquinoktien Rechnung; man erhält also, wenn man in dieser Weise π als zeitabhängiges „Bahnelement“ behandelt, unmittelbar Planetenörter, die auf das jeweilige momentane Äquinoktium der Beobachtung bezogen sind. Die große Halbachse der Bahn tritt unter den Elementen nicht auf, weil sie aus der mittleren täglichen Bewegung mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes berechnet werden kann. Die für die Anfangsepoche angegebene Uhrzeit bezieht sich auf der Meridian der Insel Hven, auf der Tycho Brahe seine Sternwarte hatte.

Wenn man mit diesen vorläufigen Bahnelementen die beobachteten Örter nachrechnet, ergeben sich Werte der Längen und Breiten, die mit den Beobachtungen nicht übereinstimmen. Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung sind durch die anschließende Bahnverbesserung zu beseitigen. Die Berechnung der zu den jeweiligen Beobachtungszeiten gehörenden Längen und Breiten ist mit den bekannten Formeln (*Stracke* 1929)

$$
\begin{aligned}
&E - e \sin E = M_0 + n\,(t - t_0) \qquad\qquad n^2 a^3 = k^2 \;(= \text{Gravitations-Konstante})\\
&r \cos v = a\,(\cos E - e)\\
&r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E\\
&l = v + \pi + \zeta\\
&u = v + \pi - \Omega - 0{,}83'\,(t - t_0) \qquad\qquad (1)\\
&\sin b = \sin u \sin i\\
&\varrho \cos\beta \cos(\lambda - L) = r \cos b \cos(l - L) - R\\
&\varrho \cos\beta \sin(\lambda - L) = r \cos b \sin(l - L)\\
&\varrho \sin\beta = r \sin b
\end{aligned}
$$

durchzuführen, in denen wieder E und v die exzentrische und die wahre Anomalie bedeuten, a die große Halbachse der Marsbahn, r die momentane Entfernung Sonne—Mars, l und b die heliozentrische Länge und Breite, λ und β die geozentrische Länge und Breite des Mars, ϱ und R die Abstände Erde—Mars bzw. Erde—Sonne und L die heliozentrische Länge der Erde. Schließlich tritt noch die Größe ζ auf, die die Reduktion des Marsortes auf die Ekliptik bedeutet und aus den Newcombschen Tafeln entnommen werden kann (*Newcomb 1898*); daß dort der Betrag ζ für die (wirkliche) Neigung der Marsbahn von $1^\circ\ 51'$ tabuliert ist, während für die hier vorliegende Rechnung $i = 1^\circ\ 46'$ angenommen wird, hat keinen merklichen Fehler zur Folge, weil die Werte von ζ in allen Fällen kleiner als $1'$ sind.

Die Koordinaten L, R der Erde wurden ebenfalls aus den Newcombschen Tafeln entnommen; nähere Einzelheiten werden weiter unten im Zusammenhang mit der Berechnung der Störungen mitgeteilt werden.

Die Berechnung der geozentrischen Längen und Breiten zur Zeit der 12 von Kepler benutzten Oppositionsbeobachtungen mit Hilfe der obigen Formeln und vorläufigen Bahnelemente ergab Werte, die mit den Beobachtungen innerhalb von 20 Bogenminuten übereinstimmten. Genaue Zahlenwerte werden im Verlauf der weiteren Rechnung mitgeteilt. Die Befestigung der gefundenen Differenzen ist Aufgabe des unten folgenden Verfahrens der Bahnverbesserung.

4. Kritische Reduktion der Beobachtungsdaten

Für die Zwecke der Ermittlung der elliptischen Bahnelemente des Mars kann nicht ohne weiteres erwartet werden, daß die von Kepler im Kapitel 15 der „Astronomia nova" abgedruckten Beobachtungen ohne Änderungen verwendbar sind. Es mußte vielmehr durch genaues Studium des Textes nachgeprüft werden, wie die gedruckten Werte zustande gekommen waren und ob die Kenntnisse der modernen Astronomie Korrektionen erfordern, um die Beobachtungen für den vorgesehenen Zweck brauchbar zu machen.

Der genaue Zeitpunkt jeder Opposition und die für ihn gültigen Werte der Koordinaten des Mars wurden von Kepler aus Einzelbeobachtungen erhalten, die der Opposition zeitlich möglichst nahe lagen und sie in den meisten Fällen von beiden Seiten einschlossen; durch Verwendung des Zahlenwertes der täglichen Änderung der Koordinaten des Mars und der Sonne, also durch lineare Interpolation, wurden die endgültigen Daten gewonnen. Dagegen ist einzuwenden, daß die tägliche Änderung der Koordinaten sich selbst von Tag zu Tag etwas ändert; aus diesem Grund darf bei einer Rechnung über mehrere Tage hinweg in Strenge nicht mit einem mittleren Wert gerechnet werden. Das war auch Kepler bekannt, aber die damalige Zeit kannte kein Hilfsmittel, um die Glieder zweiter und höherer Ordnung zu berücksichtigen. Außerdem hat Kepler vermutlich den dadurch bedingten Fehler für vernachlässigbar klein gehalten. Die Nachrechnung einiger Stichproben ergab, daß diese Ansicht richtig ist. Immerhin wäre es vielleicht der Mühe wert, wenn einmal in einer ausführlichen Untersuchung der wirkliche Betrag der auf diesem Weg entstandenen Ungenauigkeiten in jedem Einzelfall nachgerechnet würde.

