Nachtrag.

Ueber die Aenderung der Schwingungsdauer der Magnetstäbe, wenn sich die Schwere ändert

von

Paul Wolfgang Häcker in Nürnberg.

Wird ein Magnet von dem Tragverhältniss $= n$ an einen Ort gebracht, wo die Schwere mmal grösser ist, so ist sein Tragverhältniss $\frac{n}{m}$. Weil sich nun die Schweren umgekehrt wie die Volumen verhalten, so ist für gleichen Druck oder gleiches Gewicht die Volumeneinheit mmal kleiner, und weil bei dem Magnetismus die Function der Masse in dem umgekehrten Verhältniss zur Cubikwurzel derselben steht, so ist das Tragverhältniss dieser mmal kleinern Volumeneinheit $\frac{n \cdot \sqrt[3]{m}}{m} = \frac{n}{\sqrt[3]{m^2}}$.

Die Tragverhältnisse der Massen oder Volumeneinheiten von gleichem Druck oder gleichem Gewicht stehen daher in dem umgekehrten Verhältniss zur Cubikwurzel aus den Quadraten der Schwere. Bezeichnen wir mit g die kleinere, mit G die grössere Schwere, das grössere Tragverhältniss der grössern Volumeneinheit mit N, das kleinere Tragverhältniss der kleinern Volumeneinheit mit n, das Gewicht oder den Druck der grössern Volumeneinheit mit p, das Gewicht oder den Druck der kleineren Volumeneinheit mit P, so verhält sich verkehrt

$$\sqrt[3]{g^2} : \sqrt[3]{G^2} = N : n$$
$$\sqrt[3]{g^2} : \sqrt[3]{G^2} = \sqrt[3]{P} : \sqrt[3]{p}$$
$$g^2 : G^2 = N^3 : n^3$$
$$g^2 : G^2 = P : p$$

es verhalten sich daher umgekehrt die Cubi der Tragverhältnisse oder die Cubi der magnetischen Kräfte der Volumeneinheiten von gleichem Gewicht oder gleichem Druck wie die Quadrate der Schweren, und die Volumen oder die Gewichte der Volumeneinheiten von gleichem Tragverhältnisse verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Schweren. Hat in Nürnberg ein Magnet von 1 Pfund Gewicht das 10fache Tragverhältniss, so hat an dem Ort, wo die Schwere doppelt so gross ist, 1 Pfund das 6,30fache Tragverhältniss, und die Volumeneinheit oder die Masse, welche daselbst das 10fache Tragverhältniss hat, wiegt nur $\frac{1}{4}$ Pfund, denn die Cubikwurzel aus 4 mit 6,30 multiplizirt ist = 10. Die Gewichte oder die Volumen der Volumeneinheiten, welche gleiches Tragverhältniss haben, verhalten sich daher umgekehrt wie die Quadrate der Schweren.

Wir wollen nun untersuchen, durch welche Function der Zeit bei der Schwingungsdauer die Aenderung der Schwere bestimmt wird, wenn die magnetische Kraft der Masse und der Erdmagnetismus unverändert bleibt.

Da dieses durch Versuche nicht ermittelt werden kann, so muss es aus dem Verhältniss der Wirkungen der Kräfte bestimmt werden.

Es wurde früher bewiesen, dass jede Volumeneinheit vom Tragverhältniss = 1 gleich viel Volumeneinheiten von der Geschwindigkeit = 1 enthält, und dass die Anzahl dieser Einheiten von der Grösse des Magnetismus der Masse ganz unabhängig ist und immer dieselbe bleibt, wie sich derselbe auch ändert. Bleibt nun der Magnetismus der Masse und der Erdmagnetismus unverändert, und es wird die Schwere m mal grösser, so wird sowohl die Volumeneinheit vom Tragverhältniss = 1, als von der Geschwindigkeit = 1 m^2 mal kleiner, und es bleibt daher noch die Geschwindigkeit oder die Schwingungsdauer der letzteren Volumeneinheit zu bestimmen.

