Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung der Königl. Ges. d. Wiss. am 2. Juli 1887.

II. Untersuchung des elastischen Verhaltens eines Cylinders aus krystallinischer Substanz, auf dessen Mantelfläche keine Kräfte wirken, wenn die in seinem Innern wirkenden Spannungen längs der Cylinderaxe constant sind.

Von dem in der Ueberschrift genannten Problem, welches nicht nur theoretisches Interesse sondern auch practische Wichtigkeit besitzt, insofern seine Lösung die Theorie gewisser Beobachtungsmethoden über Krystallelasticität liefert, habe ich schon wiederholt specielle Fälle durchgeführt[1]; hier beabsichtige ich dasselbe in grösster Allgemeinheit zu behandeln und eine Anzahl Sätze abzuleiten, die jene früheren Resultate umfassen und ihnen die richtige Stelle in der gesammten Theorie anweisen.

Ich werde im Folgenden geben: 1) die allgemeinen Eigenschaften der elastischen Kräfte und Verschiebungen in einem cylindrischen Körper, der den oben gestellten Bedingungen genügt, 2) die speciellen Gesetze der Deformationen, welche der Längsdehnung und gleichförmigen Biegung, 3) diejenigen, welche der gleichförmigen Drillung entsprechen.

1) Damit in einem prismatischen oder cylindrischen Körper, dessen

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 16 p. 273, 398 u. 416, 1882 und Bd. 19 p. 604, 1886.

Längsaxe wir zur Z-Axe wählen, die inneren Spannkräfte von z unabhängig sind, müssen die auf die Grundflächen wirkenden äussern Kräfte gewisse Eigenschaften haben, welche abzuleiten die erste Aufgabe dieses Abschnittes ist.

Die Hauptgleichungen werden, wenn X_x Y_y . . . sämmtlich von z unabhängig sind:

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y}, \qquad 0 = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y}, \qquad 0 = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y},$$

die Bedingungen für die freien Seitenflächen:

$$(2) \qquad \begin{gathered} 0 = \overline{X}_x \cos(n,x) + \overline{X}_y \cos(n,y), \qquad 0 = \overline{Y}_x \cos(n,x) + \overline{Y}_y \cos(n,y), \\ 0 = \overline{Z}_x \cos(n,x) + \overline{Z}_y \cos(n,y); \end{gathered}$$

für die Grundflächen gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^0 &= \int X_z\,dq, & \mathrm{B}^0 &= \int Y_z\,dq, & \Gamma^0 &= \int Z_z\,dq, \\ \mathrm{A} &= -\int X_z\,dq, & \mathrm{B} &= -\int Y_z\,dq, & \Gamma &= -\int Z_z\,dq, \\ \Lambda^0 &= \int y Z_z\,dq, & \mathrm{M}^0 &= \int x Z_z\,dq, & \mathrm{N}^0 &= \int (xY_z - yX_z)\,dq, \\ \Lambda &= -\int y Z_z\,dq - \mathrm{B}l, & \mathrm{M} &= -\int x Z_z\,dq - \mathrm{A}l, & \mathrm{N} &= -\int (xY_z - yX_z)\,dq, \end{aligned}$$

und ausserdem aus allgemein statischen Gründen:

$$\mathrm{A}^0 + \mathrm{A} = \mathrm{B}^0 + \mathrm{B} = \Gamma^0 + \Gamma = \Lambda^0 + \Lambda = \mathrm{M}^0 + \mathrm{M} = \mathrm{N}^0 + \mathrm{N} = 0.$$

Hierin bedeuten A^0, B^0, Γ^0, Λ^0, M^0, N^0 die Componenten und Momente der äussern Kräfte für die Grundfläche $z = 0$, A, B, Γ, Λ, M, N für die Fläche $z = l$. Die Drehungsmomente um die X- und Y-Axe sind hier und im Folgenden der Symmetrie halber übereinstimmend positiv gerechnet, wenn sie von der $+Y$- resp. $+X$-Axe her nach der $+Z$-Axe drehend wirken.

Da nun aber X_x . . . von z unabhängig sein soll, so folgt nothwendig:

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{A} = \mathrm{B}^0 = \mathrm{B} = 0,$$

also kann der verlangte Zustand nur eintreten, wenn auf die Grundflächen ausschliesslich Druckkräfte parallel der Längsaxe oder beliebige Drehungsmomente ausgeübt werden. Dies wollen wir voraussetzen. Die Bedingungen für die Grundflächen schreiben sich nun einfacher als für jedes z gültig:

$$\begin{aligned}&\int X_z\,dq = 0, \qquad \int Y_z\,dq = 0, \qquad -\int Z_z\,dq = \Gamma,\\ -&\int yZ_z\,dq = \Lambda, \qquad -\int xZ_z\,dq = \mathrm{M}, \qquad -\int (xY_z - yX_z)\,dq = \mathrm{N}.\end{aligned} \tag{3}$$

Für unsern Fall gelten noch einige bemerkenswerthe Sätze über die elastischen Kräfte.

Man hat identisch:

$$\int X_x dq = \int dy\left(\left|xX_x\right|_{x_0}^{x_1} - \int x\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)$$

oder nach der ersten Hauptgleichung

$$= \int dy\left|xX_x\right|_{x_0}^{x_1} + \int x\,dx\int dy\frac{\partial X_y}{\partial y} = \int dy\left|xX_x\right|_{x_0}^{x_1} + \int x\,dx\left|X_y\right|_{y_0}^{y_1}$$

$$= \int x\,ds\,(\overline{X}_x\cos(n,x) + \overline{X}_y\cos(n,y)),$$

also nach der ersten Randbedingung:

$$\int X_x dq = 0 \text{ ebenso } \int X_y dq = \int Y_y dq = 0,$$

aber auch

$$\begin{aligned}\int xX_x dq = \int xX_y dq = \int xY_y dq = 0\\ \int yX_x dq = \int yX_y dq = \int yY_y dq = 0.\end{aligned} \tag{4'}$$

Dass $\int Z_x dq = \int Z_y dq = 0$ ist, ist bereits in (3) ausgesprochen. Man findet weiter auch:

$$\int xZ_x dq = \int yZ_y dq = 0,$$

aber abweichend:

$$\int yZ_x dq = -\int xZ_y dq \tag{4''}$$

und also nach (3) beide

$$= \frac{\mathrm{N}}{2}.$$

Die Druckkräfte $X_x\ldots$ sind lineäre Functionen der sechs Argumente

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x},\; y_y = \frac{\partial v}{\partial y},\; z_z = \frac{\partial w}{\partial z},\; y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\; z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\; x_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

deren Coefficienten Functionen der Elasticitätsconstanten sind. Damit ganz allgemein die Druckkräfte von z unabhängig sind, muss dasselbe für diese sechs Argumente, welche die Dilatationen und Schiebungen im Innern des cylindrischen Körpers darstellen, stattfinden. Dies erfordert für w jedenfalls einen Ausdruck, der in z lineär ist, und für

w und v, wie man leicht erkennt, dergleichen zweiten Grades. Wir setzen demgemäss:

$$(5)\qquad u = U + zU_1 + \frac{z^2}{2}U_2, \qquad v = V + zV_1 + \frac{z^2}{2}V_2, \qquad w = W + zW_1,$$

und bestimmen nun die U, V, W, welche nur Functionen von x und y sind so, dass die $x_x \ldots$ sämmtlich von z frei werden. Wir haben:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + z\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial V_2}{\partial y}, \quad z_z = W_1 \\ y_z &= \left(V_1 + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + z\left(V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial y}\right), \quad z_x = \left(U_1 + \frac{\partial W}{\partial x}\right) + z\left(U_2 + \frac{\partial W_1}{\partial x}\right), \\ x_y &= \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Es muss daher sein:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0, \quad V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial y} = 0, \quad U_2 + \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0$$

Aus dem letzten Gleichungspaar folgt:

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

und dies giebt mit dem vorhergehenden Tripel, dass U_2 und V_2 Constanten sein müssen; wir setzen:

$$(7)\qquad U_2 = -g_1 \qquad V_2 = -g_2.$$

Das letzte Paar ergiebt hiernach:

$$(8)\qquad W_1 = g_1 x + g_2 y + g_3.$$

Die drei ersten Gleichungen lassen für U_1 und V_1 nur lineäre Functionen von y resp. x zu; wir setzen

$$(9)\qquad U_1 = f_1 - hy \qquad V_1 = f_2 + hx.$$

Weiteres ergeben die Bedingungen der Befestigung, welche die Lage des Coordinatensystems gegen den Cylinder fixiren.

Es sei der Coordinatenanfang festgehalten, also gelte für

$$x = y = z = 0 \ : \ u = v = w = 0:$$

ferner werde das ihm anliegende Raumelement nicht um die Z-Axe gedreht, also sei daselbst ferner:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Endlich sei der Punkt des letzten Querschnittes, welcher anfänglich in die Z-Axe fiel, gezwungen auf der Z-Axe zu bleiben, d. h. es gelte für

$$x = y = 0, \quad z = l \ : \ u = v = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben, wenn man mit dem Index $^{\circ}$ den auf $x = y = 0$ bezogenen Werth bezeichnet:

$$U^{\circ} = V^{\circ} = W^{\circ} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{\circ} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\circ}, \tag{10}$$

ausserdem

$$f_1 = g_1 \frac{l}{2}, \quad f_2 = g_2 \frac{l}{2}.$$

Hiernach werden unsere Resultate (5):

$$\begin{aligned} u &= U + z\left(g_1 \frac{l-z}{2} - hy\right) \\ v &= V + z\left(g_2 \frac{l-z}{2} + hx\right) \\ w &= W + z(g_1 x + g_2 y + g_3) \end{aligned} \tag{11}$$

worin U, V, W nur x und y enthalten und den Bedingungen (10) entsprechen.

Dies ist das allgemeinste System Verrückungen, welches längs der Z-Axe constante Deformationen und Druckcomponenten ergiebt; für einen Cylinder, der so lang gegen seine Querdimensionen ist, dass im grössten Theil seiner Länge die Art der Vertheilung der von aussen auf die Grundflächen ausgeübten Kräfte ohne Einfluss ist, stellen sie dann zugleich die allgemeinsten Vorrückungen dar, welche unter ausschliesslicher Einwirkung von Kräften parallel der Längsaxe und von Drehungsmomenten auf die Grundflächen zu Stande kommen.

Die durch (11) dargestellten Verschiebungen u, v, w zerfallen nach den Formeln in zwei Theile: U, V, W, als von z unabhängig, geben Verrückungen, die allen Querschnitten in gleicher Weise zu Theil werden, die folgenden Glieder solche, die mit dem Querschnitt wechseln.

U und V bestimmen die Verschiebung der Theilchen in der Ebene der Querschnitte und daher auch die Deformation ihrer Grenzcurve, W giebt die Faltung oder Krümmung des zuvor ebenen Querschnittes; beide finden also für alle Querschnitte desselben Prismas nach demselben Gesetz statt.

Die zu U, V, W hinzutretenden Aggregate bedeuten Verschiebungen der Querschnitte, welche nicht von Deformationen derselben begleitet sind. Die in g_1 und g_2 multiplicirten Glieder ergeben, dass die Querschnitte nach der Deformation normal zu einem Kreisbogen stehen, in welchem die Theile angeordnet sind, die sich anfangs in der Z-Axe befanden; die Projectionen desselben auf die XZ- und YZ-Ebene haben die Gleichungen

(12) $$u = g_1 z \frac{l-z}{2}, \quad v = g_2 z \frac{l-z}{2}$$

und besitzen also Radien ρ_1 und ρ_2, die bestimmt sind durch

(12') $$1/\rho_1 = g_1, \quad 1/\rho_2 = g_2;$$

g_1 und g_2 messen hiernach die Biegung in der XZ- und YZ-Ebene.

Das in w auftretende Glied $g_3 z$ giebt eine Verschiebung aller Querschnitte parallel mit sich längs der Z-Axe, und bleibt für $x = y = 0$ allein übrig; g_3 misst also die Längsdilatation in der Z-Axe.

Die in h multiplicirten Glieder endlich bedeuten eine Drehung der einzelnen Querschnitte um die Z-Axe; denn der bezügliche Drehungswinkel ist an der Stelle x, y, z

(13) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + hz.$$

die Drehung τ gegen die Stelle x, y, 0 des ersten Querschnitts ist also constant für jeden Querschnitt:

(13') $$\tau = hz;$$

h als die gegenseitige Drehung (τ_1) zweier um die Länge 1 parallel der Z-Axe von einander abstehender Querschnitte misst die Grösse der Drillung.

Die vier hierdurch definirten Constanten g_1, g_2, g_3 und h lassen sich bis zu einem gewissen Grade völlig allgemein bestimmen.

Nach der Grunddefinition der elastischen Druckkräfte gilt für jedes krystallinische Medium und eine beliebige Orientirung der Coordinaten- gegen die Krystallaxen:

$$-X_x = D_{11}x_x + D_{12}y_y + D_{13}z_z + D_{14}y_z + D_{15}z_x + D_{16}x_y \tag{14}$$

u. s. f., worin die Constanten D_{hk} Functionen der Hauptelasticitätsconstanten und der Lage des Coordinatensystems gegen den Krystall sind. Die Auflösung dieser Gleichungen nach $x_x \ldots$ giebt, falls man S die Determinante des Systems und S_{hk} den Coefficienten des $h$ten Elementes der $k$ten Reihe nennt und kurz

$$S_{hk}/S = s_{hk}$$

setzt:

$$-x_x = s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y \tag{15}$$

u. s. f.

Das Einsetzen der gefundenen Werthe (11) lässt dies werden zu:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x} &= s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y\,,\\
-\frac{\partial V}{\partial y} &= s_{21}X_x + s_{22}Y_y + s_{23}Z_z + s_{24}Y_z + s_{25}Z_x + s_{26}X_y\,,\\
-(g_1x + g_2y + g_3) &= s_{31}X_x + s_{32}Y_y + s_{33}Z_z + s_{34}Y_z + s_{35}Z_x + s_{36}X_y\,,\\
-\left[\left(g_2\frac{l}{2} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + hx\right] &= s_{41}X_x + s_{42}Y_y + s_{43}Z_z + s_{44}Y_z + s_{45}Z_x + s_{46}X_y\,,\\
-\left[\left(g_1\frac{l}{2} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) - hy\right] &= s_{51}X_x + s_{52}Y_y + s_{53}Z_z + s_{54}Y_x + s_{55}Z_x + s_{56}X_y\,,\\
-\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) &= s_{61}X_x + s_{62}Y_y + s_{63}Z_z + s_{64}Y_z + s_{65}Z_x + s_{66}X_y.
\end{aligned} \tag{16}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dq und integrirt sie über den ganzen Querschnitt Q, so erhält man in Rücksicht auf (3) und (4):

$$\int\frac{\partial U}{\partial x}dq = s_{13}\Gamma, \quad \int\frac{\partial V}{\partial y}dq = s_{23}\Gamma, \quad (g_1\xi + g_2\eta + g_3)Q = s_{33}\Gamma, \tag{17}$$

$$\left(g_2\frac{l}{2}+h\xi\right)Q+\int\frac{\partial W}{\partial y}dq = s_{43}\Gamma, \; \left(g_1\frac{l}{2}-h\eta\right)Q+\int\frac{\partial W}{\partial x}dq = s_{53}\Gamma, \; \int\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)dq = s_{63}\Gamma.$$

Hierin bezeichnet ξ und η die X- und Y-Coordinate des Schwerpunktes des Querschnitts Q.

Multiplicirt man die Gleichungen (16) mit $x\,dq$ und $y\,dq$ und integrirt, so erhält man ähnliche Resultate:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} x\,dq = s_{13}\,\mathrm{M} + s_{14}\frac{\mathrm{N}}{2}, \qquad \int \frac{\partial U}{\partial x} y\,dq = s_{13}\Lambda - s_{15}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial y} x\,dq = s_{23}\,\mathrm{M} + s_{24}\frac{\mathrm{N}}{2}, \qquad \int \frac{\partial V}{\partial y} y\,dq = s_{23}\Lambda - s_{25}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$(g_1\varkappa_y^2 + g_2\lambda^2 + g_3\xi)\,Q = s_{33}\,\mathrm{M} + s_{34}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$(g_1\lambda^2 + g_2\varkappa_x^2 + g_3\eta)\,Q = s_{33}\Lambda - s_{35}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$\text{(18)}\qquad \left(g_2\frac{l\xi}{2} + h\varkappa_y^2\right)Q + \int \frac{\partial W}{\partial y} x\,dq = s_{43}\,\mathrm{M} + s_{44}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$\left(g_2\frac{l\eta}{2} + h\lambda^2\right)Q + \int \frac{\partial W}{\partial y} y\,dq = s_{43}\Lambda - s_{45}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$\left(g_1\frac{l\xi}{2} - h\lambda^2\right)Q + \int \frac{\partial W}{\partial x} x\,dq = s_{53}\,\mathrm{M} + s_{54}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$\left(g_2\frac{l\eta}{2} - h\varkappa_x^2\right)Q + \int \frac{\partial W}{\partial x} y\,dq = s_{53}\Lambda - s_{55}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)x\,dq = s_{63}\,\mathrm{M} + s_{64}\frac{\mathrm{N}}{2}, \qquad \int\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)y\,dq = s_{63}\Lambda - s_{65}\frac{\mathrm{N}}{2}.$$

Hierin ist gesetzt:

$$\int x^2\,dq = Q\varkappa_y^2, \qquad \int y^2\,dq = Q\varkappa_x^2, \qquad \int xy\,dq = Q\lambda^2.$$

Die vorstehenden Gleichungen bieten die allgemeinsten Relationen, welche die Functionen U, V, W mit den ausgeübten Kräften Γ, Λ, M, N verbinden. Sie zeigen zunächst, dass g_1, g_2, g_3 mit aller Strenge und ganz allgemein für jeden Querschnitt angebbar ist, denn aus:

$$(g_1\xi + g_2\eta + g_3)\,Q = s_{33}\Gamma,$$

$$(g_1\varkappa_y^2 + g_2\lambda^2 + g_3\xi)\,Q = s_{33}\,\mathrm{M} + s_{34}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

$$(g_1\lambda^2 + g_2\varkappa_x^2 + g_3\eta)\,Q = s_{33}\Lambda - s_{35}\frac{\mathrm{N}}{2},$$

folgt:

$$g_1\Sigma Q = \Gamma s_{33}(\eta\lambda^2 - \xi\varkappa_x^2) + \left(s_{33}\mathrm{M} + s_{34}\frac{\mathrm{N}}{2}\right)(\varkappa_x^2 - \eta^2) + \left(s_{33}\Lambda - s_{35}\frac{\mathrm{N}}{2}\right)(\eta\xi - \lambda^2),$$

$$\text{(19)}\qquad g_2\Sigma Q = \Gamma s_{33}(\xi\lambda^2 - \eta\varkappa_y^2) + \left(s_{33}\mathrm{M} + s_{34}\frac{\mathrm{N}}{2}\right)(\xi\eta - \lambda^2) + \left(s_{33}\Lambda - s_{35}\frac{\mathrm{N}}{2}\right)(\varkappa_y^2 - \xi^2),$$

$$g_3\Sigma Q = \Gamma s_{33}(\varkappa_x^2\varkappa_y^2 - \lambda^4) + \left(s_{33}\mathrm{M} + s_{34}\frac{\mathrm{N}}{2}\right)(\eta\lambda^2 - \xi\varkappa_x^2) + \left(s_{33}\Lambda - s_{35}\frac{\mathrm{N}}{2}\right)(\xi\lambda^2 - \eta\varkappa_y^2);$$

hierin bedeutet

$$\Sigma = \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ \xi & \varkappa_y^2 & \lambda^2 \\ \eta & \lambda^2 & \varkappa_x^2 \end{vmatrix} = (\varkappa_x^2 - \eta^2)(\varkappa_y^2 - \xi^2) - (\lambda^2 - \xi\eta)^2. \tag{19'}$$

Da das Coordinatensystem X, Y, Z in seiner Lage gegen den Krystall ganz beliebig gelassen worden ist, so ist es keine Beschränkung, die X- und Y-Axe den Hauptträgheitsaxen des Querschnitts in Bezug auf dessen Schwerpunkt parallel zu legen. Die Lage des Coordinatenanfangs, der als Befestigungspunkt eine physikalische Bedeutung besitzt, bleibt dabei völlig willkürlich.

