Geodaetische Bestimmung

der

Erdkrümmung und Lothablenkung

von

Carl Max Bauernfeind.

Mit 10 Holzschnitten.

(Der math.-phys. Classe der k. Akademie vorgelegt am 2. März 1872.)

Begründung eines rein geodaetischen Verfahrens zur Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung

von

Carl Max Bauernfeind.

Bei Ausarbeitung eines im Jahre 1866 gehaltenen öffentlichen Vortrags über die Bedeutung moderner Gradmessungen kam ich auf den Gedanken, grössere Lothablenkungen durch trigonometrische Höhenmessungen und exactes Nivelliren aufzufinden,[1]) und bei der zweiten allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung zu Berlin im Jahre 1867 stellte ich die Behauptung auf, dass der polygonale Abschluss eines Nivellements allein noch keine ausreichende Garantie für dessen Genauigkeit gewähre. Diese Behauptung gründete ich vorzüglich auf die vielfach bestätigte Erfahrung, dass in einem grossen Nivellement merkliche Fehler von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen, welche sich zwar beim Abschlusse aufheben, aber in einer Reihe von Zwischenpunkten verbleiben und auf andere Höhenbestimmungen übergehen, möglich sind, theilweise aber auch auf die Ueberzeugung, dass selbst ein ganz fehlerfrei nivellirtes Polygon nicht nothwendig mit einer der Anfangscote gleichen Endcote abzuschliessen braucht, wenn die in der vertikalen Mantelfläche dieses Polygons vorkommenden Störungen

---

1) Man vergleiche: „Die Bedeutung moderner Gradmessungen.“ Vortrag in der öffentlichen Sitzung der k. Akademie der Wissenschaften am 25. Juli 1866 gehalten von C. M. Bauernfeind, S. 34 und 41. Dann: „Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physicalische Constitution der Atmosphäre.“ II Abschnitt: Astronomische Nachrichten Nr. 1590, S. 85, und Separatabdruck, 2 Heft, S. 27.

der Schwere-Richtung nicht gleich und entgegengesetzt sind, oder wenn bei der Berechnung des Nivellements auf die Aenderungen der Schwere-Intensität keine Rücksicht genommen wird. In meiner Schrift über das Bayerische Präcisionsnivellement [1]) fand ich abermals Veranlassung, der Einwirkung der Schwereänderungen auf die Schlussfehler vollständig nivellirter Polygone zu gedenken, und es würde für mich nunmehr die Pflicht erwachsen, die mehrmals ausgesprochene Ansicht zu begründen, wenn mir hierin Herr Consistorialrath Theodor Wand nicht theilweise zuvorgekommen wäre, veranlasst (wie er mir persönlich mittheilte) durch meine eben genannte Abhandlung über das in Bayern ausgeführte Präcisionsnivellement. Herr Wand zeigt nämlich in § 36 seiner gehaltvollen Schrift über die Principien der mathematischen Physik, [2]) dass bei Nichtberücksichtigung der veränderlichen Intensität der Schwere am Schlusse eines fehlerfrei nivellirten Polygons eine Differenz sich ergeben muss, die zwar im Allgemeinen unbedeutend ist, theoretisch aber doch besteht und bei Polygonen von grosser horizontaler Ausdehnung in der Richtung der Mittagslinie und bedeutender Erhebung im vertikalen Sinne immerhin auch Beachtung verdient. In welcher Weise ich mir den Einfluss der gestörten Richtung der Schwerkraft, also der Lothabweichungen, auf den Schluss vollständig nivellirter Polygone dachte und noch denke, werde ich im § 7 dieser Abhandlung näher erörtern.

1. Ueber den Begriff des Höhenunterschieds zweier Punkte.

In allen Schriften über Geodäsie wird der Höhenunterschied zweier Punkte als der normale Abstand der durch diese Punkte gelegten wahren Horizontalflächen definirt, und es werden unter diesen Flächen in der Regel die Kugeln verstanden, welche man vom Erdmittelpunkt aus durch die gegebenen Punkte gelegt denken kann. Bei strengerer Auffassung versteht man unter den wahren Horizontalflächen zweier Punkte die concentrischen Umdrehungsellipsoide, welche durch diese Punkte gehen und dem

---

1) Der vollständige Titel ist: „Ergebnisse des in Verbindung mit der europäischen Gradmessung in Bayern ausgeführten Präcisions-Nivellements.“ Abhandlungen der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, II Cl., X. Bd., III. Abthlg., München 1870, Verlag der Akademie.

2) Man vergleiche: „Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie“ von Theodor Wand, Consistorialassessor und Mitglied der Bayer. Abgeordnetenkammer. Leipzig 1871, Verlag von B. G. Teubner.

Bessel'schen Ellipsoid ähnlich sind. Der Höhenunterschied zweier Punkte, die durch eine Reihe von Zwischenpunkten getrennt sind, deren gegenseitige Höhenlage sich also nicht unmittelbar finden lässt, erscheint demnach als die algebraische Summe aller Höhenunterschiede, welche zwischen jenen zwei Punkten erhoben worden sind. Kennt man den Abstand eines dieser Punkte von der Meeresfläche (welche allgemein als Vertreterin der idealen Erdoberfläche oder des Bessel'schen Ellipsoids angesehen wird, während sie in der That nur eine Niveaufläche ist, die von diesem mittlereen Ellipsoid mehr oder weniger abweicht), so kann man auch die Abstände der übrigen Punkte von der Meeresfläche, beziehungsweise von dem Bessel'schen Endellipsoid berechnen.

Diese principielle Grundlage aller technischen und Präcisionsnivellements hat meines Wissens bis jetzt nur eine Beanstandung gefunden: Herr Th. Wand führt nämlich auf Seite 130 und 131 seiner vorhin genannten Schrift über die Principien der mathematischen Physik an, dass man die Höhe eines Ortes in der allein richtigen Weisse bloss durch die Potentialfunction der Erde an diesem Orte bestimmen und folglich die Höhendifferenz zwischen zwei Orten nur durch die Arbeit ausdrücken könne, welche nothwendig ist, um eine bestimmte Masseneinheit von dem einen Orte zum anderen zu heben. Unmittelbare Folge dieser Theorie ist, dass man, um ein Längennivellement herzustellen, die zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten ermittelten Höhenunterschiede noch mit den in den Stationen wirkenden Schwerkräften (die des ersten Punktes = 1 gesetzt) multipliciren und die Produckte dann algebraisch addiren muss.

Gegen die Ausstellung des Herrn Th. Wand an dem bisher festgehaltenen Princip des Nivellirens lässt sich vom rein theoretischen Standpunkte aus wohl nichts einwenden, umsomehr aber ist sie vom praktischen Standtpunkte aus abzulehnen. Sehen wir nämlich von der ungeheuren Schwierigkeit, die Intensität der Schwere an allen Punkten des Nivellements zu messen, ganz ab, so würde uns das Wand'sche Präcisionsnivellement doch nur dann ein klares Bild von den Erhöhungen und Vertiefungen des Terrains geben können, wenn wir die Niveauflächen auf das Besselsche Umdrehungsellipsoid beziehen. Es ist aber nirgends gesagt, wie man an jedem beliebigen Orte der Erde die gegenseitige Lage oder wenigstens den Abstand der Niveaufläche und des Ellipsoids finden kann, während es doch gewiss ist, dass diese beiden Flächen in den wenigstens Fällen sich decken. Die Wand'schen Höhencoten sind somit auf eine Fläche bezogen, von der wir zwar als Fläche gleichen Drucks eine kurze Definition aber so lange keine klare geometrische Anschauung haben, als wir diese Fläche nicht auf dem mehrfach erwähnten Ellipsoid construiren. Es wird folglich besser sein, bei dem Beziehungsmittel, wovon wir eine bestimmte Vorstellung haben, zu verharren, zumal da die Aenderung, welche der Wand'sche Schwerefactor an der Höhendifferenz zweier Punkte bewirkt, ganz unbedeutend ist. Um diese Aenderung kennen zu lernen, bemerke man, dass für irgend einen Ort der Erde unter der Breite φ die Beschleunigung der Schwere ausgedrückt ist durch die Gleichung

$$G = 9^{m},83139 - 0^{m},05091 \cos^2\varphi,$$

und dass somit die Aenderung $\triangle G$ von G, welche einer Aenderung $\Delta\varphi$ der Breite φ entspricht, gleich ist

