Eine elementare

Erklärung der Präcessionsbewegung

mit

Berücksichtigung der Reibung

von

J. G. Munker,

Professor a. D.

I.

In dem 90. Bande seiner Annalen veröffentlicht Poggendorff eine elementare Erklärung der Präcessionsbewegung an dem von Fessel konstruirten Rotationsapparate, welche, obgleich sie nur die Art dieser Bewegung berücksichtigt, dennoch in den meisten Lehrbüchern der Physik beifällig aufgenommen wurde. Eine kritische Beurtheilung derselben ist meines Wissens bisher noch nicht erschienen, ich will deshalb eine solche hier folgen lassen, deren Berechtigung kaum einem Zweifel begegnen wird.

Zunächst scheint mir die Poggendorff'sche Erklärung nicht naturgemäss zu sein, weil sie die drehende Bewegung des Apparates von Kräften ableitet, die sich aus einer fortschreitenden Bewegung von Massentheilen der rotirenden Scheibe ergeben sollen.

Ausserdem erscheint sie mir aber auch nicht hinlänglich begründet, denn sie stützt sich auf die Voraussetzung, dass die rotirende Scheibe, wenn man sie dem Einflusse der Schwere überlässt, sich etwas senken wird, während doch Poggendorff selbst am Schlusse seiner Erklärung hervorhebt, dass neben der Präcessionsbewegung keine Senkung der Scheibe stattfinden kann. Es stützt sich also diese Erklärung auf Kräfte, die in der That nicht vorhanden sind, denn selbst, wenn man zugeben wollte, dass bei einem solchen Versuch ein Anlassen des Apparates ohne eine kleine Senkung der Scheibe kaum ausführbar ist, so kann doch für die Präcession der Himmelskörper, welche in Folge ihrer Rotation eine Abplattung erfahren haben, unmöglich eine derartige Ursache angenommen werden, weil bei solchen Körpern die Kräfte, welche die Präcession bedingen, sich stetig ändern und periodisch gleich Null werden. Man wird daher zugeben müssen, dass wenigstens in den letztgenannten bedeutsamsten Fällen, in welchen zufällige Nebenwirkungen ausgeschlossen sind, die Erklärung Poggendorffs jeder Begründung entbehrt.

Unter solchen Umständen halte ich es für angemessen, eine Erklärung dieser interessanten Erscheinungen hier folgen zu lassen, die zwar auch nur die Art der Bewegung berücksichtigt, sich aber ebenso einfach als sicher und lediglich durch Benützung des Parallelogramms der Drehaxen von Kräftepaaren ergibt, wenn man die Präcession nur als eine rein drehende Bewegung betrachtet.

Wie Poggendorff, will auch ich von den Erscheinungen ausgehen, die der Fessel'sche Apparat so augenscheinlich zeigt.

