Abhandlung
von den
Kegelschnitten
von
Augustin Torporch.

1. §.

Was großen Zuwachs sowohl die philosophischen als mathematischen Wissenschaften in unserm Jahrhunderte durch die Algebra erhalten haben, erkennen alle, welche sich die Mühe geben, das, was die Alten von diesen Wissenschaften wußten, mit dem unpartheyisch zu vergleichen, dessen sich unsre Zeiten mit Rechte rühmen können. Sie, die Algebra ist es, welche auch die abstractesten Gegenstände auf wahren praktischen Nutzen zu wenden weiß; wo unsre Vorfahrer bey zwar künstlichen, aber unfruchtbaren Beschauungen stehen geblieben sind. Unter diese Gattung gehören gewiß die beruffenen Kegelschnitte. Es war eine Zeit, wo man zwar im Stande war, viel von ihren Eigenschaften, Verhältnißen, Entstehungsart, u. s. a. herzusagen; aber ihr Daseyn in der Natur, die Gesetze der Bewegung sowohl im luftvollen als leeren Raume durch sie zu erklären, sich mittelst derselben mit den ungeheuern, und so sehr entfernten Körpern unsers Weltsystems genauer bekannt zu machen, alles dieses war nur unsern Tagen vorbehalten. Diese krummen Linien dann sind es, welchen die heutige Philosophie so viel zu verdanken hat: und darum sind sie ja nicht nur unsrer speculativen Achtung, sondern auch weitern practischen Bearbeitung wohl würdig. Sie werden gemeiniglich als algebraische Linien betrachtet: aus ihren Fundamentalgleichungen, und so genannten Formeln werden ihre Eigenschaften erkläret, und zum Beschluß beweiset man, daß sie eben jene Linien sind, welche bey den Alten Kegelschnitte hießen, ohne daß man weiter gehe, und um den Kegel, in welchem jede gegebene algebraische Linie von dieser Gattung ihren Platz findet, oder um die Art und Richtung, wie sie in selbem gleichsam verborgen liegt, sich viel bekümmere. Wenigst habe ich noch keinen Autor gesehen, der dieses ausdrücklich abgehandelt hätte.

2. §. Ich dachte der Sache weiter nach, und glaubte nicht gänzlich unnütz zu schreiben, wenn ich diese kleine algebraische Lücke wie immer auszufüllen mich befließe. Der Gegenstand dieser Abhandlung ist also, zu zeigen, erstens wie jedem gegebenen Kegelschnitte der ihm zugehörige Kegel, und zweytens wie die Lage des Kegelschnittes in seinem Kegel zu bestimmen sey. Meine Leser werden die Gefälligkeit haben, und soviel Kenntniß der Geometrie, Trigonometrie und Algebra mitbringen, als Schriften von derley Art erheischen.

3. §. Wir wollen einige Beobachtungen voraus schicken, welche den Weg bereiten werden, das, was nachkömmt, klärer und gründlicher einsehen zu können. Es seyen (Fig. 1.) *A B C* und *A D E* Durchschnitte zweener gleichen Kegel: *G A F* die Achse derselben: *a d* der Durchmesser eines Zirkels, der herauskäme, wenn der Kegel durch *a* und *d*, das ist, durch die Achse vormal geschnitten würde. Man nehme in *c* einen unbeweglichen Punkt an, um welchen sich eine andere Linie *f g* als um ihr Centrum bewegt. Diese nenne ich die Fundamentalachse der Kegelschnitte. Ihr Theil *a d* inner dem Kegel heißt die Hauptachse: *f a*, was außer dem Kegel ist, die Zwerchachse. So lange *f g* die Linie *a d* deckt, ist sie der Durchmesser, oder die Achse, und folglich sich selbst gleich. Der Theil *f a* sey

die

die Zwerchachse, und hier unendlich; denn es läßt sich auch bey dem Zirkel wie ein Parameter, so eine Zwerchachse denken. Beweget man *f g* aus *a* gegen *A*: bey der ersten Bewegung fängt sie sogleich an, die Achse einer Ellipse zu werden, wie z. E. 1 *c* 1. Beweget man sie weiter, so wird sie noch eine gute Zeit lang eine Achse verschiedener Ellipsen seyn, nämlich so lange, als sie die Seite *A C* des Kegels durchschneiden kann. In einem Augenblicke, wo sie mit *A C* paralell läuft, und also *A C* nicht mehr berührt, z. E. in 2 *c* 2 hört sie auch auf, die Achse einer Ellipse zu seyn, und wird die Achse der Parabel, folglich unendlich. Die Zwerchachse *f a* ist indessen auch immer weiter gegen *A*, oder was das nämliche ist, gegen der Seite *A D* des Kegels *A D E* gerückt; jetzt steht sie ebenfalls, weil sie mit 2 *c* 2 eine gerade Linie ausmacht, der Seite *A D* parallel, und ist noch unendlich. Rückt *f g* nur das mindeste aus seiner parallelen Richtung, so fährt zwar die Hauptachse fort, unendlich zu seyn: die Zwerchachse *a f* aber wird endlich; indem sie *A D* zu berühren anfängt. Hier fangen dann die Hyperbeln an, deren Hauptachse 3 *c* 3; die Zwerchachse *f* 3 ist. Doch siehet man, daß, wie weiter man *f g* gegen *A* rückt, die Zwerchachse *f* 3 ꝛc. sich immer verkürze, bis sie endlich in *A* völlig verschwindet. Was wird aber in dieser Richtung aus der Hauptachse? und was wird aus der vorigen, so zu sagen, letzten Hyperbel? der Sachen Verständige sehen sogleich ein, daß sich die Hyperbel in einen Triangel verkehren, und *c A*, oder was eines ist, die Achse dieses Triangels werde. Rückt *c A* oder *f g* über *A* hinaus gegen *d*, so werden alsogleich neue, und von den vorigen ganz verschiedene Hyperbeln entstehen, und dieses so lange, bis die Fundamentalachse in 4 *c* 4 mit der Seite *A B* und *A E* der zween Kegel parallel zu stehen kömmt. Nun haben wir eine andre Parabel: von da aus giebt es wieder Ellipsen, bis endlich *f g* abermal *a d* deckt und die Achse oder der Durchmesser des vorigen Zirkels *a d* wird.

4. §. Nun hat die Fundamentalachse *f g* ihre Reise durch alle Gattungen der Kegelschnitte vollendet. Sie hatte sie aber Stationenweise verrichtet. Im Zirkel ist sie ausgefahren, sodann sah sie das Land der **kleinern** Ellipsen: in der Parabel war die erste Station; von da aus kam sie in die Gegend der Hyperbeln (wir können sie ebenfalls die **kleinern**, oder die **ersten** nennen) Im Triangel hielt sie die zweyte Station: nach diesem besuchte sie das Vaterland der **größern** Hyperbeln: die dritte Station nahm sie in der **größern** Parabel: aus welcher sie die größern Ellipsen durchlief, und endlich im Zirkel glücklich wieder nach Hause kam. Was das wunderlichste ist, hielt sie sich in den zwo Parabeln, und im Triangel nur einen Augenblick auf: ein gleiches würde sie auch im Zirkel thun, wenn wir sie als eine immer reisende Pilgerinn annähmen.

5. §. Mein Leser wird mir diese scherzhaften Ausdrücke zu gute halten. Wir wollen sogleich ernsthafter seyn, und ihm den nämlichen Weg in den bekannten algebraischen Formeln zeigen. Die Gleichung der Ellipse ist: (Algebra)

$$(a - x)x : y^2 = a : b.$$

In dem Zirkel ist $a = b$. Die Achse (der Durchmesser) ist dem Parameter gleich. So ist dann im Zirkel

$$(a - x)x : y^2 = a : a.$$

Also $(a - x)x = y^2$, welches die Gleichung des Zierkels ist. Mithin ist die einseitige Gränze der Ellipse der Zirkel. Wiederum in der Ellipse kann die Hauptachse immer wachsen, also kann sie auch unendlich werden. Wenn sie es ist, verändert sich die Gleichung

$$(a - x)x ; y^2 = a ; b.$$

in diese:

$$\infty x : y^2 = \infty : b.$$
$$\infty x b = \infty y^2$$
$$\overline{}\ div.\ per\ \infty$$
$$x b = y^2.$$

welches die Gleichung der Parabel ist. Also ist die andere Gränze der Ellipse die Parabel.

Die Gleichung der Hyperbel ist:

$$(a+x)x : y^2 = a : b.$$

in welcher a die Zwerchachse ausmacht: in der Parabel ist diese aber unendlich, so kömmt dann die Gleichung der Hyperbel heraus: $\infty x : y^2 = \infty : b$. mithin wie oben: $x b = y^2$. Es ist demnach die Gränze derselben abermal die Parabel.

Nehmen wir die Zwerchachse der Hyperbel als o an, so steht ihre Gleichung also:

$$(o+x)x : y^2 = o : b.$$
$$(o+x)x b = o y^2.$$
$$o x b + x^2 b = o y^2.$$

weil $o y^2 = o$, und hingegen $x^2 b$ als eine positive Größe nicht seyn kann $= o$, muß b nothwendig auch $= o$ seyn. Es ist also ein Zeichen, daß in einer Hyperbel, wo $a = o$, auch nothwendig $b = o$ und folglich diese Hyperbel ohne Zwerchachse, und ohne Parameter sey. Eine wunderliche Hyperbel! eine geometrische Figur ist sie doch: wir wollen sehen, was sie für eine ist. Es steht demnach die Gleichung also:

$$(o+x)x : y^2 = o : o:$$
$$o x + x^2 : y^2.$$
$$x^2 : y^2.$$
$$x : y.$$

Aus der Hyperbel wird hiemit eine Figur, in welcher $x : y$, das ist, in welcher sich jede Abscisse zu ihrer Ordinate verhält, wie jede

jede andere zu der ihrigen. Z. E. es sey eine Abscisse $= x$, ihre Ordinate $= y$, eine andere Abscisse $= u$: ihre Ordinate $= z$, so wird seyn:

$$x : y = u : z.$$

welches die Gleichung für die proportionalen Triangel ist. Hier haben wir die zweyte Gränze der Hyperbel den Triangel.

Sollte jemand an der Stärke des letzten Beweises zweifeln, der bedenke, daß in der Gleichung $o \times b + x^2 b = o\,y^2$ das Zeichen $=$ **die Gleichheit**; in der Gleichung $(o + x)\,x : y^2 = o : o$ aber **das Verhältniß** anzeige, so ist aller Zweifel gehoben. Doch genug. Hier ist ein andrer Beweis: Das Verhältniß der Abscissen und Ordinaten in der Hyperbel ist dieses: (Algebra)

$$y^2 : z^2 = (a + x)\,x : (a + u)\,u.$$

a sey $= o$, mithin

$$y^2 : z^2 = o + x^2 : o + u^2.$$

$$= x^2 : u^2.$$

$$y : z = x : u.$$

$$x : y = u : z. \text{ wie oben.}$$

§. 1. Wir beobachten ferners, daß die Fundamentalachse, da sie (*Fig.* 1.) von *a* nach 1. 2. 3. ꝛc. geht, den Winkel bey *c* immer ändere, also, daß er Anfangs spitzig, sodann recht, und zu letzt stumpf werde; der Winkel *a* hingegen unverändert bleibe: mithin muß der Winkel *c* im Anfange kleiner, einmal gleich, und nachgehends grösser als der Winkel *a* werden. Fragt sich, wo jedes geschehe. Ich antworte: in den Ellipsen geschiecht das Erste: in der Parabel das Zweyte: und in den Hyperbeln das Dritte.