$$\Delta G = 0^{m},05091 \sin 2\varphi . \Delta\varphi.$$

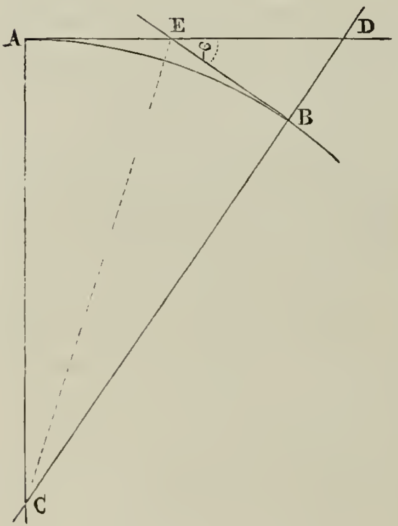
Setzen wir $\varphi = 45^0$, so ist $G = 9^{m},80594$ und $\Delta G = 0^{m},05091 \; \Delta\varphi$. Wird nun $\Delta\varphi$ zu 5 Sekunden angenommen, was schon einer ziemlich langen Nivellirstation entspricht, da deren Länge über 150^{m} beträgt, so ist der Werth von $\Delta\varphi$ in Bogenmass = 0,00002424 und folglich $\Delta G = 0^{m},000001234$. Läge nun die Station von 45^0 Breite auf dem Meridian um $5''$ gegen den Aequator, so wäre die Höhendifferenz h mit (1 — 0,0000001), und wenn sie um $5''$ gegen den Pol zu läge, mit (1 + 0,0000001) zu multipliciren. Es würde somit 1^{m} Höhenunterschied in dem ersten Falle um $0^{mm},0001$ kleiner und in dem zweiten Falle um eben so viel grösser werden. Da man aber bei der angenommenen Stationslänge schon $0,1^{mm}$ nicht mehr ablesen kann, so verliert selbstverständlich der Schwerefactor jede Bedeutung, d. h. er ist immer als 1 anzusehen. Auch auf weit ausgedehnte Nivellements hat er keinen merklichen Einfluss, wenn nicht zugleich ein sehr grosser Höhenunterschied zwischen dem äussersten südlichen und nördlichen Punkte der nivellirten Linie stattfindet. Denn dehnte sich ein solches Nivellement von der Ostsee bis zum adriatischen Meere, also über 9 Breitengrade oder mit Rücksicht auf die Krümmungen über 300 geographische Meilen aus, so betrüge der aus Vernachlässigung des Schwerefactors entspringende Fehler auf diese grosse Strecke, welche $9 \cdot 60 \cdot 12 = 6480$ Stationen à 5 Sek. Ausdehnung in der Richtung des Meridians umfasst, erst 0,000648 h, d. i. $0^{\mathrm{mm}}_{,}648$ auf 1^{m} oder $0^{\mathrm{m}}_{,}648$ auf 1000^{m} Höhendifferenz; dieser Fehler vermöchte also zwar den Niveauunterschied eines am adriatischen Meere 1550^{m} sich erhebenden Berggipfels um einen Meter, den der Ostsee und des adriatischen Meeres aber, welcher sicherlich kleiner als 1^{m} ist, nicht einmal um einen ganzen Millimeter zu beeinträchtigen.

Wenn nun durch diese Betrachtung erwiesen ist, dass der Einwurf des Herrn Th. Wand gegen das allgemein angenommene Princip des Nivellirens keine praktische Bedeutung hat, so soll damit keineswegs gesagt sein, dass es gegen dieses Princip überhaupt nichts zu erinnern gäbe. Es gibt in der That einen begründeten Vorwurf, und dieser besteht darin, dass man die scheinbaren Horizontallinien, welche das Fernrohr mit Libelle anzeigt, als Tangenten an das ideale Erdellipsoid behandelt, welche auf den Normalen dieses Ellipsoids senkrecht stehen, während sie in Wirklichkeit Tangenten der Niveauflächen sind und jederzeit nur auf den Schwererichtungen senkrecht stehen; mit anderen Worten: *der Vorwurf, welcher dem allgemein üblichen Nivellirverfahren gemacht werden kann, ist die dabei stattfindende Vernachlässigung der Lothabweichungen.* Mir ist kein Buch und keine Abhandlung bekannt, worin auf diesen Umstand auch nur aufmerksam gemacht, geschweige denn versucht worden wäre, die Lothabweichungen welche längst einer nivellirten Linie vorkommen, durch die Operation des Nivellirens selbst zu bestimmen. Wenn ich nun zeige, wie man mit Hilfe des Nivellirinstruments nicht bloss die Erdkrümmung sondern auch die Ablenkung des Loths an jedem beliebigen Orte der Erde bestimmen und somit auch die Niveauflächen auf dem z. Z. giltigen Bessel'schen Erdellipsoid darstellen kann, so habe ich demnach in diesem Unternehmen keinen Vorgänger, obwohl es nicht an Nachfolgern fehlen wird, die sich einbilden, die meinem Verfahren zu Grunde liegende Idee verstehe ich so von selbst, dass sie jeder andere Sachverständige sofort auch hätte haben können.

2. Die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren Horizont eines Punktes.

Es wird selten eine gerade Eisenbahnstrecke geben, welche 1 Meile lang ist: die Seitenlängen der Polygone der auf Eisenbahnen auszuführenden Präcisionsnivellements werden daher auch in der Regel weniger als 1 Meile betragen. Angenommen aber auch, eine Seite wäre 1 Meile lang, so umschlösse sie doch nur einen Bogen von 4 Minuten, und ein solches Bogenstück irgend eines vertikalen Schnitts des Erdellipsoids kann unter allen Umständen als ein Kreisbogen angesehen werden, der mit dem Krümmungshalbmesser des Ellipsoids an der betreffenden Stelle und in der Vertikalebene des Bogens beschrieben ist. Die oben bezeichnete Aufgabe lässt sich daher auch so ausdrücken: für eine gegebene Entfernung vom Berührungspunkt den Abstand der Tangente eines Kreisbogens von diesem Bogen zu bestimmen.

Fig. 1.



Ist in Fig. 1 AB der gegebene Kreisbogen vom Halbmesser r und der Amplitude φ, also der Länge $b = r\varphi$, und AD eine Tagente in A, so findet man für deren Abstand $BD = F$ aus dem rechtwinkeligen Dreiecke BDE, in welchem der Winkel $BED = \varphi$ und die Tangente $BE = r \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \varphi$ ist, sofort den Ausdruck

$$F = r \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \varphi,$$

und wenn man mit hinreichender Genauigkeit

$\operatorname{tg}\varphi = \varphi + {}^1\!/_3\, \varphi^3$ und $\operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \varphi = {}^1\!/_2\, \varphi + {}^1\!/_{24}\, \varphi^3$

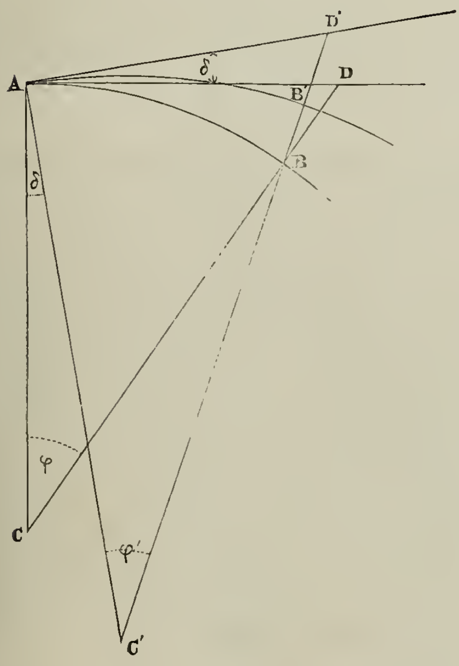
setzt und berücksichtigt, dass $\varphi = \frac{b}{r}$ ist, so wird schliesslich

$$F = \frac{b^2}{2r}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{b^2}{r^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Das zweite Glied dieses Ausdrucks kann man fast immer vernachlässigen, da es für $b = 1$ Meile nur 0,000000564 und folglich für $b = 10$ Meilen nur 0,0000564 gegen 1 beträgt, demnach in dem ersten Falle nur einen absoluten Werth von $0^{mm},0024$ und in dem zweiten von $0^{mm},24$ hat.

So lange man wie bisher annimmt, dass die horizontalgestellte Visirlinie des Nivellirinstruments mit der Tangente des elliptischen Schnitts AB zusammenfällt, bedeutet allerdings F die Erhöhung des scheinbaren Horizonts über dem wahren; wenn aber AB nicht der wahre Horizont ist, so kann auch AD nicht der scheinbare sein, und es bedeutet in diesem Falle F lediglich den Abstand der Tangente AD vom Bogen AB für die Entfernung AB. Stellt man sich vor, es fände in A eine Lothablenkung $\delta = CAC'$ statt und es sei $AC' = C'B' = r'$ der Halbmesser der wirklichen Erdkrümmung AB′ an dieser Stelle, während $AC = r$ der Halbmesser des Bessel-schen Ellipsoids oder der idealen Krümmung AB vorstellt, so ist AB′ der wahre und AD′ der scheinbare Horizont von A, und es beträgt die Erhöhung des letzteren über dem ersteren nach der eben entwickelten Formel B′D′ oder

Fig. 2.