Führt man das System der Hauptträgheitsaxen durch den Schwerpunkt als X^0, Y^0 ein, so ist:

$$x = \xi + x^0, \quad y = \eta + y^0$$
$$\varkappa_y^2 = \xi^2 + \varkappa_y^{02}, \quad \varkappa_x^2 = \eta^2 + \varkappa_x^{02}, \quad \lambda^2 = \xi\eta + \lambda^{02}, \tag{20'}$$

worin λ^0 nach der Annahme gleich Null ist.

Hiernach werden die Gleichungen (19) sehr einfach:

$$\begin{aligned} g_1 Q \varkappa_y^{02} &= -\Gamma\xi s_{33} + \mathrm{M} s_{33} + \frac{\mathrm{N}}{2} s_{34}, \\ g_2 Q \varkappa_x^{02} &= -\Gamma\eta s_{33} + \Lambda s_{33} - \frac{\mathrm{N}}{2} s_{35}, \\ g_3 Q \varkappa_x^{02} \varkappa_y^{02} &= \Gamma(\varkappa_x^{02}\varkappa_y^{02} + \xi^2\varkappa_x^{02} + \eta^2\varkappa_y^{02}) s_{33} - (\mathrm{M} s_{33} + \frac{\mathrm{N}}{2} s_{34})\xi\varkappa_x^{02} - (\Lambda s_{33} - \frac{\mathrm{N}}{2} s_{35})\eta\varkappa_y^{02}. \end{aligned} \tag{20}$$

In dem speciellen Falle, dass der Coordinatenanfang im Schwerpunkt des Querschnittes liegt, ist $\xi = \eta = 0$ und man hat noch einfacher:

$$\begin{aligned} g_1 Q \varkappa_y^{02} &= s_{33}\mathrm{M} + s_{34}\frac{\mathrm{N}}{2}, \\ g_2 Q \varkappa_x^{02} &= s_{33}\Lambda - s_{35}\frac{\mathrm{N}}{2}, \\ g_3 Q &= s_{33}\Gamma. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Constante h ist nicht allgemein vollständig bestimmt, sie steht vielmehr in sechs Gleichungen mit der Function W in Verbindung, welche die Faltung des Querschnitts des Cylinders angiebt und von der Gestalt des Querschnitts abhängig ist. Für $\xi = \eta = \lambda = 0$ erhält man sie nur in den beiden Gleichungen:

$$(21')\quad \begin{aligned} hQ\varkappa_y^2+\int\frac{\partial W}{\partial y}x\,dq &= s_{43}\mathrm{M}+s_{44}\frac{\mathrm{N}}{2}, \\ -hQ\varkappa_x^2+\int\frac{\partial W}{\partial x}y\,dq &= s_{53}\Lambda-s_{55}\frac{\mathrm{N}}{2}. \end{aligned}$$

Sie, wie auch die allgemeinen zeigen deutlich, dass die Constante h, welche die eintretende Torsion misst, keineswegs mit dem Drehungsmoment um die Längsaxe N verschwindet, dass also eine solche Drillung, sowohl bei einer Längsdilatation durch Zugkräfte, als bei einer Biegung durch Drehungsmomente um Axen, welche in den Endquerschnitten liegen, bei krystallinischen Medien der Regel nach eintritt.

Umgekehrt zeigen die Formeln (19) und (20), dass im Allgemeinen die Biegungen in der XZ- und YZ-Ebene keineswegs mit den biegenden Momenten M und Λ verschwinden, sondern sowohl ein Moment um die Längsaxe N, als auch eine Zugkraft parallel derselben Γ eine Biegung verursachen können.

Die Formeln (17) und (18) bringen die Deformationen in Verbindung mit den auf die Grundflächen ausgeübten Kräften und Momenten ausschliesslich mittelst derjenigen Aggregate der Elasticitätsconstanten, welche wir mit s_{hk} bezeichnet haben: nämlich den Partialdeterminanten S_{hk} der Coefficienten des Systemes (14) dividirt durch deren Gesammtdeterminante S.

Diese Grössen s_{hk} in den eigentlichen oder Hauptelasticitätsconstanten Δ_{hk} der Substanz, welche in dem System (14) auftreten würden, wenn man die Coordinatenaxen in die krystallographischen Hauptaxen Ξ, H, Z legte, auszudrücken habe ich früher bereits das Mittel angegeben [1]).

Es sei das System der oben benutzten Coordinatenaxen X, Y, Z in seiner Lage gegen das Hauptaxensystem Ξ, H, Z definirt durch:

$$\begin{aligned} x &= \xi\alpha_1+\eta\beta_1+\zeta\gamma_1, \\ y &= \xi\alpha_2+\eta\beta_2+\zeta\gamma_2, \\ z &= \xi\alpha_3+\eta\beta_3+\zeta\gamma_3, \end{aligned}$$

dann gelten zwischen den Deformationsgrössen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y bezogen auf X, Y, Z und ξ_ξ, η_η, ζ_ζ, η_ζ, ζ_ξ, ξ_η bezogen auf Ξ, H, Z

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 16, p. 398. 1882.

sechs lineäre Gleichungen; die Coefficienten von ξ_ξ, η_η ..... in den Formeln für x_x, y_y ..... sind gegeben durch das Schema:

	ξ_ξ	η_η	ζ_ζ	η_ζ	ζ_ξ	ξ_η		
x_x	α_1^2	β_1^2	γ_1^2	$\beta_1\gamma_1$	$\gamma_1\alpha_1$	$\alpha_1\beta_1$	c_{1n}	
y_y	α_2^2	β_2^2	γ_2^2	$\beta_2\gamma_2$	$\gamma_2\alpha_2$	$\alpha_2\beta_2$	c_{2n}	
z_z	α_3^2	β_3^2	γ_3^2	$\beta_3\gamma_3$	$\gamma_3\alpha_3$	$\alpha_3\beta_3$	c_{3n}	(22)
y_z	$2\alpha_2\alpha_3$	$2\beta_2\beta_3$	$2\gamma_2\gamma_3$	$(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)$	$(\gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3)$	$(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)$	c_{4n}	
z_x	$2\alpha_3\alpha_1$	$2\beta_3\beta_1$	$2\gamma_3\gamma_1$	$(\beta_3\gamma_1+\gamma_3\beta_1)$	$(\gamma_3\alpha_1+\alpha_3\gamma_1)$	$(\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1)$	c_{5n}	
x_y	$2\alpha_1\alpha_2$	$2\beta_1\beta_2$	$2\gamma_1\gamma_2$	$(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)$	$(\gamma_1\alpha_2+\alpha_1\gamma_2)$	$(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)$.	c_{6n}	

Nennt man hierin das $n$te Glied der $m$ten Reihe c_{mn}, so drückt sich das Determinantenverhältniss s_{hk}, das sich auf ein beliebiges Coordinatensystem bezieht, durch die entsprechenden auf die Hauptaxen bezogenen Grössen σ_{hk} durch die Beziehung aus:

$$s_{hk} = \sum_a \sum_b c_{ha} c_{kb} \sigma_{ab}; \tag{23}$$

die Summen sind über a und b auf die Zahlen 1, . . . 6 auszudehnen.

Hiernach giebt sich im Allgemeinen jedes s_{hk} als eine lineäre Function aller 21 σ_{hk}. Von letzteren verschwindet eine Anzahl, wenn der bezügliche Krystall Symmetrieen besitzt, und tritt eine andere in nummerische Relation, wenn mehrere gleichwerthige Symmetrieelemente vorhanden sind; denn die Anzahl der von einander unabhängigen σ_{hk} ist nur so gross, als die Anzahl der unabhängigen Hauptelasticitätsconstanten Δ_{hk}.

So ist für das monokline System mit der HZ- als Symmetrieebene:

$$\sigma_{15} = \sigma_{16} = \sigma_{25} = \sigma_{26} = \sigma_{35} = \sigma_{36} = \sigma_{45} = \sigma_{46} = 0; \tag{24a}$$

für das rhombische noch ausserdem:

$$\sigma_{16} = \sigma_{26} = \sigma_{36} = \sigma_{45} = 0; \tag{24b}$$

für das quadratische, die Z- als Hauptaxe genommen:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{44} = \sigma_{55}; \tag{24c}$$

für das hexagonale kömmt hierzu:

$$\sigma_{66} = 2(\sigma_{11} - \sigma_{12}): \tag{24d}$$

für das reguläre statt dessen:

$$\sigma_{33} = \sigma_{11}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{66} = \sigma_{44}; \tag{24e}$$

das rhomboëdrische giebt, falls die Z- zur Haupt-, die H- zur Nebenaxe gewählt wird, zu den für das monokline System geltenden Bedingungen noch hinzu:

(24f) $\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{44} = \sigma_{55}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{14} = -\sigma_{24} = \frac{1}{2}\sigma_{56}, \quad \sigma_{66} = 2(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \sigma_{34} = 0.$

Zwischen den Haupt-Elasticitätsconstanten Δ_{hk} und den Verhältnissen σ_{hk} bestehen die 21 Gleichungen:

$$
(25) \qquad \begin{aligned}
&\sum_i \Delta_{hi}\sigma_{hi} = 0 \quad \text{für} \quad h = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
&\sum_i \Delta_{hi}\sigma_{ki} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} h = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases} \quad \text{und } h \gtrless k;
\end{aligned}
$$

aus ihnen lassen sich bei gegebenen σ_{hk} die Δ_{hk} berechnen.

Auch über die Werthe der s_{hk} lässt sich bei sonst beliebiger Lage des Coordinatensystems X, Y, Z Einiges sagen. Ist die X-Axe eine geradzählige krystallographische Symmetrieaxe, also (s. p. 33) die YZ-Ebene in elastischer Hinsicht Symmetrieebene, so ist:

$$s_{15} = s_{16} = s_{25} = s_{26} = s_{35} = s_{36} = s_{45} = s_{46} = 0;$$

gilt dasselbe für die Y-Achse, so

$$(26) \qquad s_{16} = s_{14} = s_{26} = s_{24} = s_{36} = s_{34} = s_{56} = s_{54} = 0,$$

für die Z-Achse, so

$$s_{14} = s_{15} = s_{24} = s_{25} = s_{34} = s_{35} = s_{64} = s_{65} = 0.$$

Diese Resultate sind für die folgenden Anwendungen von Wichtigkeit.

2. Den Hauptgleichungen (1) und den Bedingungen für die Cylinderfläche (2) ist stets genügt, wenn alle Componenten $X_x \ldots$ mit Ausnahme von Z_z verschwinden. Nehmen wir dies an, so schliessen wir nach (3) die Einwirkung eines Momentes N um die Längsaxe aus.

Das System (16) zeigt, dass die gemachte Annahme die andere nothwendig nach sich zieht, dass Z_z eine lineäre Function der Coordinaten x und y ist, denn sie lautet:

$$(27) \qquad -Z_z s_{33} = g_1 x + g_2 y + g_3;$$

g_1, g_2 und g_3 haben dabei die Werthe (20), hierin $\mathrm{N} = 0$ gesetzt.

Aus diesem Z_z folgen dann für U, V und W Functionen zweiten Grades.

Wir setzen, da nach (10) für $x = y = 0$ $U = V = W = 0$ und $\partial U / \partial y = \partial V / \partial x$ sein soll:

$$
\begin{aligned}
U &= a_1 \frac{x^2}{2} + b_1 xy + c_1 \frac{y^2}{2} + d_1 x + e_1 y, \\
V &= a_2 \frac{x^2}{2} + b_2 xy + c_2 \frac{y^2}{2} + e_1 x + e_2 y, \\
W &= a_3 \frac{x^2}{2} + b_3 xy + c_3 \frac{y^2}{2} + d_3 x + e_3 y.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Dann bestimmen die Gleichungen (17) und (18) die Constanten wie folgt. Wir setzen die auf die Flächeneinheit bezogenen Kräfte und Momente:

$$\Gamma/Q = \Gamma_1, \quad \Lambda/Q = \Lambda_1, \quad \mathrm{M}/Q = \mathrm{M}_1, \quad \mathrm{N}/Q = \mathrm{N}_1$$

und haben dann:

$$
\begin{aligned}
&a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 = s_{13}\Gamma_1, \quad b_2 \xi + c_2 \eta + e_2 = s_{23}\Gamma_1, \quad (b_1 + a_2)\xi + (c_1 + b_2)\eta + 2e_1 = s_{63}\Gamma_1, \\
&a_1 \varkappa_y^2 + b_1 \lambda^2 + d_1 \xi = s_{13}\mathrm{M}_1, \quad b_2 \varkappa_y^2 + c_2 \lambda^2 + e_2 \xi = s_{23}\mathrm{M}_1, \quad (b_1 + a_2)\varkappa_y^2 + (c_1 + b_2)\lambda^2 + 2e_1 \xi = s_{63}\mathrm{M}_1, \\
&a_1 \lambda^2 + b_1 \varkappa_x^2 + d_1 \eta = s_{13}\Lambda_1, \quad b_2 \lambda^2 + c_2 \varkappa_x^2 + e_2 \eta = s_{23}\Lambda_1, \quad (b_1 + a_2)\lambda^2 + (c_1 + b_2)\varkappa_x^2 + 2e_1 \eta = s_{63}\Lambda_1, \\
&(b_3 + h)\xi + c_3 \eta + \left(g_2 \frac{l}{2} + e_3\right) = s_{43}\Gamma_1, \quad a_3 \xi + (b_3 - h)\eta + \left(g_1 \frac{l}{2} + d_3\right) = s_{53}\Gamma_1, \\
&(b_3 + h)\varkappa_y^2 + c_3 \lambda^2 + \left(g_2 \frac{l}{2} + e_3\right)\xi = s_{43}\mathrm{M}_1, \quad a_3 \varkappa_y^2 + (b_3 - h)\lambda^2 + \left(g_1 \frac{l}{2} + d_3\right)\xi = s_{53}\mathrm{M}_1, \\
&(b_3 + h)\lambda^2 + c_3 \varkappa_x^2 + \left(g_2 \frac{l}{2} + e_3\right)\eta = s_{43}\Lambda_1, \quad a_3 \lambda^2 + (b_3 - h)\varkappa_x^2 + \left(g_1 \frac{l}{2} + d_3\right)\eta = s_{53}\Lambda_1.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Die ersten neun Gleichungen gestatten die Constanten in U und V, die letzten sechs die in W und ausserdem noch h zu berechnen.

Um die Betrachtung zu vereinfachen nehmen wir zunächst Λ und M gleich Null, später Γ gleich Null. Es wirkt also zunächst nur eine Längsdehnung gemessen durch die auf die Einheit des Querschnitts ausgeübte Zugkraft Γ_1.

Dann ist nach (20):

$$g_1 \varkappa_y^{\circ 2} = -\Gamma_1 \xi s_{33}, \quad g_2 \varkappa_x^{\circ 2} = -\Gamma_1 \eta s_{33}, \quad g_3 = \Gamma_1 \varkappa,$$

ferner nach (29) unter Rücksicht auf (20′):

$$
\begin{aligned}
a_1 \varkappa_y^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \xi s_{13}, & b_1 \varkappa_x^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \eta s_{13}, & d_1 &= \Gamma_1 \varkappa s_{13}, \\
b_2 \varkappa_y^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \xi s_{23}, & c_2 \varkappa_x^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \eta s_{23}, & e_2 &= \Gamma_1 \varkappa s_{23}, \\
(b_1 + a_2)\varkappa_y^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \xi s_{63}, & (c_1 + b_2)\varkappa_x^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \eta s_{63}, & 2e_1 &= \Gamma_1 \varkappa s_{63}, \\
(b_3 + h)\varkappa_y^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \xi s_{43}, & c_3 \varkappa_x^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \eta s_{43}, & \left(g_2 \frac{l}{2} + e_3\right) &= \Gamma_1 \varkappa s_{43}, \\
a_3 \varkappa_y^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \xi s_{53}, & (b_3 - h)\varkappa_x^{\circ 2} &= -\Gamma_1 \eta s_{53}, & \left(g_1 \frac{l}{2} + d_3\right) &= \Gamma_1 \varkappa s_{53}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Hierin ist kurz gesetzt:

$$\varkappa = 1 + \frac{\xi^2}{\varkappa_y^{o2}} + \frac{\eta^2}{\varkappa_x^{o2}}.$$

Die Grösse der Torsion bestimmt sich hiernach:

$$h = \frac{\Gamma_1}{2}\left(\frac{\eta s_{53}}{\varkappa_x^{o2}} - \frac{\xi s_{43}}{\varkappa_y^{o2}}\right).$$

Dies Resultat zeigt, dass ein unter einseitigem Zug stehender Stab im Allgemeinen sich nicht nur dehnt — was durch g_3 gegeben ist —, sondern sich biegt und drillt, da g_1, g_2 und h von Null verschieden sind. Diese Nebendeformationen verschwinden stets, wenn der Cylinder an einem Ende im Schwerpunkt des Querschnitts befestigt, also $\xi = \eta = 0$ ist. In diesem Falle hat man sehr einfach nach (11) und (28):

(31) $$u = \Gamma_1\left(s_{13}x + s_{63}\frac{y}{2}\right), \quad v = \Gamma_1\left(s_{63}\frac{x}{2} + s_{23}y\right), \quad w = \Gamma_1(s_{53}x + s_{43}y + s_{33}z).$$

Hier bleiben alle ursprünglich ebenen Querschnitte eben; der Fall lässt sich daher practisch realisiren, indem man den durch die Ebenen $z = 0$ und $z = l$ begrenzten Cylinder zwischen zwei ebenen Platten eines nahezu starren Körpers comprimirt.