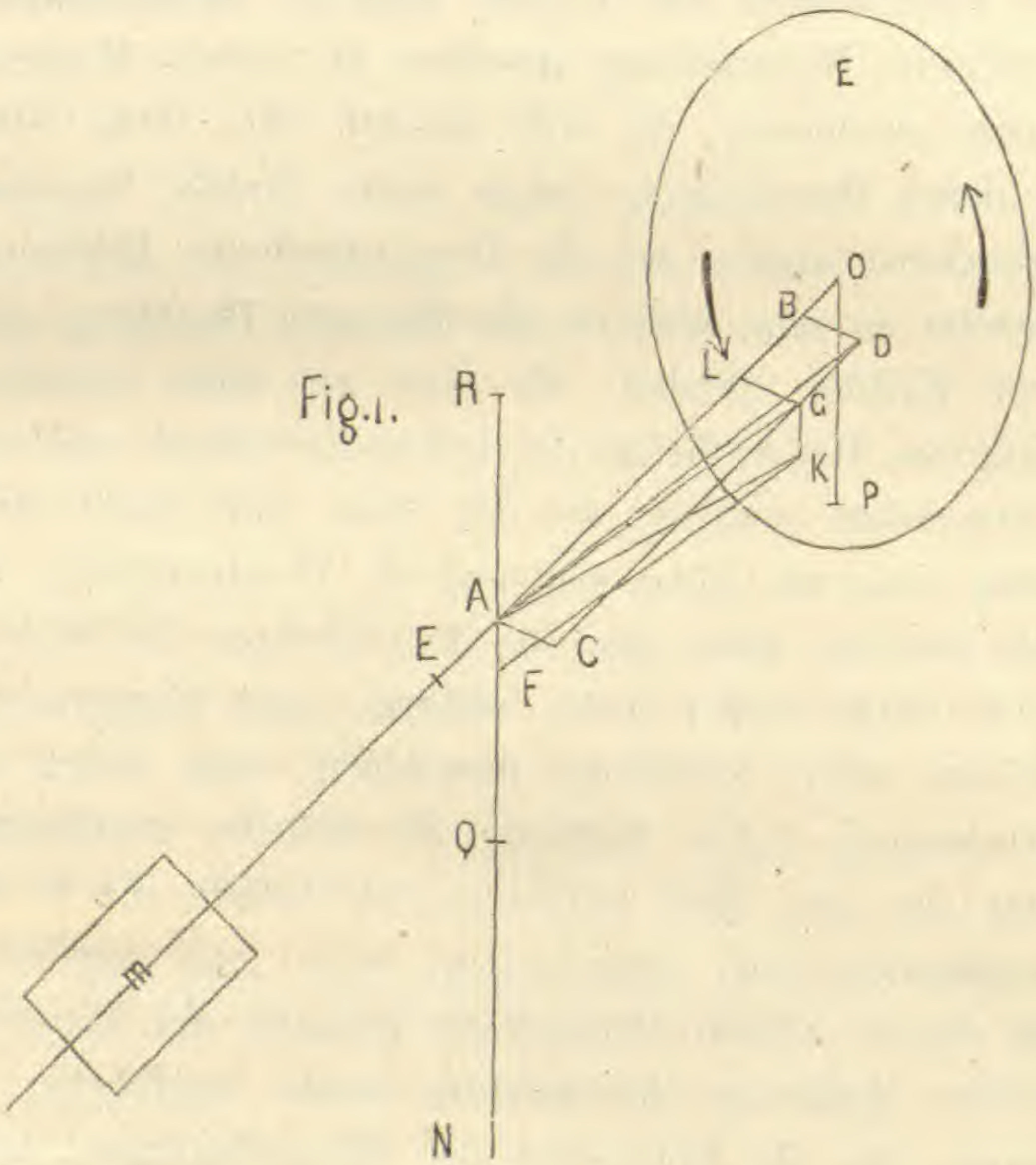

Fig. I.

Es sei OE Fig. I die Scheibe eines solchen Apparates, die sich in der Richtung der Pfeile dreht; AO deren Drehaxe; m ein verschiebbares Gegengewicht; die Axe AO lasse sich im Punkte A nach zwei Richtungen drehen, wovon die eine vertikal, die andere horizontal und senkrecht zu AO gerichtet ist.

Ich nehme zunächst an, das Gegengewicht m sei so befestigt, dass auf der Seite der Scheibe nur ein sehr kleines Uebergewicht besteht, welches durch die Lothrechte OP vorgestellt sein soll.

Die Wirkung dieses Uebergewichts auf die Vorrichtung lässt sich leicht beurtheilen, wenn man im Punkte A noch zwei Kräfte AR und AQ, jede gleich OP lothrecht und entgegengesetzt annimmt, deren Wirkungen sich demnach aufheben. Es bilden dann AR und OP ein Kräftepaar, welches den Apparat in der Ebene AOP um A zu drehen strebt, während die dritte Kraft AQ einen vertikalen Druck auf A gleich dem Uebergewicht OP veranlasst, welcher durch die Gegenwirkung der Axe AN aufgehoben wird.

Die für Rechtsdrehung positive Momentenaxe des Kräftepaares ist horizontal und senkrecht zu AO; ihre Grösse und Richtung soll durch AC gegeben sein. Wird die Scheibe in Rotation versetzt, so lässt sich ihr Drehungsmoment durch ein zweites Kräftepaar vorstellen, dessen positive Axe in AO liegt und dessen Moment gleich AB sein soll.