Wenn bewiesen ist, daß der Winkel *c* dem Winkel *a* in der Parabel gleich sey, hat es ohnehin mit den übrigen seine Richtigkeit; dieses

dieses aber beweise ich also: der Winkel a ist gleich dem Winkel d, (3 §.) und weil die Fundamentalachse 2 c 2 in der Parabel der Seite des Kegels $A\ C$ parallel ist, (3 §) ist der Winkel 2 $c\ a$ = dem Winkel $A\ d\ a$, also auch dem Winkel a. (geom.)

7. §. Sind die Winkel a und c in der Parabel gleich, so sind auch die ihnen entgegen gesetzten Seiten des Triangels $a\ x\ c$ einander gleich. Wenn also der Winkel c kleiner ist als der Winkel a, wie in den Ellipsen geschieht, ist auch die Seite a 1 kleiner als c 1; ist er größer, ist auch die ihm entgegen gesetzte Seite größer, welches den Hyperbeln zukömmt. Aus dieser Beobachtung sind wir nun schon im Stande, in einem gegebenen Kegel mit dem Abstande A von a, und a von c die Lage der drey Kegelschnitte zwischen ihren Gränzen zu bestimmen.

8. §. Weil in der Parabel der Winkel a dem Winkel c gleich ist, wird auch der Winkel 3 dem Winkel A gleich seyn: also folget (6. 7. §§) daß, wenn der Winkel, den die Hauptachse des Kegelschnittes mit der Seite $A\ B$ des Kegels macht, größer ist als der Winkel $a\ A\ d$ des Kegels, der Kegelschnitt eine Ellipse sey: sind sie gleich, ist er eine Parabel: ist er kleiner, wird er eine Hyperbel seyn. Hier können wir aus einem andern Grunde, nämlich aus dem gegebenen Winkel des Kegels, und dem Winkel, den die Achse des Kegelschnittes mit der Seite des Kegels macht, die Gattung desselben wissen.

Es sey z. E. der Winkel des Kegels = 50°, und die Achse des Kegelschnittes macht mit der Seite des Kegels 49°, giebt es sich von selbst, daß der Kegelschnitt eine Hyperbel sey; weil aber ihr Unterschied nur 1 Grad ist, welches in den kleinern Kegelschnitten, wie etwann an den Sonnenuhren, nicht viel zu sagen hat, so wird ihre Zwerchachse noch ziemlich groß seyn, folglich wird sie von der Parabel nicht viel abweichen. Ich habe dieses Exempel sammt seiner Anmerkung geflissentlich hergesetzt: es giebt Gelegenheit zu weiterm Denken.

9. §. In dem Kegel *a A d* (Fig. 2.) sey *a b d* der halbe Zirkel des Durchmessers *a d*. *E c o* sey die Hauptachse eines Kegelschnittes, so ist *E c* eine Abscisse und *b c* ihre Ordinate. Bewegt sich *E c o* um *c* wie immer, bleibt *b c* unveränderlich, *E c* aber verlängert oder verkürzet sich. Also kömmt es auf ihre Länge oder Kürze, oder was eines ist, auf die Größe des Winkels *c* oder *E* an, ob *E c* die Abscisse einer Ellipse, Parabel, oder Hyperbel sey. Die in diesem Falle unveränderte Ordinate bleibt gleichgiltig, zu welcher Gattung der Kegelschnitte man sie bestimmen wolle.

10. §. Wir hatten bisher den Kegel als beständig angenommen, und die verschiedenen Phönomena, welche durch die Bewegung der Fundamentalachse in selbem entstehen, betrachtet. Wir wollen nun die Fundamentalachse mit unverändertem Winkel *c* von *c* nach *E* wachsen und zunehmen lassen, und was sich dabey ereignet, beobachten.

Es sey (Fig. 3.) Anfangs die Länge der Abscisse = *E c*, so ist der Kegel *a E A d*, in welchen sie gehört. Wächst *E c* bis in 1, verändert sich nothwendig der Winkel *E a c* in den Winkel 1 *a c*, und entsteht ein neuer Kegel *a* 1 *B e*. Ein gleiches geschieht, wenn *E c* = wird 2 *c*. da bekommen wir den Kegel *a C f*, u. s. f. Wie nun mit verlängerter Abscisse *E c* der Winkel *a* immer wächst, folglich jetzt kleiner, sodann gleich, und letztens größer als der Winkel *c* werden kann, also verändert sich (6 §) nach Beschaffenheit der Sache auch die Gattung des Kegelschnittes. Wir beobachten anbey, daß die Linie *a d* sich immer verkürze; indem sie jetzt = *a e* nachgehends = *a f*, u. s. f. wird. Wird sie = *a c*, hat die Veränderung des Kegels ihre Gränze erreichet, in so weit, daß *a d* völlig verschwindet, und die Abscisse *c* 3 mit der Seite *D c* des letzten Kegels *a D c* über-ein kömmt, und also den Kegel nicht mehr schneiden kann. Auch die Ordinate *b c* wird in diesem Falle = *o*; denn weil *b c* nicht nur allein die zur Abscisse *E c* gehörige Ordinate ist, sondern auch zugleich die Ordinate der Zirkel *a d*. *a e*. *a f* ꝛc. ausmacht: verliert sie in Rücksicht auf den Zirkel *a d* den Name und die Stelle der Ordinate, und wird dessen Tangent.

11. §. Bleibt die Länge der Abscisse *E c* (Fig. 4.) und verändert sich nur der Winkel *a c E*, so daß er wird z. E. = *a c e*. *a c f* ꝛc. in diesem Falle ist es gegen den vorigen umgekehrt, nämlich hier nimmt der Winkel *a* immer ab, und *a d* verlängert sich, wie ingleichen die Ordinate *b c* immer wächst. Die Gränzen sind *a A* + *A d* = *a d*. Wo ebenfalls der △ *a A d* verschwindet, und *a A* + *A d* die Linie *a d* deckt.

12. §. Ein gleiches geschieht, wenn *E c* sammt dem Winkel *c* unverändert ist; die Linie *a c* aber wächst, wie die 5te Figur ohnehin selbst zeiget.

13. §. Aus diesen verschiedenen Fällen ersieht man, wie vielen ja unzähligen Veränderungen sowohl die Kegelschnitte selbst, als die ihnen zugehörigen Kegel unterworfen sind. Und wenn wir die Sache reif bedenken, finden wir, daß eben der nämliche Kegelschnitt ohne seine Gattung zu verändern in verschiedenen Kegeln Platz habe, also zwar, daß die Aufgabe: jedem Kegelschnitte seinen Kegel, und dessen Lage in demselben anzuweisen, eine unbestimmte Aufgabe sey, das ist eine solche, in welcher eine gewisse Größe willkürlich angenommen wird. Obwohl aber diese Größe in ihrer Gattung selbst verschieden ist; indem z. B. der Scheitelwinkel des Kegels; die Entfernung

des Scheitels des Kegelschnittes von dem Scheitel des Kegels: der Winkel, den die Achse des Kegelschnittes mit der einen Seite des Kegels macht: die Linie *a c* (Fig. 1. 2. 3. ꝛc.) und andere in sich unbestimmte Größen als bestimmet können angenommen werden: so habe ich doch, und wie ich leicht erweisen könnte, aus guten Gründen die Linie *a c*, als die unbestimmte Größe zur Auflösung ersagter Aufgabe gewählet. Was nun diese Linie *a c* eigentlich sey, soll sogleich erkläret werden.

14. §. Der Kegel *A B F* (Fig. 6.) sey geschnitten nach der Richtung *E c o F*, so sieht jedermann, daß der Kegelschnitt eine Ellipse sey, nämlich die krumme Linie *E b p F*. *E c* sey eine gegebene Abscisse: *b c* ihre Ordinate. *E o* eine andere Abscisse: *p o* ihre Ordinate. Schneidet man durch *c* den Kegel der Achse perpendicular, gleicher Weise durch *o*, so bekömmt man die Zirkel *a b d a*, und *m p n m*, deren Durchmesser *a d*, und *m n* sind. Die Ordinate der Ellipse *b c* ist demnach zugleich auch eine Ordinate des Zirkels *a b d a*, und *p o* zugleich eine solche in Ansehen des Zirkels *m p n m*. Nun ist aus der Geometrie bekannt, daß *b c* die mittere Proportional zwischen *a c*, und *c d*, wie auch *p o* zwischen *m o*, und *o n* sey. Es ist also

$$ac \times cd = bc^2$$

und $$mo \times on = po^2$$

a c ist demnach der eine Factor und *c d* der andere der Quantität bc^2. *m o* und *o n* sind die Factoren der Quantität po^2, folglich sind sie auch ihre Theiler. *a c* ist daher nichts anders als der nach Willkur angenommene Theiler des Quadrats der kleinern bekannten Abscisse, und gleichwie jede Zahl durch unzählige kleinere Zahlen, wenn von ganzen und gebrochnen Theilern die Rede ist, kann getheilt werden: also kann auch *a c* unzähligmal anders angenommen werden: ihre Gränze aber ist bc^2 selbst; denn in solchem Falle würde $cd = 1$ als der kleinste ganze Theiler werden.

15.

15. §. Ich kann nicht umhin einige nützliche Anmerkungen hier einzurücken. Erstens der Leichtigkeit in bevorstehender Berechnung halber, sollen $a\,c$ und $c\,d$, wenn es sich thun läßt, als ganze Zahlen ohne Bruch bestimmet werden; zu dem Ende kann man gleich anfangs alle ganze Theiler von $b\,c^2$ suchen (Arithm.), und aus selben einen für $a\,c$ erwählen. Ist $b\,c.^2$ eine Primzahle, so nehme man wenigst $a\,c$ als ein ganzes an, der Bruch bey $c\,d$ macht ohnehin keine grosse Schwierigkeit in der Berechnung. 2 Wenn $a\,c$ angenommen ist, wird $c\,d$ entweder größer, oder gleich, oder kleiner als $a\,c$ seyn. Aus diesem siehet man schon vorläufig, wie der Stand der Achse des Kegelschnittes in dem Kegel selbst werde herauskommen; denn ist $a\,c <$ als $c\,d$, so fällt der Punkt c disseits der Achse des Kegels $A\,x\,y$ (Fig. 6.) und die Achse des Kegelschnittes schneidet erst unter $a\,d$ die Achse des Kegels. Ist $a\,c = c\,d$, so schneidet jene diese in x und folglich ist $a\,c = a\,x = c\,d = b\,c$ der Ordinate selbst. Dieses aber wird allzeit geschehen, wenn man $a\,c = b\,c$ annimmt. Ist $a\,c, > c\,d$, so fällt c zwischen x und d, und die Achse der Ellipse (ein gleiches ist auch von den andern Kegelschnitten zu sagen) hat die Achse des Kegels schon ober $a\,d$ durchkreuzet.