Von denjenigen Effekten, die nach heutigen astronomischen Kenntnissen den Unterschied zwischen dem scheinbaren und dem mittleren Ort eines Sterns bedingen, wird die Präzession, wie schon erwähnt, durch die Rechnung mit einem zeitabhängigen Zahlenwert der Perihellänge berücksichtigt. Die von Kepler angegebenen Längen sind in jedem Fall auf das momentane Äquinoktium des Zeitpunkts der Beobachtungen bezogen, während die heutige Astronomie in solchen Fällen alle Messungen und damit auch die erhaltenen Zahlenwerte der Bahnelemente auf ein von Fall zu Fall eigens festzulegendes Äquinoktium zu übertragen pflegt. Die Nutation, die der Präzession der Äquinoktien überlagert ist, war Kepler unbekannt; sie beträgt maximal 9″ und konnte von ihm unbedenklich vernachlässigt werden. Auch für die vorliegende Untersuchung besteht kein Grund, sie zu berücksichtigen.

Für die Aberration des Lichts gilt die gleiche Feststellung; sie wurde erst ein Jahrhundert nach Kepler entdeckt und kann wegen der Kleinheit ihres Betrages auch hier außer acht bleiben. Außerdem hat sie für alle hier benutzten Beobachtungen den gleichen Betrag, weil es sich durchweg um Oppositionsstellungen des Mars handelt; soweit die vernachlässigten Aberrationsbeträge überhaupt einen Einfluß haben, würde dem durch eine entsprechende Veränderung des Bahnelements der mittleren Anomalie zur Ausgangsepoche voll Rechnung getragen. Eine ähnliche Überlegung trifft für den Einfluß der Lichtzeit auf die Beobachtungen zu, der wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts die Konsequenz hat, daß beobachtete Werte der Koordinaten in Strenge nicht zum Zeitpunkt der Beobachtung, sondern zum Zeitpunkt der Aussendung des Lichtstrahls gehören. Auch die dadurch verursachte Korrektion der Beobachtungen ist im Verhältnis zur Unsicherheit der damaligen Beobachtungen sehr klein und könnte noch dazu mit sehr hoher Genauigkeit durch eine kleine Änderung der Bahnelemente kompensiert werden.

Ausführlich hat Kepler die Korrektionen seiner Beobachtungen wegen Parallaxe und Refraktion behandelt. Für die Parallaxe hat er zunächst erheblich zu große Werte angenommen; die damalige Zeit glaubte, daß die Sonnenparallaxe ungefähr 3 Bogenminuten betrage, während sie in Wirklichkeit nur 8,8″ ist. Mit diesem großen Wert hat Kepler die von Tycho Brahe übernommenen Beobachtungen reduziert und an sie teilweise erhebliche Korrektionen bis zu mehreren Bogenminuten zwecks Reduktion auf den Betrag angebracht, den ein Beobachter im Erdmittelpunkt beobachtet hätte.

Nach heutiger Kenntnis der Dinge waren diese Korrektionen unzulässig. Kepler selbst hat im Kapitel 11 der „Astronomia nova“ Zweifel an der Richtigkeit des großen Betrages von 3′ der Sonnenparallaxe geäußert; nach Abschluß der ganzen Untersuchung kam er im Kapitel 64 erneut auf die Frage zurück und bewies hier ganz schlüssig, daß nach den vorliegenden Messungen die Parallaxe der Sonne nicht größer als 1′ sein könne. Die logische Konsequenz dieser Feststellung hätte die sein müssen, daß er seine ganze Untersuchung der Marsbewegung wiederholen mußte mit Beobachtungswerten, von denen die fälschlich angebrachten Korrektionen wegen Parallaxe wieder abgezogen waren. Er hat das nicht getan und war zu dieser Unterlassung berechtigt, weil eine Änderung der wesentlichen Resultate der „Astronomia nova“ wegen der kleinen Beträge nicht anzunehmen war. Aus dem gleichen Grund könnte auch für den Zweck der hier vorliegenden Untersuchung die Ausmerzung der zu Unrecht angebrachten Korrektion wegen Parallaxe unterbleiben; um aber eine physikalisch sinnvolle Darstellung der Marsbewegung durch elliptische Bahnelemente zu erhalten, wurden die Keplerschen Korrektionen wegen

Parallaxe doch rückgängig gemacht. Ihre Beträge wurden jeweils aus dem Text der „Astronomia nova“ entnommen und sind in Tabelle 1 angegeben.