Nimmt man ferner an, die Axe AO werde erst in eine horizontale Lage gebracht und dann der Apparat angelassen, so dass nun auch das dem Uebergewichte OP entsprechende Kräftepaar sich äussern kann, so wird, wenn keine Reibung stattfindet, nach einem unendlich kleinen Zeittheil dt unter dem Gesammteinfluss der beiden Kräftepaare die Drehung der Scheibe um die resultirende Axe AD erfolgen, die sich der Länge und Richtung nach als Diagonale des Parallelogramms ergibt, welches durch die Momentenaxen AB und AC der beiden Kräftepaare bestimmt ist. Da die beiden Momentenaxen AB und AC horizontal sind, so muss auch ihre resultirende Axe AD horizontal sein; die Scheibe bewegt sich daher in der Weise, dass ihre Axe in einer horizontalen Ebene bleibt. Dabei sei bemerkt, dass diese Bewegung nur sehr klein sein wird, weil das Uebergewicht OP sehr klein vorausgesetzt ist.

Das Axenparallelogramm ist in dem vorliegenden Falle rechtwinkelig; AD ist daher grösser als AB. Es stellt aber

AD das Drehungsmoment der Scheibe vor, nachdem das Uebergewicht OP während der Zeit dt gewirkt hat. Die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe scheint demnach durch die Präcession grösser zu werden. War dieselbe anfänglich gleich AB, so ist sie nach Verlauf der Zeit dt gleich AD, sie hat somit um $d = AD - AB$ zugenommen, nun ist aber $AB = AD \cdot \cos BAD$, also $d = AD \cdot (1 - \cos BAD) = 2\, AD \cdot \sin^2 \frac{BOD}{2}$. Da die Präcession während einer endlichen Zeit selbst endlich ist, so muss dieselbe während der unendlich kleinen Zeit dt ebenfalls unendlich klein sein. Der Winkel BAD muss daher unendlich klein angenommen werden, dann ist aber $\sin^2 \frac{BAD}{2}$ und somit auch der Werth von d unendlich klein vom zweiten Grad. Während einer endlichen Zeit ändert sich also die Rotationsgeschwindigkeit unendlich oft, jede Aenderung ist aber unendlich klein vom zweiten Grad, die Summe aller Aenderungen ist daher gleich Null zu setzen, d. h. AD ist = AB oder die Rotationsgeschwindigkeit wird durch die Präcession nicht vermehrt.

Der Umstand, dass die Präcessionsbewegung in dem angenommenen Fall in einer horizontalen Ebene erfolgt, bringt es mit sich, dass wie AB so auch die Momentenaxe AC immer gleich bleibt. Bei gleichbleibenden Axen wird dann auch in gleichen Zeiten die Präcessionsbewegung von gleicher Grösse sein. In dem vorliegenden speziellen Fall erfolgt also die Präcession in einer horizontalen Ebene mit sehr kleiner aber constanter Winkelgeschwindigkeit und mit unveränderter Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe.

Von den drei Bedingungen, unter welchen die Erscheinung bisher betrachtet wurde, lassen sich diejenigen bezüglich des kleinen Uebergewichts und der horizontalen Axenlage sehr leicht erfüllen, die Reibung dagegen lässt sich niemals ganz vermeiden. Ihre Einwirkung soll deshalb nachträglich noch untersucht werden.

Die Scheibe erfährt in ihrer Axenlage und in der Luft Reibungswiderstände, die sich summiren, ihre Gesammtwirkung lässt sich durch ein Kräftepaar vorstellen, welches dem der rotirenden Scheibe entgegenwirkt, dessen Momentenaxe AE muss daher mit AB entgegengesetzt liegen. Ausserdem erleidet die vertikale Axe AN eine Reibung, die der Präcessionsbewegung entgegenwirkt und sich als ein Kräftepaar darstellen lässt, dessen positive Axe AF von A aus abwärts in AN biegt.