Es wird nach (31):

(32) $$x_x = \Gamma_1 s_{13}, \quad y_y = \Gamma_1 s_{23}, \quad z_z = \Gamma_1 s_{33}, \quad y_z = \Gamma_1 s_{43}, \quad z_x = \Gamma_1 s_{53}, \quad x_y = \Gamma_1 s_{63},$$

und hierdurch bestimmen sich einfach die Werthe der linearen Dilatation in beliebiger Richtung sowie der Winkeländerung zwischen beliebig in dem Cylinder gegebenen Ebenen.

Die lineäre Dilatation λ parallel einer durch die Richtungscosinus α, β, γ gegen das Coordinatensystem X, Y, Z bestimmten Richtung ist gegeben durch:

(33) $$\lambda = \alpha^2 x_x + \beta^2 y_y + \gamma^2 z_z + \beta\gamma y_z + \gamma\alpha z_x + \alpha\beta x_y.$$

Der einseitige Zug Γ_1 parallel der Z-Achse ergiebt also den Werth:

(34) $$\lambda = \Gamma_1(\alpha^2 s_{13} + \beta^2 s_{23} + \gamma^2 s_{33} + \beta\gamma s_{43} + \gamma\alpha s_{53} + \alpha\beta s_{63});$$

für die Längsrichtung ist $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 0$, also:

(34′) $$\lambda_z = \Gamma_1 s_{33},$$

normal dazu $\gamma = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, also

(34″) $$\lambda_n = \Gamma_1(\alpha^2 s_{13} + \beta^2 s_{23} + \alpha\beta s_{63}).$$

Damit der Werth der Quercontraction λ_n rings um die Z-Axe constant sei, ist erforderlich die Bedingung $s_{13} = s_{23}$, $s_{63} = 0$; im Allgemeinen wird durch einseitigen Zug ein kreisförmiger Querschnitt zur Ellipse deformirt.

Für den Factor s_{33} von λ_z habe ich den Namen »Coefficient der Längsdilatation« vorgeschlagen und den Buchstaben E benutzt; er stellt das Reciproke dar von demjenigen Zahlenwerth, den man gewöhnlich als Elasticitätscoefficienten bezeichnet. Es dürfte vortheilhaft sein, diese Bezeichnung in der Weise auszubilden, dass man durch einen untern Index die Coordinatenaxe andeutet, parallel welcher der Druck wirkt, durch einen obern diejenige, parallel welcher die Dilatation gemessen wird. Wir hätten dann folgendes System von »Dilatationscoefficienten bei einseitigem Druck«:

$$E_1'=s_{11},\ E_1''=s_{12},\ E_1'''=s_{13},\ E_2'=s_{21},\ E_2''=s_{22},\ E_2'''=s_{23},\ E_3'=s_{13},\ E_3''=s_{23},\ E_3'''=s_{33},\quad (35)$$

zwischen denen die Relation gilt:

$$E_1''=E_2',\quad E_2'''=E_3'',\quad E_3'=E_1'''.$$

Was die Aenderung ϑ anbetrifft, welche der Winkel ω zwischen zwei durch die Richtungscosinus α', β', γ', α'', β'', γ'' ihrer Normalen gegen die X, Y, Z-Axen definirten Ebenen durch die Deformationen erleidet, so gilt dafür das allgemeine Gesetz:

$$\begin{aligned}\vartheta \sin\omega = {} & 2[\alpha'\alpha''x_x+\beta'\beta''y_y+\gamma'\gamma''z_z]+(\beta'\gamma''+\gamma'\beta'')y_z+(\gamma'\alpha''+\alpha'\gamma'')z_x+(\alpha'\beta''+\beta'\alpha'')x_y \quad (36)\\ & -\cos\omega[(\alpha'^2+\alpha''^2)x_x+(\beta'^2+\beta''^2)y_y+(\gamma'^2+\gamma''^2)z_z+(\beta'\gamma'+\beta''\gamma'')y_z+(\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'')z_x\\ & +(\alpha'\beta'+\alpha''\beta'')x_y],\end{aligned}$$

wobei $\cos\omega = \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''$ ist.

Ist specieller $\omega = \pi/2$ so folgt:

$$\vartheta = 2[\alpha'\alpha''x_x+\beta'\beta''y_y+\gamma'\gamma''z_z]+(\beta'\gamma''+\gamma'\beta'')y_z+(\gamma'\alpha''+\alpha'\gamma'')z_x+(\alpha'\beta''+\beta'\alpha'')x_y,\quad (37)$$

dabei ist $0 = \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''$.

In unserm Falle des einseitigen Zuges Γ_1 oder Druckes $-\Gamma_1$ parallel der Z-Axe sind beobachtbar nur die Winkel zwischen zwei Säulenflächen und zwischen einer Grund- und einer Säulenfläche. Ist der Cylinder ein rechteckiges Prisma, die Flächen normal zu den Coordinatenaxen X, Y, Z, so sind die drei mit ϑ_{yz}, ϑ_{xz}, ϑ_{xy} zu bezeichnenden Winkeländerungen gegeben durch:

(38) $$\vartheta_{yz} = y_z = \Gamma_1 s_{34}, \quad \vartheta_{zx} = z_x = \Gamma_1 s_{35}, \quad \vartheta_{xy} = x_y = \Gamma_1 s_{36}.$$

Wenn man dasselbe Prisma Zugkräften A_1 und B_1 parallel der X- oder Y-Axe aussetzte, würde man analoge Winkeländerungen erhalten:

(38) $$\begin{aligned} \vartheta'_{yz} &= A_1 s_{14}, \quad \vartheta'_{zx} = A_1 s_{15}, \quad \vartheta'_{xy} = A_1 s_{16}, \quad \text{und} \\ \vartheta''_{yz} &= B_1 s_{24}, \quad \vartheta''_{zx} = B_1 s_{25}, \quad \vartheta''_{xy} = B_1 s_{26}. \end{aligned}$$

An demselben Prisma würde man also im Allgemeinen neun verschiedene Aggregate s_{hk} bestimmen können, wenn sich ein Mittel fände, diese allerdings sehr kleinen Aenderungen der Messung zu unterwerfen. Wir wollen dieselben als »Coefficienten der Winkeländerungen bei einseitigem Druck« mit einem besondern Buchstaben bezeichnen und setzen:

(39) $$s_{14} = \Theta'_1, \; s_{15} = \Theta''_1, \; s_{16} = \Theta'''_1, \; s_{24} = \Theta'_2, \; s_{25} = \Theta''_2, \; s_{26} = \Theta'''_2, \; s_{34} = \Theta'_3, \; s_{35} = \Theta''_3, \; s_{36} = \Theta'''_3,$$

wo nun der untere Index auf die Richtung der Druckkraft, der obere auf die Lage der Geraden hinweist, in welcher die beiden zueinander normalen Ebenen, zwischen denen die Winkeländerung statt hat, sich schneiden. Von diesen Coefficienten verschwinden jedesmal sechs, wenn eine der Coordinatenebenen elastische Symmetrieebene ist (vergl. p. 64).

Wirkt keine Längsdehnung Γ, sondern nur ein Drehungsmoment um die X- und Y-Axe Λ und M, so folgt aus (20):

$$g_1 \varkappa_y^{o2} = M_1 s_{33}, \quad g_2 \varkappa_x^{o2} = \Lambda_1 s_{33}, \quad g_3 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(M_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \Lambda_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{33},$$

während (29) führt auf:

(40) $$(b_3 + h) \varkappa_y^{o2} = M_1 s_{34}, \quad (b_3 - h) \varkappa_x^{o2} = \Lambda_1 s_{35},$$

woraus folgt:

(40') $$h = \tfrac{1}{2} \left(M_1 \frac{s_{34}}{\varkappa_y^{o2}} - \Lambda_1 \frac{s_{35}}{\varkappa_x^{o2}} \right).$$

Hieraus folgt, dass durch Momente um beliebige in den Endquerschnitten liegende Axen nicht nur Biegungen, sondern auch eine Längsdehnung der Faser $x = y = 0$ und eine Drillung um dieselbe erzeugt wird. Die erstere verschwindet, wenn der festgehaltene Coordinatenanfang der Schwerpunkt des Querschnitts ist, die letztere bleibt im Allgemeinen bestehen.

Ein Moment um eine Parallele zu einer Hauptträgheitsaxe durch den Schwerpunkt bringt stets nur eine Biegung der Faser $x = y = 0$ in der zu jener normalen Ebene hervor; diese, sowie die begleitend auftretende Drillung sind den bezüglichen Hauptträgheitsmomenten indirect proportional. Dies Resultat gilt nicht mehr, wenn die Momente um andere Axen wirken.

Wir führen das Problem nun auch hinsichtlich der Bestimmung der übrigen Constanten zu Ende. Die Auflösung der Gleichungen (29) für $\Gamma = 0$ ergiebt:

$$\begin{aligned}
a_1 \varkappa_y^{o2} &= \mathrm{M}_1 s_{13}, & b_1 \varkappa_x^{o2} &= \Lambda_1 s_{13}, & d_1 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} &= -(\mathrm{M}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \Lambda_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{13}, \\
b_2 \varkappa_y^{o2} &= \mathrm{M}_1 s_{23}, & c_2 \varkappa_x^{o2} &= \Lambda_1 s_{23}, & e_2 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} &= -(\mathrm{M}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \Lambda_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{23}, \\
(b_1 + a_2) \varkappa_y^{o2} &= \mathrm{M}_1 s_{63}, & (c_1 + b_2) \varkappa_x^{o2} &= \Lambda_1 s_{63}, & 2e_1 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} &= -(\mathrm{M}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \Lambda_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{63}, \\
(b_3 + h) \varkappa_y^{o2} &= \mathrm{M}_1 s_{43}, & c_3 \varkappa_x^{o2} &= \Lambda_1 s_{43}, & \left(g_2 \frac{l}{2} + e_3\right) \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} &= -(\mathrm{M}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \Lambda_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{43}, \\
a_3 \varkappa_y^{o2} &= \mathrm{M}_1 s_{53}, & (b_3 - h) \varkappa_x^{o2} &= \Lambda_1 s_{53}, & \left(g_1 \frac{l}{2} + d_3\right) \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} &= -(\mathrm{M}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \Lambda_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{53}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Man bemerkt, dass die Lage des Coordinatenanfangs nur auf die lineären Glieder in (28) Einfluss hat. Wählen wir den Schwerpunkt des ersten Querschnitts zum Anfangspunkt, so finden sich durch Einführung der betreffenden Constantenwerthe in (28) die folgenden Resultate, die wir ohne Indices ^{o} schreiben:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\mathrm{M}_1}{2\varkappa_y^2} \{x^2 s_{13} - y^2 s_{23} - z[y s_{43} - (l - z) s_{33}]\} + \frac{\Lambda_1}{2\varkappa_x^2} [2xy s_{13} + y^2 s_{63} + zy s_{53}], \\
v &= \frac{\mathrm{M}_1}{2\varkappa_y^2} [x^2 s_{63} + 2xy s_{23} + zx s_{43}] + \frac{\Lambda_1}{2\varkappa_x^2} \{y^2 s_{23} - x^2 s_{13} - z[x s_{53} - (l - z) s_{33}]\}, \\
w &= \frac{\mathrm{M}_1}{2\varkappa_y^2} [x^2 s_{53} + xy s_{43} - (l - 2z) x s_{33}] + \frac{\Lambda_1}{2\varkappa_x^2} [xy s_{53} + y^2 s_{43} - (l - 2z) y s_{33}].
\end{aligned} \tag{42}$$

In diesen Formeln wie in (41) kommen nur diejenigen Aggregate s_{hk} vor, die oben (35) und (39) als »Coefficienten der lineären Dilatation E und der Winkeländerung Θ bei einseitigem Druck" bezeichnet worden sind; dieser Umstand weist auf die Verwandtschaft der gleichförmigen Biegung mit jenen Erscheinungen hin.

Für unkrystallinische Medien ist $s_{43} = s_{53} = s_{63} = 0$; demnach unterscheidet sich unter den vorstehenden Werthen von u, v, w besonders der für w von demjenigen, der für jene gilt. Der zuvor ebene Querschnitt wird nämlich bei krystallinischen Prismen durch diese gleichförmige Biegung gekrümmt und zwar nach einer Oberfläche zweiten Grades. Ihre Gleichung ist nach dem früher (p. 58) Erörterten gegeben durch:

$$W = \frac{1}{2}\left[x^2 \frac{\mathrm{M}_1 s_{53}}{\varkappa_y^2} + xy\left(\frac{\mathrm{M}_1 s_{43}}{\varkappa_y^2} + \frac{\Lambda_1 s_{53}}{\varkappa_x^2}\right) + y^2 \frac{\Lambda_1 s_{43}}{\varkappa_x^2}\right];$$

darin hat W den Sinn der Z-Coordinate eines Punktes x, y der gekrümmten Fläche.

Wirkt das ausgeübte Moment um die X-Axe so gilt:

$$W_x = \frac{y\Lambda_1}{2\varkappa_x^2}(x s_{53} + y s_{43}),$$

wirkt es um die Y-Axe:

$$W_y = \frac{x\mathrm{M}_1}{2\varkappa_y^2}(x s_{53} + y s_{43}).$$

Die nicht verschobenen Theile liegen also resp. auf der X- oder Y-Axe und auf der Geraden $x s_{53} + y s_{43} = 0$; die Niveau-Linien sind Hyperbeln, die jene Geraden zu Asymptoten haben.

Die Krümmung verschwindet nur für $s_{43} = s_{53} = 0$, d. h. im Allgemeinen nur, wenn die Axe des Cylinders normal zu einer elastischen Symmetrieebene steht.

Die lineäre Dilatation wird für eine durch die Cosinus α, β, γ definirte Richtung in unserm Falle nach (33):

$$\lambda = \left(\frac{\mathrm{M}_1}{\varkappa_y^2} x + \frac{\Lambda_1}{\varkappa_x^2} y\right)(\alpha^2 s_{13} + \beta^2 s_{23} + \gamma^2 s_{33} + \beta\gamma s_{43} + \gamma\alpha s_{53} + \alpha\beta s_{63}). \tag{43}$$

Sie ist also in der Schwerpunktslinie $x = y = 0$ selbst gleich Null und wächst lineär mit x und y. Ihr grösster Werth findet an der Oberfläche des Prismas statt, aber keineswegs allgemein parallel der Mittellinie, sondern in einer andern Richtung. Das Zerspringen eines Prismas bei wachsender Biegung würde daher auch bei gleicher Cohäsion im Allgemeinen n i c h t mit Sprüngen parallel der XY-Ebene eintreten.

Für den Drehungswinkel um die Z-Axe erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left[x\left(\frac{\mathrm{M}_1 s_{63}}{\varkappa_y^2}-2\frac{\Lambda_1 s_{13}}{\varkappa_x^2}\right)-y\left(\frac{\Lambda_1 s_{63}}{\varkappa_x^2}-2\frac{\mathrm{M}_1 s_{23}}{\varkappa_y^2}\right)+z\left(\frac{\mathrm{M}_1 s_{43}}{\varkappa_y^2}-\frac{\Lambda_1 s_{53}}{\varkappa_x^2}\right)\right]; \quad (44)$$

derselbe besteht also aus einem allen Querschnitten gemeinsamen in x und y linearen und einem mit z proportional wachsenden Theil. Der ganze Querschnitt z erscheint hiernach gegen den ersten gedreht um die Grösse:

$$\tau=\frac{z}{2}\left(\frac{\mathrm{M}_1 s_{43}}{\varkappa_y^2}-\frac{\Lambda_1 s_{53}}{\varkappa_x^2}\right)$$

in Uebereinstimmung mit dem früheren Resultat (21').

Die Grösse von τ hängt von denselben Coefficienten ab, wie die Krümmung der Querschnitte, und verschwindet nur mit dieser. Da wir ganz allgemein die Grössen s_{hk} durch die Elasticitätsconstanten ausdrücken können, so ist es auch möglich, diejenigen Orientirungen des Prismas zu finden, welche Biegung ohne Drillung ergeben. Allgemein verschwindet s_{43} und s_{53} nach p. 64, wenn die Längsaxe des Prismas normal zu einer elastischen Symmetrieebene steht.

3) Den Hauptgleichungen (1) wird ferner genügt durch Nullsetzen der Componenten X_x, Y_y, X_y und durch die Verfügung

$$Y_z=\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \qquad -Z_x=\frac{\partial\Omega}{\partial y} \qquad (45)$$

bei beliebigem Z_z. Hierdurch sind zugleich auch die ersten beiden Randbedingungen (2) erfüllt, die dritte nimmt eine integrable Form an und giebt durch

$$\overline{\Omega}=0$$

eine Bedingung, welche die Coordinaten der Randpunkte zu erfüllen haben: die Gleichung des Querschnitts.

Wir wollen diese Verfügung näher untersuchen. Das System (16) legt durch die dritte Gleichung

$$-(g_1 x+g_2 y+g_3)=s_{33}Z_z+s_{34}Y_z+s_{35}Z_x \qquad (46)$$

nahe, für Y_z und Z_x zunächst lineäre Functionen einzuführen; dabei kann $Z_z=0$ genommen werden, da bereits oben erörtert ist, was daraus resultirt, wenn Z_z ebenfalls zur lineären Function gemacht wird, und die Gleichungen in den Componenten lineär sind. Diese Verfügung lässt Γ, Λ und M verschwinden und nur N, das Drehungsmoment um die Längsaxe, übrig.