Die Refraktion ist von Kepler nur in einem extremen Fall näher behandelt worden. Es handelt sich um die Beobachtung vom 8. Juni 1591, bei der der Mars nur in 6° Höhe über dem Horizont stand. Kepler hat das Resultat der Beobachtung unverändert übernommen und in einer Überschlagsrechnung gezeigt, daß der Einfluß der Refraktion und der (als zu groß angenommenen) Parallaxe sich sehr nahe kompensierten. Das ist selbst nach moderner Kenntnis richtig, denn Kepler hat auch die Refraktion größer angestzt, als sie in Wirklichkeit ist. Die Nachrechnung aller dieser Umstände ergab, daß Kepler trotz der in mehreren Punkten falschen Voraussetzungen mit der Vernachlässigung aller Korrektionen einen Fehler von nur etwa 2′ begangen hat. Da die Beobachtung wegen der tiefen Stellung des Mars ohnehin sehr unsicher ist, kann dieser Fehler unbedenklich in Kauf genommen werden.

Schließlich ist noch zu bedenken, daß die am Schluß des Kapitels 15 der „Astronomia nova“ angegebenen Beobachtungen unter „longitudo“ nicht ekliptikale Längen des Mars, sondern Längen des Planeten in seiner Bahn angeben. Da für die modernen Verfahren der Bahnverbesserung ekliptikale Längen zweckmäßiger sind, wurde die Differenz in jedem Fall angebracht; sie war fast durchwegs kleiner als 1 Bogenminute.

5. Berechnung der Störungen

Bei der Berechnung der Störungen ist es nicht erforderlich, alle Terme zu berücksichtigen. Unter den Störungen der ersten Ordnung, die hier ausschließlich in Betracht kommen, unterscheidet die Himmelsmechanik säkulare und periodische Glieder. Die säkularen Störungen sind sehr klein, wirken aber über lange Zeiträume hinweg in gleicher Richtung und summieren sich daher im Lauf mehrerer Jahrhunderte zu merklichen Beträgen auf. Sie können für die vorliegende Untersuchung unberücksichtigt bleiben, denn ihre Wirkung besteht darin, daß die Zahlenwerte der Bahnelemente, die sich für die Zeit der Beobachtungen Tychos ergeben, von den heute gültigen Werten abweichen; da die Bahnelemente in jedem Fall durch die Bahnverbesserung so ermittelt werden, daß die Beobachtungen optimal dargestellt werden, werden die säkularen Störungen auf diesem Weg effektiv erfaßt. Innerhalb des Zeitraums von 1580 bis 1604, den die Beobachtungen überdecken, können die Beträge der säkularen Störungen mit ausreichender Genauigkeit als konstant betrachtet werden.

Zu berücksichtigen sind die periodischen Störungen, die periodisch mit den Umläufen des gestörten Planeten (also Mars) und des störenden Körpers variieren. Auch unter ihnen sind viele Terme so klein, daß ihre Berücksichtigung für die hier vorliegende Aufgabe an sich nicht nötig wäre. Zunächst wurde erwogen, nur die durch Jupiter verursachten Störungen zu berücksichtigen; dann zeigte sich, daß durch zusätzliche Berechnung der durch die übrigen Planeten ausgeübten Störungen nur sehr geringe Mehrarbeit bedingt war. Nur die Störungen des Mars durch den Uranus wurden ganz vernachlässigt.

Aus den Tafeln von *Newcomb* (1898) wurden ausschließlich die Störungen des Mars in Länge berechnet. Die Störungen im Radiusvektor erreichen zwar auch merkliche Beträge, haben aber keinen Einfluß auf den geozentrischen Ort des Mars in der Opposition. Die Störungen in Breite sind sehr klein und erreichen nur in Einzelfällen den Betrag von 1″, der unbedenklich ganz vernachlässigt werden kann.

Da es sich bei den Beobachtungen durchweg um Marsorte handelt, die von der Erde aus gesehen wurden, ist für die Rechnung auch die Kenntnis des jeweiligen Erdortes notwendig. Kepler entnahm diese Orte ebenfalls den Beobachtungen von Tycho Brahe. Für die vorliegende Arbeit wurden die Erdorte den Tafeln von *Newcomb* entnommen. Dabei trat die Frage auf, ob auch hier die Störungen, und zwar diejenigen der Erdbahn, berücksichtigt werden müssen. Da die Störungen der Erdbahn wesentlich kleiner sind als die der Marsbahn, hätte ihre Vernachlässigung wahrscheinlich nur geringe Fehler zur Folge gehabt. *Newcomb* selbst hat abgeschätzt, daß die Berechnung eines beliebigen Ortes der Erde bei völliger Vernachlässigung aller Störungen im Maximum höchstens um 30″ falsch werden kann.

Dennoch wurden auch bei der Berechnung der Erdorte wenigstens die größten Störungsterme berücksichtigt. Es wurden aus den Tafeln von *Newcomb* die säkularen Störungen der Länge, die periodischen Störungen durch Venus, Mars und Jupiter und das Hauptglied der Störungen durch den Mond berücksichtigt. Die auf diese Weise erhaltenen Erdörter dürften in keinem Fall um mehr als 10″ von der Wirklichkeit abweichen. Sämtliche Störungsterme im Radiusvektor und in Breite wurden bei der Erde ebenso wie bei Mars vernachlässigt.