Wenn man aus den Momentenaxen AL = AB—AE und AC das Axenparallelogramm bildet, so stellt dessen Diagonale AG die Momentenaxe vor, um welche die Scheibe nach Verlauf der Zeit dt sich drehen wird, wenn die Reibung um die vertikale Axe AN noch unbeachtet bleibt. Vereinigt man die so gefundene resultirende Axe auch noch mit AF, so erhält man AK als Resultante für alle Kräfte, die sich an der Erscheinung betheiligen. Diese Resultante liegt nun in Folge der Reibung um die vertikale Axe AN nicht mehr horizontal, sie senkt sich allmählich, anfangs zwar nur sehr langsam, später aber immer rascher, weil die Axe AL = AB—AE immer kleiner wird, während AF sich nur wenig ändert.

Auch das Moment AC, welches von dem Kräftepaar des Uebergewichts herrührt, wird in Folge der Senkung der Scheibe immer kleiner. Es treten also durch die Reibung allmähliche Aenderungen an allen Kräften ein, die den Verlauf der Erscheinung verwickelt machen, und dessen noch nähere Beurtheilung so erschweren, dass jeder Versuch, mit elementaren Mitteln darin noch weiter zu gehen, wahrscheinlich erfolglos bleiben wird.

Ich will noch auf einen andern Versuch mit dem Fessel-schen Apparat aufmerksam machen, dessen Berücksichtigung für ein richtiges Verständniss der Präcession unbedingt nothwendig ist, der aber, so viel mir bekannt ist, bisher gleichwohl noch keine Beachtung gefunden hat.

Wird nämlich das Gegengewicht m auf der Axe so angebracht, dass die beiden Seiten des Apparates sich das Gleichgewicht halten, die Scheibe in rasche Rotation versetzt, und dann ein Stoss auf die Rotationsaxe geführt, senkrecht zu deren Richtung, so kommt der Apparat in eine derartige Bewegung, dass die Axe der Scheibe immer auf einer Kegelfläche mit kreisförmigem Querschnitt bleibt, dessen Spitze in A liegt. Diese eigenthümliche Erscheinung lässt sich, wie folgt, erklären.

Wenn die Scheibe nicht rotirte, dann würde die einmalige Wirkung des Stosses den Apparat zu einer Drehung um den Punkt A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω veranlassen, bei welcher die Axe der Scheibe in der Ebene E bliebe, die durch A und die Stossrichtung gegeben ist. Wenn aber die Scheibe gleichzeitig rotirt, so bleibt ihre Axe nicht in der Ebene E, sie weicht von derselben ab und zwar so, dass während eines unendlich kleinen Zeittheils dt nach dem Stosse die Axe der Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit ω ein unendlich kleines Flächenelement df beschreibt, das in einer Ebene E_1 liegt, die mit E einen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ bildet. Dass dabei die Winkelgeschwindigkeit ω durch die Rotation der Scheibe nicht geändert wird, ergibt sich aus ganz ähnlichen Betrachtungen wie der Beweis in I, dass die Präcession keinen Einfluss auf die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe äussert. Der Apparat beginnt also seine Bewegung in einem zweiten Zeittheil dt mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω und unveränderter Rotationsgeschwindigkeit. Seine Axe wird folglich während des zweiten Zeittheils wieder ein Flächenelement gleich df in einer Ebene E_2 erzeugen, die mit E_1 einen Winkel gleich $d\alpha$ bildet. Ganz dasselbe gilt nun auch für jeden folgenden Zeittheil, die Axe der Scheibe beschreibt daher in gleichen Zeiten gleiche Flächenelemente, von denen sich immer je zwei auf einander folgende unter gleichen Winkeln aneinander reihen; sie bewegt sich demnach mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kegel mit kreisförmigen Querschnitt, dessen Spitze in A liegt.

Die soeben besprochene Erscheinung kommt nun bei den gewöhnlichen Versuchen mit den Fessel'schen Apparat neben der in I besprochenen Präcessionsbewegung gleichzeitig zum Vorschein, sie ist zwar nur klein, macht sich aber bei grossem Uebergewicht doch bemerklich. Ihr Einfluss soll nun erörtert werden.