Da für unser Problem nur geschlossene Querschnittscurven einen Sinn geben und bereits in unsern Grundformeln (20) verfügt ist, dass die Coordinatenaxen X und Y den Hauptträgheitsaxen des Querschnitts durch dessen Schwerpunkt parallel sein sollen, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen um für

$$Y_z = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \text{ und } Z_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

lineäre Functionen zu erhalten:

$$\Omega = k\left[\left(\frac{x-\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{b}\right)^2 - 1\right]; \tag{47}$$

hieraus folgt:

$$Y_z = \frac{2k(x-\xi)}{a^2}, \qquad -Z_x = \frac{2k(y-\eta)}{b^2}, \tag{48}$$

worin wegen

$$-\int Y_z x\,dq = \int Z_x y\,dq = \tfrac{1}{2}\mathrm{N}, \qquad k = \mathrm{N} \text{ ist.}$$

Das System (20) ergiebt dann zunächst, da $\Gamma = \Lambda = \mathrm{M} = 0$ und $\mathrm{N}/Q = \mathrm{N}_1$ ist, die noch für jeden Querschnitt gültigen Formeln:

$$g_1 \varkappa_y^{o2} = \frac{\mathrm{N}_1}{2} s_{34}, \quad g_2 \varkappa_x^{o2} = -\frac{\mathrm{N}_1}{2} s_{35}, \quad g_3 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -\frac{\mathrm{N}_1}{2}(s_{34}\,\xi\varkappa_x^{o2} - s_{35}\,\eta\varkappa_y^{o2}). \tag{49}$$

Das Moment um die Längsaxe bringt also im Allgemeinen eine Biegung und Verlängerung der in jene fallenden Faser hervor.

Die Gleichungen (17) und (18) verlangen für U, V, W Functionen zweiten Grades. Wir setzen wie in (28):

$$\begin{aligned} U &= a_1 \frac{x^2}{2} + b_1 xy + c_1 \frac{y^2}{2} + d_1 x + e_1 y, \\ V &= a_2 \frac{x^2}{2} + b_2 xy + c_2 \frac{y^2}{2} + e_1 x + e_2 y, \\ W &= a_3 \frac{x^2}{2} + b_3 xy + c_3 \frac{y^2}{2} + d_3 x + e_3 y, \end{aligned} \tag{50}$$

und erhalten zur Bestimmung der Constanten das System:

$$a_1\xi + b_1\eta + d_1 = 0, \qquad b_2\xi + c_2\eta + e_2 = 0, \qquad (b_1+a_2)\xi + (c_1+b_2)\eta + 2e_1 = 0,$$

$$a_1\varkappa_y^2 + b_1\lambda^2 + d_1\xi = +\frac{N_1}{2}s_{14}, \quad b_2\varkappa_y^2 + c_2\lambda^2 + e_2\xi = +\frac{N_1}{2}s_{24}, \quad (b_1+a_2)\varkappa_y^2 + (c_1+b_2)\lambda^2 + 2e_1\xi = +\frac{N_1}{2}s_{64},$$

$$a_1\lambda^2 + b_1\varkappa_x^2 + d_1\eta = -\frac{N_1}{2}s_{15}, \quad b_2\lambda^2 + c_2\varkappa_x^2 + e_2\eta = -\frac{N_1}{2}s_{25}, \quad (b_1+a_2)\lambda^2 + (c_1+b_2)\varkappa_x^2 + 2e_1\eta = -\frac{N_1}{2}s_{65},$$

$$(b_3+h)\xi + c_3\eta + \left(g_2\frac{l}{2} + e_3\right) = 0, \qquad a_3\xi + (b_3-h)\eta + \left(g_1\frac{l}{2} + d_3\right) = 0, \tag{51}$$

$$(b_3+h)\varkappa_y^2 + c_3\lambda^2 + \left(g_2\frac{l}{2} + e_3\right)\xi = +\frac{N_1}{2}s_{44}, \quad a_3\varkappa_y^2 + (b_3-h)\lambda^2 + \left(g_1\frac{l}{2} + d_3\right)\xi = +\frac{N_1}{2}s_{54},$$

$$(b_3+h)\lambda^2 + c_3\varkappa_x^2 + \left(g_2\frac{l}{2} + e_2\right)\eta = -\frac{N_1}{2}s_{45}, \quad a_3\lambda^2 + (b_3-h)\varkappa_x^2 + \left(g_1\frac{l}{2} + d_3\right)\eta = -\frac{N_1}{2}s_{55}.$$

Hieraus folgt speciell als wichtigstes Resultat:

$$(b_3+h)\varkappa_y^{o2} = \frac{N_1}{2}s_{44}, \qquad (b_3-h)\varkappa_x^{o2} = -\frac{N_1}{2}s_{55}$$

also

$$h = \frac{N_1}{4}\left(\frac{s_{44}}{\varkappa_y^{o2}} + \frac{s_{55}}{\varkappa_x^{o2}}\right),$$

oder, da für die Ellipse (47) $4\varkappa_y^{o2} = a^2$, $4\varkappa_x^{o2} = b^2$ ist, auch:

$$h = N_1\left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right). \tag{52}$$

Dieser Werth für die Grösse der Drillung gilt ganz allgemein für jede Drehungsaxe; dasselbe Moment N giebt also für den Querschnitt z um jede Axe den gleichen Torsionswinkel $\tau = hz$, — ein Satz der auch für unkrystallinische Medien noch nicht bekannt sein dürfte.

Die Aggregate s_{44} und s_{55} und das bei Drillungen um die X- oder Y-Axe analog auftretende s_{66} nennen wir die »Coefficienten der Drillung« und setzen

$$s_{44} = T_1, \qquad s_{55} = T_2, \qquad s_{66} = T_3.$$

Dass die Grösse der die Drillung begleitenden Biegung ebenfalls von der Lage der Drehungsaxe unabhängig ist, zeigen die Formeln (49). Diese zeigen auch, dass die Längsdilatation, welche durch g_3 gemessen ist verschwindet, wenn man die Drehungsaxe durch das Centrum der Ellipse gehen lässt, die Biegungen aber im Allgemeinen bestehen bleiben.

Alle drei Grössen verschwinden stets, wenn dieselben Determinantenverhältnisse, welche auch die eine Biegung begleitende Drillung messen, nämlich

$$s_{34} = s_{35} = 0$$

sind. Dies findet, wie schon früher benutzt, statt, wenn die Z-Axe krystallographische Symmetrieaxe, die XY-Ebene also elastische Symmetrieebene ist. s_{34} oder s_{35} allein ist Null, wenn die XZ- oder YZ-Ebene elastische Symmetrieebene ist.

Wir führen die Discussion des Resultates der Gleichungen (51) und (51) zu Ende unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Drehungsaxe Z durch das Centrum der Querschnittsellipse geht, also

$$\xi = \eta = \lambda = 0, \quad \varkappa_x^2 = \varkappa_x^{o2}, \quad \varkappa_y^2 = \varkappa_y^{o2}$$

ist. Dann erhält man die Constanten a_h, b_h ... durch (51) sogleich gesondert bestimmt:

$$d_1 = e_2 = e_1 = g_2 \frac{l}{2} + e_3 = g_1 \frac{l}{2} + d_3 = 0,$$

$$a_1 \varkappa_y^2 = \frac{N_1}{2} s_{14}, \quad b_1 \varkappa_x^2 = -\frac{N_1}{2} s_{15}, \quad b_2 \varkappa_y^2 = \frac{N_1}{2} s_{24}, \quad c_2 \varkappa_x^2 = -\frac{N_1}{2} s_{25},$$

$$(b_1 + a_2) \varkappa_y^2 = \frac{N_1}{2} s_{64}, \quad (c_1 + b_2) \varkappa_x^2 = -\frac{N_1}{2} s_{65}, \quad (b_3 + h) \varkappa_y^2 = \frac{N_1}{2} s_{44},$$

$$c_3 \varkappa_x^2 = -\frac{N_1}{2} s_{45}, \quad a_3 \varkappa_y^2 = \frac{N_1}{2} s_{45}, \quad (b_3 - h) \varkappa_x^2 = -\frac{N_1}{2} s_{55}.$$

Hiernach wird, da $4\varkappa_x^2 = b^2$, $4\varkappa_y^2 = a^2$ ist:

$$\begin{aligned} u &= N_1 \left\{ \frac{x^2}{a^2} s_{14} - \frac{2xy}{b^2} s_{15} - y^2 \left(\frac{s_{24}}{a^2} + \frac{s_{56}}{b^2} \right) + z \left[\frac{(l-z)}{a^2} s_{34} - y \left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2} \right) \right] \right\} \\ (54) \quad v &= N_1 \left\{ \frac{2xy}{a^2} s_{24} - \frac{y^2}{b^2} s_{25} + x^2 \left(\frac{s_{46}}{a^2} + \frac{s_{15}}{b^2} \right) - z \left[\frac{(l-z)}{b^2} s_{35} - x \left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2} \right) \right] \right\} \\ w &= N_1 \left\{ \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) s_{45} + xy \left(\frac{s_{44}}{a^2} - \frac{s_{55}}{b^2} \right) - (l-2z) \left(\frac{x}{a^2} s_{34} - \frac{y}{b^2} s_{35} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Diese vollständigen Werthe, welche mehrere Aggregate s_{hk} enthalten, die in den Formeln für Biegung und Dehnung nicht vorkamen, ergeben u. A. das Resultat, dass ursprünglich ebene Querschnitte des elliptischen Cylinders bei der Torsion durch ein Moment N in Oberflächen zweiten Grades gekrümmt werden, welche für alle Querschnitte identische Gestalt haben. Ihre Gleichung ist in der Form, wie sie dem mittelsten Querschnitt $z = l/2$ entspricht:

$$w = N_1\left[\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)s_{45}+xy\left(\frac{s_{44}}{a^2}-\frac{s_{55}}{b^2}\right)\right].$$

Die Niveaulinien sind mit der Querschnittsellipse concentrische Hyperbeln, welche für den Fall die Ellipse zum Kreis wird ($a = b$) gleichseitig werden, und ihre Hauptaxen parallel der X- und Y-Axe haben, wenn $s_{44}/a^2 = s_{55}/b^2$ ist. Ist hingegen $s_{45} = 0$ aber $a \gtrless b$, so haben die Hyperbeln allgemein die Axen der Ellipse $\Omega = 0$ zu Asymptoten. Letzteres findet immer dann statt, wenn die XZ- oder YZ-Ebene eine krystallographische Symmetrieebene ist. Geben wir dem Aggregat s_{45} und den bei Drillungen um die X- und Y-Axe auftretenden s_{56} und s_{64} ebenfalls noch besondere Zeichen

$$s_{56} = \mathrm{T}', \qquad s_{64} = \mathrm{T}'', \qquad s_{45} = \mathrm{T}''', \tag{55}$$

und etwa den Namen der »Krümmungscoefficienten«, da sie die Krümmung der Hauptaxen bei der Torsion bestimmen und mit ihr verschwinden, so wären alle die 21 Aggregate s_{hk} nach ihren physikalischen Bedeutungen in anschaulicher Weise characterisirt.

Ausser obiger Deformation parallel der Z-Axe erleidet jeder Querschnitt auch noch eine Verzerrung in seiner Ebene; die begrenzende Ellipse wird zu einer Curve vierten Grades.

Da die Gleichungen der Elasticität homogen lineär in den u, v, w sind, so kann man sogleich die Verschiebungscomponenten für den Fall, dass Drehungsmomente Λ, M, N gleichzeitig auf die Grundflächen des elliptischen Cylinders wirken durch Summation derjenigen Werthe bilden, welche eintreten, wenn sie einzeln ausgeübt werden. So erhält man aus (42) und (54):

$$\begin{aligned}
u = {} & \frac{x^2}{a^2}(2M_1s_{13}+N_1s_{14})+\frac{2xy}{b^2}(2\Lambda_1s_{13}-N_1s_{15})+y^2\left[\frac{2\Lambda_1s_{63}}{b^2}-\frac{2M_1s_{23}}{a^2}-N_1\left(\frac{s_{42}}{a^2}+\frac{s_{56}}{b^2}\right)\right] \\
& +z\left\{(l-z)\left(\frac{2M_1s_{33}}{a^2}+\frac{N_1s_{34}}{a^2}\right)-y\left[\frac{2M_1s_{34}}{a^2}-\frac{2\Lambda_1s_{35}}{b^2}+N_1\left(\frac{s_{44}}{a^2}+\frac{s_{55}}{b^2}\right)\right]\right\}, \\
v = {} & \frac{y^2}{b^2}(2\Lambda_1s_{23}-N_1s_{25})+\frac{2xy}{a^2}(2M_1s_{23}+N_1s_{24})-x^2\left[\frac{2\Lambda_1s_{13}}{b^2}-\frac{2M_1s_{63}}{a^2}-N_1\left(\frac{s_{64}}{a^2}+\frac{s_{15}}{b^2}\right)\right] \\
& +z\left\{(l-z)\left(\frac{2\Lambda_1s_{33}}{b^2}-\frac{N_1s_{35}}{b^2}\right)+x\left[\frac{2M_1s_{34}}{a^2}-\frac{2\Lambda_1s_{35}}{b^2}+N_1\left(\frac{s_{44}}{a^2}+\frac{s_{55}}{b^2}\right)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{56}$$

$$w = \frac{x^2}{a^2}(2M_1 s_{35} + N_1 s_{45}) + xy\left[\frac{2\Lambda_1 s_{35}}{b^2} + \frac{2M_1 s_{34}}{a^2} + N_1\left(\frac{s_{44}}{a^2} - \frac{s_{55}}{b^2}\right)\right] + \frac{y^2}{b^2}(2\Lambda_1 s_{34} - N_1 s_{45})$$
$$-(l-2z)\left[2s_{33}\left(\frac{\Lambda_1 y}{b^2} + \frac{M_1 x}{a^2}\right) + N_1\left(\frac{x}{a^2}s_{34} - \frac{y}{b^2}s_{35}\right)\right].$$

Hieraus folgt der reciproke Krümmungsradius der Schwerpunktslinie $1/\rho_1 = g_1$ und $1/\rho_2 = g_2$ in der XZ- und YZ-Ebene übereinstimmend mit den allgemeinen Formeln (21):

$$\text{(57)} \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= g_1 = \frac{2}{a^2}(2M_1 s_{33} + N_1 s_{34}), \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= g_2 = \frac{2}{b^2}(2\Lambda_1 s_{33} - N_1 s_{35}), \end{aligned}$$

dazu die Grösse der Torsion:

$$\text{(58)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = h = \frac{2M_1 s_{34}}{a^2} - \frac{2\Lambda_1 s_{35}}{b^2} + N_1\left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right).$$

Zunächst bemerkt man, dass es jederzeit gelingt, durch eine Vereinigung von drei Drehungsmomenten Λ, M, N eine Biegung in einer beliebigen Ebene ohne Torsion, — also eine r e i n e B i e g u n g — hervorzubringen. Die Gesetze hierfür sind leicht angebbar.

Wichtiger ist der Fall, der bei der Beobachtung der Biegungen leicht eintreten kann, dass nur ein Drehungsmoment um die X- oder Y-Axe absichtlich ausgeübt wird, die Befestigung aber die im Allgemeinen eintretende Torsion verhindert, also ihrerseits ein Moment um die Längsaxe N erzeugt.

Sei z. B. $\Lambda = 0$ und wegen $h = 0$:

$$\frac{2M_1 s_{34}}{a^2} + N_1\left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right) = 0,$$

so entsteht eine r e i n e Biegung, die im Allgemeinen nicht in der XZ-Ebene stattfindet und für welche gilt:

$$\text{(59)} \qquad \left(\frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{2M_1}{a^2}\left(s_{33} - \frac{b^2 s_{34}^2}{b^2 s_{44} + a^2 s_{55}}\right);$$

f r e i e Biegung, durch ein allein wirkendes Moment M erzeugt, hätte ergeben:

$$\text{(59')} \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{2M_1 s_{33}}{a^2}.$$

Ebenso folgt für die reine Biegung durch ein Moment Λ:

$$\left(\frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{2\Lambda_1}{b^2}\left(s_{33} - \frac{a^2 s_{35}^2}{b^2 s_{44} + a^2 s_{55}}\right), \tag{60}$$

für die freie Biegung:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2\Lambda_1 s_{33}}{b^2}. \tag{60'}$$

Da nun s_{44} und s_{55} nach ihrer Eigenschaft als Coefficienten der Torsion stets positiv sein müssen, so ergiebt sich der Satz:

dass die Biegung bei behinderter Torsion (reine Biegung) stets kleiner ausfällt als die bei unbehinderter (freie Biegung).

Da man bei Biegungen in der XZ-Ebene die a-Achse, bei Biegungen in der YZ-Ebene die b-Axe als die kleinere wählen wird, so ist die Abweichung mitunter sehr merklich.

Ist hingegen, was ebenfalls gewissen Beobachtungsmethoden entspricht, bei der Torsion des Prismas die Biegung durch die Befestigung verhindert, so wird durch dieselbe ein Drehungsmoment Λ und M hervorgebracht, welches g_1 und g_2 gleich Null giebt, d. h. bestimmt ist durch:

$$2M_1 s_{33} + N_1 s_{34} = 0,$$
$$2\Lambda_1 s_{33} - N_1 s_{35} = 0,$$

demgemäss findet sich für die reine Torsion:

$$(h) = N_1 \left[\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2} - \frac{1}{s_{33}}\left(\frac{s_{34}^2}{a^2} + \frac{s_{35}^2}{b^2}\right)\right] \tag{61}$$

während für die freie Torsion galt:

$$h = N_1 \left(\frac{s_{44}}{a^2} + \frac{s_{55}}{b^2}\right), \tag{61'}$$

und dies ergiebt, da auch s_{33} als Coefficient der Längsdilatation (s. Gleichung (28)) stets positiv ist, den entsprechenden Satz:

dass die Torsion bei verhinderter Biegung (reine Torsion) stets kleiner ausfällt als die bei unbehinderter (freie Torsion).

Dass mit der Verfügung $X_x = Y_y = X_y = Z_z = 0$ und Y_z, Z_x

gleich linearen Functionen von x und y den Hauptgleichungen nur allein für den elliptischen Cylinder genügt werden kann, ist im Vorstehenden gezeigt worden; es bietet sich die Frage, ob durch eine einfache Erweiterung des Verfahrens, bei welchem für Y_z und Z_x beliebige andere Functionen von x und y gesetzt werden, die Lösung des Torsionsproblems für noch andere Querschnitte als den elliptischen erhalten werden kann. Ich will die Beantwortung sogleich für den noch allgemeineren Fall geben, dass Z_z nicht Null, sondern beliebig ist, da hierdurch die Hauptgleichungen nicht berührt werden, aber eine grössere Anzahl von Möglichkeiten gewonnen wird.