6. Die Bahnverbesserung

In den vorhergehenden Abschnitten sind alle Unterlagen für eine Verbesserung der Ausgangswerte der Bahnelemente bereitgestellt. Die Tabelle 1 gibt die benutzten Beobachtungen und ihre Darstellung durch die vorläufigen Elemente des Abschnitts 3. In ihr bedeutet λ_0 die von Kepler im Kapitel 15 der „Astronomia nova“ angegebenen Werte der Länge, — R die Reduktion auf die Ekliptik, — $(\delta\lambda)_p$ diejenige Korrektion, die die von Kepler zu Unrecht angebrachte Korrektion wegen Parallaxe wieder rückgängig macht, und λ den dann folgenden Wert der ekliptikalen Länge. Entsprechend bedeutet β_0 die von Kepler angegebene ekliptikale Breite, — $(\delta\beta)_p$ die wieder abzuziehende Korrektion der Breite wegen Parallaxe und β das Resultat. Unter $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ sind die Differenzen zwischen den beobachteten Koordinaten und den aus den Gleichungen (1) mit den vorläufigen Bahnelementen berechneten Werten im Sinn „Beobachtung minus Rechnung“ angegeben. Für die Längen ist dabei zwischen Werten, die *ohne Berücksichtigung* der Störungen erhalten wurden und solchen, bei denen *Störungen berücksichtigt* sind, unterschieden; für die Breiten entfällt diese Unterscheidung, weil die Störungen in Breite als numerisch unmerklich klein vernachlässigt sind.

	λ_0	$-R$	$-(\delta\lambda)_P$	λ	β_0	$-(\delta\beta)_P$	β	$\Delta\lambda$	$\Delta\lambda'$	$\Delta\beta$
1580	66° 28,6′	— 0,6′	0,0′	66° 28,0′	+ 1° 40,0′	0,0	+ 1° 40,0′	— 2,0′	+ 0,7′	— 8,4′
1582	106° 55,5′	— 1,0′	0,0′	106° 54,5′	+ 4° 6,0′	0,0	+ 4° 6,0′	— 7,5′	— 6,7′	+ 8,6′
1585	141° 36,2′	0,0′	0,0′	141° 36,2′	+ 4° 32,2′	— 1,2	+ 4° 31,0′	— 5,6′	— 4,8′	+ 12,0′
1587	175° 43,0′	+ 0,9	+ 0,3′	175° 44,2′	+ 3° 41,0′	— 4,0	+ 3° 37,0′	— 6,8′	— 5,8′	+ 13,0′
1589	214° 23,0′	+ 0,5′	+ 1,3′	214° 24,8′	+ 1° 12,8′	— 5,4	+ 1° 7,4′	— 5,0′	— 4,7′	+ 11,6′
1591	266° 43,0′	— 1,2′	0,0′	266° 41,8′	— 4° 0,0′	0,0	— 4° 0,0′	+ 0,8′	— 0,4′	— 4,4′
1593	342° 16,0′	0,0′	0,0′	342° 16,0′	— 6° 2,0′	0,0	— 6° 2,0′	+ 6,0′	+ 5,3′	— 16,7′
1595	47° 31,7′	0,0′	0,0′	47° 31,7′	+ 0° 8,0′	0,0	+ 0° 8,0′	+ 1,5′	+ 2,3′	— 4,4′
1597	92° 28,0′	— 0,7′	0,0′	92° 27,3′	+ 3° 33,0′	0,0	+ 3° 33,0′	— 2,0′	— 0,8′	+ 10,5′
1600	128° 38,0′	0,0′	0,0′	128° 38,0′	+ 4° 30,8′	0,0	+ 4° 30,8′	— 5,1′	— 5,1′	+ 11,0′
1602	162° 27,0′	+ 0,6′	+ 1,5′	162° 29,1′	+ 4° 10,0′	— 2,1	+ 4° 7,9′	— 2,6′	— 3,7′	+ 13,3′
1604	198° 37,2′	+ 0,6′	+ 3,5′	198° 41,3′	+ 2° 26,0′	— 4,0	+ 2° 22,0′	— 0,3′	— 1,8′	+ 14,5′

Der Unterschied zwischen den Darstellungsresten $\Delta\lambda$, die ohne Berücksichtigung der Störungen erhalten sind, und den $\Delta\lambda'$, die mit Berücksichtigung der Störungen gewonnen wurden, kennzeichnet den Einfluß der Störungen auf die beobachteten Koordinaten. Er beträgt in den meisten Fällen ungefähr 1 Bogenminute; der größte Betrag, der bei der Opposition von 1580 eintritt, ist 2,7′. Dieses Ergebnis entspricht recht gut den Abschätzungen zu Beginn dieses Aufsatzes (Abschnitt 1), nach denen in ungünstigen Einzelfällen mit Störungsbeträgen bis zu 4′ im geozentrischen Ort gerechnet wurde.