Aus dem Verhältniss der Wirkungen der Kräfte folgt aber, dass wenn die Schwingungsdauer der Volumeneinheit von der Geschwindigkeit $= 1$ in Nürnberg $= t$ ist, dieselbe an dem Orte, wo die Schwere m mal grösser ist, $= \frac{t}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt[3]{m} = \frac{t}{\sqrt[6]{m^5}}$ ist, wie in folgendem bewiesen wird.

In Nürnberg ist bei einer bestimmten magnetischen Kraft von dem Tragverhältniss bei 907 Pfund $= 1$ der log. der Volumeneinheit von der Geschwindigkeit $= 1$ — 3,36030. Da wo nun die Schwere 2mal grösser, ist die Volumeneinheit von dem Tragverhältniss 1 4mal kleiner, folglich 226¾ Pfund, und die Volumeneinheit von der Geschwindigkeit 1 ist ebenfalls 4mal kleiner, folglich ist der log. dieser Einheit — 3,96236. Der log. der Cubikwurzel dieser Einheit oder von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ ist — 1,32079. Ist nun die Länge des einfachen Secunden-Pendels in Nürnberg 440,50 französische Linien, so ist die Länge des zusammengesetzten Secunden-Pendels, der ohne Breite zu besitzen seiner ganzen Länge nach schwer ist, 660,75 Linien, und da wo die Schwere doppelt so gross ist, ist die Länge des zusammengesetzten Secunden-Pendels 1361,50 Linien, wovon der log. ist 3,12107

addirt man hiezu log. $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ — 1,32079

— 4,44186

Dieser log. giebt die Zahl für die Länge des zusammengesetzten Secunden-Pendels in Einheiten von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ ausgedrückt.

Die Schwingungsdauer des magnetischen Cubus von $\frac{1}{v}$ muss eben so gross seyn als wie die Schwingungsdauer desselben Massen-Cubus durch die beschleunigende Kraft der Schwere. Man erhält daher die Schwingungsdauer für diese Einheit durch die Gleichung $\sqrt{\frac{l}{\frac{1}{\sqrt[3]{v}}}}^{\,1} \cdot \sqrt{2} = t.$

Dieses giebt, wenn man statt der Schwingungsdauer einer Secunde 3600 Quarten setzt, wovon der log. 3,55630 ist, für den log. der Schwingungsdauer von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ 1,48588. Es ist nämlich

log. 3,55630 — $\frac{1}{2}$ log. 4,44186 + $\frac{1}{2}$ log. 0,30103 = log. 1,48588.

Bei derselben magnetischen Kraft der Masse ist in Nürnberg der log. von $\frac{1}{v}$ — 3,36030 und der log. der Schwingungsdauer dieser Einheit 1,73675
zieht man obigen log. davon ab . . . 1,48588
so erhält man . . 0,25087

Diese log. Differenz giebt den Beweiss, dass sich die Schwingungsdauer der Volumeneinheiten von der Geschwindigkeit 1 umgekehrt wie $\sqrt[6]{g^5}$, oder wie die sechsten Wurzeln aus den fünften Potenzen der Schweren verhalten, und dass sich die Schweren umgekehrt wie $\sqrt[5]{t^6}$ bei diesen Einheiten verhalten.

Nun können wir erst die Function der Zeit für die Aenderung der Schwere bei Stäben von gleichem Volumen, gleicher Länge und gleicher magnetischer Kraft bestimmen. Zu dem Ende wollen wir den Magnetstab Nr. 2 von $8\frac{1}{2}$ Loth Gewicht und 12 Zoll Länge, der in Nürnberg eine Schwingungsdauer von 8,32 Secunden hat, an einen Ort bringen, wo die Schwere doppelt so gross, der Erdmagnetismus aber derselbe ist. Um nun eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe zu erlangen, welche sich hiebei ergeben, so werde ich die Berechnung hieher setzen.