16. §. Nun nach so vielen, doch wie mich däucht, zur Erläuterung der Sache sehr dienlichen Vorbereitungen schreiten wir zur Auflösung der Aufgabe selbst.

Wir verlangen zu dem Ende mehr nicht, als **zwo gegebene Abscissen, und die ihnen zugehörigen Ordinaten.** Wir haben nicht vonnöthen, die Gattung des Kegelschnittes, ob es z. E. eine Parabel oder Hyperbel sey, zu wissen, dieß giebt die Auflösung der Aufgabe selbst, wie wir erfahren werden. Wir wollen alles sogleich in einem practischen Exempel zeigen.

17. §. Es wird gegeben eine Abscisse = 12, 00, ihre Ordi-

nate = 5, 00, und eine andere Abscisse = 38, 88 sammt ihrer Ordinate = 9, 00. Man soll auch ohne zu wissen, was es für eine Gattung der Kegelschnitte sey, den Kegel, die Lage dieser krummen Linie in demselben, und folglich auch die Gattung suchen. Es ist mithin (Fig. 6.) $Ec = 12, 00$. $bc = 5, 00$, $Eo = 38, 88$. $op = 9, 00$. In der Figur wird die Wahrheit nicht erfordert, sie dienet ohnehin nur der Phantasie, und leitet in der Berechnung. Weil die Decimalfractionen zur Genauigkeit der Berechnungen von dieser Art sehr vieles beytragen, so habe ich sie nicht weglassen wollen, aus dieser Ursache gebrauche ich mich auch durchgehens der Logarithmen. Man bestimme demnach

N. 1. die Linie ac. z. B. = 4, 00 und suche cd

$bc = 5, 00 = 2.69897$. mit 2 mult.

$bc^2 = 5.39794$.

div. mit $ac = 4, 00 = 2.60206$.

Also ist $cd = 6, 25 = 2.79588$.

$ac = 400$.

$+ cd = 625$.

$ad = 1025$.

$\frac{1}{2}\, ad = 512. = aX$.

N. 2. Man suche die Linie mo. Der $\triangle\, aEc$ ist proportional dem $\triangle\, mEo$. sage:

Wie $Ec = 1200 = 3.07918$.

zu $ac = 400 = 2.60206$.

Also $Eo = 3888 = 3.58972$.

6.19178.

zu $mo = 1296 = 3.11260$.

N. 3. Man suche $o\,n$. Da $p\,o$ die mittere Proportional zwischen $m\,o$ und $o\,n$ ist, (13. §.) so läßt sich $o\,n$ also finden;

$$
\begin{aligned}
op = 900 &= 2.95424. \\
&\text{mit 2 mult.} \\
op^2 &= 5.90848. \\
\text{div. mit } mo &= 3.11260. \\
\text{Also } o\,n = 625 &= 2.79588. \\
mo &= 1296. \\
+\,o\,n &= 625. \\
mn &= 1921.
\end{aligned}
$$

N. 4. Aus c ziehe man $c\,q$ zu $m\,n$ perpendicular, so bekömmt man einen rechtwinklichten $\triangle\, c\,q\,o$. Weil auf diesen $\triangle$ fast alles ankömmt, und selber gleichsam den Ausschlag der ganzen Berechnung giebt: wollen wir ihn zum Unterschiede der andern $\triangle\triangle$ den Haupttriangel nennen.

N. 5. In diesem Haupttriangel dann kann man wissen 1 die Seite $c\,o$ oder die Hypotenuse. 2 Die Seite $o\,q$, und sodann durch die Trigonometrie seine Winkel; die Hypotenuse wird also gefunden:

$$
\begin{aligned}
Eo &= 3888. \\
-\,Ec &= 1200. \\
\text{Die Hypotrunse } c\,o &= 2688.
\end{aligned}
$$

Die Seite $o\,q$ läßt sich zwar allzeit finden; doch weil der Haupt $\triangle$ in verschiedenen Fällen auch in seiner Lage verschieden ist, so ist die Art ihn zu bestimmen nicht allzeit die nämliche. Wenn man sich die Lage der Hauptachse aus dem, was man bereits von selber durch die Berechnung weis, in einem Kegel (Fig. 6.) beyläufig zeichnet, giebt sich die Bestimmung der Seite $o\,q$ von selbst. In gegenwärtigem Exempel ist $a\,c = 400$ kleiner als $\frac{1}{2}\,a\,d = a\times = 512$ (n 1 huius §) folglich fällt der Punkt c zwischen a und $\times$ disseits der Achse $A\times y$, mithin fällt auch der Punkt q zwischen m und y, und $q\,y$ ist $= c\,x$ $= a\,x - a\,c = 512 - 400 = 112.$

$y\,o = y\,n - o\,n = \frac{1}{2}\,m\,n - o\,n.$

$m\,n$ aber ist (n. 3.) $= 1921.$ Ihre Hälfte $= 961.$ $o\,n$ ist $= 625$, also ist $y\,n - o\,n = 961 - 625 = 336 = y\,o.$ Es ist demnach $q\,o$, wie die sechste Figur selbst zeigt, $= q\,y + y\,o = 112 + 336 = 448.$ Auf solche Art wird in unserm Falle die Seite $q\,o$ bestimmet. Wer diese Weise sie zu suchen wohl einsieht, kann sich in andern Fällen auch leicht helfen. Die nachkommenden Exempel werden die Sache noch mehr beleuchten.

N. 6. Es sind mithin in dem Haupt △ die Hypotenuse $c\,o$ $= 2688$, und die Seite $q\,o = 448$ bekannt. Man sucht mit diesen den Winkel c.

$c\,o = 2688 = 3.42942.$
Sin. totus $= 10.$
$q\,o = 448 = 2.65127.$

Der Winkel $c = 9°.\ 35'.\ 39''. = 9.22185.$
Der Winkel $o = 80.\ 24.\ 21.$

Der Winkel o des Haupt △ ist gleich dem Winkel $a\,c\,E$ des △ $E\,a\,c$ (Geom.) folglich und

N. 7. Haben wir im △ $E\,a\,c$ drey Data, 1. die Seite $a\,c$ $= 400.$ 2. Die Seite $E\,c = 1200$, und 3. den eben jetzt gefundenen Winkel $a\,c\,E = 80°.\ 24'.\ 21''.$ Es lassen sich also die übrigen Winkel sammt der Seite $E\,a$ bestimmen.

$E\,c = 1200.$
$+ a\,c = 400.$

Also 1600. die Summe der beyden Seiten.
$E\,c - a\,c =$ 800 der Unterschied derselben.

Weil der Winkel $a\,c\,E = 80°.\ 24'.\ 21''$, so ist die Summe me der unbekannten Winkel $= 99°. 35'. 39''$, die halbe Summe derselben $= 49°. 47'. 49''$.

$$1600 = 3.20412. \quad (\text{Trig.})$$
$$800 = 2.90309.$$
$$\text{Tang. } 49°. 47'. 49''. = 10.07305.$$
$$\overline{12.97614.}$$

Tang. des halben Unt. $9.77202. = 30°. 36'. 30''$.

Mithin ist der größre Winkel $= Eac = 80°. 24'. 19''$.
und der kleinere $= aEc = 19. \ 11. \ 19$.

N. 8. Suche letztlich die Seite Ea.

$$< Eac = 80°. 24'. 19''. = 9.99387.$$
$$Ec = 1200. = 3.07918.$$
$$\text{Sin.} < acE = 80. 24. 21. = 9.99387.$$
$$Ea = 1200 = 3.07918.$$

Also ist die Seite $Ea =$ der Seite Ec, wie ingleichen auch der Winkel a dem Winkel c gleich ist, der Unterschied von $2''$ kömmt ohnehin nicht in Betrachtung. Man siehet demnach (§ 6 & 7), daß die Berechnung selbst die Gattung des gegebenen Kegelschnittes verrathe, so wie sie hier sagt, daß unser Kegelschnitt eine Parabel sey, dessen Kegel im Scheitelwinkel $= 19°. 11'. 19''$; denn in der Parabel ist nothwendig der Winkel $E =$ dem Winkel A. Ueberdas habet ihr die Lage der Achse dieser Parabel; indem sie dem Winkel aEc gleich ist: folglich macht die Achse mit der Seite Aa des Kegels einen Winkel $= 19°. 11'. 19''$, und bleibt nichts mehr übrig, als daß wir

N. 9. Die Entfernung des Scheitels des Kegelschnittes von dem Scheitel des Kegels = der Linie AE suchen.

$$\text{Sin.} < aAd = 19°. 11', 19'' = 9.51679.$$
$$(n\ 1)\ ad = 1025 = 3.01072.$$

$$\text{Sin.} < Ada = 80.\ 24.\ 19 = 9.\ 99387.$$

$$13.\ 00459.$$

$$Aa = 3075. = 3.\ 48780.$$

$$-Ea = 1200.$$

$$AE = 1875.$$

N. 10. Will man sich einen klaren Begriff von dieser ganzen Operation machen, so zeichne man (Fig. 11.) Tab. 2. den Kegel *B A C*, dessen Scheitelwinkel = 19°. 11′. 19″. man setze von *A* in *E* 1875 Theile eines beliebigen Maasstabes, und ziehe in *E* eine Linie *Ec*, welche mit *A C* parallel läuft, oder was eines ist, welche mit *A B* einen Winkel = 19°. 11′. 19″ macht, so ist sie die Achse der Parabel. Man mache *E a* = 1200, und ziehe *a d* der Achse des Kegels perpendicular, so wird sie die kleinere Abscisse *Ec* selbst abschneiden. Man mache *E o* = 3888, und ziehe durch den Punkt *o* zu *a d* die Parallel *m n*. Aus *c* lasse man auf *m n* eine Perpendicular *c q* fallen ꝛc. und wenn man die verschiedenen Linien, die wir oben durch die Berechnung gefunden haben, mit diesen im Risse vergleichet, besonders wenn selber was größers ist; so wird man eine Gattung von Beweis überkommen, daß die Operation richtig sey. Einen genauern Beweis aber werden wir weiter unten finden. Wir wollen noch zwey Exempel von den zwo andern Gattungen der Kegelschnitte hersetzen; doch die Berechnung so kurz zusammenziehen, als es ohne unverständlich zu werden möglich ist.

18. §. Es sey (Fig. 6) *Ec* = 7, 660. *b c* = 9, 640. *E o* = 12, 000. *o p* = 10, 755. *a c* = 9, 848.