Die Grösse der konstanten seitlichen Bewegung des Apparates, lässt sich als die einmalige Wirkung eines Stosses in der Ebene der Präcession und senkrecht zur Axe der Scheibe betrachten. Ein solcher Stoss allein versetzt den Apparat in eine kegelförmige Bewegung, wenn die beiden Seiten desselben sich das Gleichgewicht halten. Ein Uebergewicht allein bringt den Apparat zur Präcession in einer Ebene. Wirken nun aber beide Ursachen gleichzeitig und dies ist der Fall, wenn man einen Versuch unter Anwendung eines bedeutenden Uebergewichts ausführt, so dass die Grösse der Bewegung der Präcession einen Stoss repräsentirt, der gross genug ist, um die kegelförmige Bewegung der Axe neben ihrer seitlichen bemerklich zu machen, so zeigt sich die Art der Bewegung in der Weise, dass jeder Punkt der Scheibenaxe einen kleinen Kreis beschreibt, während dessen Mittelpunkt sich auf einem Kreis um den Punkt A bewegt.

II.

Eine der interessantesten, durch die Reibung wesentlich modificirten Präcessionsbewegung zeigen die allbekannten, tanzenden Kreisel.

Es gibt meines Wissens nach keine Erklärung derselben, bei welcher der bedeutende Einfluss der Reibung Beachtung gefunden hätte. Ich will daher eine solche hier folgen lassen.

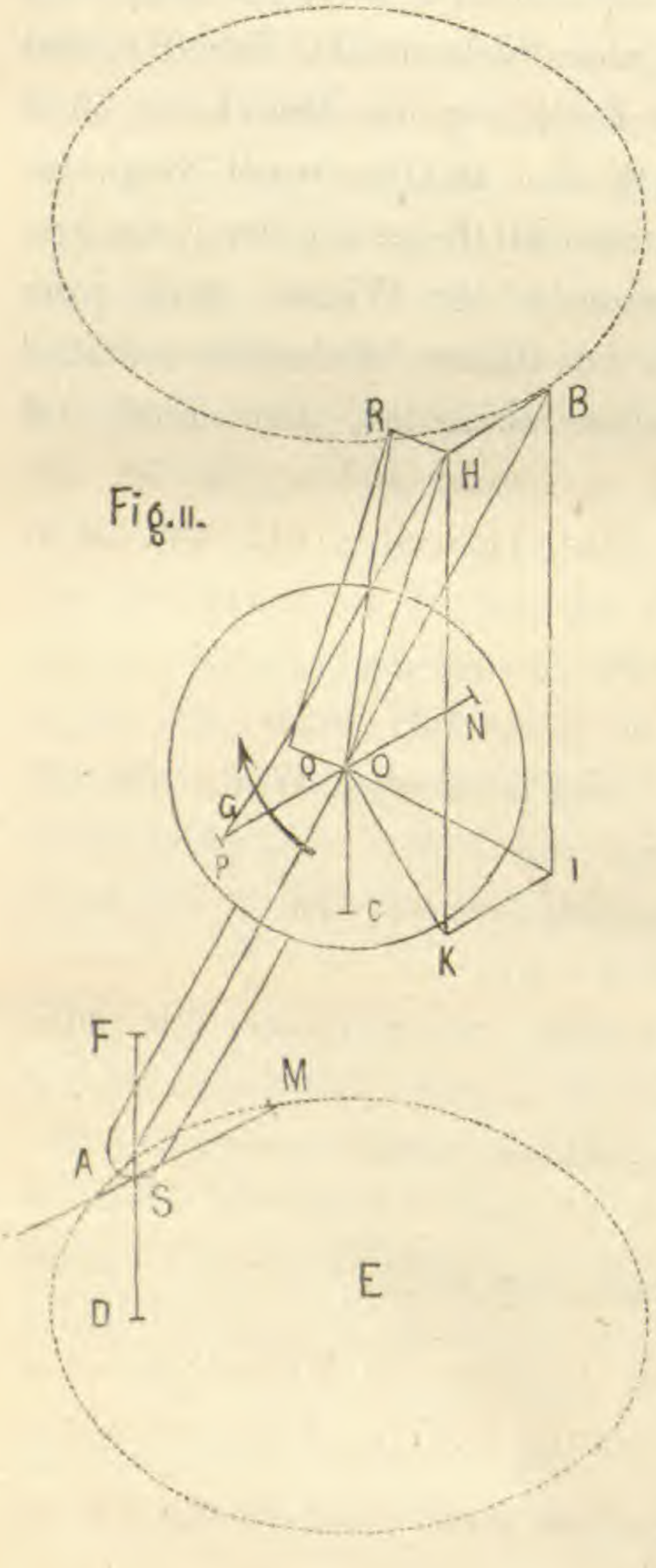

Fig. II.