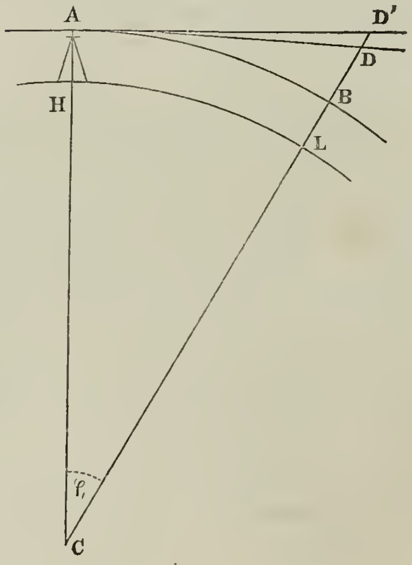
$$F' = \frac{b^2}{2r'}\left(1 + \frac{5}{12}\,\frac{b^2}{r'^2}\right).$$

Es gehört wesentlich zu der hier zu lösenden Aufgabe: für je zwei aufeinander folgende Standorte des Nivellirinstruments die gegenseitige Lage der Tangenten AD und AD′, wovon letztere durch das Fernrohr des Nivellirinstruments angezeigt wird, zu finden; denn der Winkel dieser Tangenten DAD′ ist der Lothabweichung δ gleich und steht in einfacher Beziehung zu dem Krümmungswinkel φ', die wir beide suchen, um damit und aus den sonst gegebenen Grössen den Abstand BB′ der Niveaufläche vom Erdellipsoid zu berechnen.

Die Höhe eines Punktes über einem anderen im Sinne der in Nr. 1 gegebenen Definition wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man erst jede Lattenablesung mit Hilfe von F auf den wahren Horizont reducirt und dann die reducirten Lattenhöhen von einander abzieht. Die Wirkung dieses Verfahrens ist der gleich, welche sich unmittelbar äussern würde, wenn man nach der Richtung des wahren Horizonts visiren könnte und die so erhaltenen Lattenablesungen von einander abzöge. Für unseren gegenwärtigen Zweck bedürfen wir eines solchen Verfahrens nicht, da es sich zunächst nicht um die Höhe von gegebenen Punkten, sondern nur um die gegenseitige Lage der Lothlinien und Normalen in diesen handelt. Hiebei kommt alles darauf an, den Lattenabschnitt genau zu erhalten, welcher zwischen der scheinbaren Horizontalebene des Nivellirinstruments und dem Fusspunkt der Latte liegt. Dieser Abschnitt hängt aber theilweise von der terrestrischen Strahlenbrechung ab, wesshalb hierüber Einiges zu erörtern ist.

3. Der Einfluss der terrestrischen Strahlenbrechung auf die Ergebnisse des Nivellirens.

Fig. 3.



Bei regelmässiger Beschaffenheit der Atmosphäre der Erde wird die Wirkung der Strahlenbrechung der Luft auf die Beobachtung eines Gegenstandes immer darin bestehen, dass sie den Gegenstand höher zeigt als er ist. Wir lesen also beim Nivelliren auf der Latte nach Fig. 3 einen Punkt D ab, der um den Refractionswinkel DAD' tiefer liegt als der scheinbare Horizont AD', den uns das Nivellirinstrument AH angibt, und finden die Zahl D', welche von diesem Horizont getroffen wird, nur dadurch, dass wir zur Ablesung LD den Betrag c' = DD' der Refractionswirkung addiren. Wie gross ist aber c'?

In meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung[1]) habe ich gezeigt, dass man die Höhe x eines Gegenstands über dem wahren Horizont der Axe, um welche das Fernrohr des Theodolithen oder Nivellirinstruments gedreht wird, aus folgender Formel findet:

$$x = r_0 \varphi \left(\cot z + \frac{\cos^2 z + 1 - v}{2 \sin^2 z} \varphi + \frac{2 v \cot z}{3 m \sin^2 z} \varphi^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{v (\cos^2 z + 1 - v)}{6 m \sin^4 z} \varphi^3 + \ldots \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

In diesem Ausdruck bedeutet

r_0 den Krümmungsmesser der Erde bis zur Instrumentenaxe,

φ die Amplitude zwischen den Lothen, welche durch den Beobachtungsort und den beobachteten Gegenstand gezogen sind,

z die Zenithdistanz der Visirlinie nach dem Gegenstand,

m das Verhältniss der Atmosphärenhöhe h zu dem Erdhalbmesser r_0 und

v das Verhältniss von $5\alpha : m$, wobei α die Refractionsconstante der atmosphärischen Luft vorstellt.

Für den mit der geographischen Breite veränderlichen mittleren Werth von m habe ich auf S. 72 der Nr. 1589 der Astron. Nachrichten und auf S. 622 der dritten Auflage meiner „Elemente der Vermessungskunde" eine Tafel mitgetheilt, woraus sich für jede Breite der einer Temperatur von $9^0{,}31$ C und einem Luftdruck von $751^{mm}{,}71$ entsprechende mittlere Werth von $m = m_0$ finden lässt. Will man diesen Mittelwerth nicht ohne weiteres anwenden, sondern ihn nach den auf den Stationen beobachteten Baro- und Thermometerständen b und t verbessern, so ist zu bemerken, dass der aus der Tafel genommene Werth von m_0 noch mit der Luftdichtigkeit

$$d = \frac{272{,}8 + 9{,}31}{272{,}8 + t} \cdot \frac{b}{751{,}71} = \frac{3\,b}{2182 + 8\,t} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

1) „Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physicalische Constitution der Atmosphäre." I. Abschnitt: die astronomische Strahlenbrechung (Astron. Nachrichten Nr. 1478 bis 1460). II. Abschnitt: die terrestrische Strahlenbrechung (Astron. Nachrichten Nr. 1587 bis 1590). Beide Abschnitte sind auch als Separatabdrücke in der lit. artist. Anstalt von J. G. Cotta in München erschienen: 1864 und 1866.

worin t die Temperatur der Luft in Centigraden und b den Barometerstand in Millimetern bedeutet, dividirt werden muss, da $m = \frac{m_0}{d}$ ist.

Was den Werth von $\mathfrak{v}$ anlangt, so kann man ihn aus den Formeln

$$v = \frac{5\alpha}{m} \text{ und } \alpha = d\,\alpha_0$$

berechnen, da

$$\alpha_0 = 0{,}00027895 \text{ und } \log \alpha_0 = 6{,}4455264 - 10$$

ist. Uebrigens folgt aus den Werthen von α und m die Zahl

$$v = \frac{5\,\alpha_0}{m_0} \,.\, d^2 = v_0\, d^2.$$

Bleibt daher die geringe Aenderung des Werths von m_0 mit der geographischen Breite unberücksichtigt, so lässt sich aus dem mittleren Werthe von

$$v_0 = 0{,}186865, \ \log v_0 = 9{,}2715281 - 10$$

der von v jederzeit erhalten, wenn man v_0 mit dem Quadrat der Luftdichtigkeit multiplicirt.

Wenden wir den Ausdruck für die Höhe x auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$z = 90^0 \quad , \quad r_0 = r_1 \quad , \quad \varphi = \varphi_1 \quad , \quad x = x_1$$

zu setzen, wodurch erhalten wird:

$$x_1 = {}^1\!/_2\, r_1\, \varphi_1{}^2 (1 - v)\left(1 + \frac{v}{3m}\, \varphi_1{}^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Höhe ist offenbar $= f' - c'$, und man findet aus der Gleichung $c' = f' - x_1$, wenn $f' = r_1 \operatorname{tg} {}^1\!/_2\, \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ gesetzt und entwickelt wird:

$$c' = {}^1\!/_2\, r_1\, \varphi_1{}^2\, v \left(1 - \frac{4\, v\,(1 - v) - 5m}{12\, m\, v}\, \varphi_1{}^2\right). \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da das zweite Glied des Ausdrucks für c' nur bei weit ausgedehnten trigonometrischen Höhenbestimmungen einen merklichen Werth erlangt, so kann man es in unserem Falle, wo es sich nur um Nivellirstationen oder höchstens Polygonseiten von einer Meile Länge handelt, weglassen und daher

$$c' = {}^1\!/_2\, r_1\, \varphi_1{}^2\, v = \frac{b_1{}^2}{2\, r_1} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