N. 1. $bc = 9640 = 3.\ 98407.$

mit 2 mult.

$$bc^2 = 7.\ 96812.$$

div. mit $ac = 9848 = 3.\ 99334.$

$$cd = 9437 = 3.\ 97480.$$

$$ac + cd = ad = 19285,$$

N. 2. Suche die Linie $m\,o$.

$$Ec = 7660 = 3.88422.$$
$$ac = 9848 = 3.99334.$$
$$Eo = 12000 = 4.07918.$$
$$\overline{8.07252.}$$
$$mo = 15428 = 4.18830.$$

N. 3. Suche $o\,n$.

$$op = 10755 = 4.03160.\quad \text{2 mult.}$$
$$op^2 = 8.06320.$$
$$\text{dit. mit } mo = 15428 = 4.18830.$$
$$on = 7498 = 3.87490.$$
$$+\,mo = 15428.$$
$$mn = 22926.$$

N. 4. und 5.

$$Eo = 12000.$$
$$-\,Ec = 7660.$$
$$co = 4340.$$
$$ad = 19285.$$
$$\tfrac{1}{2}\,ad = 9642 = a\times.$$
$$ac = 9848.$$

Hier sehen wir, daß $a\,c >$ ist als $\frac{1}{2}\,a\,d = a\,\times$, also fällt der Punkt c jenseits der Achse $A \times y$ zwischen $\times$ und d, etwann wie in der 7 Figur. Dergleichen hypothetische Figuren dienen, wie ich bereits im 17 § gemeldet habe, sehr gut, ohne daß sie in allen wahr seyn dürfen, ja es nicht einmal als von ohngefähr seyn können, gleichsam die Hand in fernerer Berechnung zu leiten. Man soll dann in der 7 Figur, welche jetzt statt der 6 angenommen wird, $q\,o$ finden, und siehet so gleich, was man zu thun hat; denn die Figur zeigt,

daß $q\ o =$ sey $m\ n - m\ y\ (= \frac{1}{2}\ m\ n) - y\ q\ (= \times\ c) - o\ n$
$c \times$ aber $= \times\ d = a\ c - a \times$.

Es ist demnach $m\ n$ ($n. 3.$ $= 22926.$

$$\frac{1}{2}\ m\ n = 11463 = m\ y.$$

$$a\ c = 9848.$$

$$-\ a \times = 9642.$$

addire diese drey. $\begin{cases} c \times = 206 = y\ q. \\ o\ n\ (n.3) = 7498. \\ m\ y = 11463. \end{cases}$

Summe $=$ 19197. diese ziehe ab

von $m\ n =$ 22926.

also ist $q\ o =$ 3759.

N. 6. In dem Haupt △ suche den Winkel c.

$$c\ o = 4340 = 3.\ 63748.$$

$$R. = 10.$$

$$q\ o = 3759 = 3.\ 57507.$$

$$< c = 60° = 9.\ 93759.$$

$$< o = 30° = < a\ c\ E \text{ des } \triangle\ E\ a\ c.$$

N. 7. Suche in dem △ $E\ a\ c$ die Winkel,

$$E\ c = 7660.$$

$$+\ a\ c = 9848.$$

die Summe der Seiten $=$ 17508.

Ihr Unterschied $=$ 2188.

$$< c = 30°.$$

Die Summe der zu suchenden Winkel $=$ 150°. die halbe Summe $=$ 75°.

$$17508 = 4.\ 24323$$

$$2188 = 3.\ 34004$$

Tang.

Tang. $<< = 75^\circ = 10.57194.$

$13.91198.$

Unterschied $= 25^\circ = 9.66875.$

Also ist der Winkel $aEc = 100^\circ.$

und $Eac = 50^\circ.$

2 mult.

der Winkel a und $d = 100.$

folglich der Winkel $A = 80.$

N. 8. Suche auch die Seite $Ea.$

Sin. $< a = 50^\circ = 9.88425.$

$Ec = 7660 = 3.88422.$

Sin. $< c = 30^\circ = 9.69897.$

$13.58319.$

$Ea = 5000 = 3.69894.$

N. 9. Suche AE. Im $\triangle\ Aad$. ist

Sin. $< A = 80^\circ = 9.99335.$

$ad = 19285 = 4.28521.$

Sin. $< d = 50 = 9.88425.$

$14.16946.$

$Aa = 15000 = 4.17611.$

$-Ea = 5000.$

$AE = 10000.$

Wenn man also in einem Kegel den Scheitelwinkel $= 80^\circ$ machet, und in der Entfernung von selbem $= 100$, co die Achse des Kegelschnittes dergestalt ziehet, daß sie mit der Seite des Kegels AE einen Winkel $= 100^\circ$ macht, so hat man, was man gesucht, und weil der Winkel $E\,a\,c = 50^\circ$ größer ist als der Winkel $E\,c\,a = 30^\circ$, und ingleichen $E\,c$ größer als $E\,a$, folget, (§. 6 & 7) daß dieser Kegelschnitt eine Ellipse sey. Man kann anbey, wie *n.* 10 vorigen § angezeigt worden, den Riß der ganzen Berechnung machen, in selbem neben andern auch die Hauptachse der Ellipse finden, und sich wegen der Richtigkeit der Berechnung selbst überzeugen.

19. §. Da die Hyperbeln die meiste Verschiedenheit unter sich und in ihrer Gattung haben können, wie aus dem 3 und 4 § erhellt; so wollen wir auch von diesen ein und anders Beyspiel hersetzen, und uns eben der vorigen Kürze bedienen. Man wird in selben besonders wegen Berechnung des Haupt $\triangle$ den Unterschied von den andern Kegelschnitten zu bemerken haben. Die gegebenen Sätze sind demnach die Absciſſe $E\,c = 8$. Ihre Ordinate $b\,c = 6$. Die zweyte Abseiſſe $E\,o = 22$. Ihre Ordinate $p\,o = 15$. $a\,c = 5$. Wir wollen indeſſen annehmen, daß (Fig. 8) der Kegel $m\,A\,n$ der Wahre, und die Achse $E\,c\,o$ in ihrer wahren Lage sey.

Wenn $a\,c = 5$, und $b\,c^2 = 36$, so ist $c\,d = 7,20$, und $a\,d = 12,20$. $\frac{1}{2}\,a\,d = 6,10$, suche also $m\,o$:

$$E\,c = 8,00 = 2.90309.$$
$$a\,c = 5,00 = 2.69897.$$
$$E\,o = 22,00 = 3.34242.$$
$$\overline{\quad 6.04139.}$$
$$m\,o = 13,75 = 3.13830.$$
$$p\,o^2 = 22500 = 4.35218.$$
$$\text{div. mit } m\,o = 1375 = 3.13830.$$
$$o\,n = 16,36 = 1.21388.$$
$$+ m\,o = 13,75.$$
$$m\,n = 30,11.$$

$\frac{1}{2}\,a\,d$

$$\tfrac{1}{2}\,ad = a\times = 610.$$
$$-\ ac = 500.$$
$$c\times = 110.$$

Weil $a\times > ac$: so fällt die Achse des Kegelschnittes Eco zwischen a und $\times$.

$$\tfrac{1}{2}\,mn = 1505.$$
$$on = 1636.$$

Da $on > \frac{1}{2}\,mn$, muß der Punkt o der Achse zwischen m und y fallen, und also die Achse des Kegelschnittes, die Achse des Kegels auch im Punkte o noch nicht durchschneiden.

Nach der 8 Figur, die wir vor Händen haben, ist klar und sichtbar, daß $oq = mo - mq$:

mq aber $= my - c\times$ sey.

$$my = 1505.$$
$$-\ c\times = 110.$$
$$mq = 1395.$$

Es ist aber $mo = 1375$, folglich kleiner als mq.

Also muß der Punkt o nicht zwischen q und y sondern zwischen m und q fallen, und die Achse des Kegelschnittes divergirt von der Achse des Kegels, etwann wie Fig. 9. Nach dieser dann ist oq zu bestimmen. Wir sehen aber alsogleich, daß $oq = my - qy\ (= c\times) - mo = 1505 - (110 + 1375) = 0,\ 20$ sey. Ich habe diesen Fall umständlicher abgehandelt, theils zu zeigen, wie in andern ähnlichen Fällen zu verfahren sey, theils abermal zu beweisen, daß, wenn man auch die Gattung des Kegelschnittes anfangs nicht wüßte, diese Berechnungsart unumgänglich auf den mindesten Vorfall uns selbst leite.

Es kann demnach (Fig. 9.) in dem Haupt $\triangle\ ocq$ der Winkel c gefunden werden:

$$E\,o = 2200.$$
$$-E\,e = 800.$$
$$c\,o = 1400.$$
$$c\,o = 1400 = 3.\,14612.$$
$$R. = 10.$$
$$o\,q = 0{,}20 = 1.\,30103.$$
$$< c = 49'\,6'' = 8.\,15491.$$

Hier ergiebt sich die Anmerkung, daß, da der Winkel c so klein, die Lage der Achse der Hyperbel mit der Achse des Kegels fast parallel laufe, und also sich der Fall ereignen könne, daß $o\,q$ mit dem ganzen Haupt △ verschwinde: welches aber nur in der Hyperbel, und über das nur, wenn die zwo Achsen parallel sind, geschieht. Daher, wenn man den Kegel nicht gar genau bestimmen wollte, könnte man die zwo Achsen als wirklich parallel annehmen: wo die Berechnung weit leichter und kürzer ablaufen würde, wie wir im nächsten § sehen werden. Indessen wollen wir doch die gegenwärtige Aufgabe völlig ausmachen. Der Winkel c im Haupt △ ist also $= 49'.\,6''$. So lange $c\,o$ jenseits der Perpendicular $c\,q$ fiel, wie in den zwey vorgehenden Exempeln geschah, war der Winkel $c\,o\,q$ = dem Complement des Winkels $q\,c\,o$ allzeit das Maas des Winkels $E\,c\,a$: da aber hier die Linie $c\,o$ die Perpendicular paßirt hat, und der Winkel $E\,c\,a$ nunmehr ein stumpfer Winkel ist, ist auch das Maas desselben sein ihm verticalentgegenstehender Winkel $o\,c\,x = 90° + o\,c\,q = 90°.\,49'.\,6''$. Dieser Fall glaube ich, macht, daß dieses dritte Exempel nicht für die lange Weile hier stehe. Man sieht, wie sich die Fälle abändern, und wie jedem zu begegnen sey. Da wir nun im △ $a\,c\,E$ $a\,c = 500$, und $E\,c = 800$ mit dem von denselben eingeschloßenen stumpfen Winkel $= 90°.\,49'.\,6''$ haben, können wir wie oben, die übrigen Winkel sammt der Seite $E\,a$ finden:

$ac = 500.$

$Ec = 800.$

die Summe $= 1300.$

der Unterschied $= 300.$

die Summe der unbekannten Winkel $= 89°. 10'. 54''.$

die halbe Summe $= 44. 35. 27.$

$1300 = 3. 11394.$

$300 = 2. 47712.$

Tang. $44°. 35'. 27'' = 9. 99379.$

$12. 47091.$

Der halbe Unt. $= 12°. 49' = 9. 35697.$

Ist also der Winkel $Eac = 57°. 24'. 27''.$

und der Winkel $aEc = 31. 46. 27.$

Sin. $< a = 9. 92557.$

$Ec = 2. 90309.$

Sin. $< c = 9. 99995.$

$12. 90304.$

$Ea = 949 = 2. 97747.$

$< a = 57°. 24'. 27''.$

2

$114. 48. 54.$

$65. 11. 6 = < aAd.$

Sin. $< A = 65. 11. 6. = 9. 95792.$

$ad = 1220 = 3. 08635.$

Sin. $< a = 57. 24. 27. = 9. 92557.$

$13. 01192.$

$Aa = 1132 = 3. 05400.$

$- Ea = 949.$

$AE = 183.$

Der Kegel dann, in dem diese Hyperbel Platz findet, hat im Scheitelwinkel 65°. 11'. 6", die Scheiteln sind 183 Theile entfernet, und die Neigung der Hyperbel gegen die Seite des Kegels AE ist 31°. 46'. 27".