Der Zusammenhang zwischen den Darstellungsresten $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ und den gesuchten Verbesserungen der elliptischen Bahnelemente ist nach dem Lehrbuch von *Bauschinger* (1928) gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\cos\beta\,\Delta\lambda = {} & \frac{a}{\varrho}\Big[\sin b\cos(B+u) + e\sin b\cos(B+\omega)\Big]\Big[\Delta M_0 + (t-t_0)\,\Delta n\Big]\sec\varphi - \\
& - \frac{2a\sqrt{a}}{3k}\,\frac{r}{\varrho}\sin b\sin(B+u)\,\Delta n + \\
& + \frac{a}{\varrho}\Big[\sin E\sin b\cos(B+u) - \cos\varphi\sin b\sin(B+\omega)\Big]\Delta\varphi + \\
& + \frac{r}{\varrho}\sin b\cos(B+u)\,\Delta s + \frac{r}{\varrho}\cos b\,(\sin v\,\Delta p - \cos v\,\Delta q) \qquad (2) \\
\Delta\beta = {} & \frac{a}{\varrho}\Big[\sin c\cos(C+u) + e\sin c\sin(C+\omega)\Big]\Big[\Delta M_0 + (t-t_0)\,\Delta n\Big]\sec\varphi - \\
& - \frac{2a\sqrt{a}}{3k}\,\frac{r}{\varrho}\sin c\sin(C+u)\,\Delta n + \\
& + \frac{a}{\varrho}\Big[\sin E\sin c\cos(C+u) - \cos\varphi\sin c\sin(C+\omega)\Big]\Delta\varphi + \\
& + \frac{r}{\varrho}\sin c\cos(C+u)\,\Delta s + \frac{r}{\varrho}\cos c\,(\sin v\,\Delta p - \cos v\,\Delta q)
\end{aligned}$$

in denen ΔM_0, Δn und $\Delta\varphi$ die an die vorläufigen Bahnelemente M_0, n und φ anzubringenden Korrektionen sind; φ hängt dabei mit der Exzentrizität e durch die

Formel $e = \sin\varphi$ zusammen. Die Korrektionen der übrigen Bahnelemente sind gegeben durch die Formeln

$$
\begin{aligned}
&\cos\omega\,\Delta p - \sin\omega\,\Delta q = \Delta i, \text{ wobei } \omega = \pi - \Omega \\
&\sin\omega\,\Delta p + \cos\omega\,\Delta q = \sin i\,\Delta\Omega \qquad (3) \\
&\Delta s + \tan\frac{i}{2}\sin i\,\Delta\Omega = \Delta\pi
\end{aligned}
$$

Schließlich sind die in (2) auftretenden Hilfsgrößen b, B, c und C durch die Formeln

$$
\begin{aligned}
\sin b \sin B &= -\sin(\lambda - \Omega) \\
\sin b \cos B &= \cos i \cos(\lambda - \Omega) \\
\cos b &= -\sin i \cos(\lambda - \Omega) \qquad (4) \\
\sin c \sin C &= -\sin\beta\cos(\lambda - \Omega) \\
\sin c \cos C &= \sin i \cos\beta - \cos i \sin\beta \sin(\lambda - \Omega) \\
\cos C &= \cos i \cos\beta + \sin i \sin\beta \sin(\lambda - \Omega)
\end{aligned}
$$

gegeben.

Wegen der speziellen Aufgabe, die hier verfolgt wird, sind die Gleichungen für $\Delta\lambda$ zweimal zu rechnen, wobei im einen Fall die *ohne* Berücksichtigung der Störungen gefundenen Werte $\Delta\lambda$ und im anderen Fall die *mit* Berücksichtigung der Störungen erhaltenen Werte $\Delta\lambda'$ zu benutzen sind. Die numerische Ausrechnung der Formeln (2), in denen durchweg in zulässiger Vereinfachung $\cos\beta\,\Delta\lambda = \Delta\lambda$ gesetzt wurde, ergab die folgenden 24 Bedingungsgleichungen, deren erste 12 den ekliptikalen Längen und deren letzte 12 den Breiten entsprechen; die im Koeffizienten von Δ n auftretende Zeit $t - t_0$ ist in der Einheit von 10 Jahren gerechnet.

						$\Delta\lambda$	$\Delta\lambda'$
+ 2,76 ΔM_0	— 2,93 Δn	+ 5,55 $\Delta\varphi$	+ 2,81 Δs	— 0,08 Δp	— 0,01	= — 2.0	= + 0,7
+ 2,23	— 1,90	+ 3,28	+ 2,54	— 0,02	— 0,03	= — 7,5	= — 6,7
+ 2,06	— 1,33	+ 0,52	+ 2,46	+ 0,00	+ 0,01	= — 5,6	= — 4,8
+ 2,16	— 0,92	— 2,21	+ 2,53	— 0,02	+ 0,05	= — 6,8	= — 5,8
+ 2,61	— 0,56	— 5,01	+ 2,79	— 0,08	+ 0,04	= — 5,0	= — 4,7
+ 3,81	+ 0,00	— 6,10	+ 3,36	— 0,07	— 0,04	= + 0,8	= — 0,4
+ 4,40	+ 0,97	+ 1,79	+ 3,65	— 0,01	+ 0,05	= + 6,0	= + 5,3
+ 3,14	+ 1,09	+ 5,96	+ 3,00	— 0,09	+ 0,02	= + 1,5	= + 2,3
+ 2,38	+ 1,43	+ 4,36	+ 2,61	— 0,05	— 0,03	= — 2,0	= — 0,8
+ 2,09	+ 1,80	+ 1,65	+ 2,47	+ 0,00	— 0,01	= — 5,1	= — 5,1
+ 2,09	+ 2,23	— 1,11	+ 2,48	— 0,08	+ 0,03	= — 2,6	= — 3,7
+ 2,38	+ 3,05	— 3,95	+ 2,66	— 0,06	+ 0,05	= — 0,3	= — 1,8