Das System Formeln (16) giebt in seiner dritten die Bestimmung von von Z_z durch Y_z und Z_x; setzt man den bezüglichen Werth in die übrigen fünf ein, so wird in ihnen die rechte Seite lineär in $Y_z = \partial\Omega/\partial x$, $Z_x = -\partial\Omega/\partial y$ und ausserdem in x und y. Die so erhaltenen Gleichungen führen auf zwei zur Bestimmung von Ω, wenn man den zweiten Differentialquotienten der ersten Formel nach y plus dem der ersten nach x von dem der letzten nach x und y, und ebenso den ersten Differentialquotienten der vierten Gleichung nach x abzieht von dem der fünften nach y. Die erste so erhaltene Formel ist lineär in $\partial^3\Omega/\partial x^3$, $\partial^3\Omega/\partial x^2\partial y$, $\partial^3\Omega/\partial x\partial y^2$, $\partial^3\Omega/\partial y^3$, die zweite in $\partial^2\Omega/\partial x^2$, $\partial^2\Omega/\partial x\partial y$, $\partial^2\Omega/\partial y^2$; letztere enthält ausserdem ein constantes Glied. Differentiirt man dieselbe einmal nach x und einmal nach y, so gelangt man zu drei homogenen Gleichungen in den vier dritten Differentialquotienten. Daraus folgt, dass $\partial^3\Omega/\partial x^3$, $\partial^3\Omega/\partial x^2\partial y$, $\partial^3\Omega/\partial x\partial y^2$ und $\partial^3\Omega/\partial y^3$ mit derselben Function proportional sein müssen; die Factoren sind Aggregate der s_{hk}, also Functionen der Elasticitätsconstanten. Wir setzen $\partial^3\Omega/\partial x^3 = a\varphi$, $\partial^3\Omega/\partial x^2\partial y = b\varphi$, $\partial^3\Omega/\partial x\partial y^2 = c\varphi$, $\partial^3\Omega/\partial y^3 = d\varphi$.

Diese Proportionalität ist aber nur möglich, wenn φ constant ist; es bestimmt sich also:

$$\Omega = \frac{\varphi}{6}(ax^3 + 3bx^2y + 3\,cxy^2 + 6dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k).$$

Da $\Omega = 0$ die Gleichung der Querschnittscurve darstellt, so erkennt man, dass die allgemeinste Form, zu welcher man gelangen kann so lange $X_x = Y_y = X_y = 0$ ist, eine Curve dritten Grades giebt, deren Parameter jedoch nicht willkürlich, sondern in den höchsten Gliedern Functionen der Elasticitätsconstanten sind.

Man kann daher den Satz aussprechen, dass nur bei der Drillung eines Cylinders von elliptischem Querschnitt stets die Componenten $X_x = Y_y = X_y = 0$ sind, d. h. nur bei diesem die Längsfasern des Cylinders auf einander keine Wirkung parallel X und Y ausüben.

Für jeden andern Querschnitt ist es also nöthig, alle drei Hauptgleichungen (1) und alle drei Randbedingungen (2) in Anwendung zu bringen; dies macht die Lösung des Torsionsproblemes für krystallinische Medien ausserordentlich schwierig. Wie man für rechteckige Prismen wenigstens einen Satz ableiten kann, der die Anwendung auf die Bestimmung der Torsionscoefficienten aus der Beobachtung gestattet habe ich an einer anderen Stelle gezeigt[1]).

Die Bedingungen des Problems vereinfachen sich sehr, wenn die Längsaxe Z normal zu einer elastischen Symmetrieebene steht, also nach (26) $s_{14} = s_{15} = s_{24} = s_{25} = s_{34} = s_{35} = s_{64} = s_{65} = 0$ ist. Dann kann man in den Gleichungen (16) $X_x = Y_y = X_y = Z_z = 0$ setzen und erhält dadurch:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 0,$$

$$-\left(g_2 \frac{l}{2} + hx + \frac{\partial W}{\partial y}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial x} s_{44} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} s_{45}, \quad -\left(g_1 \frac{l}{2} - hy + \frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial x} s_{54} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} s_{55}; \qquad (62)$$

die letzten beiden geben durch Elimination von W die Hauptgleichung für Ω:

$$0 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} s_{44} - 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \, \partial y} s_{45} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y} s_{55} + 2h; \qquad (63)$$

während $\overline{\Omega} = 0$ die Gleichung der Querschnittscurve giebt.

Unter Rücksicht auf die Befestigungsbedingungen (10) giebt (62) ferner: $U = 0$, $V = 0$

$$-W = \int \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} s_{44} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} s_{45} + g_2 \frac{l}{2} + hx\right) dy + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} s_{53} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} s_{55} + g_1 \frac{l}{2} - hy\right) dx\right]. \qquad (64)$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 29, p. 604, 1886.

III. Untersuchung des elastischen Verhaltens eines Cylinders aus krystallinischer Substanz, auf dessen Mantelfläche keine äussern Drucke wirken, wenn die in seinem Innern wirkenden Spannungen lineäre Functionen der Axenrichtung sind.

Die in dem vorstehenden Aufsatz angewandte Methode der Behandlung der elastischen Differentialgleichungen gestattet eine Erweiterung auf den Fall, dass die elastischen Kräfte im Innern des krystallinischen Cylinders lineäre Functionen der Längsrichtung sind und führt auch hier zu einer Reihe interessanter allgemeiner Gesetze und zur Lösung einer Reihe von auch für die Beobachtung wichtigen speciellen Fällen.

Ich gebe im Nachstehenden 1) die allgemeinen Eigenschaften der elastischen Kräfte und Verschiebungen in einem cylindrischen Körper, welcher den oben gestellten Bedingungen genügt, 2) Anwendungen der gefundnen Resultate auf die Behandlung des Problemes der Biegung eines Cylinders durch eine an einem Ende senkrecht zur Axe wirkende Zugkraft, sowie der Deformation eines vertikalen Cylinders durch sein eignes Gewicht.

1) Um auszudrücken, dass $X_x \ldots$ lineäre Functionen der Längsrichtung z des Cylinders sind, setzen wir:

$$(1) \qquad X_x = X_x^0 + zX_x', \quad Y_y = Y_y^0 + zY_y', \; \ldots .$$

worin nun X_x^0 und X_x' von z unsbhängig sind.

Die Hauptgleichungen zerfallen hiernach, da mit der gemachten Annahme constante äussere Kräfte $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ vereinbar sind, in

$$
\begin{aligned}
\varepsilon X &= \frac{\partial X^\circ_x}{\partial x} + \frac{\partial X^\circ_y}{\partial y} + X'_z, & 0 &= \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y},\\
\varepsilon Y &= \frac{\partial Y^\circ_x}{\partial x} + \frac{\partial Y^\circ_y}{\partial y} + Y'_z, & 0 &= \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y},\\
\varepsilon Z &= \frac{\partial Z^\circ_x}{\partial x} + \frac{\partial Z^\circ_y}{\partial y} + Z'_z, & 0 &= \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

die Bedingungen für die Mantelfläche in

$$
\begin{aligned}
0 &= X^\circ_x \cos(n,x) + X^\circ_y \cos(n,y), & 0 &= X'_x \cos(n,x) + X'_y \cos(n,y),\\
0 &= Y^\circ_x \cos(n,x) + Y^\circ_y \cos(n,y), & 0 &= Y'_x \cos(n,x) + Y'_y \cos(n,y),\\
0 &= Z^\circ_x \cos(n,x) + Z^\circ_y \cos(n,y), & 0 &= Z'_x \cos(n,x) + Z'_y \cos(n,y).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Für die Grundflächen $z = 0$ und $z = l$ gilt, falls die daselbst von Aussen wirkenden Componenten und Momente wieder mit A°, A u. s. f. bezeichnet werden:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}^\circ &= \int X^\circ_z dq, & \mathrm{B}^\circ &= \int Y^\circ_z dq, & \Gamma^\circ &= \int Z^\circ_z dq,\\
\mathrm{A} &= -\int X^\circ_z dq - l\int X'_z dq, & \mathrm{B} &= -\int Y^\circ_z dq - l\int Y'_z dq, & \Gamma &= -\int Z^\circ_z dq - l\int Z'_z dq;\\
\Lambda^\circ &= \int Z^\circ_z y dq, & \mathrm{M}^\circ &= \int Z^\circ_z x dq, & \mathrm{N}^\circ &= \int (Y^\circ_z x - X^\circ_z y)\, dq,\\
\Lambda &= -\int Z^\circ_z y dq - l\int Z'_z y dq - \mathrm{B}l, & \mathrm{M} &= -\int Z^\circ_z x dq - l\int Z'_z x dq - \mathrm{A}l, & \mathrm{N} &= -\int (Y^\circ_z x - X^\circ_z y) dq - l\int (Y'_z x - X'_z y) dq.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Da nun aus allgemeinen statischen Gründen gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}^\circ + \mathrm{A} + \varepsilon lQX = \mathrm{B}^\circ + \mathrm{B} + \varepsilon lQY = \Gamma^\circ + \Gamma + \varepsilon lQZ = 0,\\
&\Lambda^\circ + \Lambda + \varepsilon lQ\left(Z\eta - Y\frac{l}{2}\right) = \mathrm{M}^\circ + \mathrm{M} + \varepsilon lQ\left(Z\xi - X\frac{l}{2}\right) = \mathrm{N}^\circ + \mathrm{N} + \varepsilon lQ(Y\xi - X\eta) = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

worin ξ und η die Coordinaten des Schwerpunkts des Cylinderquerschnitts bezeichnen, so folgt:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon QX = \int X'_z dq, \quad \varepsilon QY = \int Y'_z dq, \quad \varepsilon QZ = \int Z'_z dq,\\
&\varepsilon Q\left(Z\eta - Y\frac{l}{2}\right) = \int Z'_z y dq + \mathrm{B}, \quad \varepsilon Q\left(Z\xi - X\frac{l}{2}\right) = \int Z'_z x dq + \mathrm{A},\\
&\qquad \varepsilon Q(Y\xi - X\eta) = \int (Y'_z x - X'_z y)\, dq.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Die Gleichungen (2) und (3) für die Componenten $X'_x \ldots$ haben genau die Form wie (1) und (2) des vorigen Theiles, es gelten daher sogleich für jene die dort mit (4) bezeichneten Sätze:

$$
(7)\quad \begin{aligned}
&\int X'_x\,dq = \int X'_y\,dq = \int Y'_y\,dq = \int X'_z\,dq = \int Y'_z\,dq = 0\\
&\int xX'_x\,dq = \int xX'_y\,dq = \int xY'_y\,dq = \int xX'_z\,dq = 0\\
&\int yX'_x\,dq = \int yX'_y\,dq = \int yY'_y\,dq = \int yY'_z\,dq = 0\\
&\qquad \int yX'_y\,dq = -\int xY'_z\,dq.
\end{aligned}
$$

Vergleicht man hieraus den vierten und fünften Werth mit dem ersten und zweiten in (6) so ergiebt sich:

$$
(8)\qquad X = Y = 0;
$$

mit Druckkräften, welche lineäre Functionen von z sind, sind also nur äussere Kräfte parallel der Z-Axe vereinbar. Aus (5) und (6) kömmt demgemäss zu (7) noch hinzu:

$$
(9)\quad \begin{aligned}
&\mathrm{A}^\circ + \mathrm{A} = \mathrm{B}^\circ + \mathrm{B} = \Gamma^\circ + \Gamma + \varepsilon l Q Z = 0,\\
&\Lambda^\circ + \Lambda + \varepsilon l Q Z \eta = \mathrm{M}^\circ + \mathrm{M} + \varepsilon l Q Z \xi = \mathrm{N}^\circ + \mathrm{N} = 0,\\
&\int X'_z\,dq = \int Y'_z\,dq = 0, \quad \int Z'_z\,dq = \varepsilon Q Z,\\
&\int yZ'_z\,dq = \varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}, \quad \int xZ'_z\,dq = \varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}, \quad \int (xY'_z - yX'_z)\,dq = 0,
\end{aligned}
$$

letzteres giebt mit der letzten Gleichung (7):

$$
\int yX'_z\,dq = -\int xY'_z\,dq = 0.
$$

Gemäss (8) sind nun die Gleichungen (2) für die X^o_x . . zu vereinfachen; sie weichen nichtsdestoweniger von den für X'_x . . . gültigen erheblich ab und liefern für die Integrale über X^o_x . . . ganz andere Werthe.

So ist unter Rücksicht auf (7) und unter Einführung der Bezeichnungen

$$
\int x^2\,dq = Q\varkappa_y^2, \quad \int y^2\,dq = Q\varkappa_x^2, \quad \int xy\,dq = Q\lambda^2:
$$

$$
(10)\quad \begin{aligned}
&\int X^\circ_x\,dq = \int X^\circ_y\,dq = \int Y^\circ_y\,dq = 0\\
&\int xX^\circ_x\,dq = \int \frac{x^2}{2} X'_z\,dq, \quad \int xY^\circ_x\,dq = \int \frac{x^2}{2} Y'_z\,dq, \quad \int xZ^\circ_x\,dq = \int \frac{x^2}{2} Z'_z\,dq - \varepsilon Z Q \frac{\varkappa_y^2}{2},\\
&\int yX^\circ_y\,dq = \int \frac{y^2}{2} X'_z\,dq, \quad \int yY^\circ_y\,dq = \int \frac{y^2}{2} Y'_z\,dq, \quad \int yZ^\circ_y\,dq = \int \frac{y^2}{2} Z'_z\,dq - \varepsilon Z Q \frac{\varkappa_x^2}{2},\\
&\int xY^\circ_y\,dq = \int xyY'_z\,dq, \quad \int yX^\circ_x\,dq = \int xyX'_z\,dq,\\
&\int xZ^\circ_y\,dq + \int yZ^\circ_x\,dq = \int xyZ'_z\,dq - \varepsilon Z Q \lambda^2.
\end{aligned}
$$

Dagegen bleibt aus (4) und (9):

$$\int X_z^\circ dq = \mathrm{A}^\circ = -\mathrm{A}, \int Y_z^\circ dq = \mathrm{B}^\circ = -\mathrm{B}, \int Z_z^\circ dq = \Gamma^\circ = -\Gamma - \varepsilon l Q Z, \qquad (11)$$
$$\int y Z_z^\circ dq = \Lambda^\circ = -\Lambda - \varepsilon l Q Z \eta, \int x Z_z^\circ dq = \mathrm{M}^\circ = -\mathrm{M} - \varepsilon l Q Z \xi, \int (x Y_z^\circ - y X_z^\circ) dq = \mathrm{N}^\circ = -\mathrm{N}.$$

Letzteres giebt mit der letzten Formel (10) auch:

$$2\int x Z_y^\circ dq = -\mathrm{N} + \int xy Z_z' dq - \varepsilon Z Q \lambda^2,$$
$$2\int y Z_x^\circ dq = +\mathrm{N} + \int xy Z_z' dq - \varepsilon Z Q \lambda^2.$$

Für Behandlung specieller Probleme ist zu bemerken, dass die Gleichungen (7) und (10) aus den Hauptgleichungen (2) und den Randbedingungen (3) folgen, die Gleichungen (9) und (11) aber die Bedingungen für die Grundflächen darstellen.

Sind die Druckkräfte lineäre Functionen von z, so muss dasselbe für die Deformationen $x_x \ldots$ gelten, z. B. sein:

$$x_x = x_x^\circ + z x_x', \qquad y_y = y_y^\circ + z y_y', \quad \ldots .$$

Aus diesen Gleichungen folgt für u, v, w die Form:

$$\begin{aligned} u &= U + z U_1 + \frac{z^2}{2} U_2 + \frac{z^3}{6} U_3, \\ v &= V + z V_1 + \frac{z^2}{2} V_2 + \frac{z^3}{6} V_3, \\ w &= W + z W_1 + \frac{z^2}{2} W_2, \end{aligned} \qquad (12)$$

worin nun wegen:

$$\begin{aligned}
x_x &= x_x^\circ + z x_x' = \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial U_3}{\partial x}, \\
y_y &= y_y^\circ + z y_y' = \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial V_3}{\partial y}, \\
z_z &= z_z^\circ + z z_z' = W_1 + z W_2, \\
y_z &= y_z^\circ + z y_z' = \left(V_1 + \frac{\partial W}{\partial y}\right) + z \left(V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial y}\right) + \frac{z^2}{2} \left(V_3 + \frac{\partial W_2}{\partial y}\right), \\
z_x &= z_x^\circ + z z_x' = \left(U_1 + \frac{\partial W}{\partial x}\right) + z \left(U_2 + \frac{\partial W_1}{\partial x}\right) + \frac{z^2}{2} \left(U_3 + \frac{\partial W_2}{\partial x}\right), \\
x_y &= x_y^\circ + z x_y' = \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) + z \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\right) + \frac{z^3}{6} \left(\frac{\partial U_3}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

gelten muss:

$$\frac{\partial U_3}{\partial x}=\frac{\partial V_3}{\partial y}=\frac{\partial U_3}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial x}=0,\quad V_3+\frac{\partial W_2}{\partial y}=U_3+\frac{\partial W_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{\partial V_2}{\partial y}=\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial V_2}{\partial x}=0.$$

Diese Gleichungen fordern für U_3 und V_3 Constanten, für U_2, V_2, W_2 lineäre Functionen in x und y; wir setzen

$$U_3=-g_1,\quad V_3=-g_2,\quad U_2=f_1-hy,\quad V_2=f_2+hx,\quad W_2=g_1x+g_2y+g_3.$$

Die Befestigung sei hier so gewählt, dass für $x=y=z=0$:

$$u=v=w=0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ist; d. h. es soll der Coordinatenanfangspunkt in seiner Lage und das erste Element der Z-Axe in seiner Richtung festgehalten werden, ausserdem die Umgebung desselben keine Drehung um die Z-Richtung erleiden.