20. §. Jede Hyperbel in verticaler Lage, nämlich also, daß ihre Achse mit der Achse des Kegels parallel stehe, in den Kegel zu bringen, kann auf nachfolgende Art geschehen. Wir nehmen die vorige Hyperbel zum Exempel, in welcher $Ec = 800$. $cb = 600$. $Eo = 2200$. $op = 1500$, und $ac = 500$. Es steht also (Fig. 10.) Eo die Achse der Hyperbel mit Axy parallel, so wird der $\triangle Eac$ rechtwinklicht seyn, in welchem ac und Ec bekannt sind. Suche die Winkel a und E, wie auch die Seite aE.

$$Ec = 800 = 2.\ 90309.$$
$$ac = 500 = 2.\ 69897.$$
$$R. = 10.$$

$$\text{Tang.} < E = 32° \text{ —}' 20'' = 9.\ 79588.$$
$$< a = 57.\ 59.\ 40.$$

$$\text{Sin.} < a = 9.\ 92839.$$
$$Ec = 2.\ 90309.$$
$$R. = 10.$$

$$aE = 944 = 2.\ 97470.$$
$$ad = 1220 \text{ wie oben § 19.}$$

Der Winkel E = dem Winkel aAx, mithin selben doppelt genommen, macht den Winkel aAd aus = 64° —' 40".

$$\text{Sin.} < aAd = 64° \text{ —}' 40'' = 9.\ 95366.$$
$$ad = 1220 = 3.\ 08635.$$

Sin.

$$\text{Sin.} < Aad = 57.\ 59.\ 40 = 9.\ 92839.$$

$$13.\ 01474.$$

$$Ad = Aa = 1151 = 3.\ 06108.$$

$$Aa = 1151.$$
$$-aE = 944.$$
$$AE = 207.$$

Also ist der Scheitelwinkel des Kegels $= 64^\circ - ' 40''$. und *AE* die Entfernung der Scheitel $= 207$.

21. §. Diese Lage der Hyperbeln hat viel ähnliches mit den Parabeln; denn wie hier der Parallelismus zwischen den Achsen obwaltet, also hat er in den Parabeln zwischen der Achse derselben, und der einen Seite des Kegels statt. Es läßt sich hiemit diese Berechnungsart auch in den Parabeln anwenden; wenn man einmal weis, daß der Kegelschnitt von dieser Gattung ist. Deßwegen wir sie im 18 § noch nicht gebrauchen konnten, da wir aus den dort gegebenen Sätzen vorläufig noch nicht wußten, zu was für einer Gattung der Kegelschnitte sie gehöre. Wir wollen obiges Exempel (17 §) beybehalten, und in selbem gegenwärtige Berechnungsart zeigen.

22. §. Fig. 11. sey $Ec = 1200$. $ac = 400$. Weil in der Parabel Ec allzeit Ea gleich ist (7 §), so haben wir in dem $\triangle\, aEc$ die drey bekannten Seiten, aus welchen sich (Trig.) die Winkel finden lassen.

$$1200 = 3.\ 07918.$$
$$1600 = 3.\ 20412.$$
$$800 = 2.\ 90309.$$

$$6.\ 10721.$$

der Unterschied der Segmenten $= 3.\ 02803 = 1067$

$$
\begin{array}{r}
1200. \\
-\ 1067. \\
\hline
133. \\
\hline
66\tfrac{1}{2}. = 66,5.
\end{array}
$$

$$4000 = 3.\ 60206.$$
$$R. = 10.$$
$$665 = 2.\ 82282.$$

$$9^{\circ}.\ 34'.\ 12'' = 9.\ 22076.$$
$$< a = < c = < d = 80^{\circ}.\ 25'.\ 48''.$$
2 mult.
$$< a + < c = 160.\ 51.\ 36.$$
$$< E = < A = 19.\ 8.\ 24.$$

$$< A = 19.8.24. = 9.\ 51570.$$
$$a\,d\,(\S\ 17.\ n\ 1.) = 1025 = 3.\ 01072.$$
$$< a = 80.\ 25.\ 48 = 9.\ 99388.$$
$$13.\ 00460.$$
$$A\,d = A\,a = 3083 = 3.\ 48890.$$
$$-\ E\,a\ = \ 1200.$$
$$A\,E\ = 1883.$$

Es ergiebt sich zwar zwischen dieser und der im 17 § gemachten Berechnung einiger Unterschied, welcher aber nicht merklich, und durch genauere Anwendung mehrer Decimaltheile ꝛc. leicht gehoben werden kann, und also in keine Betrachtung kömmt.

23. §. Wir haben im 16 § zum Grunde angesetzt, daß man zur Auflösung unsrer Aufgabe zwar nicht die Gattung des Kegelschnittes, doch aber zwo Abscissen sammt ihren Ordinaten wissen müsse. Giebt man nun anstatt der Abscissen, und Ordinaten andre Data, so folgt, daß, wenn die Aufgabe nicht auch in diesem Stücke soll unbestimmt ausfallen, man nothwendig solche und so viele haben müsse,

als

als erklecklich sind, mittelst selber die Abscissen und Ordinaten zu finden. Welche aber, und wie viele solche Data zu dem Ende erfordert werden, lehrt die Algebra, auf welche wir uns sohin beziehen. Einen einzigen Fall, weil selber in algebraischen Schriften nicht überall vorkömmt, wollen wir behandeln, nämlich wenn eine Abscisse, ihre Ordinate, und eine zweyte Abscisse, doch ohne Ordinate, oder eine zweyte Ordinate ohne Abscisse gegeben sind, wie die zweyte Ordinate oder Abscisse zu finden sey.

24. §. Da eine Abscisse und Ordinate zu allen Gattungen der Kegelschnitte, ja so gar zum Zirkel, und zu proportionalen Triangeln gleichgiltig ist: muß vor allem die Gattung des Kegelschnittes bestimmet seyn; in den Ellipsen und Hyperbeln wird überdas zu endlicher Bestimmung eines Individui in seiner Gattung entweders die Achse, oder der Parameter als gegeben erfordert. Alles nach Ausweisung folgender §§.

25 §. Es sey in einer Parabel gegeben, die Abscisse $= \mathrm{x}$, ihre Ordinate $= y$, und die zweyte Abscisse $= u$: es soll ihre Ordinate $= z$ gefunden werden.

Auflösung.

$$y^2 : z^2 = \mathrm{x} : u. \text{ (Algebra)}$$

$$y^2 u = z^2 \mathrm{x}.$$

$$\frac{y^2 u}{\mathrm{x}} = z^2.$$

$$\sqrt{\frac{y^2 u}{\mathrm{x}}} = z.$$

26. §. Es sind in der Parabel gegeben die Abscisse x, die Ordinate y, und die Ordinate z, man soll ihre Abscisse u finden.

Auflösung.

$$y^2 : z^2 = : x\ u.$$
$$y^2 u = z^2 x.$$
$$u = \frac{z^2 x}{y^2}$$

27. §. In einer Ellipse sind gegeben x und y, wie auch u sammt der Achse a: wird gesucht z.

Auflösung.

$$y^2 : z^2 = (a - x)x : (a - u)u.$$
$$= ax - x^2 .\ au - u^2.$$
$$a\,u\,y^2 - u^2 y^2 = a\,z^2\,x - x^2 z^2.$$
$$\frac{a\,u\,y^2 - u^2\,y^2}{a\,x - x^2} = z^2.$$
$$\sqrt{\frac{a\,u\,y^2 - u^2\,y^2}{a x - x^2}} = z$$

28. §. In der Ellipse sind gegeben x, y, z und a: wird u gesucht.

Auflösung.

$$y^2 : z^2 = a\,x - x^2 : a\,u - u^2$$
$$a\,u\,y^2 - u^2\,y^2 = a x\,z^2 - x^2\,z^2.$$
$$a\,u - u^2 = \frac{a\,x\,z^2 - x^2\,z^2}{y^2}.$$
$$\frac{x^2\,z^2 - a\,x\,z^2}{y^2} = u^2 - a\,u.$$
$$\frac{x^2\,z^2 - a\,x\,z^2}{y^2} + \tfrac{1}{4}a^2 = u^2 - a u + \tfrac{1}{4}a^2.$$
$$\sqrt{\frac{x^2\,z^2. - a\,x\,z^2}{y^2} + \tfrac{1}{4}a^2}\ ) = u - \tfrac{1}{2}a, \text{ oder } \tfrac{1}{2}a - u.$$

Hier

Hier ist es willkürlich, ob man die gegebene Ordinate z ober oder unter das Centrum der Ellipse setzen wolle, im ersten Falle heißt es:

$$\sqrt{\left(\frac{X^2 z^2 - aXz^2}{y^2} + \frac{1}{4}a^2\right)} \begin{cases} \frac{1}{2}a - u. \text{ und im zweyten} \\ u - \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

folglich ist die Auflösung

im ersten Falle $u = \frac{1}{2}a -$
und im zweyten $u = \frac{1}{2}a +$ $\sqrt{\left(\frac{X^2 z^2 - aXz^2}{y^2} + \frac{1}{4}a^2\right)}.$

29. §. Eben diese zween Fälle können in den Hyperbel vorkommen. Es sey gegeben X, y, und u mit der Zwerchachse a. Man soll die Ordinate z finden.

Auflösung.

$$y^2 : z^2 = aX + X^2 : au + u^2.$$
$$auy^2 + u^2y^2 = aXz^2 + X^2z^2.$$
$$\sqrt{\frac{auy^2 + u^2y^2}{aX + X^2}} = z.$$

30. §. Man weis in der Hyperbel X, y, z, und a, und soll die Abseisse u suchen.