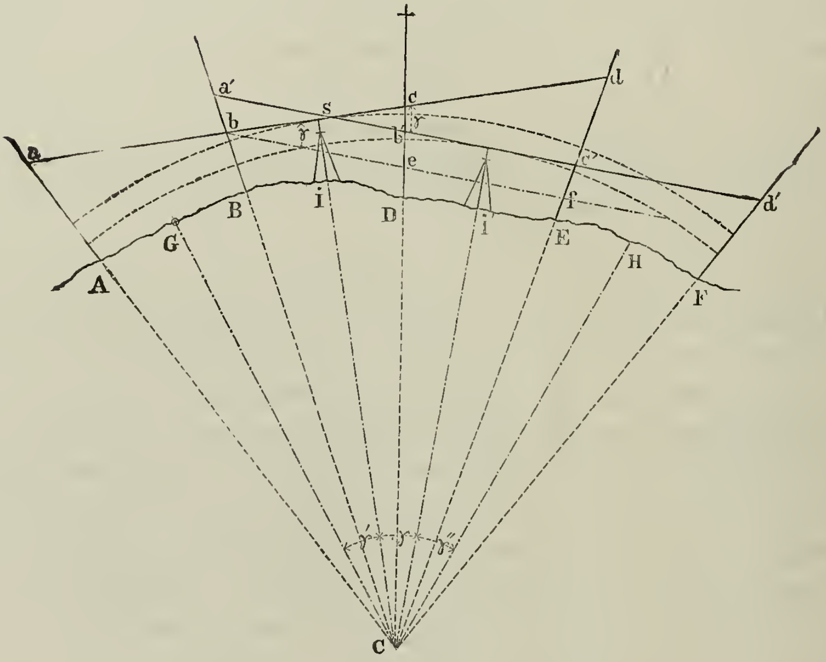
setzen. Bei der Berechnung von Präcisionsnivellements wird man übrigens die den beobachteten Stationslängen, Baro- und Thermometerständen etc. entsprechenden Werthe von c' aus einer besonders angelegten Tafel entnehmen, um sie sofort den betreffenden Ablesungen beizufügen. Auf dieser Verbesserung der Ablesungen muss hier, wo nach einer Methode nivellirt wird, bei der sich Erdkrümmung und Strahlenbrechung im Allgemeinen nicht eliminiren lassen, durchaus bestanden werden. Ich setze sie im Folgenden als vollzogen voraus, d. h. ich nehme an, dass die Ablesung a bedeute: die wirklich abgelesene Lattenhöhe LD = l vermehrt um die Refractionswirkung c' = DD' (Fig. 3), so dass jederzeit $a = l + c'$ und c' dem obigen Ausdrucke so lange gleich ist, als man keine besonderen Formeln für die terrestrische Strahlenbrechung in geringer Höhe über den Boden besitzt. Meine Theorie dieser Refraction gilt allerdings nur für solche Luftschichten, auf welche die strahlende Wärme des Bodens keinen merklichen Einfluss mehr äussert, wie dieses bei den trigonometrischen Höhenmessungen nahezu der Fall ist, und ich gebe gerne zu, dass an sehr warmen sonnigen Tagen der Ausdruck für c' eine Modification erleiden muss; ich bin aber andererseits auch überzeugt, dass die bekannten bisherigen Aufstellungen über die Grösse der terrestrischen Strahlenbrechung, welche auf Temperatur und Luftdruck gar keine Rücksicht nehmen, in dem angezeigten Falle noch mehr von der Wahrheit abweichen müssen, als der Werth von c' und ich kann daher nur wiederholt den Wunsch aussprechen, dass diejenigen Geodäten, welche mehr Zeit dazu haben als ich, Beobachtungen und Untersuchungen über die Grösse der atmosphärischen Strahlenbrechung in den unteren Luftschichten der Erde anstellen und veröffentlichen möchten. Ich würde dann dem praktischen Theile dieser Abhandlung, welcher dem gegenwärtigen theoretischen folgen wird, eine Tafel beifügen, aus der man sofort die erforderlichen Werthe von c' entnehmen könnte.

4. Den Neigungswinkel zweier Lothlinien durch exactes Nivelliren zu bestimmen.

Der Neigungswinkel der horizontalen Visirlinien zweier ziemlich entfernt von einander stehenden Nivellirinstrumente ist gleich dem Neigungswinkel der durch die vertikalen Instrumentenaxen gezogenen Lothlinien.

Sobald ich also den Winkel der Visirlinie abcd des Instruments I (Fig. 4.) und der Visirlinie a′b′c′d′ des Instruments I′ bestimmen kann, habe

Fig. 4.



ich auch den Centriwinkel ICI′ = γ gefunden. Das Mittel, den Winkel γ zu messen, besteht aber darin, die Visirlinien der beiden Instrumente sich kreuzen zu lassen, und auf unseren Latten abzulesen, wie es in der genannten Figur angedeutet ist.[1]) Für das Instrument I

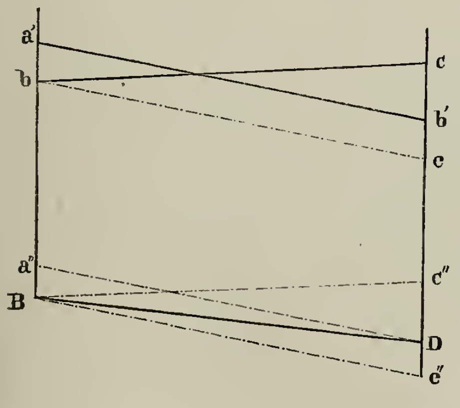
---

1) Herr Prof. Börsch beschreibt zwar in seiner vortrefflichen Schrift „die Nivellirinstrumente des mathematisch-mechanischen Instituts von F. W. Breithaupt und Sohn in Cassel", 1871, S. 48 ein mit gleichzeitigen Controlnivellement verbundenes Verfahren, aus der Mitte zu nivelliren, wobei auch an den Enden der Stationen die Visirlinien übereinander greifen; er hat jedoch diese Anordnung der Lattenstellung nur gewählt, „um nicht allein die normale oder abnormale Refraction zu erkennen und dadurch ein möglichst scharfes sondern auch gleichzeitig ein doppeltes Nivellement und vielleicht sogar für die Folge die Elemente zur Berechnung der Refraction zu erhalten", und es ist dieselbe daher nicht bloss dem Zwecke sondern auch der Form nach von der meinigen verschieden, was jeder Sachverständige sofort anerkennen wird.

seien in A, B, D, E und für I' in B, D, E, F vier Nivellirlatten aufgestellt, und es seien die bezüglichen Ablesungen auf denselben (mit Einrechnung der Refractionswirkung c', von welcher in Nr. 3 die Rede war) a, b, c, d und a', b', c', d', so dass also a den Abstand aA, b den bB, c den cD, d den dE u. s. w. vorstellt. Die Entfernungen des Instruments I von den Lattenstandpunkten A, B, D, E und eben so die des Instruments I' von B, D, E, F ergeben sich aus den Lattenablesungen, da das Nivellirfernrohr auch zum Distanzmessen eingerichtet ist. (Die Genauigkeit dieser Längenmessung ist in dem vorliegenden Falle ausreichend, obgleich es sich um sehr exacte Winkelmessungen oder vielmehr um Messung kleinster Theile von Winkeln handelt: da nämlich die relative Genauigkeit dieser kleinsten Winkel nicht gross sein kann, so braucht es auch die der Längenmessungen nicht zu sein.) Nennen wir die Entfernungen der Latten von I, auf welchen die Ablesungen a, b, c, d gemacht werden, beziehlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, und jene vom Instrumente I', welche die Ablesungen a', b', c', d' liefern, beziehungsweise $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, so ist nach Fig. 5, welche den Vorgang in der Station I darstellt:

$$Dc'' = c - b = -(b - c) \quad De'' = Ba'' = a' - b',$$

Fig. 5.



mithin durch Addition der Werthe von Dc'' und De'':

$$c''e'' = (a' - b') - (b - c) =$$
$$= -[(b - c) - (a' - b')],$$

folglich auch, wenn man vom Vorzeichen absieht, und wegen Kleinheit des Winkels $\operatorname{tg} \gamma = \gamma \sin 1''$ setzt:

$$\gamma = \frac{(b - c) - (a' - b')}{(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \sin 1''} \quad . \quad (7)$$

In gleicher Weise findet man aus den Beobachtungen in der Station I':

$$\gamma = \frac{(c - d) - (b' - c')}{(\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}') \sin 1''}, \quad . \quad (7,a)$$

und durch Verbindung der Beobachtungen in beiden Stationen:

$$\gamma = \frac{(\mathfrak{b} - \mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}' - \mathfrak{c}')}{(\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}')\sin 1''} \text{ [1]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7,b)$$

Würde also in jeder Station auf jeder Latte nur Einmal abgelesen, so erhielte man schon 3 Werthe von γ; da aber das Fernrohr drei Horizontalfäden hat, so wird man, was auch schon der Distanzmessung wegen nothwendig ist, an jedem Faden ablesen und so 3mal 3 oder 9 Werthe von γ erhalten. Wird dann überdiess noch das Fernrohr um seine optische Axe gedreht und auf jeder Latte wiederholt abgelesen, so ergeben sich 9 weitere Werthe von γ, wodurch es also möglich ist, einen Mittelwerth von γ aus 18 Beobachtungen desselben zu berechnen. Wenn schliesslich die Beobachtungsreihen mit umgesetzter Libelle gemacht werden, so lässt sich der Winkel γ sogar aus 36 Beobachtungen berechnen und demnach möglichst fehlerfrei erhalten.

Ueber die Ausführung des eben beschriebenen Nivellements habe ich noch Folgendes zu bemerken.