Dann ist also:

$$\begin{aligned} u &= U+zU_1+\frac{z^2}{2}(f_1-hy)-\frac{z^3}{6}g_1,\\ v &= V+zV_1+\frac{z^2}{2}(f_2+hx)-\frac{z^3}{6}g_2,\\ w &= W+zW_1+\frac{z^2}{2}(g_1x+g_2y+g_3), \end{aligned} \tag{13}$$

und zugleich für $x=y=0$:

$$U^0=V^0=W^0=0,\quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^0=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^0 \quad\text{und}\quad U_1^0=V_1^0=0.$$

Hiernach haben wir auch die Gleichungen der Druckcomponenten

$$-X_x=D_{11}x_x+D_{12}y_y+D_{13}z_z+D_{14}y_z+D_{15}z_x+D_{16}x_y$$

in einen mit z proportionalen und einen von z unabhängigen Theil zu zerlegen. Z. B.

$$\begin{aligned} -X_x^0 &= D_{11}x_x^0+D_{12}y_y^0+D_{13}z_z^0+D_{14}y_z^0+D_{15}z_x^0+D_{16}x_y^0,\\ -X_x' &= D_{11}x_x'+D_{12}y_y'+D_{13}z_z'+D_{14}y_z'+D_{15}z_x'+D_{16}x_y'. \end{aligned} \tag{14}$$

Letzteres System Gleichungen denken wir nach $-x_x'\ldots$ aufgelöst und erhalten durch Einsetzen der bezüglichen Werthe aus (14):

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial U_1}{\partial x} &= X'_x s_{11} + Y'_y s_{12} + Z'_z s_{13} + Y'_z s_{14} + Z'_x s_{15} + X'_y s_{16}\,, \\
-\frac{\partial V_1}{\partial y} &= X'_x s_{21} + Y'_y s_{22} + Z'_z s_{23} + Y'_z s_{24} + Z'_x s_{25} + X'_y s_{26}\,, \\
-(g_1 x + g_2 y + g_3) &= X'_x s_{31} + Y'_y s_{32} + Z'_z s_{33} + Y'_z s_{34} + Z'_x s_{35} + X'_y s_{36}\,, \\
-\left(f_2 + hx + \frac{\partial W_1}{\partial y}\right) &= X'_x s_{41} + Y'_y s_{42} + Z'_z s_{43} + Y'_z s_{44} + Z'_x s_{45} + X'_y s_{46}\,, \\
-\left(f_1 - hy + \frac{\partial W_1}{\partial x}\right) &= X'_x s_{51} + Y'_y s_{52} + Z'_z s_{53} + Y'_z s_{54} + Z'_x s_{55} + X'_y s_{56}\,, \\
-\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) &= X'_x s_{61} + Y'_y s_{62} + Z'_z s_{63} + Y'_z s_{64} + Z'_x s_{65} + X'_y s_{66}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dq und integrirt über den ganzen Querschnitt, so erhält man bei Einführung der Coordinaten ξ und η des Schwerpunktes des Querschnittes in Rücksicht auf (7) und (9)

$$
\begin{gathered}
-\int \frac{\partial U_1}{\partial x} dq = \varepsilon Q Z s_{13}, \quad -\int \frac{\partial V_1}{\partial y} dq = \varepsilon Q Z s_{23}, \quad -(g_1 \xi + g_2 \eta + g_3) = \varepsilon Z s_{33}, \\
-\left((f_2 + h\xi)Q + \int \frac{\partial W_1}{\partial y} dq\right) = \varepsilon Q Z s_{43}, \quad -\left((f_1 - h\eta) + \int \frac{\partial W_1}{\partial x} dq\right) = \varepsilon Q Z s_{53}, \quad -\int \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) dq = \varepsilon Q Z s_{63}\,;
\end{gathered}
\tag{16}
$$

also alle diese Grössen ausgedrückt durch die von aussen wirkende Z-Componente.

Integrirt man hingegen nach vorhergegangener Multiplication mit x und y und benutzt die früheren Abkürzungen $\varkappa_x^2$, $\varkappa_y^2$ und λ^2 so erhält man ähnlich nach (7) und (9):

$$
\begin{gathered}
-\int \frac{\partial U_1}{\partial x} x dq = (\varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}) s_{13}, \quad -\int \frac{\partial V_1}{\partial y} x dq = (\varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}) s_{23}, \quad -\int \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) x dq = (\varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}) s_{63}, \\
-\int \frac{\partial U_1}{\partial x} y dq = (\varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}) s_{13}, \quad -\int \frac{\partial V_1}{\partial y} y dq = (\varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}) s_{23}, \quad -\int \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) y dq = (\varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}) s_{63}, \\
-(g_1 \varkappa_y^2 + g_2 \lambda^2 + g_3 \xi) Q = (\varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}) s_{33}, \quad -(g_1 \lambda^2 + g_2 \varkappa_x^2 + g_3 \eta) Q = (\varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}) s_{33}, \\
-\left((f_2 \xi + h \varkappa_y^2) Q + \int \frac{\partial W_1}{\partial y} x dq\right) = (\varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}) s_{43}, \quad -\left((f_1 \xi - h \lambda^2) Q + \int \frac{\partial W_1}{\partial x} x dq\right) = (\varepsilon Q Z \xi - \mathrm{A}) s_{53}, \\
-\left((f_2 \eta + h \lambda^2) Q + \int \frac{\partial W_1}{\partial y} y dq\right) = (\varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}) s_{43}, \quad -\left((f_1 \eta - h \varkappa_x^2) Q + \int \frac{\partial W_1}{\partial x} y dq\right) = (\varepsilon Q Z \eta - \mathrm{B}) s_{53}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Hierdurch ist eine Reihe von Constanten ganz allgemein vollständig bestimmt, im Uebrigen geben die vorstehenden Gleichungen den allgemeinsten Zusammenhang zwischen den Functionen U_1, V_1, W_1 und A, B, Z an; die ersteren hängen ausschliesslich von den letzteren ab.

Wir erhalten aus (16) und (17) durch Einführung der auf die Flächeneinheit bezogenen Druckkräfte $A_1 = A/Q$, $B_1 = B/Q$:

$$
\begin{aligned}
-(g_1 \xi + g_2 \eta + g_3) &= \varepsilon Z s_{33},\\
-(g_1 \varkappa_y^2 + g_2 \lambda^2 + g_3 \xi) &= (\varepsilon Z \xi - A_1) s_{33},\\
-(g_1 \lambda^2 + g_2 \varkappa_x^2 + g_3 \eta) &= (\varepsilon Z \eta - B_1) s_{33},
\end{aligned}
$$

und falls wir wiederum, wie im vorigen Theil, die Coordinatenaxen X, Y parallel den durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Hauptträgheitsaxen X^0, Y^0 legen, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit zulässig ist, hieraus:

$$
(18) \quad g_1 \varkappa_y^{o2} = A_1 s_{33}, \quad g_2 \varkappa_x^{o2} = B_1 s_{33}, \quad g_3 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(\varepsilon Z \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} + A_1 \xi \varkappa_x^{o2} + B_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{33};
$$

hierin sind $\varkappa_x^{o2}$, $\varkappa_y^{o2}$ die auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogenen Hauptträgheitsradien.

Diese Formeln bestimmen, wie der Vergleich mit (13) zeigt, in u, v, w die höchsten Glieder allgemein und vollständig; ist der Cylinder im Schwerpunkt des ersten Querschnittes befestigt, so wird noch einfacher wegen $\xi = \eta = 0$:

$$
(19) \qquad g_1 \varkappa_y^{o2} = A_1 s_{33}, \qquad g_2 \varkappa_x^{o2} = B_1 s_{33}, \qquad g_3 = -\varepsilon Z s_{33}.
$$

Den Gleichungen (15) und (17) ordnen sich ganz ähnliche zu für die Theile der Componenten X_x^o, . . ., für welche die Sätze (10) und (11) gelten; wir wollen dieselben aber, da sie zu keinen allgemein interessanten Bestimmungen führen, hier nicht ausführlich mittheilen, sondern nur das System Formeln aufstellen, welches (15) für die X_x^o . . . entspricht.

Wir erhalten nämlich:

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x} &= X_x^o s_{11} + Y_y^o s_{12} + Z_z^o s_{13} + Y_z^o s_{14} + Z_x^o s_{15} + X_y^o s_{16},\\
-\frac{\partial V}{\partial y} &= X_x^o s_{21} + Y_y^o s_{22} + Z_z^o s_{23} + Y_z^o s_{24} + Z_x^o s_{25} + X_y^o s_{26},\\
-W_1 &= X_x^o s_{31} + Y_y^o s_{32} + Z_z^o s_{33} + Y_z^o s_{34} + Z_x^o s_{35} + X_y^o s_{36},\\
-\left(V_1 + \frac{\partial W}{\partial y}\right) &= X_x^o s_{41} + Y_y^o s_{42} + Z_z^o s_{43} + Y_z^o s_{44} + Z_x^o s_{45} + X_y^o s_{46},\\
-\left(U_1 + \frac{\partial W}{\partial x}\right) &= X_x^o s_{51} + Y_y^o s_{52} + Z_z^o s_{53} + Y_z^o s_{54} + Z_x^o s_{55} + X_y^o s_{56},\\
-\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) &= X_x^o s_{61} + Y_y^o s_{62} + Z_z^o s_{63} + Y_z^o s_{64} + Z_x^o s_{65} + X_y^o s_{66}.
\end{aligned}
$$

2) Die Integration unserer Differentialgleichungen zerfällt in zwei Theile; zuerst sind die Antheile der Kräfte $X'_x, \ldots$ resp. der Deformationen $x'_x, \ldots$, welche in z multiplicirt sind, zu bestimmen; durch sie gelangt man dann zu den von z unabhängigen Theilen $X^o_x, \ldots$ und $x^o_x, \ldots$.

Die für $X'_x, \ldots$ geltenden Formeln (2), (3) und (9) stimmen genau mit denen überein, die im vorigen Theile die gesammten $X_x, \ldots$ durch die ausgeübten Componenten und Momente bestimmen, nämlich mit (1), (2) und (3) ebenda; nur steht an Stelle von $-\Gamma$ hier εQZ, von $-\mathrm{A}$ hier $\varepsilon QZ\eta - \mathrm{B}$, von $-\mathrm{M}$ hier $\varepsilon QZ\xi - \mathrm{A}$, an Stelle von N aber hier Null[1]). Da nun für ein verschwindendes Moment N die frühere Aufgabe ganz allgemein für alle Querschnitte lösbar war, so gilt dasselbe hier von dem ersten Theile des neuen Problemes, — die dortigen Integrale sind auf dasselbe einfach zu übertragen. Nur allein die Bedingungen der Befestigung, welche im früheren Problem sechs Constanten bestimmten, kommen hier in anderer Weise und nur unvollständig zur Anwendung; dies thut aber der Allgemeingültigkeit unserer Lösung keinen Eintrag, denn diese Bedingungen bestimmen nicht die Art der Deformation, sondern nur die definitive Lage des deformirten Körpers.

Nach dem Gesagten genügen wir also den Bedingungen für die $X'_x, \ldots$ indem wir diese Grössen alle ausser Z'_z gleich Null setzen; für letzteres folgt dann aus (15):

$$-Z'_z s_{33} = g_1 x + g_2 y + g_3$$

oder unter Rücksicht auf (18):

$$-Z'_z = \frac{\mathrm{A}_1}{\chi^{o2}_y}(x-\xi) + \frac{\mathrm{B}_1}{\chi^{o2}_x}(y-\eta) - \varepsilon Z. \tag{21}$$

Ferner setzen wir, wie früher für U, V, W, jetzt für U_1, V_1, W_1,

---

1) Dies hatte den Grund, dass, wenn auch in unserm Falle Deformationen und Kräfte mit z variiren, sie doch längs unendlich kleiner Stücke dz als constant angesehen werden können, also ein zwischen zwei Querschnitten liegendes Element als ein Cylinder der im vorigen Theil behandelten Art.

Functionen zweiten Grades, und zwar da für $x = y = 0$, $U_1 = V_1 = 0$ sein soll:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
U_1 &= a_1 \frac{x^2}{2} + b_1 xy + c_1 \frac{y^2}{2} + d_1 x + c_1 y, \\
V_1 &= a_2 \frac{x^2}{2} + b_2 xy + c_2 \frac{y^2}{2} + d_2 x + e_2 y, \\
W_1 &= a_3 \frac{x^2}{2} + b_3 xy + c_3 \frac{y^2}{2} + d_3 x + e_3 y + f_3;
\end{aligned}
$$

dann gelten für die Constanten nach (16) und (17) folgende Gleichungen:

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 = -\varepsilon Z s_{13}, && b_2 \xi + c_2 \eta + c_2 = -\varepsilon Z s_{23}, \\
&a_1 \varkappa_y^2 + b_1 \lambda^2 + d_1 \xi = -(\varepsilon Z \xi - \mathrm{A}_1) s_{13}, && b_2 \varkappa_y^2 + c_2 \lambda^2 + e_2 \xi = -(\varepsilon Z \xi - \mathrm{A}_1) s_{23}, \\
&a_1 \lambda^2 + b_1 \varkappa_x^2 + d_1 \eta = -(\varepsilon Z \eta - \mathrm{B}_1) s_{13}, && b_2 \lambda^2 + c_2 \varkappa_x^2 + e_2 \eta = -(\varepsilon Z \eta - \mathrm{B}_1) s_{23}, \\
&(b_1 + a_2)\xi + (c_1 + b_2)\eta + (e_1 + d_2) = -\varepsilon Z s_{63}, \\
&(b_1 + a_2)\varkappa_y^2 + (c_1 + b_2)\lambda^2 + (e_1 + d_2)\xi = -(\varepsilon Z \xi - \mathrm{A}_1) s_{63}, \\
&(b_1 + a_2)\lambda^2 + (c_1 + b_2)\varkappa_x^2 + (e_1 + d_2)\eta = -(\varepsilon Z \eta - \mathrm{B}_1) s_{63}, \\
&(b_3 + h)\xi + c_3 \eta + (f_2 + e_3) = -\varepsilon Z s_{43}, && a_3 \xi + (b_3 - h)\eta + (f_1 + d_3) = -\varepsilon Z s_{53}, \\
&(b_3 + h)\varkappa_y^2 + c_3 \lambda^2 + (f_2 + e_3)\xi = -(\varepsilon Z \xi - \mathrm{A}_1) s_{43}, && a_3 \varkappa_y^2 + (b_3 - h)\lambda^2 + (f_1 + d_3)\xi = -(\varepsilon Z \xi - \mathrm{A}_1) s_{53}, \\
&(b_3 + h)\lambda^2 + c_3 \varkappa_x^2 + (f_2 + e_3)\eta = -(\varepsilon Z \eta - \mathrm{B}_1) s_{43}, && a_3 \lambda^2 + (b_3 - h)\varkappa_x^2 + (f_1 + d_3)\eta = -(\varepsilon Z \eta - \mathrm{B}_1) s_{53}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&a_1 \varkappa_y^{o2} = \mathrm{A}_1 s_{13}, && b_1 \varkappa_x^{o2} = \mathrm{B}_1 s_{13}, && d_1 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(\varepsilon Z \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} + \mathrm{A}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \mathrm{B}_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{13}, \\
&b_2 \varkappa_y^{o2} = \mathrm{A}_1 s_{23}, && c_2 \varkappa_x^{o2} = \mathrm{B}_1 s_{23}, && e_2 \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(\varepsilon Z \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} + \mathrm{A}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \mathrm{B}_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{23}, \\
&(b_1 + a_2) \varkappa_y^{o2} = \mathrm{A}_1 s_{63}, && (c_1 + b_2) \varkappa_x^{o2} = \mathrm{B}_1 s_{63}, && (e_1 + d_2) \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(\varepsilon Z \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} + \mathrm{A}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \mathrm{B}_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{63}, \\
&(b_3 + h)\, \varkappa_y^{o2} = \mathrm{A}_1 s_{43}, && c_3 \varkappa_x^{o2} = \mathrm{B}_1 s_{43}, && (f_2 + c_3) \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(\varepsilon Z \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} + \mathrm{A}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \mathrm{B}_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{43}, \\
&a_3 \varkappa_y^{o2} = \mathrm{A}_1 s_{53}, && (b_3 - h) \varkappa_x^{o2} = \mathrm{B}_1 s_{53}, && (f_1 + d_3) \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} = -(\varepsilon Z \varkappa_x^{o2} \varkappa_y^{o2} + \mathrm{A}_1 \xi \varkappa_x^{o2} + \mathrm{B}_1 \eta \varkappa_y^{o2}) s_{53}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen bestimmen U_1, V_1 vollständig bis auf die eine der beiden Constanten e_1 und d_2, für die sich hier nur die Summe gegeben findet. Man kann

$$
e_1 = \frac{(e_1 + d_2)}{2} - \frac{(d_2 - e_1)}{2}, \quad d_2 = \frac{(e_1 + d_2)}{2} + \frac{(d_2 - e_1)}{2} \text{ und } \frac{(d_2 - e_1)}{2} = h'
$$

setzen, dann ist in U_1 und V_1 einzig dieses h' unbestimmt; aber da es das Maass einer gleichförmigen Drillung ist, wie h dasjenige der ungleichförmigen, so kann man annehmen, dass es verschwindet, wenn Γ, Λ, M und N gleich Null ist. In W_1 bleibt f_3, e_3 und d_3 unbestimmt, die obigen Formeln bestimmen nur $f_2 + e_3$, $f_1 + d_3$.

Einige dieser Grössen lassen sich aber noch ganz allgemein finden. Die dritte der Gleichungen (20) lautet:

$$-W_1 = X_x^o s_{31} + Y_y^o s_{32} + Z_z^o s_{33} + Y_z^o s_{34} + Z_x^o s_{35} + X_y^o s_{36};$$

setzt man hier den Werth von W_1 ein und integrirt die Gleichung einmal direct und dann, nachdem man sie mit x oder y multiplicirt hat, über den Querschnitt, so erhält man drei Gleichungen, die d_3, e_3 und f_3 völlig bestimmen. Dabei sind die in (10) zusammengestellten Werthe unter Rücksicht auf $Y_z' = X_z' = 0$ zu benutzen.

Wir führen die Abkürzungen ein

$$\int x^3 dq = Q\mu_y^3, \quad \int y^3 dq = Q\mu_x^3, \quad \int x^2 y\, dq = Q\nu_x^3, \quad \int y^2 x\, dq = Q\nu_y^3,$$

worin die mit dem Index y versehenen Grössen μ und ν verschwinden, wenn der Querschnitt in Bezug auf die Y-Axe symmetrisch ist, ebenso die mit x versehenen, wenn in Bezug auf die X-Axe.