Auflösung.

$$auy^2 + u^2y^2 = aXz^2 + X^2z^2 \text{ (29. §.)}$$
$$au + u^2 = \frac{aXz^2 + X^2z^2}{y^2}$$
$$u^2 + au + \frac{1}{4}a^2 = \frac{aXz^2 + X^2z^2}{y^2} + \frac{1}{4}a^2.$$
$$u = \sqrt{\left(\frac{aXz^2 + X^2z^2}{y^2} + \frac{1}{4}a^2\right)} - a.$$

31.

31. §. Aus diesem ist zu schließen, daß x, y, u und z ein gewisses Verhältniß gegen einander haben müssen, und daß zwar jede Zahlen als Abscissen oder Ordinaten eines Kegelschnittes als einzelne Zahlen betrachtet, aber nicht in Verbindung mit andern seyn können. Es sey x eine Abscisse, y ihre Ordinate, u eine andere Abscisse, z ihre Ordinate, so wie diese Buchstaben in gegenwärtiger Abhandlung durchgängig angenommen werden. Setzen wir sie in einer Zeile her.

$$x.\ y.\ u.\ z.$$

Wollen wir ihren Werth bestimmen, wohlan, setzen wir unter jeden Buchstabe die nächste beste Zahl, und stellen die in dieser Abhandlung angezeigte Berechnung darüber an. Was wird folgen? entweder werden wir auf einen Kegelschnitt kommen, auf den wir selbst nicht dachten, oder wir werden in der Berechnung stecken bleiben: wir werden Widersprüche finden, als so viele Zeichen, daß diese Zahlen, wenigst, wie sie jetzt stehen, unmöglich für Kegelschnitte taugliche Zahlen seyn können. Verändert sie nur in ihrer Stellung, und wiederholet die vorige Berechnung, vielleicht werden sie im neuen Platze mit den übrigen Zahlen doch zu einer Gattung Kegelschnitte tauglich seyn. Veränderet sie öfters untereinander: vier Zahlen lassen sich nach den Permutationsregeln 24mal versetzen. Es wird doch eine und die andere zum Kegelschnitte schicklich seyn. Doch wir mahnen andere zu einer mühesamen Arbeit an, die wir selbst in die Länge nicht wohl aushalten möchten. Wer sich hierinn üben will, dem wollen wir doch die Arbeit erleichtern, und einen kürzern Weg zur Kenntniß des Verlangten zu kommen zeigen. Es sey z. E.

$$x.\ y.\ u.\ z.$$
$$1.\ 3.\ 5.\ 7.$$

Die Formel der Parabel ist:

$$y^2 : z^2 = x : u.$$
$$9 : 49 = 1 : 5.$$

Weil

Weil 9 : 45 = 1 : 5 eine wahre Proportion hat: wenn $x = 7$ mit einer Decimalfraction vermindert würde, als z. E. 6, 7, würden sich die vier Zahlen in voriger Ordnung = 1. 3. 5. 6, 7 zur Parabel schon näher schicken. Wir wollen sehen, wie sie zur Ellipse paßen, dessen Formel ist:

$$y^2 : x^2 = a X - X^2 : a u - u^2.$$

$$9 : 49 = 1 a - 1 : 5 a - 25.$$

Man suche den Werth der Achse $= a$.

$$\underline{49 a - 49 = 45 a - 225.} \quad -49 \text{ add.}$$

$$49 a = 45 a - 176.$$

Hier käme der Werth von a negativ heraus, welches unmöglich ist, und also anzeigt, daß diese vier Zahlen, wenigst in dieser Stellung zur Ellipse untauglich sind. Auf diese Art könnte man sie auch in der Hyperbel probiren. Man versetze aber die vier Zahlen z. E.

$$X.\ y.\ u.\ x.$$

$$1.\ 5.\ 3.\ 7.$$

und probire sie nochmal in der Ellipse.

$$y^2 : x^2 = a X - X^2 : a u - u^2.$$

$$25 : 49 = a - 1 : 3 a - 9.$$

$$\underline{75 a - 225 = 49 a - 49.}$$

$$\underline{75 a - 176 = 49 a.}$$

$$27 a = 176.$$

$$a = 6 \tfrac{14}{27} = 6,518 = \text{der Achse.}$$

In dieser Versetzung sind also die Zahlen 1. 3. 5. 7. das ist, die ersten vier Zahlen der arithmetischen ungleichen Progreßion zu Kegelschnitten, benanntlich zur Ellipse tauglich. Auf gleiche Weise kann man andere Progreßionen, sogenannte Series, polygonische, harmonische Zahlen rc. prüfen, und sodann, wenn es beliebet, ihnen auch Kegel, und Lagen in selben durch die Berechnung anweisen.

32. §. Man wird schon längst den in 17 §. n 10 versprochenen Beweis erwartet haben: ich habe ihn aber geflissentlich bis zum Ende der Abhandlung gesparet; weil selber einerseits das Verfahren in unsrer Hauptaufgabe rechtfertigt, andererseits aber als eine zweyte Aufgabe mag angesehen werden. Mich dünkt, eines strengen geometrischen Beweises habe die angezeigte Berechnung nicht nöthig. Wer sie von Schritte zu Schritte betrachtet, sieht ihren Zusammenhang, und die auf geometrisch- oder trigonometrische Gründe sich fussende Berechnungen belehnen sich in einzelnen Schriften ohnehin auf jene Wissenschaften, aus denen der Grund geborget ist. Mein Beweis also ist vielmehr für eine Probe richtiger Berechnung, als für einen Beweis im engen Verstande anzusehen. Wie in der Arithmetik z. B. die Division durch die Multiplication und diese durch jene erprobet wird; also läßt sich auch die Auflösung unserer Aufgabe durch den Rückweg rechtfertigen, wenn wir das, was wir gefunden, zum Grunde der Frage legen, und das, was wir zuvor als gegeben angenommen, nunmehr zum Stoffe derselben machen. Man fraget demnach jetzt um die Beschaffenheit des **Kegelschnittes**, der aus einem **gegebenen** Kegel, in **gegebener** Entfernung der Scheitelpunkte, und unter **gegebener** Neigung seiner Achse gegen die Seite des Kegels geschnitten wird. Bekommen wir durch unsere Berechnung den nämlichen Kegelschnitt, dessen Kegel und Lage wir vorher gesucht, so sind wir nicht nur der Richtigkeit unserer Rechnung, sondern auch der Art, der wir uns gebrauchet haben, genug überzeugt. Kleine Unterschiede, deren zufällige Ursachen man ohnehin leicht einsieht, bestärken vielmehr diese zweyfache Richtigkeit, als daß sie selbe in Zweifel ziehen machen; denn sonst würden sie gewiß nicht klein seyn.

33. §. Diese Probe wollen wir in der Ellipse (18. §.) machen, und die Aufgabe also stellen: in einem Kegel, dessen Scheitelwinkel = 80° ist, schneidet eine krumme Linie in der Entfernung vom

Schei-

Scheitel = 100, 00 die eine Seite desselben unter einem Winkel von 100 Graden. Welche ist die Gattung und Art dieses Kegelschnittes? Weil der Neigungswinkel desselben größer ist, als der Scheitelwinkel des Kegels, so sehen wir zum voraus, daß der Kegelschnitt eine Ellipse sey. (8. §.) Die Aufgabe dann aufzulösen, nehmen wir zwo Abscissen dieser Ellipse an, und suchen ihre zugehörigen Ordinaten: haben wir diese vier Stücke, so können wir (Algebra) die Achse, den Parameter, u. s. f. mit einem Worte alles finden, was diese Ellipse von allen übrigen ihrer Gattung unterscheidet. Da aber die Auflösung der Aufgabe zugleich als die Probe der in 18. §. gemachten Berechnung gelten soll: so nehmen wir, die weitläuftige Reduction zu ersparen, die zwo Abscissen der dortigen Ellipse an, und suchen die Ordinaten. Stimmen diese ebenfalls mit den dort gegebenen überein, so daß der Unterschied nicht beträchtlich ist (32. §.) so sind wir auch der dortigen Operation und der Richtigkeit der Methode selbst hinlänglich versichert. Die kleinere Abscisse nehmen wir demnach an = 7, 660, die größere = 12, 000. Es wird sich zeigen, was ihnen die Berechnung für Ordinaten zutheile.

34. §. n. 1. Der Scheitelpunkt A (Fig. 6.) sey = 80°. AE = 100, 00, und der Winkel $a E c$ = 100°. Man setze aus E in c die angenommene kleinere Abscisse = 7, 660. Durch c ziehe man die Linie a d der Achse des Kegels perpendicular. Der Winkel a wird = seyn dem Winkel d, und beyde zusammen = 100°. also jeder = 50°. Der halbe Winkel in A = $a A$ x ist = 40°.

N. 2. In dem $\triangle a E c$ sind die zween Winkel a = 50°, und E = 100° bekannt, folglich ist der Winkel c = 30°. überdas wissen wir die Seite $E c$ = 7660. Man suche die übrigen zwo Seiten.

$$\text{Sin.} \angle a = 50° = 9.\ 88425.$$
$$E c = 7660 = 3.\ 88422.$$

$\text{Sin.} < c = 30° = 9.69897.$

$13.58319.$

$E a = 5000 = 3.69894.$

$\text{Sin.} < a = 50° = 9.88425.$

$E c = 7660 = 3.88422.$

$\text{Sin.} < E = 100° = 9.99335.$

$13.87757.$

$a c = 9848 = 3.99332.$

N. 3. In dem rechtwinklichten $\triangle\ a A \times$ ist bekannt,

1. Der Winkel $a A \times = \frac{1}{2} A = 40°$.

2. Die Seite $A a = E A + E a = 10000 + 5000 = 15000$.

Man suche die übrigen Seiten.