Es sei Fig. II ein Kreisel, welcher in der Richtung des Pfeiles auf einer horizontalen Ebene rotirt. Seine Axe AB sei gegen die Ebene E geneigt. Ist O sein Schwerpunkt, stellt die Vertikale OC sein Gewicht vor, sind AD und AF im Berührungspunkte der Axe und der Ebene zwei vertikale entgegengesetzte Kräfte, jede gleich OC, die sich also das Gleichgewicht halten, so ergibt sich die Wirkung der Schwere auf den Kreisel als eine auf die Ebene drückende Kraft AD und ein Kräftepaar AFOC, welches den Kreisel um eine horizontal und senkrecht zu AB gerichtete Gerade zu drehen strebt. Die positive Momentenaxe desselben soll OG sein. Das Drehungsmoment des rotirenden Kreisels lässt sich durch ein Kräftepaar darstellen, dessen positive Momentenaxe in AB liegt, dessen Grösse gleich OB sein soll.

Unter dem Einflusse dieser beiden Kräftepaare wird nach einem unendlich kleinen Zeittheil dt der Kreisel sich derartig drehen, dass seine Momentenaxe der Diagonale OH des Parallelogramms entspricht, welches durch die Richtung und Grösse der beiden Momentenaxen OB und OG bestimmt ist. Die Drehung, welche anfänglich um OB vor sich ging, erfolgt nun um OH. Die Aenderung, welche die Lage der Axe dadurch erlitten hat, ist noch zu untersuchen.

Zieht man von B und H aus die Lothe BJ und HK und durch O die Horizontalen OJ und OK, welche die Lothe in J und K schneiden, dann ist der Winkel $BOJ = \alpha$ der Neigungswinkel der Axe AB und der Winkel $HOK = \alpha_1$ der Neigungswinkel von HO gegen den Horizont; der Winkel BOH, um welchen die Axe ihre Richtung im Raume ändert, sei mit β bezeichnet. OJ, OK und OG sind horizontal, also auch JK und BH und weil BJ und HK lothrecht stehen, so ist das Viereck BHKJ ein Rechteck. Das Dreieck OBH ist bei B rechtwinkelig, folglich ist

$$OB = OH \,.\, \cos\beta, \text{ ferner ist}$$

$$BJ = HK = OB \,.\, \sin\alpha = OH \,.\, \sin\alpha_1$$

Wenn man aus der ersten Gleichung den Werth für OB in die letzte einsetzt, so findet sich

$$OH \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\alpha = OH \,.\, \sin\alpha_1 \text{ oder}$$

$$\cos\beta \,.\, \sin\alpha = \sin\alpha_1$$

Subtrahirt man von den beiden Seiten dieser Gleichung $\sin\alpha$, so erhält man

$$\cos\beta \,.\, \sin\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha_1 - \sin\alpha \text{ oder}$$

$$\sin\alpha - \sin\alpha_1 = \sin\alpha \,.\, (1 - \cos\beta)$$

$$= 2 \,.\, \sin\alpha \sin^2\frac{\beta}{2}$$

Der Winkel β, um welchen die Axe des Kreisels in einer unendlich kleinen Zeit seine Richtung ändert, muss unendlich klein sein, es ist daher $\sin^2\frac{\beta}{2}$ und somit auch $\sin\alpha - \sin\alpha_1$

unendlich klein vom zweiten Grad, dann ist aber auch der Unterschied der beiden Neigungswinkel $\alpha - \alpha_1$ unendlich klein vom zweiten Grad; für eine endliche Zeit ist daher die Differenz $\alpha - \alpha_1$ gleich Null zu nehmen.