Die Fernrohre der zu exacten Nivellements verwendbaren Instrumente gestatten sehr grosse Lattenabstände. Bei dem mit Ertelschen Instrumenten ausgeführten bayrischen Präcisionsnivellement sind zwar nur grösste Abstände von 100 Meter vorgekommen, Prof. Börsch gibt jedoch in § 20 seiner schon erwähnten Beschreibung der Breithaupt'schen Nivellirinstrumente an, dass man bei bedecktem Himmel aber reiner mässig warmer Luft und Windstille mit den grössten jener Instrumente noch Lattenabstände von 300 und mehr Meter nehmen und die zuverlässigsten Beobachtungen erhalten kann. Selbstverständlich ist hier gemeint, dass man bei diesen Entfernungen auf den Latten noch deutlich ablesen kann. Nehmen wir bei 300^{m} Entfernung der Latte die Genauigkeit der Ablesung zu 0,6 Millimeter an, so würde der Fehler in der Höhenbestimmung, so weit er vom Ablesen herrührt, nicht mehr als 0,4 Sekunden betragen, und hiemit stimmen auch die Versuche überein, welche Prof. Stampfer über die Genauigkeit der Visur mit Fernrohren angestellt hat. Es fand nämlich diese Genauigkeit $= \frac{15''}{v}$,

---

1) Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass man auch die Entfernung $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' = \mathfrak{b} + \mathfrak{d} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{c}'$ setzen kann.

wenn v die (mässige) Vergrösserung des Fernrohrs bedeutet, und hieraus berechnet sich für v = 36 die Genauigkeit der Visur = 0″,4.

Zu dem Fehler der Einstellung und Ablesung kommt noch jener, welcher von der namentlich bei Sonnenschein eintretenden Veränderlichkeit der Strahlenbrechung herrührt und von dem schon in § 3 bemerkt wurde, dass er nicht genau zu schätzen ist, da er von verschiedenen Einflüssen abhängt. Dass aber der in Rede stehende Fehler nicht bedeutend sein kann, geht aus der Grösse der Strahlenbrechung selbst hervor, indem diese hier 0″,7 nicht überschreiten wird. Denn nimmt man die grösste Entfernung der Latte vom Instrument zu $308^m,67$ Bogen oder 10″ Centriwinkel und den Strahlenbrechungscoefficienten im Mittel zu 0,14 an, so wird nach unserer Formel Nr. 6 die Correctionsgrösse, welche zur Ablesung auf der Latte zu addiren ist, c′ = 0″,7 oder = $1^{mm},04$, und dieser Werth ist (wenn die richtige Zeit zur Beobachtung gewählt wird, was bei genauen Arbeiten stets geschehen muss) wohl kaum um mehr als 0″,2 oder 0″,3 von der Wahrheit entfernt. Es würde demnach aus den angegebenen Gründen eine Beobachtung um 0″,4 + 0″,3 = 0″,7 unsicher sein können; nehmen wir aber selbst 1″ als mittleren Fehler einer Beobachtung an, so wird das aus allen Beobachtungen berechnete Mittel des Winkels γ jedenfalls um nicht mehr als 0″,3 bis 0″,5 falsch sein, und diese Genauigkeitsgrenze ist für unsere Untersuchungen genügend.

Wenn es sich bloss um die Bestimmung des Neigungswinkels γ eines einzigen Paares von Lothlinien (Fig. 4) handelte, so würde die Aufstellung und Ablesung der Latten in A und F ganz überflüssig sein. Diese Latten und die Ablesungen auf ihnen sind nur für die Messung von Krümmungswinkeln, welche sich links an das Loth IC und rechts an I′C anschliessen, nothwendig; wir haben sie aber hier angedeutet, um die für die folgende Aufgabe auch in den Stationen I und I′ nothwendigen Beobachtungen zu bezeichnen.

Was die Grösse der Stationen betrifft, so hat man dieselbe der Leistungsfähigkeit der Nivellirinstrumente anzupassen. Lässt sich mit diesen auf 300^m Entfernung noch gut ablesen, so kann man die Lattenabstände zu etwa 200^m annehmen und die Instrumente in der Mitte zwischen den Latten, also 100^m von den ersten und 300^m von den zweiten entfernt, aufstellen. Der zu messende Centriwinkel γ wird alsdann etwas über 6 Sekunden, wenn die Erdkrümmung nahezu normal ist. Setzen wir dieselbe $3 \cdot 2'',06 = 6'',18$, so werden die Zähler der 3 mit Nr. 7, 7_a, 7_b bezeichneten Brüche, von denen jeder einen Werth von γ liefert, folgende:

$$(b - c) - (a' - b') = 0^m{,}006$$
$$(c - d) - (b' - c') = 0{,}006$$
$$(b - d) - (a' - c') = 0{,}012,$$

und es ist hiedurch klar, dass die Bestimmung des Winkels γ durch das Nivellirinstrument nicht etwa desshalb, weil man es mit gar zu kleinen Grössen zu thun hätte, als unausführbar erscheint. Würde man die Stationen auf die Hälfte ihrer dermaligen Längen, also die grösste Lattenweite auf 150^m zurückführen, so erhielte man für die oben genannten drei Zähler zwar nur die Hälften ihrer Werthe, aber immerhin noch solche Grössen, aus denen sich die Werthe von γ mit der erforderlichen Zuverlässigkeit berechnen liessen.

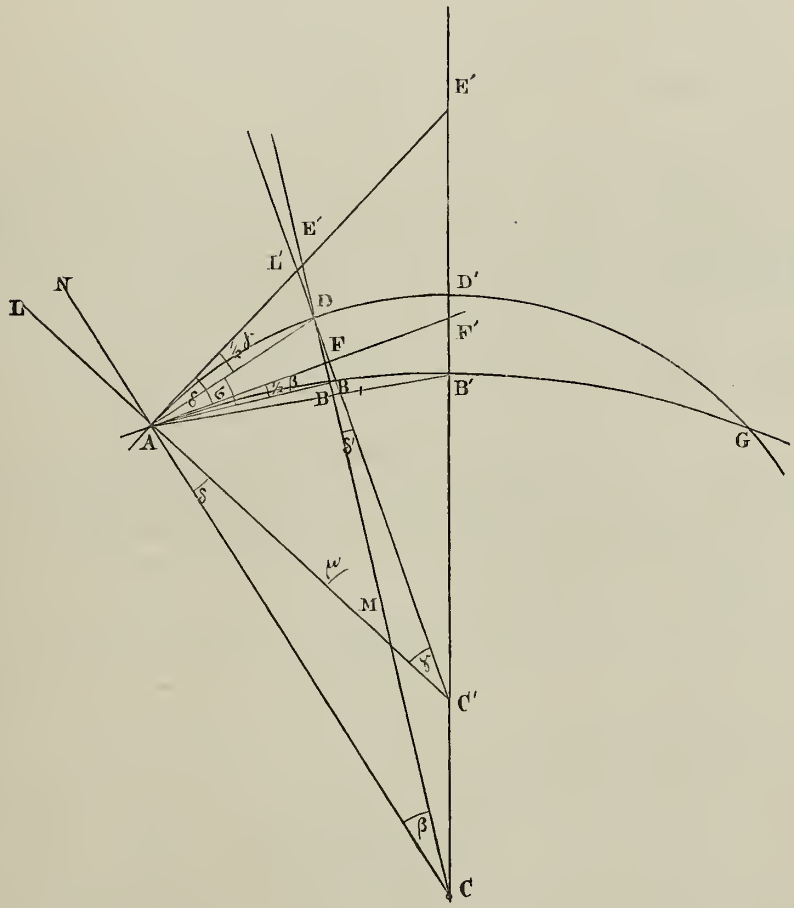
Es bedarf keiner besonderen Erörterung, dass man den Neigungswinkel zweier Lothlinien, deren Fusspunkte G und H (Fig. 4) weiter von einander entfernt sind als die in Fig. 4 dargestellte grösste Nivellirstation II' lang ist (deren Entfernung also bei einer Maximalleistung des Fernrohrs von 300^m mehr als 200^m beträgt) durch Wiederholung des eben beschriebenen Verfahrens nach G und H hin findet. Nach Fig. 4 hätte man von G und I aus den Winkel γ', von I und I' aus den Winkel γ, und von I' und H aus den Winkel γ'' zu messen, um den Gesammtwinkel $\gamma + \gamma' + \gamma'' = GCH$ zu erhalten.

5. Die Ablenkung der Lothlinien zweier oder mehrerer Punkte der Erdoberfläche von den diesen Punkten angehörigen Normalen des Ellipsoids durch exactes Nivelliren zu bestimmen.

In Fig. 5 stelle der Bogen ABB'G einen Vertikalschnitt des Erdellipsoids und ADD'G einen Schnitt der durch A gehenden Niveaufläche vor. Diese Bögen seien so klein, dass man sie als Kreise von den Halbmessern AC = R und AC' = r ansehen kann. Das Loth in A habe die Richtung LAC' und die Normale daselbst die Richtung NAC;

es ist folglich die Lothablenkung in A, um deren Bestimmung es sich handelt, gleich LAN = CAC' = δ.