$R. = 10.$

$A a = 15000 = 4.17609.$

$\text{Sin.} < A = 40° = 9.80806.$

$a \times = 9642 = 3.98415.$

$R. = 10.$

$A a = 15000 = 4.17609.$

$\text{Sin.} < a = 50° = 9.88425.$

$A \times = 11490 = 4.06034.$

N. 4. $a \times = 9642.$

2 male,

$a d = 19284.$

$- a c = 9848.$

$c d = 9436. = 3.97478.$

mult. mit $a c = 9848 = 3.99334.$

$b c^2 = 7.96812.$

$b c = 9640 = 3.98406.$

$$\begin{aligned} N.\ 5.\ Eo &= 12000 \\ -\ Ec &= \underline{\ \ 7660} \\ co &= \ \ 4340. \end{aligned}$$

durch *o* ziehe man *m n* mit *a d* parallel. Da der Winkel $dco = Eco = 30°$; also ist der Winkel $q\,c\,o = 60°$, und $c\,o\,q = 30°$. Man lasse aus *c* die Perpendicular *c q* auf *m n* fallen, und suche im $\triangle\ c\,q\,o$ die Linie *c q*.

$$\begin{aligned} R. &= 10. \\ co = 4340 &= 3.63748. \\ \text{Sin.} < co\,q = 30° &= 9.69897. \\ \hline cq = xy = 2170 &= 3.33645. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N.\ 6.\ Ax &= 11490. \\ +\ x\,y &= \underline{\ \ 2170.} \\ Ay &= 13660. \end{aligned}$$

In dem $\triangle\ A\,m\,y$ suche man die Seite *m y*.

$$\begin{aligned} Ax = 11490 &= 4.06034. \\ ax = 9642 &= 3.98415. \\ Ay = 13660 &= 4.13545. \\ \hline &\ \ \ 8.11960. \\ \hline my = 11462 &= 4.05926. \end{aligned}$$

—2. mult.

$$mn = 22924.$$

N. 7. In dem $\triangle\ E\,m\,o$ suche man *m o*.

$$\begin{aligned} Ec = 7660 &= 3.88422. \\ ac = 9848 &= 3.99332. \\ Eo = 12000 &= 4.07918. \\ \hline &\ \ \ 8.07250. \\ \hline mo = 15427 &= 4.18828. \end{aligned}$$

$$mn = 22924.$$
$$-\,mo = 15427.$$
$$on = 7497.$$

N. 8. Man suche die Ordinate op.

$$mo = 15427 = 4.\ 18828.$$
$$on = 7497 = 3.\ 87488.$$
$$op^2 = 8.\ 06316.$$
$$op = 10754 = 4.\ 03158.$$

Also ist die angenommene erste Abscisse $Ec = 7,660.$
ihre gefundene Ordinate $bc = 9,640.$ (n.4.)
die andere Abscisse $Eo = 12,000.$
und ihre gefundene Ordinate $op = 10,754.$

35. §. Man vergleiche nun diese Ellipse mit jener des 18. §, so findet man, daß sie in allen vollkommen gleich, und folglich beyde Berechnungen richtig sind. Ein gleiches würde man in der Hauptsache gefunden haben, wenn man auch zwo andere Abscissen angenommen hätte: aber die Reduction und gleichsam Confrontirung beyder Ellipsen kostete eine neue nicht gar zu bequeme Berechnung. Die leichteste würde doch seyn, wenn man für die Ellipse des 18. §. die Achse suchete, sodann selbe in die elliptische Gleichung: $y^2 : z^2 = (a - x)\, x : (a - u)\, u$ neben den im vorigen Absatze gefundenen Ordinaten und Abscissen setzte. Behält die Gleichung ihr gehöriges geometrisches Verhältniß, so haben die Berechnungen auch die Probe gehalten.

36. §. Ich war gesinnet, hier am Ende der Abhandlung meine Gedanken auch über die in der Lehre von Kegelschnitten bekannten Asymptoten in etwas zu äußern: ich fand aber, daß sie wohl hinlänglichen Stoff zu einer besondern kleinen Abhandlung darreichen können, dahin ich es indessen verspare, und gegenwärtige Abhandlung ende.