						Δβ
+ 0,07 Δ M_0	— 0,07 Δn	+ 0,15 Δφ	+ 0,08 Δs	+ 2,78 Δp	+ 0,39 Δq	= — 8,4
+ 0,02	— 0,02	— 0,03	+ 0,03	+ 1,69	+ 1,90	= + 8,6
— 0,01	+ 0,01	— 0,10	— 0,01	+ 0,30	+ 2,44	= + 12,0
— 0,04	+ 0,01	— 0,03	— 0,05	— 1,15	+ 2,25	= + 13,0
— 0,06	+ 0,01	+ 0,14	— 0,08	— 2,54	+ 1,15	= + 11,6
+ 0,07	+ 0,00	— 0,07	+ 0,08	— 2,97	— 1,57	= — 4,4
+ 0,07	+ 0,01	— 0,26	+ 0,05	+ 0,85	— 3,55	= — 16,7
+ 0,09	+ 0,03	+ 0,18	+ 0,09	+ 2,94	— 0,10	= — 4,4
+ 0,04	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 2,17	+ 1,44	= + 10,5
— 0,03	— 0,03	— 0,10	— 0,03	+ 0,86	+ 2,32	= + 11,0
— 0,03	— 0,03	— 0,06	— 0,03	— 0,58	+ 2,42	= + 13,3
— 0,06	— 0,08	+ 0,06	— 0,07	— 2,02	+ 1,72	= + 14,5

Das sind 24 Gleichungen für 6 Unbekannte; die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind nach den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln. Es ergeben sich die folgenden *Normalgleichungen*:

+ 92,15 ΔM_0	+ 8,27 Δn	+ 8,81 Δφ	+ 92,44 Δs	— 0,80 Δp	— 0,32 Δq	= — 53,74	= — 48,08
	+ 36,83	— 15,44	+ 8,41	— 0,15	— 0,05	= + 24,22	= + 7,52
		+ 186,50	+ 11,75	+ 0,35	+ 0,26	= + 4,96	= + 42,49
			+ 94,38	— 0,74	— 0,27	= — 70,49	= — 63,30
				+ 46,54	+ 1,10	= — 67,47	= — 67,62
					+ 47,46	= + 250,30	= + 250,20

in denen, wie es üblich ist, die Glieder links unterhalb der Diagonale nicht angeschrieben sind, weil sie den an entsprechender Stelle der rechten oberen Hälfte des Schemas stehenden Gliedern gleich sind. Auf den rechten Seiten stehen jeweils zwei Zahlen, deren *erste* für die Rechnung ohne Störungen und deren *zweite* für die Rechnung mit Störungen gültig ist. Die Auflösung der Normalgleichungen ergab folgende Werte der *Unbekannten* und ihrer mittleren Fehler:

ohne Störungen		*mit* Störungen	
ΔM_0	= + 10,11′ ± 2,0′	ΔM_0	= + 9,52′ ± 2,0′
Δn	= + 0,97′ ± 0,4′	Δn	= + 0,56′ ± 0,4′
Δφ	= + 0,30′ ± 0,2′	Δφ	= + 0,46′ ± 0,2′
Δs	= — 10,78′ ± 2,0′	Δs	= — 10,10′ ± 2,0′
Δp	= — 1,57′ ± 0,4′	Δp	= — 1,58′ ± 0,4′
Δq	= + 5,32′ ± 0,4′	Δq	= + 5,31′ ± 0,4′

Die Darstellung der verwendeten Beobachtungen durch Einsetzung der erhaltenen Werte der Unbekannten in die Bedingungsgleichungen ergibt folgende Zahlen:

Tabelle 2:	$(B\text{-}R)_\lambda$	$(B\text{-}R)_\beta$	$(B\text{-}R)_\lambda$	$(B\text{-}R)_\beta$
1580	+ 1,5′	— 5,9′	+ 1,5′	— 5,9′
1582	— 1,7′	+ 1,3′	— 2,6′	+ 1,3′
1585	+ 1,1′	— 0,5′	+ 0,9′	— 0,5′
1587	— 0,1′	— 0,9′	+ 0,3′	— 0,9′
1589	+ 0,3′	+ 1,2′	+ 0,9′	+ 1,2′
1591	+ 0,4′	— 0,5′	+ 0,1′	— 0,6′
1593	— 1,0′	+ 3,4′	— 1,4′	+ 3,4′
1595	— 1,0′	+ 0,7′	— 0,9′	+ 0,7′
1597	— 0,6′	+ 6,4′	+ 0,1′	+ 6,3′
1600	— 1,8′	0,0′	— 1,8′	+ 0,1′
1602	+ 0,8′	— 0,4′	+ 0,4′	— 0,4′
1604	+ 2,2′	+ 2,1′	+ 2,1′	+ 2,0′