Fig. 6



Wenn AD der Schnitt einer Niveaufläche ist, so kann man offenbar den Winkel der Lothe in A und D, nämlich LC'L' = γ nach Nr. 4 durch exactes Nivelliren bestimmen; wir können also diesen Winkel als bekannt ansehen, und eben so ist aus den Bessel'schen Dimensionen des

Erdsphäroids der Winkel β der Normalen in A und D zu berechnen, sobald die Länge des Bogens AD = AB bekannt ist. Dieser lässt sich aber unmittelbar messen, und es erfordert diese Messung keinen besonderen Grad der Genauigkeit. Es ist also auch β eine bekannte Grösse. Bezeichnet man die Lothablenkung in D oder den Winkel L'DE = CDC' mit δ', so findet nach der Figur die Beziehung statt:

$$\beta + \delta = \gamma + \delta'$$

woraus die Differenz der beiden Lothablenkungen

$$\delta - \delta' = \gamma - \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

folgt; diese Differenz kann somit aus γ und β berechnet werden. Die Summe der beiden δ lässt sich allerdings nur durch eine unbekannte Grösse ausdrücken. Bezeichnet man nämlich den Winkel BAD der beiden Sehnen AB und AD mit σ, so wird nach der Figur

$$\sigma = \delta - \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und hieraus folgt, mit Rücksicht darauf, dass $\gamma - \beta = \delta - \delta'$ ist:

$$\delta + \delta' = 2\,\sigma. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Will man den in der Richtung der Normale des Erdellipsoids gemessenen Abstand BD = x der Niveaufläche ADD' von diesem Ellipsoid ABB' berechnen, so kann dieses mit Hilfe des Dreiecks ABD geschehen, welches $BD : AD = \sin\sigma : \cos \tfrac{1}{2}\beta$ und damit, wenn die Sehne AD mit s bezeichnet wird,

$$x = \frac{s \sin \sigma}{\cos \tfrac{1}{2}\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

liefert. Das Dreieck ADB_1 gibt den in der Richtung des Loths gemessenen Abstand DB_1 oder

$$x' = \frac{s \sin \sigma}{\cos(\sigma - \tfrac{1}{2}\gamma)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11_a)$$

Diese beiden Werthe können wohl in allen Fällen, jedenfalls aber bei Berechnung der Abstände x für die einzelnen Nivellirstationen, einander und gleich

$$x = b\,[\delta - \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta)] \sin 1''$$

oder, wenn man die Differenz $\gamma - \beta = \varepsilon$ schreibt, gleich

$$x = \tfrac{1}{2} b (2\,\delta - \varepsilon) \sin 1'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

gesetzt werden, wobei b den Bogen AD vorstellt und δ und ε in Sekunden ausgedrückt sind.

Für eine Reihe von Stationen, die sich aneinander schliessen und die Längen b_1, b_2, b_3 . . . . haben, erhält man für die Abstände x_1, x_2, x_3 . . . folgende Werthe:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2} b_1 (2\,\delta - \varepsilon_1) \sin 1'' \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} b_2 (2\,\delta_1 - \varepsilon_2) \sin 1'' \\ x_3 &= \tfrac{1}{2} b_3 (2\,\delta_2 - \varepsilon_3) \sin 1'' \\ &\vdots \\ x_n &= \tfrac{1}{2} b_n (2\,\delta_{n-1} - \varepsilon_n) \sin 1''. \end{aligned} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Da die Grössen b_1, b_2, b_3 . . . und ε_1, ε_2, ε_3 . . . bekannt sind, und da

$$B_1D_1 = x_2 \quad , \quad B_2D_2 = x_1 + x_2 \quad , \quad B_3D_3 = x_1 + x_2 + x_3 \text{ u. s. w.}$$

ist, so würde man für die Punkte A, D_1, D_2, D_3 . . . der Erdoberfläche die Abstände der Niveaufläche und des Umdrehungsellipsoids erhalten, wenn die Winkel δ, δ_1, δ_2, δ_3 . . . bekannt wären. Nun ist aber nach Figur 7:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \gamma_1 - \beta_1 = \delta_1 + \varepsilon_1 \\ \delta_1 &= \delta_2 + \gamma_2 - \beta_2 = \delta_2 + \varepsilon_2 \\ \delta_2 &= \delta_3 + \gamma_3 - \beta_3 = \delta_3 + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ \delta_{n-1} &= \delta_n + \gamma_n - \beta_n = \delta_n + \varepsilon_n \end{aligned} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

daher auch, wenn man diese Gleichungen addirt und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots = \Sigma(\varepsilon)$ setzt:

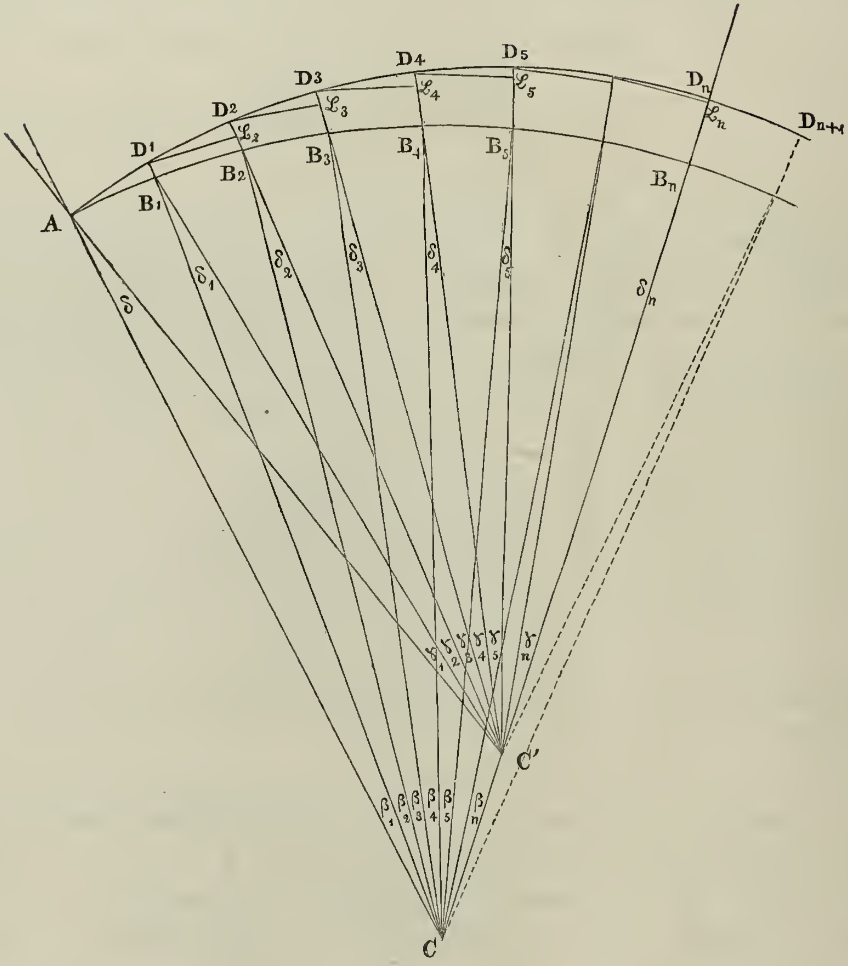
$$\delta = \delta_n + \Sigma(\varepsilon). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Nivellirt man nun nach dem hier beschriebenen System von A bis zu einem Punkte D_n fort, für welchen die Differenz $\gamma - \beta = \varepsilon = o$ wird, also die ideale mit der wahren Niveaufläche zusammenfällt, so ist für diesen Punkt auch $\delta_n = o$ und daher die Lothabweichung in A oder

$$\delta = \Sigma(\varepsilon)_n^1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Man ist in diesem Falle an der Stelle der Erdoberfläche angekommen, für welche Loth und Normale zusammenfallen. Wäre man von dieser Stelle ausgegangen und hätte rückwärts gegen A hin operirt, so würde sich δ aus derselben Reihe von Gleichungen (Nr. 14), nur in umgekehrter Ordnung geschrieben und gleich gross ergeben haben. Ebenso ist klar, dass man die Stelle, wo $\delta_n = o$ ist, nicht zu suchen

Fig. 7.



braucht, wenn für irgend einen astronomischen Punkt einer Haupttriangulation die Lothabweichung schon bekannt ist; denn wäre in dem Gleichungssystem (Nr. 14) δ_n die Lothabweichung des genannten Punkts, so fände man, von diesem ausgehend, nacheinander:

$$\begin{aligned}
\delta_{n-1} &= \delta_n + \varepsilon_n \\
\delta_{n-2} &= \delta_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \\
&\vdots \\
\delta_1 &= \delta_2 + \varepsilon_2 \\
\delta &= \delta_1 + \varepsilon_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)
\end{aligned}$$

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass man in jedem Vertikalschnitt alle Lothabweichungen auffinden kann, sobald man nur eine derselben kennt, oder beim Nivelliren von einem Punkte ausgeht, in dem Loth und Normale sich decken. Damit ist aber die vorliegende Aufgabe gelöst.