Fig. 1

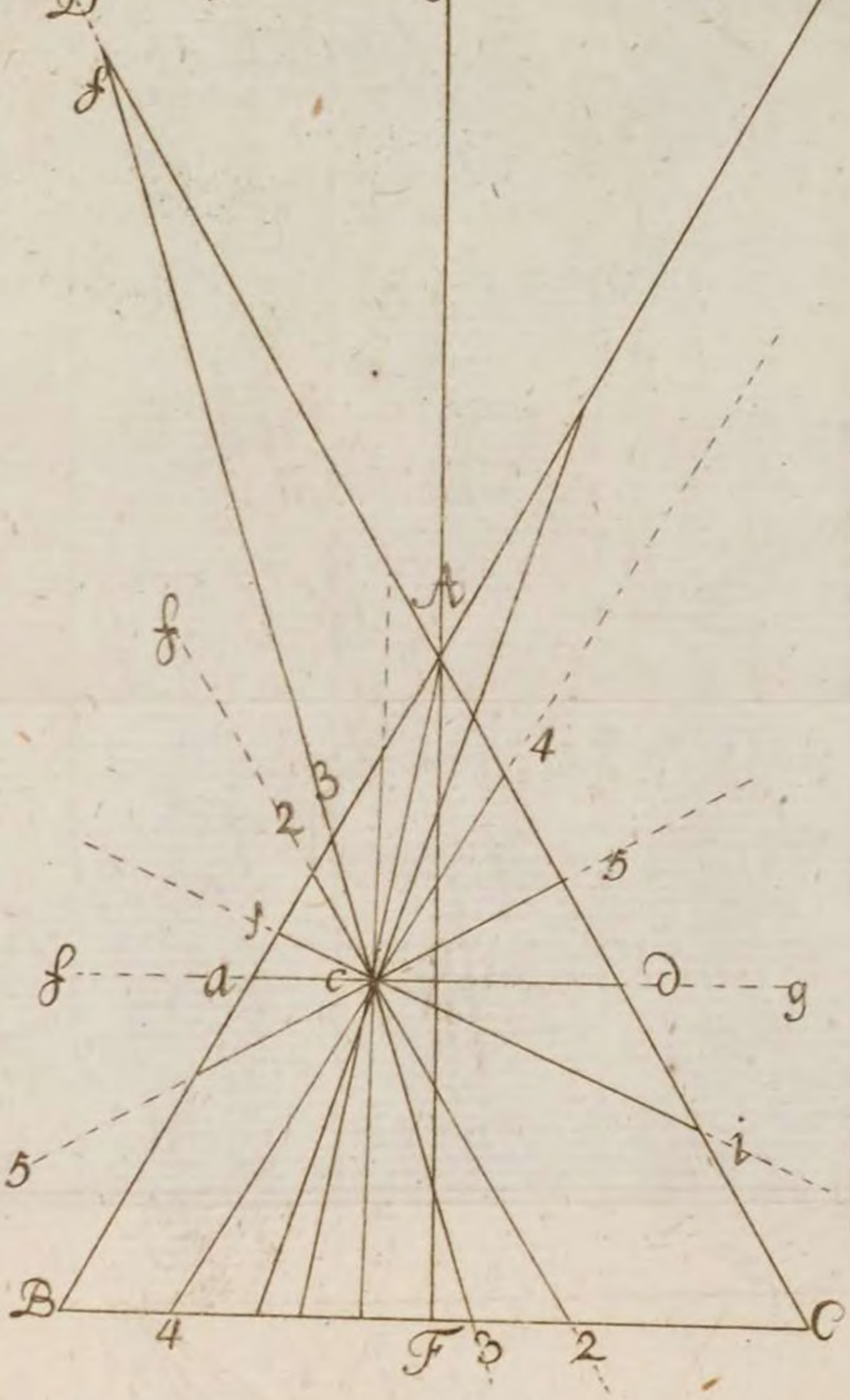


Fig. 2

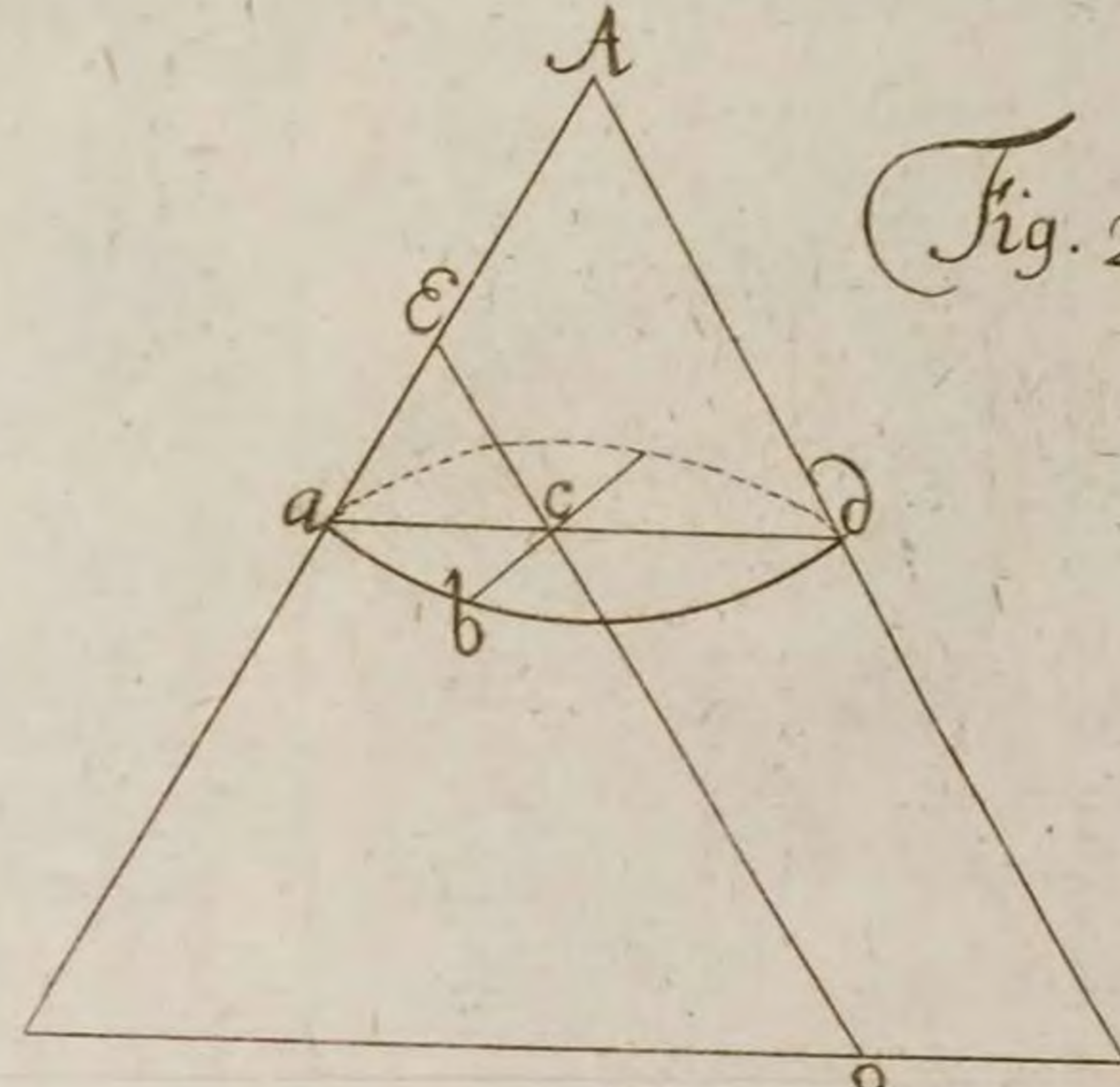


Fig. 4

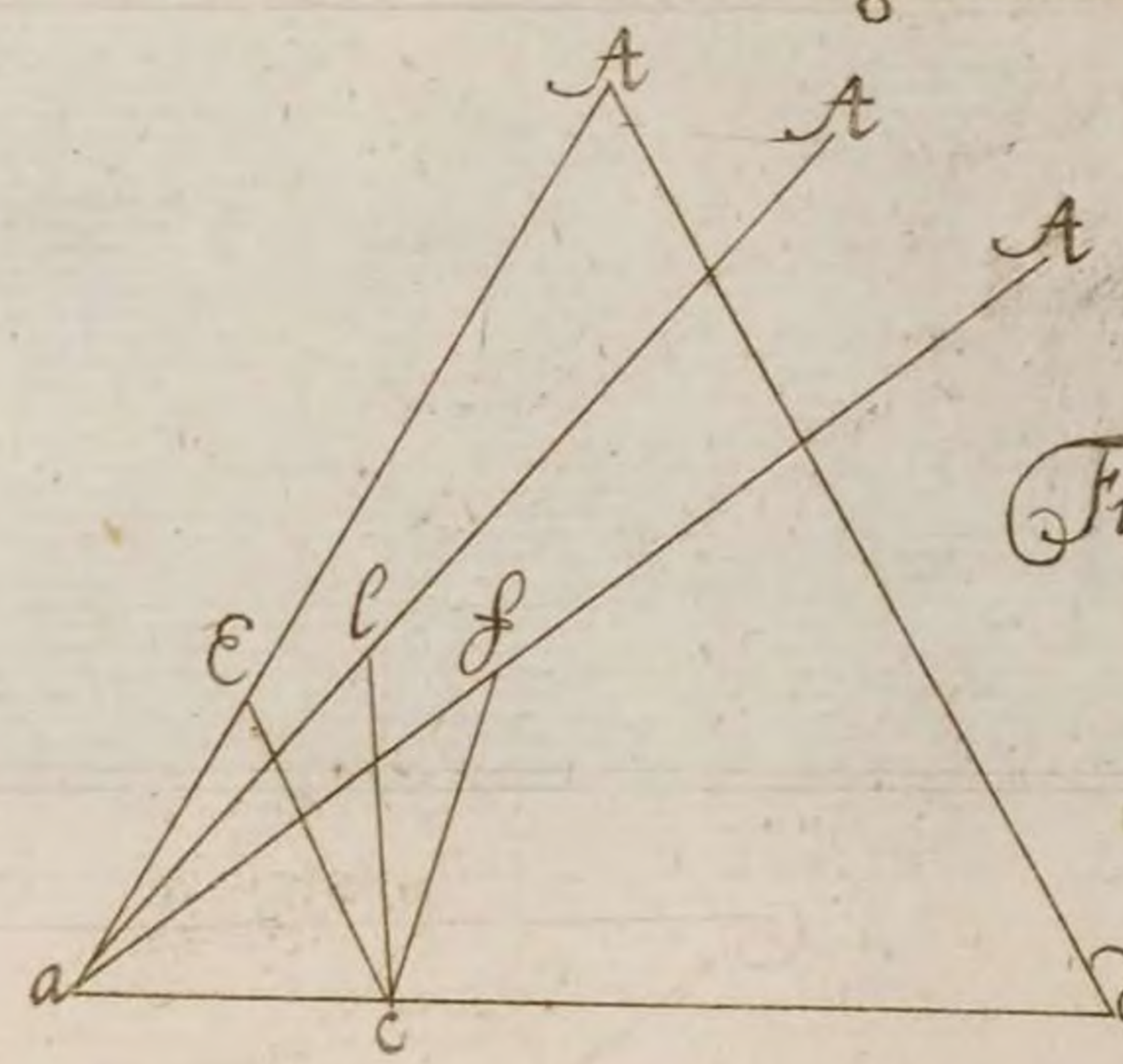
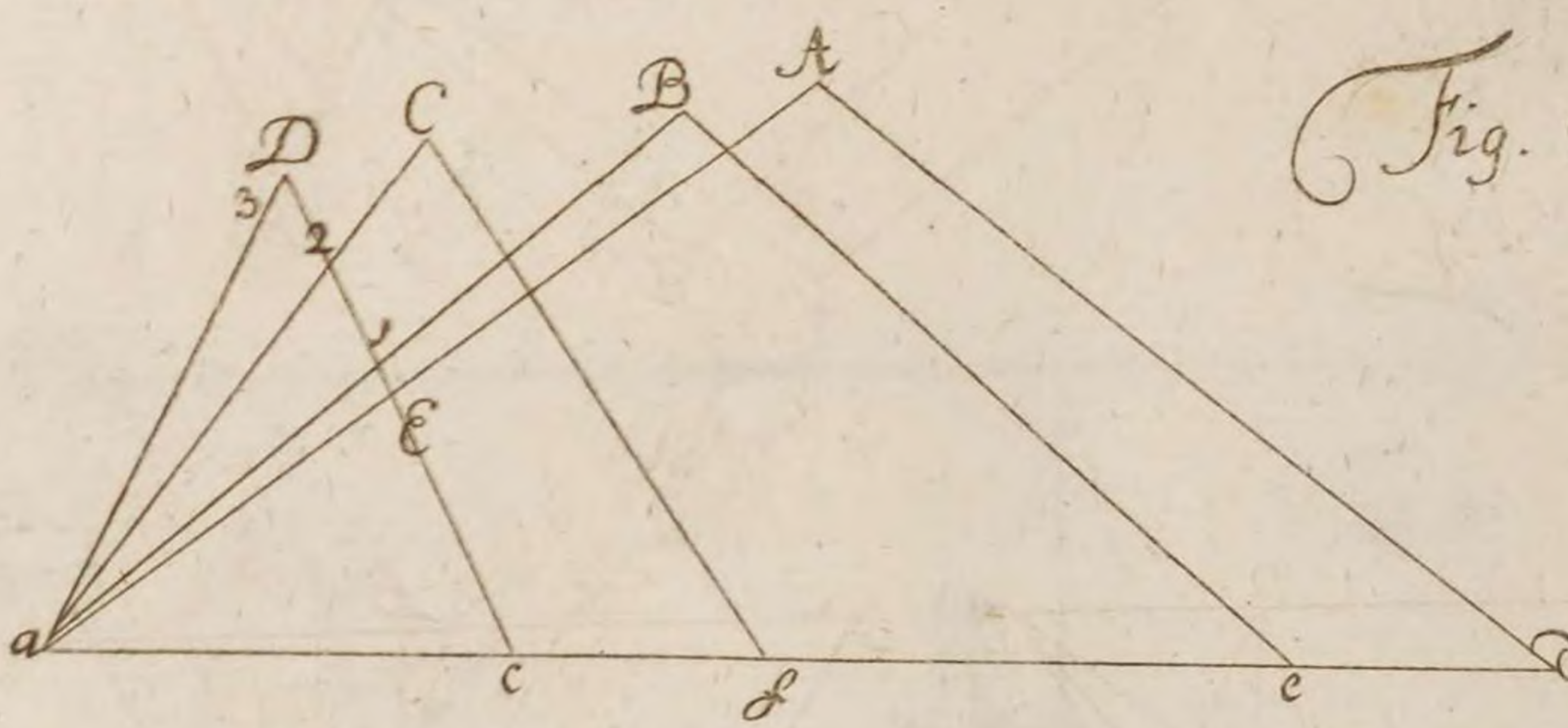
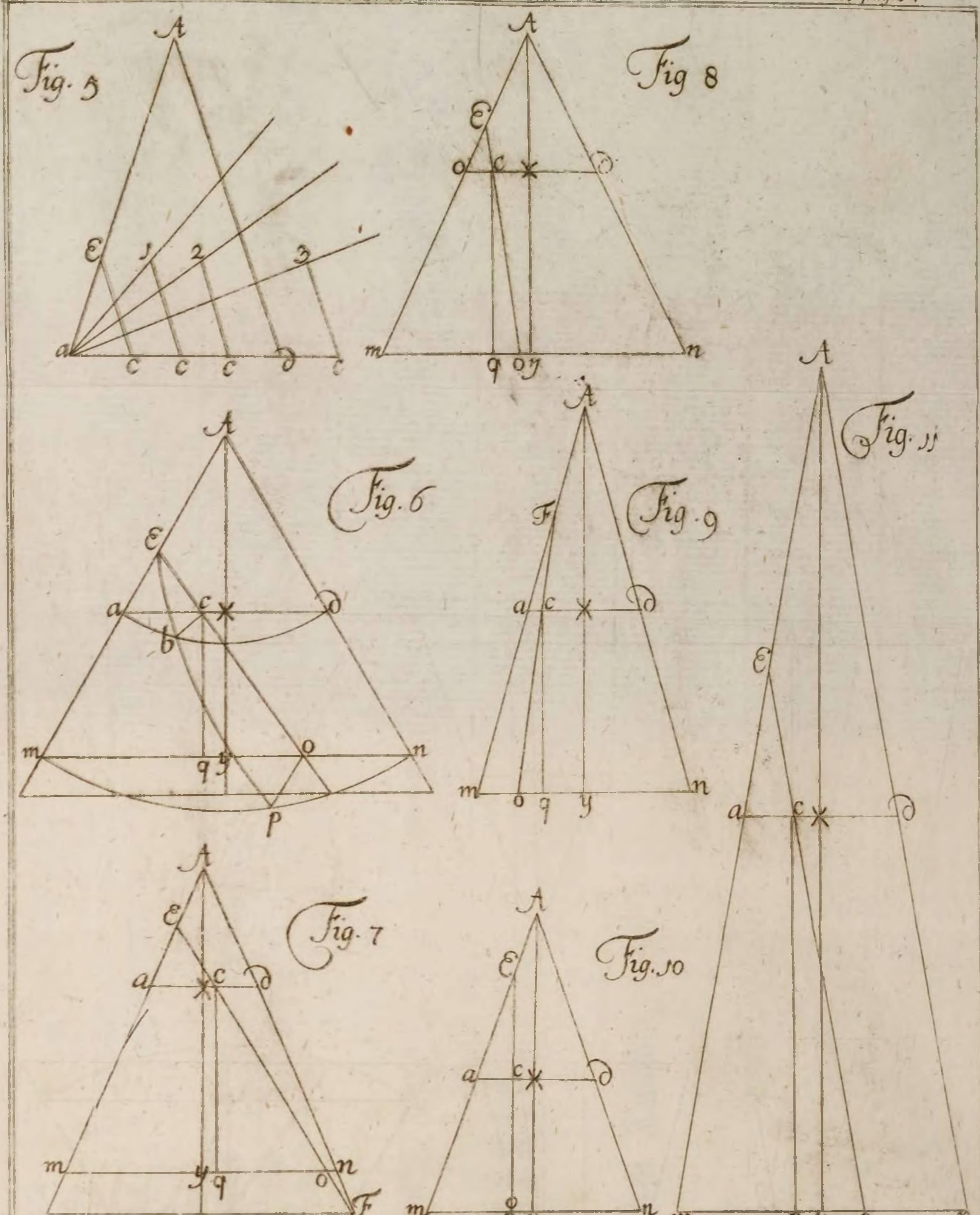


Fig. 3



Tab. II

ad pag. 54



Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Historische Classe = III. Classe

Jahr/Year: 1775

Band/Volume: 9-1775

Autor(en)/Author(s): Torporch Augustin

Artikel/Article: Abhandlung von den Kegelschnitten 18-54