Das erste Zahlenpaar in Tabelle 2 gibt die Darstellungsreste im Sinn Beobachtung minus Rechnung für Länge und Breite *ohne*, das zweite Zahlenpaar *mit* Berücksichtigung der Störungen. Man sieht, daß zwischen beiden Darstellungen kein merklicher Unterschied besteht. Die Fehlerquadratsumme ist sogar bei Berücksichtigung der Störungen eine bedeutungslose Kleinigkeit größer als ohne Berücksichtigung der Störungen, nämlich 117.29, gegen 115.22; natürlich ist das ein Zufall.

Ein Blick auf die Werte der *Unbekannten* zeigt, daß auch deren Werte sich in beiden Lösungen nur geringfügig unterscheiden; bei keiner der 6 Unbekannten ist die Differenz zwischen den aus beiden Lösungen erhaltenen Werten im Verhältnis zu den mittleren Fehlern verbürgbar.

Als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit ergab sich aus beiden Ausgleichungen der Wert $\mu = \pm\, 2{,}5'$. Da hier alle Beobachtungen mit gleichem Gewicht berücksichtigt wurden, ist dieser Betrag identisch mit dem mittleren Fehler einer Einzelbeobachtung.

Durch Hinzufügung der gefundenen Korrektionen an die in Abschnitt 3 genannten Ausgangselemente ergeben sich diejenigen Werte der elliptischen Bahnelemente, durch welche die von Kepler verwendeten Marsbeobachtungen optimal dargestellt werden. Man erhält dabei die an die Exzentrizität e anzubringende Korrektion Δe aus der Gleichung

$$\Delta e = \cos \varphi \, \Delta \varphi$$

die aus $e = \sin \varphi$ durch Differentiation folgt. Die Korrektionsgrößen Δi, $\Delta☊$ und $\Delta\pi$ erhält man aus den Formeln (3). So ergeben sich folgende Bahnelemente, die für die Epoche des 8. Juni 1591 um 7.43 Uhr Ortszeit Hven gültig sind:

M_0	=	307° 10,8′	307° 10,2′	307° 13,2′
n	=	1886,54″	1886,53″	1886,52″ pro Tag
e	=	0,0931	0,0931	0,0930
π	=	328° 36,4′	328° 37,1′	328° 32,4′
i	=	1° 50,8′	1° 50,8′	1° 51,1′
☊	=	46° 36,5′	46° 36,5′	46° 32,7′

Es sind erst die Resultate der Rechnung ohne Störungen wiedergegeben und dann diejenigen der Rechnung mit Störungen; an letzter Stelle stehen die Bahnelemente der *Newcomb*schen Tafeln (*Newcomb* 1898), reduziert auf die gleiche Epoche. Man erkennt, daß die drei Elementensysteme gut untereinander übereinstimmen, da die auftretenden Differenzen von der Größenordnung von 1 bis 2 Bogenminuten der Unsicherheit der von Kepler benutzten Bobachtungen entspricht. Nur scheinbar weichen die Elemente π (Perihellänge) und ☊ (Knoten) um größere Beträge von den Newcombschen Werten ab; es ist zu bedenken, daß Abweichungen der Perihellänge mit dem Faktor $e = 0{,}1$ und Abweichungen der Knotenlänge mit dem Faktor $\sin i = 0{,}03$ multipliziert werden, wenn aus den Elementen Marsorte gerechnet werden. Bei Berücksichtigung dieser Tatsache liegt der Effekt der in den Elementen π und ☊ gegenüber Newcomb gefundenen Differenzen erheblich unter der Unsicherheit der Beobachtungen.

7. Diskussion der Resultate

Mit dem gefundenen Resultat ist die bisher stillschweigend für richtig angesehene Auffassung bestätigt, daß die von Kepler zur Ableitung der Gesetze der Planetenbewegung gemachten Berechnungen durch die völlige Vernachlässigung der ihm unbekannten Planetenstörungen nicht beeinträchtigt wurden. Nicht ganz selbstverständlich zu erwarten war dieses Ergebnis jedoch nach den Resultaten des im ersten Abschnitt dieser Arbeit gemachten groben Überblicks über das Problem (s. Abschn. 1), nach welchem Störungen bis zu 4′ im geozentrischen Ort möglich erschienen; da nach landläufiger Ansicht die Unsicherheit der von Tycho Brahe gemachten Planetenbeobachtungen gleich 1′ angesehen wird, war ein merklicher Einfluß der Störungen durchaus möglich. Tatsächlich hat sich ergeben, daß von den vier im ersten Abschnitt als denkbar aufgeführten Resultaten das unter 1) angeführte zutrifft und die Störungen ohne jeden merklichen Einfluß auf die Rechenresultate Keplers gewesen sind.