In Folge der unveränderten Neigung des Kreisels bleibt die Wirkung der Schwere auf denselben gleich und wenn zunächst noch keine Reibung berücksichtigt wird, so bleiben die Präcessionsbedingungen gleich, folglich auch die Präcession selbst. Die Axe des Kreisels bewegt sich daher mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und mit unveränderter Neigung, sie beschreibt also einen senkrechten Kegel mit kreisförmigem Querschnitt, dessen Spitze im Schwerpunkt O des Kreisels liegt.

Dieses Resultat findet eine schöne Bestätigung, wenn man einen gut centrirten Kreisel, dessen Axe unten zugespitzt ist, auf einer ebenen Glasfläche rotiren lässt.

Ganz anders verhält sich die Sache, wenn der Kreisel mit einer unten abgerundeten Axe in schiefer Stellung auf einer horizontalen Ebene rotirt, dann kommen während jeder Drehung desselben verschiedene Punkte der Axenabrundung, die zusammen einen kleinen Kreis bilden, welcher senkrecht auf AB steht, mit der Ebene E in Berührung. Diese Punkte gleiten dann auf der Ebene unter einem Druck, der dem Gewichte des Kreisels gleich ist und erzeugen dadurch eine beträchtliche Reibung, deren Einfluss auf die Präcessionsbewegung jetzt noch ermittelt werden soll.

Die Reibung, welche der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt, sei durch SM vorgestellt. Werden im Schwerpunkte O des Kreisels noch zwei entgegengesetzte Kräfte ON und OP angenommen, die beide mit SM gleich und parallel sind, und sich daher das Gleichgewicht halten, so erhält man statt der Reibung eine Kraft ON und ein Kräftepaar SMOP. Die Kraft ON zieht nun den Kreisel fort in einer Richtung, senkrecht zur Ebene seines Neigungswinkels, das Kräftepaar dagegen ändert die Drehrichtung desselben. Dieses dritte Kräftepaar, das zu den schon besprochenen beiden ersten noch hinzu kommt, liegt in einer Ebene, die senkrecht steht auf der Neigungsebene JOS des Kreisels, seine positive Momentenaxe liegt daher in JOS. Dieselbe sei durch OQ gegeben, die Momentenaxe für die Drehung des Kreisels unter Berücksichtigung der Reibung ergibt sich daher als die Diagonale OR des Parallelogramms aus den Momentenaxen OQ und OH. Der Kreisel, welcher anfangs unter dem Neigungswinkel BOJ oder HOK rotirte, hat nun den grösseren Neigungswinkel ROK, seine Axe wird also unter dem Einflusse der Reibung allmählich aufgerichtet.

Während nun die Kraft OP den Kreisel fortzieht, hebt sich die Axe desselben und beschreibt durch die Wirkung des Kräftepaars der Reibung einen Kegel, der immer spitziger wird und endlich in eine lothrechte Linie übergeht, wenn nur die anfängliche Rotationsgeschwindigkeit gross genug war. In Folge dessen wird der Kreis auf der abgerundeten Axe, auf dem die Punkte liegen, welche bei jeder Drehung die Ebene E berühren, immer kleiner, dadurch wird auch die Wirkung der Kraft OP immer kleiner und endlich gleich Null werden. Beachtet man auch noch, dass OP beständig in demselben Sinne seine Richtung ändert, so ist einleuchtend, dass der Kreisel sich auf einer Spirale bewegen muss, die allmählich auf einen Punkt zurückgeht, während seine Axe sich bis zur lothrechten Stellung erhebt.

Bemerken will ich noch, dass so lange der Kreisel auf der Spirale läuft, die dadurch bedingte Centrifugalkraft in Verbindung mit der Reibung auf der Ebene E noch ein viertes Kräftepaar liefert, welches mit dem ersten, durch die Schwere veranlassten, in einer Ebene liegt und diesem entgegengesetzt wirkt, das ich aber nicht beachtet habe, weil es die ganze Erscheinung nur etwas verzögert, nicht wesentlich ändert.

Schliesslich will ich dieser weitläufigen Erklärung der Kreiselbewegung die kürzeste folgen lassen, sie lautet: Der Kreisel richtet sich auf, weil er in lothrechter Stellung bei geringstem Widerstande sich drehen kann. Diese Erklärung setzt aber das Princip der kleinsten Wirkung voraus.