Dann erhalten wir zunächst:

$$\frac{1}{2}a_3\varkappa_y^2 + b_3\lambda^2 + \frac{1}{2}c_3\varkappa_x^2 + d_3\xi + e_3\eta + f_3 = (\Gamma_1 + \varepsilon l Z)s_{33} + \mathrm{B}_1 s_{34} + \mathrm{A}_1 s_{35},$$

$$\frac{1}{2}a_3\mu_y^3 + b_3\nu_x^3 + \frac{1}{2}c_3\nu_y^3 + d_3\varkappa_y^2 + e_3\lambda^2 + f_3\xi \tag{25}$$

$$= (\mathrm{M}_1 + \varepsilon l Z\xi)s_{33} + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{N}_1 - \frac{1}{Q}\int xyZ_z' dq + \varepsilon Z\lambda^2\Big)s_{34} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Q}\int x^2 Z_z' dq - \varepsilon Z\varkappa_y^2\Big)s_{35},$$

$$\frac{1}{2}a_3\nu_x^3 + b_3\nu_y^3 + \frac{1}{2}c_3\mu_x^3 + d_3\lambda^2 + e_3\varkappa_x^2 + f_3\eta$$

$$= (\Lambda_1 + \varepsilon l Z\eta)s_{33} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{Q}\int y^2 Z_z' dq - \varepsilon Z\varkappa_x^2\Big)s_{34} - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{N}_1 + \frac{1}{Q}\int xyZ_z' dq - \varepsilon Z\lambda^2\Big)s_{35};$$

dies vereinfacht sich, wenn auf die freie Grundfläche nur die Kräfte A und B wirken, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, da die Wirkung einer Componente Γ und der auf beiden Grundflächen in gleicher Stärke ausgeübten Λ, M, N im vorigen Theile völlig erledigt ist. Dann ist nämlich

$$\mathrm{M}_1 = -l\mathrm{A}_1, \quad \Lambda_1 = -l\mathrm{B}_1, \quad \mathrm{N}_1 = 0, \quad \Gamma_1 = 0$$

zu setzen und man erhält, da

$$\varkappa_x^2 = \varkappa_x^{o2} + \eta^2, \quad \varkappa_y^2 = \varkappa_y^{o2} + \xi^2, \quad \lambda^2 = \xi\eta \quad \text{ist:}$$

$$f_3 = \varepsilon l Z s_{33} + \frac{A_1}{2\varkappa_y^{o2}}\left[2l\xi s_{33} + \varkappa_y^{o2}\left(1+\frac{\varkappa_y^{o2}}{\xi^2}+\frac{\varkappa_x^{o2}}{\eta^2}\right)s_{35}\right] + \frac{B_1}{2\varkappa_x^{o2}}\left[2l\eta s_{33} + \varkappa_x^{o2}\left(1+\frac{\xi^2}{\varkappa_y^{o2}}+\frac{\eta^2}{\varkappa_x^{o2}}\right)s_{34}\right],$$

$$(26)\quad d_3 = -\frac{A_1}{\varkappa_y^{o2}}(\xi s_{35} + l s_{33}) - \frac{B_1}{2}\left(\frac{\xi s_{34}}{\varkappa_y^{o2}} + \frac{\eta s_{35}}{\varkappa_x^{o2}}\right),$$

$$e_3 = -\frac{A_1}{2}\left(\frac{\xi s_{34}}{\varkappa_y^{o2}} + \frac{\eta s_{35}}{\varkappa_x^{o2}}\right) - \frac{B_1}{\varkappa_x^{o2}}(\eta s_{34} + l s_{33}).$$

Es sind hiernach die constanten und linearen Glieder in U_1, V_1 und W_1, von der Lage der Befestigungsstelle abhängig, alle übrigen nach (24) von ihr unabhängig. Die gefundenen d_3 und e_3 bestimmen nun mit (24) auch f_1 und f_2 vollständig und allgemein.

Wir beschränken uns nun auf den Fall, dass die Befestigung des Cylinders im Schwerpunkt des ersten Querschnittes angreife. Dann ist

$$\xi = \eta = 0, \qquad \varkappa_x^o = \varkappa_x, \qquad \varkappa_y^o = \varkappa_y$$

und man erhält aus (26):

$$(27)\quad f_3 = \varepsilon l Z s_{33} + \frac{1}{2}B_1 s_{43} + \frac{1}{2}A_1 s_{53}, \qquad d_3\varkappa_y^2 = -A_1 l s_{33}, \qquad e_3\varkappa_x^2 = -B_1 l s_{33}.$$

Um das Gesammtresultat deutlich zu übersehen, empfiehlt es sich, die Werthe von u, v, w für die speciellen Fälle aufzustellen, dass entweder nur A oder nur B oder nur Z von Null verschieden ist; die Summation derselben giebt den Werth für die gleichzeitige Einwirkung mehrerer.

Sei zunächst nur eine Kraft A parallel der X-Axe wirksam, so gilt unter Benutzung der früheren Abkürzung $A/Q = A_1$:

$$u_A = U_A + \frac{A_1}{2\varkappa_y^2}\left\{z(x^2 s_{13} - y^2 s_{23}) - z^2\left[\frac{1}{2}y s_{43} - \left(l - \frac{z}{3}\right)s_{33}\right]\right\}$$

$$(28)\qquad v_A = V_A + \frac{A_1}{2\varkappa_y^2}\left[z(x^2 s_{63} + 2xy s_{23}) + \frac{1}{2}z^2 x s_{43}\right]$$

$$w_A = W_A + \frac{A_1}{2\varkappa_y^2}\left[z(x^2 s_{53} + xy s_{43} - 2lx s_{33} + \varkappa_y^2 s_{53}) + z^2 x s_{33}\right];$$

wirkt nur eine Kraft B parallel der Y-Axe und ist wieder $B/Q = B_1$, so gilt analog:

$$
\begin{aligned}
u_B &= U_B + \frac{B_1}{2\varkappa_x^2}\left[z\,(2xy\,s_{13} + y^2 s_{63}) + \frac{1}{2} z^2 y\,s_{53}\right],\\
v_B &= V_B + \frac{B_1}{2\varkappa_x^2}\left\{z\,(y^2 s_{23} - x^2 s_{13}) - z^2\left[\frac{1}{2} x s_{53} - \left(l - \frac{z}{3}\right) s_{33}\right]\right\},\\
w_B &= W_B + \frac{B_1}{2\varkappa_x^2}\left[z\,(xy\,s_{53} + y^2 s_{43} - 2ly\,s_{33} + \varkappa_x^2 s_{43}) + z^2 y\,s_{33}\right].
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Diese Gleichungen lösen das Problem der Biegung durch ein angehangenes Gewicht — der sogenannten ungleichförmigen Biegung — für einen Cylinder von beliebigem Querschnitt und aus einem beliebigen Krystall geschnitten bis auf drei für alle Querschnitte desselben Cylinders constante Glieder, welche in der Axe verschwinden. Diese sind für die Beobachtungen an rechteckigen oder irgendwie doppeltsymmetrischen Prismen streng ohne Einfluss und demnach enthalten die obigen Formeln die strenge Theorie der Bestimmung von Elasticitätsconstanten durch die Messung von Biegungen. Da das erste Element der Z-Axe seine Richtung bei der Biegung beibehält, so kann man die Formeln auch auf den Fall anwenden, dass ein Stab von der Länge $2l = L$ in der Mitte belastet und an beiden Enden unterstützt ist.

Die Gleichungen für die Curve, in welche die Schwerpunktslinie $(x = y = 0)$ deformirt ist, lauten bei gleichzeitiger Einwirkung von A und B:

$$
u = \frac{A_1}{2\varkappa_y^2} z^2 (l - \tfrac{1}{3} z)\, s_{33}, \qquad v = \frac{B_1}{2\varkappa_x^2} z^2 (l - \tfrac{1}{3} z)\, s_{33}; \tag{30}
$$

die grösste Abweichung von der Geraden für $z = l$ giebt sich durch

$$
\bar{u} = \frac{A_1 l^3 s_{33}}{3\varkappa_y^2}, \qquad \bar{v} = \frac{B_1 l^3 s_{33}}{3\varkappa_x^2}.
$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten a und b parallel der X- und Y-Axe, so giebt dies:

$$
\bar{u} = \frac{4 A l^3 s_{33}}{a^3 b}, \qquad \bar{v} = \frac{4 B l^3 s_{33}}{a b^3},
$$

oder wenn man den Stab an beiden Enden unterstützt und in der Mitte mit Π_x resp. Π_y belastet denkt:

$$
\bar{u} = \frac{\Pi_x L^3 s_{33}}{4 a^3 b}, \qquad \bar{v} = \frac{\Pi_y L^3 s_{33}}{4 a b^3}.
$$

Nur in dem Falle, dass die angreifende Kraft parallel einer Hauptträgheitsaxe wirkt, liegt die Curve der Schwerpunktslinie in der

Ebene, durch die Kraft und die Z-Axe in allen andern Fällen tritt sie heraus.

Der Drehungswinkel um die Z-Axe hat an der Stelle x, y, z den Werth:

$$\begin{aligned}(31)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right) &+ \frac{z}{2}\left[\frac{A_1}{\varkappa_y^2}(xs_{63}+2ys_{23})-\frac{B_1}{\varkappa_x^2}(2xs_{13}+ys_{63})\right]\\ &+\frac{z^2}{2}\left(\frac{A_1 s_{43}}{\varkappa_y^2}-\frac{B_1 s_{53}}{\varkappa_x^2}\right),\end{aligned}$$

er ist eine Function zweiten Grades von z; mit der Biegung wird zugleich die Torsion »ungleichförmig«. Die Drehung des Querschnitts z gegen den ersten Querschnitt $z = 0$ ist:

$$(31')\qquad \tau = \frac{z}{2}\left[\frac{A_1}{\varkappa_y^2}(xs_{63}+2ys_{23})-\frac{B_1}{\varkappa_x^2}(2xs_{13}+ys_{63})\right]+\frac{z^2}{2}\left(\frac{A_1 s_{43}}{\varkappa_y^2}-\frac{B_1 s_{53}}{\varkappa_x^2}\right);$$

sie enthält x und y, die Querschnitte drehen sich also nicht als Ganzes gegeneinander. Für diePunkte der Z-Axe gilt einfacher:

$$(31'')\qquad \tau^o = \frac{z^2}{2}\left(\frac{A_1 s_{43}}{\varkappa_y^2}-\frac{B_1 s_{53}}{\varkappa_x^2}\right);$$

dieser Ausdruck verschwindet stets, wenn die beiden Aggregate s_{43} und s_{53} verschwinden, über welche bei Gelegenheit der gleichförmigen Biegung schon gesprochen ist.

Die Bestimmung der in (28) und (29) noch enthaltenen unbekannten Functionen U, V, W scheint sehr schwierig zu sein; es dürfte für keine Form des Cylinderquerschnitts möglich sein, den dafür bestehenden Bedingungen durch ganze rationale Functionen von x und y zu genügen; schon für einen Cylinder von elliptischem Querschnitt wird es nöthig, X_x^o, Y_x^o und Y_y^o, die bei unkrystallinischen Medien verschwinden, von Null verschieden anzunehmen und demnach alle sechs Bedingungen (2) und (3) für die Druckcomponenten X_x^o . . . zu behandeln. Zum Glück ist diese Schwierigkeit ohne Nachtheil für die Theorie der Beobachtungsmethoden.

Verhältnissmässig einfach gestaltet sich das Problem, wenn die Längsaxe des Cylinders normal zu einer elastischen Symmetrieebene steht. Dann werden die Gleichungen (20) wegen $s_{14} = s_{24} = s_{34} = s_{64}$ $s_{15} = s_{25} = s_{35} = s_{65} = 0$ bei alleiniger Einwirkung von A:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial U_A}{\partial x} &= X_x^o s_{11} + Y_y^o s_{12} + Z_z^o s_{13} + X_y^o s_{16},\\
-\frac{\partial V_A}{\partial y} &= X_x^o s_{12} + Y_y^o s_{22} + Z_z^o s_{23} + X_y^o s_{26},\\
+\frac{A_1}{\varkappa_y^2} lx s_{33} &= X_x^o s_{13} + Y_y^o s_{23} + Z_z^o s_{33} + X_y^o s_{36},\\
-\left(\frac{A_1}{2\varkappa_y^2}(x^2 s_{63} + 2xy\, s_{23}) + \frac{\partial W_A}{\partial y}\right) &= Y_z^o s_{44} + Z_z^o s_{45},\\
-\left(\frac{A_1}{2\varkappa_y^2}(x^2 s_{13} - y^2 s_{23}) + \frac{\partial W_A}{\partial x}\right) &= Y_z^o s_{45} + Z_x^o s_{55},\\
-\left(\frac{\partial U_A}{\partial y} + \frac{\partial V_A}{\partial x}\right) &= X_x^o s_{16} + Y_y^o s_{26} + Z_z^o s_{36} + X_y^o s_{66}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Diesen zu genügen setzen wir:

$$
X_x^o = Y_y^o = X_y^o = 0, \quad Z_z^o = \frac{A_1 lx}{\varkappa_y^2}
$$

und erfüllen hierdurch zugleich die ersten beiden Bedingungen (2) und (3); daraus folgt:

$$
-\frac{\partial U_A}{\partial x} = \frac{A_1 lx s_{13}}{\varkappa_y^2}, \quad -\frac{\partial V_A}{\partial y} = \frac{A_1 lx s_{23}}{\varkappa_y^2}, \quad -\left(\frac{\partial U_A}{\partial y} + \frac{\partial V_A}{\partial x}\right) = \frac{A_1 lx s_{63}}{\varkappa_y^2},
$$

also, da für $x = y = 0$ U_A und V_A verschwinden sollen:

$$
-U_A = \frac{A_1 l}{2\varkappa_y^2}(x^2 s_{13} - y^2 s_{23}), \quad -V_A = \frac{A_1 l}{2\varkappa_y^2}(2xy s_{23} + x^2 s_{63}). \tag{33}
$$

Ferner setzen wir, um den letzten Bedingungen (2) und (3) zu zu genügen:

$$
Y_z = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Z_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}
$$

woraus für die Gleichung der Querschnittscurve $\overline{\Omega} = 0$ folgt.

Durch Elimination von W_A aus der vierten und fünften Gleichung (32) giebt sich dann für Ω die Bedingung:

$$
0 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} s_{44} - 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} s_{45} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} s_{55} + \frac{A_1}{\varkappa_y^2}(x s_{63} + 2y s_{23}), \tag{34}
$$

während sich zugleich findet:

$$
\begin{aligned}
-W_A = \int\Bigg[&\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} s_{44} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} s_{45} + \frac{A_1}{2\varkappa_y^2}(x^2 s_{63} + 2xy\, s_{23})\right) dy\\
&+ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} s_{54} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} s_{55} + \frac{A_1}{2\varkappa_y^2}(x^2 s_{13} - y^2 s_{23})\right) dx\Bigg]
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Dann ist also u, v, w bis auf eine einzige Function von x und y ganz allgemein angebbar; z. B. lautet es bei alleiniger Einwirkung von A:

$$
(36)\qquad
\begin{aligned}
u_A &= -\frac{A_1}{2\varkappa_y^2}\left\{(l-z)(x^2 s_{13}-y^2 s_{23})+z^2\left[\frac{1}{2}ys_{43}-\left(l-\frac{z}{3}\right)s_{33}\right]\right\},\\
v_A &= -\frac{A_1}{2\varkappa_y^2}\left[(l-z)(x^2 s_{63}+2xy s_{23})-\frac{1}{2}z^2 x s_{43}\right],\\
w_A &= W_A+\frac{A_1}{2\varkappa_y^2}\left[z(x^2 s_{53}+xy s_{43}-2lx s_{33}+\varkappa_y^2 s_{53})+z^2 x s_{33}\right].
\end{aligned}
$$

Ist nach dem Vorstehenden eine ganz allgemeine Durchführung bei dem Problem der Biegung durch ein am Ende angebrachtes Gewicht nicht möglich, so bietet dieselbe für den Fall der Einwirkung einer constanten äussern Kraft Z parallel der Längsaxe nicht die geringste Schwierigkeit.

Wir erhalten zunächst nach (13), (19), (22) und (27) bei ganz beliebiger Lage des Befestigungspunktes:

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
u &= U-\varepsilon Z\left[z\left(x s_{13}+\frac{y}{2}s_{63}\right)+\frac{z^2}{2}s_{53}\right],\\
v &= V-\varepsilon Z\left[z\left(\frac{x}{2}s_{63}+y s_{23}\right)+\frac{z^2}{2}s_{43}\right],\\
w &= W-\varepsilon Z z\left(l-\frac{z}{2}\right)s_{33}.
\end{aligned}
$$

Für U, V, W gelten die Formeln (20), in welchen wir, um den Hauptgleichungen (2) und (3) sämmtlich zu genügen, $X_x^o = Y_y^o = X_y^o = Y_z^o = Z_x^o = 0$ setzen; sie lauten dann:

$$
(38)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{\partial U}{\partial x}=Z_z^o s_{13},\quad -\frac{\partial V}{\partial y}=Z_z^o s_{23},\quad -\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)=Z_z^o s_{63},\quad -\varepsilon Zls_{33}=Z_z^o s_{33},\\
&+\left[\varepsilon Z\left(\frac{x}{2}s_{63}+ys_{23}\right)-\frac{\partial W}{\partial y}\right]=Z_z^o s_{43},\quad +\left[\varepsilon Z\left(xs_{13}+\frac{y}{2}s_{63}\right)-\frac{\partial W}{\partial x}\right]=Z_z^o s_{53}.
\end{aligned}
$$

Man genügt dem, indem man macht:

$$
Z_z^o=-\varepsilon Zl,\quad U=\varepsilon Zl\left(xs_{13}+\frac{y}{2}s_{63}\right),\quad V=\varepsilon Zl\left(\frac{x}{2}s_{63}+ys_{23}\right),\qquad (39)
$$
$$
W=\frac{1}{2}\varepsilon Z(x^2 s_{13}+y^2 s_{23}+xy s_{63}+2lx s_{53}+2ly s_{43}),
$$

wobei bereits berücksichtigt ist, dass für $x=y=z=0$ sowohl U und V als W verschwinden sollen.

Sonach giebt sich als Lösung:

$$u = \varepsilon Z[(l-z)(x s_{13} + \frac{y}{2} s_{63}) - \frac{z^2}{2} s_{53}], \quad v = \varepsilon Z[(l-z)(y s_{23} + \frac{x}{2} s_{63}) - \frac{z^2}{2} s_{43}], \tag{40}$$
$$w = \frac{1}{2} \varepsilon Z[x^2 s_{13} + y^2 s_{23} + xy s_{63} + 2lx s_{53} + 2ly s_{43} + z(2l-z) s_{33}].$$

Die Schwerpunktslinie krümmt sich nach den Bedingungen

$$u^{\circ} = -\frac{1}{2} \varepsilon Z z^2 s_{53}, \quad v^{\circ} = -\frac{1}{2} \varepsilon Z z^2 s_{43},$$

die ebenen Querschnitte nach

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon Z(x^2 s_{13} + y^2 s_{23} + xy s_{63} + 2lx s_{53} + 2ly s_{43}),$$

die gesammte Verlängerung der Schwerpunktslinie durch die Kraft Z ist

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \varepsilon Z l^2 s_{33},$$

d. h. dieselbe, als wenn die Hälfte der auf den ganzen Cylinder ausgeübten Wirkung $\varepsilon Z Q l$ am freien Ende angriffe.