Geht man an Hand der hier erhaltenen Zahlen dieser Angelegenheit näher nach, dann ergibt sich ein wichtiger Tatbestand. Der mittlere Fehler einer Einzelbeobachtung ergab sich in den beiden Ausgleichungen dieser Arbeit gleich ± 2,5′ und damit nicht unwesentlich größer als der meist als zutreffend angesehene Wert ± 1′. Zwar sind beide Zahlen noch immer von etwa der gleichen Größenordnung und man wird auch in Zukunft, wenn man nur eine grobe Vorstellung von der von Tycho Brahe erzielten Meßgenauigkeit geben will, von „etwa einer Bogenminute“

sprechen dürfen; wo aber etwas präzisere Angaben erforderlich sind, wird man beachten müssen, daß die tychonischen Messungen die Genauigkeit einer Bogenminute nicht ganz erreichen.

Diese Tatsache ist um so bestimmter festzustellen, als *Bialas* in einer Untersuchung über Keplers Arbeiten über die Bahn des Saturn (*Bialas* 1969) zum gleichen Resultat gelangte. Der von ihm abgeleitete mittlere Fehler einer tychonischen Beobachtung des Saturn betrug $\pm$ 2,2′. Da *Bialas* in seinen Rechnungen keine Störungen berücksichtigt hat, könnte nach den Ergebnissen seiner Arbeit allein noch vermutet werden, daß der von ihm abgeleitete Wert des mittleren Fehlers einer Beobachtung von Tycho Brahe sich bei zusätzlicher Berücksichtigung der Störungen kleiner ergeben würde. Die Resultate der vorliegenden Arbeit machen diese Vermutung äußerst unwahrscheinlich, wenn nicht unhaltbar; es ist kaum zu bezweifeln, daß der mittlere Fehler einer Beobachtung von Tycho Brahe etwas größer als $\pm$ 2′ ist.

Selbstverständlich bleibt davon unberührt, daß Tycho Brahes Beobachtungen genauer waren als diejenigen der Astronomen vor seiner Zeit; unberührt bleibt auch die von *Bialas* durch getrennte Rechnung nachgewiesene Tatsache, daß Tycho Brahe um ungefähr 1′ genauer gemessen hat als seine Zeitgenossen. Der große Fortschritt der astronomischen Meßkunst, den Tycho Brahe durch sorgfältige Konstruktion seiner Instrumente und durch gründliche Untersuchung aller Fehlerquellen erzielt hat, soll durch diese Bemerkungen in keiner Weise verkleinert werden.

Eine kurze Diskussion erfordert noch das dritte Keplersche Gesetz, das in der vorliegenden Untersuchung überhaupt nicht betrachtet wurde. Auch bezüglich derjenigen Rechnungen, die Kepler zur Aufstellung seines dritten Gesetzes führten, kann die Frage nach dem Einfluß der ihm unbekannten Planetenstörungen gestellt werden. Es ist leicht zu sehen, daß diese Rechnungen noch weniger anfällig gegen Verfälschungen wegen unberücksichtigter Störungen waren als die Arbeiten zur Ableitung der beiden ersten Gesetze. Das dritte Keplersche Gesetz verbindet nicht, wie die beiden ersten, Einzelbeobachungen miteinander, sondern ist eine Zahlenrelation zwischen dem Durchmesser der Bahn und der Umlaufszeit. Beide Größen sind erst aus einer zusammenfassenden Bearbeitung einer größeren Anzahl von Beobachtungen ableitbar, die durch die Störungen teilweise in der einen und teilweise in der anderen Richtung verfälscht sind; im Mittel muß daher der Einfluß der Störungen hier kleiner als bei den Einzelbeobachtungen sein. Wenn also in der vorliegenden Untersuchung die Unerheblichkeit der Störungen schon für die Ableitung der beiden ersten Keplerschen Gesetze nachgewiesen ist, dann gilt das gewiß auch für das dritte Keplersche Gesetz.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß Keplers Arbeiten zur Ableitung der Gesetze der Planetenbewegung an keiner Stelle wegen der Nichtberücksichtigung der ihm unbekannten Störungen scheitern konnten. Auch wenn dieses Resultat wegen des Erfolges, den Kepler ja tatsächlich erzielt hat, nur in zweiter Linie als bedeutsam erscheinen mag, ist es doch sicher von Interesse, daß über diese Frage nunmehr alle denkbaren Zweifel aus dem Weg geräumt sind.

Literatur:

J. Bauschinger, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. — Leipzig 1928.

V. Bialas, Die Rudolphinischen Tafeln von Johannes Kepler. – Abhandl. der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-naturwiss. Klasse, Neue Folge, Heft 139, 1969.

M. Caspar, Astronomia nova. Johannes Kepler's gesammelte Werke, Band 3. — München 1937.

G. M. Clemence, First-order theory of Mars. — Astronomical Papers US Naval Observatory, Volume 11, part. 2. Washington 1949.

S. Newcomb, Tables of the four inner planets. — Astronomical Papers US Naval Observatory, Volume 6. Washington 1898.

F. E. Roß, New Elements of Mars. — Astronomical papers US Naval Observatory, Volume 9, part 2. Washington 1916.

G. Stracke, Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. — Berlin 1929.