6. Aus den beobachteten Lothablenkungen einer Reihe von Punkten, welche in einer Vertikalebene liegen, die Abstände des vertikalen Schnitts der Niveaufläche der Erde vom Erdellipsoid zu berechnen.

Nach Fig. 7 kann man die Bogenstücke AB_1, AB_2, AB_3 .... des elliptischen Schnitts AB_n der Erdoberfläche als Abcissen und die lothrechten Abstände B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 .... der Punkte D_1, D_2, D_3 .... der Niveaufläche als Ordianten dieser Punkte ansehen. Denkt man sich die Bogenstücke B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 .... nacheinander und in paralleler Richtung bis D_1B_2, D_2B_3, D_3B_4 .... verschoben, so sind die lothrechten Abstände D_2B_2, D_3B_3, D_4B_4 .... die zu den Abscissen D_1B_2, D_2B_8, D_3B_4 .... gehörigen Ordinaten, und es setzen sich (nach den Formeln Nr. 13) die Abstände der Niveauflächen-Punkte vom Erdellipsoid wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
B_1D_1 &= b_1(\delta - {}^1/_2\,\varepsilon_1)\sin 1'' \\
B_2D_2 &= b_2(\delta_1 - {}^1/_2\,\varepsilon_2)\sin 1'' + B_1D_1 \\
B_3D_3 &= b_3(\delta_2 - {}^1/_2\,\varepsilon_3)\sin 1'' + B_2D_2 \\
B_4D_4 &= b_4(\delta_3 - {}^1/_2\,\varepsilon_4)\sin 1'' + B_3D_3 \\
&\text{u. s. w.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)
\end{aligned}$$

Allgemein erhält man den Abstand des Punktes D_μ des Schnitts der Niveaufläche von dem des Erdellipsoids oder

$$B_\mu D_\mu = y_\mu = \Sigma(x)'_\mu \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

wobei das letzte Zeichen die Summe aller in den Gleichungen Nr. 13 enthaltenen x-Werthe vo x_1 bis x_μ bezeichnet. Da für den n ten Punkt D_n

die Lothabweichung $\delta_n = o$ ist, so wird für diese Stelle nach Gl (9)

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\delta \text{ und}$$

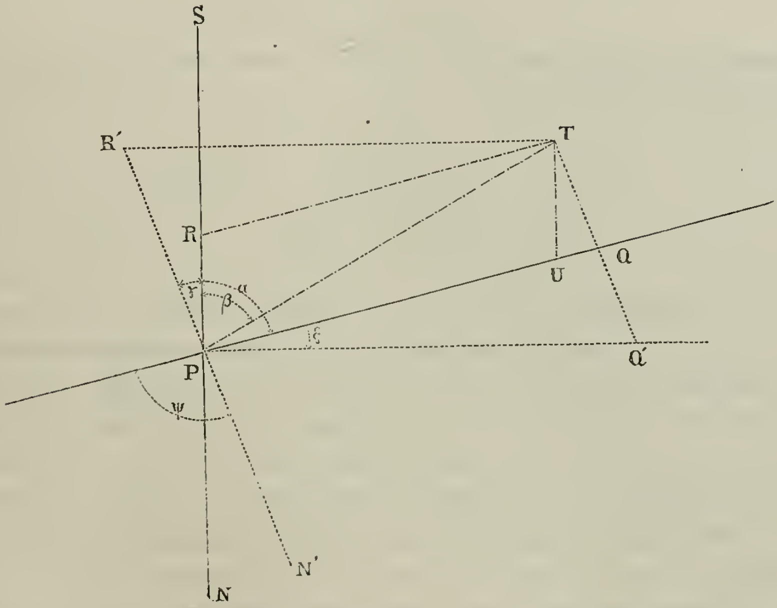
$$y_n = \frac{S \sin \tfrac{1}{2}\delta}{\cos \tfrac{1}{2} B}$$

wobei B nach Fig. 7 den Winkel $ACB_n = \Sigma(\beta)_n^1$ und S die Sehne des Bogens AD, dessen Mittelpunktswinkel $\Gamma' = AC'D_n = \Sigma(\gamma)_n^1$ ist, vorstellt. Für diese Sehne kann man übrigens ohne alles Bedenken den horizontalen Bogen $AD_n = \Sigma(b)_n^1$ selbst setzen, da sie von diesem nur um eine Grösse dritter Ordnung abweicht und y_n, wofür man in den meisten Fällen $\tfrac{1}{2} S \delta \sin 1''$ schreiben darf, niemals einen grossen Werth erlangt. Hat man über einen grossen Terrainbezirk ein Höhennetz erster Ordnung gelegt und das Präcisionsnivellement nach den in § 4 dieser Abhandlung niedergelegten principiellen Bestimmungen ausgeführt, so lassen sich folglich für alle einnivellirten Punkte die Abstände der Niveaufläche der Erde von deren idealen Form, dem Umdrehungsellipsoid, berechnen, und mit diesen Abständen kann man die Gestalt der Niveaufläche in derselben Weise durch Schichtenlinien anschaulich machen, wie dieses in topographischen Plänen bezüglich der Bodengestaltung durch Horizontalcurven geschieht. Nur hat man sich hier unter den schneidenden Flächen nicht horizontale Ebenen sondern nur concentrische sphäroidische Flächen von gleichen Vertikalabständen zu denken.

Würde die ganze feste Erdoberfläche oder doch ein grosser Theil derselben nach der von mir angegebenen Methode in exactester Weise nivellirt, so liesse sich die wirkliche mathematische Erdgestalt oder die zur Erdschwere gehörige Niveaufläche aus direkten Beobachtungen ableiten, und es zählten alsdann die Präcisionsnivellements, weil sie für jeden Punkt der Erde Krümmung und Lothabweichung anzugeben im Stande sind, zu den unentbehrlichsten und wichtigsten Gradmessungsarbeiten, während sie zur Zeit noch eine untergeordnete Rolle desshalb spielen, weil sie lediglich nur zur Bestimmung der gegenseitigen Höhenlage von Punkten der wirklichen Erdoberfläche dienen.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass ich meiner Methode, die Erdkrümmung und Lothablenkung durch exactes Nivelliren zu bestimmen, keine solche Bedeutung zuschreibe, dass dadurch die bisherige astronomische Methode überflüssig würde; im Gegentheile sollen durch das hier beschriebene und überall durchführbare rein geodätische Verfahren, die Ergebnisse der astronomischen Lothablenkungs-Bestimmungen erst recht verwerthet werden, indem man die zur Kenntniss der Niveaufläche der Erde führenden Präcisionsnivellements an diese Bestimmungen anschliesst. Dieser Anschluss würde um so leichter erfolgen können, je mehr solcher Punkte vorhanden sind und je mehr man sich bemüht, an denselben die Lothabweichung nicht bloss in der Meridianebene sondern auch im ersten Vertikal oder einer anderen die erste schneidenden Ebene zu bestimmen; denn alsdann liesse sich die aus beiden Ablenkungen resultirende wahre Lothrichtung berechnen und es wäre für jede durch den gegebenen Punkt gelegte Vertikalebene die Ablenkung des Loths δ_n bekannt, welche man (nach § 6) kennen muss, wenn man ohne Weiteres aus dem Präcisionsnivellement in dieser Ebene den durch letztere veranlassten Schnitt der Erdniveaufläche construiren will.

Fig. 8.



Beträgt nämlich in der Meridianebene SN eines Orts P (Fig. 8) die Lothablenkung λ_1 und in einer anderen Ebene PQ, welcher das

Azimuth SPQ $= \alpha$ zukommt, λ_2, so findet man den Winkel λ, welchen die Schwererichtung mit der Normale von P (auf die auch λ_1 und λ_2 bezogen sind) einschliesst, aus einem Kräfte-Parallelepiped, dessen horizontale Grundfläche die Seiten

$$s_1 = PR = g \operatorname{tg} \lambda_1 = g \lambda_1 \sin 1''$$

$$s_2 = PU = g \operatorname{tg} \lambda_2 = g \lambda_2 \sin 1''$$

hat, wenn g die Grösse dsr Schwerkraft in der Richtung der Normale und folglich die Höhe des genannten Parallelepipeds vorstellt. Hieraus ergibt sich die Länge der Diagonale PT der Grundfläche gleich

$$s = g \sin 1'' \sqrt{\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha} \quad \ldots \quad (20)$$

und aus dem nach PT geführten Diagonalschnitt des Parallelepipeds

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s}{g} = \lambda \sin 1'',$$

woraus schliesslich folgt:

$$R = \sqrt{\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cos \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Das Azimuth β der Diagonale PT erhält man nach der Figur sofort aus einer der Gleichungen:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{s_1}{s} \sin \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{s_2}{s} \sin \alpha = \frac{d_2}{\lambda} \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Wäre SN nicht die Mittagslinie, sondern der Schnitt irgend einer anderen Vertikalebene mit dem Erdellipsoid, so blieben selbstverständlich die vorhergehenden Formeln doch bestehen und es wären nur α und β keine Azimuthe mehr, sondern die Winkel erstens der Seiten PR und PU, dann zweitens der Seite PR mit der Diagonale PT der Grundfläche des Kräfteparallelepipeds: die Azimuthe dieser Seiten würden dann um das Azimuth der Seite PS zu vermehren oder zu vermindern sein.