Zusatz. Die in der zweiten der vorstehenden Abhandlungen für gleichförmig gespannte krystallinische Cylinder erhaltenen Resultate gestatten leicht die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung beliebig gespannter sehr dünner cylindrischer Körper aus krystallinischer Substanz abzuleiten, ein Problem, zu dessen Lösung der Weg von Herrn Kirchhoff [1]) angedeutet aber nicht durchgeführt ist. Den Uebergang ermöglicht, dass in einem beliebig gespannten Stab von gegen seine Länge verschwindendem Querschnitt ein Längselement jederzeit als gleichförmig gespannt angesehen werden kann; die Gestalt seiner Axe lässt sich also nach den früher für diesen Fall gefundenen Formeln angeben.

Der Stab sei bezogen auf ein absolut festes Coordinatensystem X, Y, Z; ausserdem werde ein Ξ, H, Z-System von einer Stelle seiner Axe im Abstand s von dem einen (etwa festgehaltenen) Ende aus so construirt, dass die Z-Axe mit der Richtung des Elements ds der Schwerpunkslinie, Ξ und H mit den Hauptträgheitsradien des Querschnitts zusammenfällt. Aeussere Kräfte in Bezug auf die absolut festen Axen mögen mit X, Y, Z, äussere Momente, um Parallele zu diesen Axen durch den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts mit F, G, H be-

1) Kirchhoff, Mechanik p. 422. Leipzig 1876.

zeichnet werden. Die Componenten und Momente, die ein Längselement von dem folgenden erfährt, mögen resp. mit A_1, B_1, C_1, L_1, M_1, N_1 und A_1, B_1, Γ_1, Λ_1, M_1, N_1 bezeichnet werden, die Momente wie gewöhnlich gerechnet.

Die Gleichgewichtsbedingungen für das Element lauten dann:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial A_1}{\partial s} + \varepsilon X = 0, \quad \frac{\partial B_1}{\partial s} + \varepsilon Y = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial s} + \varepsilon Z = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial s} + \mathrm{A}_1\alpha_2 - \mathrm{B}_1\alpha_1 + \varepsilon F = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial s} + \mathrm{A}_1\beta_2 - \mathrm{B}_1\beta_1 + \varepsilon G = 0, \quad \frac{\partial N_1}{\partial s} + \mathrm{A}_1\gamma_2 - \mathrm{B}_1\gamma_1 + \varepsilon H = 0.$$

Hierin bezeichnen die α_h, β_h, γ_h die Richtungscosinus der Axen Ξ, H, Z gegen X, Y, Z nach dem System:

$$\text{(2)} \qquad X = \Xi\alpha_1 + \mathrm{H}\alpha_2 + \mathrm{Z}\alpha_3, \qquad Y = \Xi\beta_1 + \mathrm{H}\beta_2 + \mathrm{Z}\beta_3, \qquad Z = \Xi\gamma_1 + \mathrm{H}\gamma_2 + \mathrm{Z}\gamma_3;$$

die Kräfte X, Y, Z sind auf die Masseneinheit des Stabes, A, B, C, L, M, N, auf die Querschnittseinheit bezogen. Zu den Hauptgleichungen (1) kommen die Bedingungen für den ersten und letzten Querschnitt, welche entweder die Werthe der daselbst ausgeübten Kräfte und Momente oder die Coordinaten des Endpunktes und die Richtung des letzten Elementes der Stabaxe und einer Nebenaxe festsetzen.

Setzt man abgekürzt:

$$\text{(3)} \qquad \left(\alpha_2\frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_2\frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_2\frac{d\gamma_3}{ds}\right) = -\left(\alpha_3\frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3\frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3\frac{d\gamma_2}{ds}\right) = r_1,$$

und ebenso die übrigen Aggregate, so drücken sich die auf das System Ξ, H, Z transformirten Gleichgewichtsbedingungen aus:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{A}_1}{ds} + \mathrm{B}_1 r_3 - \Gamma_1 r_2 + \varepsilon(X\alpha_1 + Y\beta_1 + Z\gamma_1) = 0,\\
&\frac{d\mathrm{B}_1}{ds} + \Gamma_1 r_1 - \mathrm{A}_1 r_3 + \varepsilon(X\alpha_2 + Y\beta_2 + Z\gamma_2) = 0,\\
&\frac{d\Gamma_1}{ds} + \mathrm{A}_1 r_2 - \mathrm{B}_1 r_1 + \varepsilon(X\alpha_3 + Y\beta_3 + Z\gamma_3) = 0,\\
&\frac{d\Lambda_1}{ds} + \mathrm{M}_1 r_3 - \mathrm{N}_1 r_2 - \mathrm{B}_1 + \varepsilon(F\alpha_1 + G\beta_1 + H\gamma_1) = 0,\\
&\frac{d\mathrm{M}_1}{ds} + \mathrm{N}_1 r_1 - \Lambda_1 r_3 + \mathrm{A}_1 + \varepsilon(F\alpha_2 + G\beta_2 + H\gamma_2) = 0,\\
&\frac{d\mathrm{N}_1}{ds} + \Lambda_1 r_2 - \mathrm{M}_1 r_1 + \varepsilon(F\alpha_3 + G\beta_3 + H\gamma_3) = 0.
\end{aligned}$$

Die Grössen r_h haben eine einfache geometrische Bedeutung. Es sind nämlich $r_1 ds$, $r_2 ds$, $r_3 ds$ die unendlich kleinen Drehungen um die Ξ-, H- und Z-Axe, welche das Coordinatensystem Ξ, H, Z beim Fortrücken um ds längs der Schwerpunktslinie des Stabes erleidet, diese Drehungen ebenso wie oben die Drehungsmomente positiv gerechnet von der H- zur Z-, von der Z- zur Ξ-, von der Ξ- zur H-Axe. r_1 ist demnach der negative reciproke Krümmungsradius der Projection der Schwerpunktscurve auf die HZ-Ebene, r_2 der positive für die Projection auf die ΞZ-Ebene, r_3 ist die negative gegenseitige Drillung zweier um ds parallel der Z-Axe von einander abstehenden Querschnitte bezogen auf die Entfernung Eins. Es ist sonach unter Anwendung der in der citirten Abhandlung angewandten Bezeichnung $r_1 \equiv -g_2$, $r_2 \equiv +g_1$, $r_3 \equiv -h$. Bei der Anwendung der dort für diese Grössen gefundenen Werthe ist nur zu berücksichtigen, dass früher der Symmetrie halber M_1 im entgegengesetzten Sinne gerechnet wurde als in obigen Formeln (1), also hier mit $-\mathrm{M}_1$ zu vertauschen ist.

Wir erhalten nach den Gleichungen (21) des II. Theiles:

$$-r_1 = \frac{1}{\varkappa_x^2}\left(\Lambda_1 s_{33} - \frac{\mathrm{N}_1}{2} s_{35}\right), \quad -r_2 = \frac{1}{\varkappa_y^2}\left(\mathrm{M}_1 s_{33} - \frac{\mathrm{N}_1}{2} s_{34}\right); \tag{5}$$

h oder r_3 ist nach (40′) allgemein angebbar, soweit es von M und Λ abhängt; der von N abhängige Theil ist nur für den elliptischen Querschnitt allgemein berechnet in (52), und mag hier, da er jedenfalls mit N_1 proportional ist, kurz gleich $\mathrm{N}_1/\varkappa^2$ gesetzt werden; dann ist:

$$-r_3 = \frac{\mathrm{N}_1}{\varkappa^2} - \frac{\mathrm{M}_1 s_{34}}{2\varkappa_y^2} - \frac{\Lambda_1 s_{35}}{2\varkappa_x^2}. \tag{5'}$$

Man erkennt, dass gilt:

$$-r_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\Lambda_1}, \; -r_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{M}_1}, \; -r_3 = \frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{N}_1} \text{ falls } 2\psi = \frac{\Lambda_1^2 s_{33}}{\varkappa_x^2} + \frac{\mathrm{M}_1^2 s_{33}}{\varkappa_y^2} + \frac{\mathrm{N}_1^2}{\varkappa^2} - \mathrm{N}_1\left(\frac{\Lambda_1 s_{35}}{\varkappa_x^2} + \frac{\mathrm{M}_1 s_{34}}{\varkappa_y^2}\right). \tag{6}$$

Die Auflösung dieser Formeln nach Λ_1, M_1, N_1 ergiebt:

$$\begin{aligned} -\Lambda_1 &= \frac{1}{k}\left[4 r_1 k \varkappa_x^2 s_{33} + s_{35}(r_1 s_{35} + r_2 s_{34} + 2 r_3 s_{33})\right], \\ -\mathrm{M}_1 &= \frac{1}{k}\left[4 r_2 k \varkappa_y^2 s_{33} + s_{34}(r_1 s_{35} + r_2 s_{34} + 2 r_3 s_{33})\right], \\ -\mathrm{N}_1 &= \frac{2 s_{33}}{k}(r_1 s_{35} + r_2 s_{34} + 2 r_3 s_{33}), \quad \text{worin } k = s_{33}^2\left(\frac{4}{\varkappa^2} - \frac{s_{34}^2}{\varkappa_y^2 s_{33}} - \frac{s_{35}^2}{\varkappa_x^2 s_{33}}\right); \end{aligned} \tag{7}$$

hieraus folgt:

$$-\Lambda_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r_1}, \quad -\mathrm{M}_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r_2}, \quad -\mathrm{N}_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r_3} \quad \text{falls} \tag{8}$$

$$2k\varphi = r_1^2(4k\varkappa_x^2 s_{33} + s_{35}^2) + r_2^2(4k\varkappa_y^2 s_{33} + s_{34}^2) + 4r_3^2 s_{33}^2 + 2r_1 r_2 s_{34} s_{35} + 4r_3 s_{33}(r_1 s_{35} + r_2 s_{34}).$$

Wirken keine äussern Kräfte, so sind nach (1) die A_1, B_1, C_1 constant, also hat man nach (2), falls man die Z-Axe der auf das freie Ende ausgeübten Zugkraft P_1 parallel macht, $A_1 = B_1 = 0$, $C_1 = P_1$ und es giebt das zweite Tripel der Gleichungen (4):

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda_1}{ds} + \mathrm{M}_1 r_3 - \mathrm{N}_1 r_2 - P_1 \gamma_2 &= 0, \\ \frac{d\mathrm{M}_1}{ds} + \mathrm{N}_1 r_1 - \Lambda_1 r_3 + P_1 \gamma_1 &= 0, \\ \frac{d\mathrm{N}_1}{ds} + \Lambda_1 r_2 - \mathrm{M}_1 r_1 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Da nach der Defination der r_h

$$r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2 = \frac{d\gamma_1}{ds}, \quad r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3 = \frac{d\gamma_2}{ds}, \quad r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1 = \frac{d\gamma_3}{ds} \quad \text{ist,}$$

so erhält man aus (9) durch die Factoren r_1, r_2, r_3:

$$\frac{d\psi}{ds} - P_1 \frac{d\gamma_3}{ds} = 0,$$

durch die Factoren γ_1, γ_2, γ_3:

$$\frac{d}{ds}(\Lambda_1\gamma_1 + \mathrm{M}_1\gamma_2 + \mathrm{N}_1\gamma_3) = 0, \tag{10}$$

durch die Factoren Λ_1, M_1, N_1:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\Lambda_1^2 + \mathrm{M}_1^2 + \mathrm{N}_1^2) - P_1(\gamma_2\Lambda_1 - \gamma_1\mathrm{M}_1) = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen sind sogleich integrabel, die letztere nur wenn $P_1 = 0$ ist, d. h. der Stab ausschliesslich unter der Wirkung von Kräftepaaren steht, die auf seine Endflächen ausgeübt werden.

In der von Kirchhoff entdeckten Analogie mit dem Problem der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt entspricht dieser Fall dem Fehlen äusserer Kräfte; er ist durch elliptische Functionen zu Ende zu führen.

Die Verhältnisse vereinfachen sich ausserordentlich, wenn die Verschiebungen aus der ursprünglichen Form als unendlich klein erster

Ordnung betrachtet werden können. Dann gilt dasselbe von den Grössen r_h und, falls man die Z-Axe in die ursprüngliche Richtung der Schwerpunktslinie legt, von den Richtungscosinus α_2, α_3, β_1, β_3, γ_1, γ_2, während α_1, β_2, γ_3 bis auf zweite Ordnung gleich Eins werden.

Die Gleichgewichtsbedingungen (1) lauten dann, da die Richtung s mit z zu vertauschen ist:

$$\begin{gathered}\frac{\partial A_1}{\partial z}+\varepsilon X=0, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial z}+\varepsilon Y=0, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial z}+\varepsilon Z=0,\\ \frac{\partial L_1}{\partial z}-B_1+\varepsilon F=0, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial z}+A_1+\varepsilon G=0, \qquad \frac{\partial N_1}{\partial z}+\varepsilon H=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Aus der vierten und fünften eliminirt sich mit Hülfe der ersten und zweiten A_1 und B_1 sodass man erhält:

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial z^2}+\varepsilon\left(Y+\frac{\partial F}{\partial z}\right)=0, \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2}-\varepsilon\left(X-\frac{\partial G}{\partial z}\right)=0, \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2}+\varepsilon\frac{\partial H}{\partial z}=0. \tag{11'}$$

Um jetzt die Grössen r_h einzuführen empfiehlt es sich die ersten beiden Gleichungen (11') mit der dritten so zu combiniren, dass das erste Glied, da $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ mit Λ, M, N vertauscht werden kann, nach (5) direct r_1, r_2, r_3 giebt; man erhält dann:

$$\begin{aligned}&-\varkappa_x^2\frac{\partial^2 r_1}{\partial z^2}+\varepsilon\left[\left(Y+\frac{\partial F}{\partial z}\right)s_{33}-\frac{\partial H}{\partial z}s_{35}\right]=0,\\ &-\varkappa_y^2\frac{\partial^2 r_2}{\partial z^2}-\varepsilon\left[\left(X-\frac{\partial G}{\partial z}\right)s_{33}+\frac{\partial H}{\partial z}s_{34}\right]=0,\\ &-\varkappa^2\frac{\partial^2 r_3}{\partial z^2}+\varepsilon\left[\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{\varkappa^2}{2\varkappa_y^2}\left(X-\frac{\partial G}{\partial z}\right)s_{34}-\frac{\varkappa^2}{2\varkappa_x^2}\left(Y+\frac{\partial F}{\partial z}\right)s_{35}\right]=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Nun ist aber bei unendlich kleinen Verrückungen

$$r_1=+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad r_2=-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad r_3=-\frac{\partial \tau}{\partial z}$$

zu setzen, demgemäss erhält man schliesslich die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}\varkappa_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}&=\varepsilon\left[\left(X-\frac{\partial G}{\partial z}\right)s_{33}+\frac{\partial H}{\partial z}s_{34}\right],\\ \varkappa_x^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}&=\varepsilon\left[\left(Y+\frac{\partial F}{\partial z}\right)s_{33}-\frac{\partial H}{\partial z}s_{35}\right],\\ \varkappa^2\frac{\partial^3 \tau}{\partial z^3}&=-\varepsilon\left[\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{\varkappa^2}{2\varkappa_y^2}\left(X-\frac{\partial G}{\partial z}\right)s_{34}-\frac{\varkappa^2}{2\varkappa_x^2}\left(Y+\frac{\partial F}{\partial z}\right)s_{35}\right].\end{aligned} \tag{13}$$

Zu diesen Hauptgleichungen kommen die Randbedingungen; am freien Ende muss $\overline{L}_1$, $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$ und daher nach (5) $\partial^2 u/\partial z^2$, $\partial^2 v/\partial z^2$, $\partial\tau/\partial z$, und $\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$, d. h. nach (11) $\partial L_1/\partial z$, $\partial \overline{M}_1/\partial z$, sowie $\partial\overline{N}/\partial z$ und dadurch $\partial^3 u/\partial z^3$, $\partial^3 v/\partial z^3$ und $\partial^2\tau/\partial z^2$ gegeben sein; am befestigten Ende u, v, τ und $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial z$.

Um zum Bewegungsproblem überzugehen ist, wenn keine äusseren Kräfte und Momente X, Y, Z, F, G, H wirken, X mit $-\partial^2 u/\partial t^2$, Y mit $-\partial^2 v/\partial t^2$. F mit $-\varkappa_x^2\,\partial^3 v/\partial z\,\partial t^2$, G mit $-\varkappa_y^2\,\partial^3 u/\partial z\,\partial t^2$, H mit $-(\varkappa_x^2+\varkappa_y^2)\,\partial^2\tau/\partial t^2$ zu vertauschen; so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\varkappa_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\varepsilon\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\varkappa_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\,\partial t^2}\right)s_{33}+(\varkappa_x^2+\varkappa_y^2)\frac{\partial^3\tau}{\partial z\,\partial t^2}s_{34}\right],\\
(14)\quad &\varkappa_x^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = -\varepsilon\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\varkappa_x^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^2\,\partial t^2}\right)s_{33}-(\varkappa_x^2+\varkappa_y^2)\frac{\partial^3\tau}{\partial z\,\partial t^2}s_{35}\right],\\
&\varkappa^2\frac{\partial^3\tau}{\partial z^3} = +\varepsilon\left[(\varkappa_x^2+\varkappa_y^2)\frac{\partial^3\tau}{\partial z\,\partial t^2}+\frac{\varkappa^2}{2\varkappa_y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\varkappa_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\,\partial t^2}\right)s_{34}-\frac{\varkappa^2}{2\varkappa_x^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\varkappa_x^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^2\,\partial t^2}\right)s_{35}\right].
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen enthalten die Gesetze der Transversal- und Torsionsschwingungen krystallinischer Stäbe. Betrachtet man die Trägheitsradien des Querschnitts als so klein gegen die Entfernung zweier Schwingungsknoten, dass man das Quadrat des Verhältnisses gegen Eins vernachlässigen kann, so verschwinden die Wechselwirkungen zwischen Biegung und Drillung aus den Formeln, welche sich dadurch auf die für unkrystallinische Medien gültigen reduciren.

Für longitudinale Schwingungen gilt die entsprechende Formel stets; denn da nach der dritten Formel (21) des II. Theiles Γ_1 gleich g_3/s_{33}, g_3 aber identisch mit der Dilatation der Längsaxe, d. h. mit $\partial w/\partial z$ ist, und endlich C_1 sich von Γ_1 nicht unterscheidet, so liefert die dritte Gleichung (11), wenn man noch um zum Bewegungsproblem zu gelangen Z mit $-\partial^2 w/\partial t^2$ vertauscht:

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}s_{33};$$

dies ist die für isotrope Medien gültige Formel.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: 34

Autor(en)/Author(s): Voigt Woldemar

Artikel/Article: Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. 53-100