Der log. des Volumens dieses Stabes oder V in Nürnberg in französischen Cubiklinien ist . 3,21952
der log. der Volumeneinheit von der Geschwindigkeit 1 oder von $\frac{1}{v}$ . . . . — 3,36030
der log. von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ . . . . — 1,12010

der log. der Länge von 144 Linien in reduzirten Einheiten von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ oder von

$\frac{l}{\frac{1}{\sqrt[3]{v}}}$ . . . . — 3,27846

der log. der Schwingungsdauer von $\frac{1}{v}$ oder von c_0 1,73675

Dieses giebt nach der Gleichung

$$t = c_0 \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{1}{v}}} \cdot \frac{\sqrt[6]{l}}{\frac{1}{\sqrt[18]{v}}}$$

log. von $\sqrt[3]{\frac{V}{\frac{1}{v}}}$ 2,19327

log. von $\sqrt[6]{l}$ . . . . —, 35973

log. von $\frac{1}{\sqrt[18]{v}}$ . . . . —, 18667

log. der Schwingungsdauer von $\frac{1}{v}$ oder c_0 1,73675

4,47642

ab log. von 3600 Quarten 3,55630

0,92012

gleich 8,32 Secund.

Bringen wir nun diesen Magnetstab an einen Ort, wo die Schwere doppelt so gross ist, so wird das Volumen doppelt so schwer, und der log. desselben ist 3,52055

die Volumeneinheit von der Geschwindigkeit 1 oder von $\frac{1}{v}$ ist viermal kleiner und daher der log. . . . . — 3,96236

der log. von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ . . . . — 1,32079

der log. der Länge von 144 Linien in reduzirten Einheiten von $\frac{1}{\sqrt[3]{v}}$ . . . . — 3,47915 log. der Schwingungsdauer von $\frac{1}{v}$ oder von c_0 1,48588

log. von 2, weil bei doppelter Schwere die Trägheit der Masse 2mal grösser ist 0,30103

Dieses giebt nach der Gleichung

$$t = c_0 \sqrt[3]{\frac{V}{\frac{1}{v}}} \cdot \frac{\sqrt[6]{l}}{\frac{1}{\sqrt[18]{v}}} \cdot \sqrt[18]{2}$$

log. von $\sqrt[3]{\frac{V}{\frac{1}{v}}}$	2,49431
log. von $\sqrt[6]{l}$	0,35973
log. von $\frac{1}{\sqrt[18]{v}}$	− 0,22013
log. von $\sqrt[18]{2}$	0,01673
log. der Schwingungsdauer von $\frac{1}{v}$ oder von c^0	1.48588
	4,57678
ab log. von 3600 Quarten	3,55630
	1,02048
gleich	10,53 Secund.

Das Trägheitsmoment der magnetischen Masse wurde früher für t^2 durch $\sqrt[9]{v}$ und für t durch $\sqrt[18]{v}$ bestimmt; da nun da, wo die Schwere doppelt so gross ist, auch die Trägheit der Masse zweimal grösser ist, so verlängert hier die vergrösserte Trägheit der Masse die Schwingungsdauer des Stabes um $\sqrt[18]{2}$. Vergleicht man nun die Schwingungsdauer, welche dieser Stab in Nürnberg hat, mit derjenigen an dem Orte, wo die Schwere doppelt so gross ist, so zeigt sich, dass sich verhält

$$8{,}32 : 10{,}52 = 1 : \sqrt[3]{G}$$
$$\text{und } 8{,}32^3 : 10{,}52^3 = 1 : G,$$

oder die Schweren verhalten sich bei Stäben von gleichem Volumen, gleicher Länge und gleicher magnetischer Kraft directe wie die Cubi der Schwingungsdauer oder wie t^3. Der allgemeine Beweiss für die angeführten Sätze und dass sich die Quadrate der Massen wie die Cubi der magnetischen Kräfte verhalten, ergiebt sich aus folgenden. Bei Magnetstäben von gleicher Länge und gleicher magnetischer Kraft, aber ungleichem Gewicht, verhält sich an Orten, wo die Schwere gleich ist, directe, wenn die grösseren Buchstaben grössere Zahlenwerthe ausdrücken,

$$\sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P} = t : T$$
$$\sqrt[3]{p^2} : \sqrt[3]{P^2} = t^2 : T^2$$
$$p : P = t^3 : T^3$$

und die Massen oder die Volumen verhalten sich directe wie die Cubi der Schwingungsdauer. Nun stehen die Volumen in dem umgekehrten Verhältniss zu den Schweren, folglich verhalten sich bei Stäben von gleicher Länge, gleichem Volumen und gleicher magnetischer Kraft, an Orten von ungleicher Schwere die Cubi der Schwingungsdauer ebenfalls directe wie die Schweren, was durch das bisherige bewiesen worden ist.

Durch die Gleichung $\sqrt[3]{\frac{P}{p}} = \frac{T}{t}$ bei Stäben von gleicher Länge, ungleichem Querschnitt und hinreichender Masse ist also das allgemeine Gesetz, nach welchem die magnetische Kraft wirkt, ausgedrückt. Um sich durch Versuche davon zu überzeugen, so lasse man sich 50 Stäbe von 6 Zoll Länge verfertigen, von denen aber keiner unter $2\frac{3}{4}$ Loth wiegen darf. Wenn diese Stäbe gleich dick sind, so darf ihr Gewicht etwas verschieden seyn, und es ist daher nicht nothwendig, dass ihr Querschnitt quadratisch ist, und sie alle gleiches Gewicht haben; sie müssen aber ganz vollkommen magnetisirt, und der Werth von c muss bei allen derselbe seyn. Legt man nun von diesen Stäben einen auf den andern, so wird man finden, dass die Schwingungsdauer so lange im Verhältniss von $\sqrt[3]{p}$ oder $\sqrt[3]{w}$ wächst, bis die Stäbe die Form einer quadratischen Platte bilden. Legt man nun noch mehrere Stäbe aufeinander, so wird der Magnet ein Transversalmagnet und die Schwingungsdauer wächst von dieser Gränze an im Verhältniss von $\sqrt[6]{L}$, oder im Verhältniss der sechsten Wurzel aus der vertikalen Höhe oder im Verhältniss von $\sqrt[6]{w}$ oder $\sqrt[6]{p}$, wovon die Ursache leicht einzusehen ist, weil bei dem Transversalmagnet die vertikale Höhe durch Vermehrung der Massa länger als die horizontale Länge wird, und die vertikale Höhe oder die Breite des Querschnittes im Verhältniss der Masse oder des Querschnittes wächst.

Je näher die Werthe von c miteinander übereinstimmen, und je genauer die Stäbe gearbeitet sind, dass sie beim Aufeinanderliegen gut aneinander passen, um desto genauer werden auch die Versuche mit der Rechnung übereinstimmen. Weichen die Werthe von c nur sehr wenig voneinander ab, so kann ein mittlerer Werth von c genommen werden, wiewohl auch dieser, wenn die Gewichte der Stäbe sehr verschieden sind, von dem wahren Werth von c schon sehr abweicht. Wären aber die Werthe von c sehr ungleich, so geht auch dieses nicht mehr an, und man muss für alle 50 Stäbe einen gemeinschaftlichen Werth für $\frac{1}{v}$ suchen, welches bei ihrer Anzahl eine weitläufige Rechnung giebt, die ich nicht hieher setzen kann. Man wird aber aus dem, was in p. 5 und in folgendem angeführt wurde, finden, auf welche Art dabei zu verfahren ist.

Ich habe hier nur einige der wichtigen Folgen, welche sich aus dem Gesetz, nach welchem die magnetische Kraft wirkt, ergeben, angeführt. Dieses Gesetz habe ich schon im Jahr 1842 veröffentlichet, und die angeführten Versuche zeigen, dass die bisherigen Werthe für die Intensitäten des Erdmagnetismus an den verschiedenen Orten der Erde abzuändern sind. In wie fern man die Wirkungen des Erdmagnetismus und diejenigen eines Magnetstabes auf eine Magnetnadel als Kräfte miteinander vergleichen kann, werde ich alsdann erörtern, wann ich die nöthigen Voruntersuchungen hierüber werde beendigt haben.

Schlüsslich bemerke ich noch, dass ich denjenigen Logarithmen, welche zu Einheiten gehören, die Brüche sind, das Zeichen — vorgesetzt habe, um sie von den andern Logarithmen sogleich unterscheiden zu können.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft Nürnberg

Jahr/Year: 1858

Band/Volume: 1

Autor(en)/Author(s): Haecker Paul Wolfgang

Artikel/Article: Nachtrag. Über die Änderung der Schwingungsdauer, der Magnetstäbe, wenn sich die Schwere ändert. 135-142