Nachdem λ und β aus λ_1, λ_2 und α gefunden sind, kann man durch weitere Zerlegungen der Schwerkraft nach dem Kräfteparallelepiped die Lothabweichungen des Punktes P in irgend zwei Ebenen, z. B. in PR′ und PQ′ finden, welche unter sich den Winkel R′PQ′ $= \psi$ und mit PQ die

Winkel ξ und $\psi - \xi$ bilden. Da hier, wegen Geringfügigkeit der die Lothablenkungen vorstellenden Winkel, die Seiten des Parallelogramms PR'TS' den gesuchten Lothablenkungen proportional sind, so hat man nach Fig. 8 sofort die Ablenkung nach PR' oder

$$\lambda' = \lambda \frac{\sin(\alpha + \xi - \beta)}{\sin\psi} = \lambda \frac{\sin\psi}{\sin\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und die Ablenkung nach PQ' oder

$$\lambda'' = \lambda \frac{\sin(\psi - \alpha - \xi + \beta)}{\sin\psi} = \lambda \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin\psi} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wobei $\alpha + \xi - \beta = \varphi$ gesetzt ist.

Man kann also, wenn an einem astronomischen Punkt für zwei Ebenen (PR, PQ) die Lothabweichungen λ_1, λ_2 bekannt sind, für irgend zwei andere Ebenen (PR', PQ') die Ablenkungen λ', λ'', deren man vielleicht für ein Präcisionsnivellement nach diesen Ebenen bedarf, sehr leicht finden.

7. Der Schlussfehler eines in exactester Weise nivellirten Polygons.

Ich habe schon im Eingange dieser Abhandlung erwähnt, dass ich bei der zweiten allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung die Behauptung aufgestellt habe, der polygonale Abschluss eines Nivellements, d. i. die Gleichheit der Coten des Anfangs- und Endpunktes eines Polygons, sei noch keine hinreichende Controle für die Genauigkeit des Nivellements, indem diese Gleichheit bei fehlerfrei gedachter Arbeit wohl eintreten kann, aber nicht nothwendig eintreten muss.

Zu dieser Behauptung bin ich, von den bereits im Eingange dieser Abhandlung angegebenen Gründen abgesehen, durch folgende Betrachtung gekommen. Ein vollkommen berichtigtes Nivellirinstrument gibt bei einspielender Libelle eine horizontale (auf der Schwererichtung senkrechte und die Niveaufläche der Erde berührende) Absehlinie, und der Unterschied der Ablesungen auf zwei vom Instrumente gleichweit entfernten Nivellirlatten ist der Höhenunterschied der Fusspunkte dieser Latten. Wenn die Libelle nicht einspielt, und sowohl bei Rück- als Vorblick einen bestimmten Ausschlag a nach einer und derselben

Seite hin, z. B. in der Richtung des Vorblicks bildet, so liest man nach einer geneigten Visirlinie ab, und es ist der Neigungswinkel $w = ma$ Sekunden, wenn ein Theil des Ausschlags einem Winkel von m Sekunden entspricht. Der Fehler v in dem Höhenunterschiede der beiden um e Meter von einander entfernten Punkte ist

$$v = e \operatorname{tg} w = e w \sin 1'' = m a e \sin 1'', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

d. h. um so viel Meter findet man (bei der angenommenen Richtung des Fehlers) die Ablesung auf der anderen Latte grösser als sie sein würde, wenn man durch die von der Visirlinie getroffene Stelle eine Horizontalebene legte und durch deren Schnitt mit der Vorderlatte die Ablesung auf dieser bestimmen liesse: um v Meter erscheint daher auch in Folge der Subtraction der beiden Ablesungen der Standpunkt der vorderen Latte tiefer als jener der hinteren Latte. Wiederholt sich der Fehler v mehrmals in dem gleichen Sinne, so entsteht hieraus ein Gesammtfehler

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = \Sigma(v)_n^1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

kommt er aber auch p mal im entgegengesetzten Sinne vor, so dass der absolute Werth von

$$v' + v'' + v''' + \ldots + v^n = \Sigma(v')_p^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

ist, so wird sich lediglich in Folge falscher Libellenstellung in den Coten des Anfangs- und Endpunktes des Polygons ein Unterschied

$$u = \Sigma(v)_n^1 - \Sigma(v')_p^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

ergeben, und zwar wird, wenn dieser Unterschied positiv ist, in dem vorliegenden Fall der Endpunkt um u Meter tiefer erscheinen als er liegt, und folglich sein Abstand von einem über dem Terrain gelegenen Generalhorizont um eben so viel grösser sein als der des Anfangspunkts, obwohl beide Punkte in einen zusammenfallen.

Genau eben so wie die hier angenommenen falschen Libellenstellungen wirken die unregelmässigen Schwererichtungen oder die Lothabweichungen: die einspielende Libelle steht nämlich senkrecht zur Schwererichtung, während wir, in Ermangelung eines Anhaltspunktes für die Voraussetzung einer Lothablenkung, glauben dass sie zur Normale des Erdellipoids senkrecht stehe: die Libelle und die ihr parallele Absehlinie des Fernrohrs bilden folglich mit der Tangentialebene zum Erdellipsoid denselben Winkel, welchen die Schwererichtung und die Normale des Ellipsoids an dem Beobachtungsorte einschliessen, d. h. den Winkel, welcher die Lothablenkung dieses Orts heisst. Wenn nun die Lothabweichungen in n Stationen eben so viele positive Fehler von der Gesammtgrösse $\Sigma(v)_n^1$ und in p Stationen p negative Fehler von der Grösse $\Sigma(v')_p^1$ erzeugen, so muss sich nothwendig die Cote des Endpunktes eines ganz fehlerfrei nivellirten Polygons um die Länge $u = \Sigma(v)_n^1 - \Sigma(v')_p^1$ von der Cote desselben Punkts, welcher als Anfangspunkt diente, unterscheiden, wobei selbstverständlich u null, positiv oder negativ sein kann.

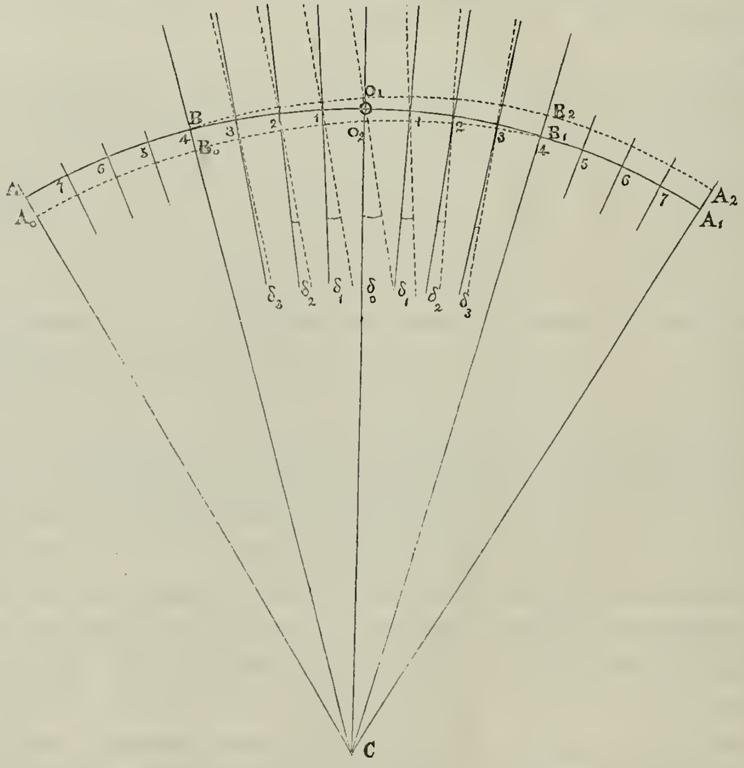
Gegen diese Betrachtung wird sich ein anderer gegründeter Einwand nicht vorbringen lassen, als dass sie nicht ganz abgeschlossen ist, indem sie die Frage noch offen lässt, ob nicht in jedem Falle die von den Lothablenkungen herrührende Cotendifferenz null sein muss. Diese Frage ist offenbar mehr physicalischer als mathematischer Natur und lässt sich mit Sicherheit nur dann beantworten, wenn man über die Vertheilung der Schwerkräfte der Erde in Bezug auf Grösse und Richtung auf Grund von ausreichenden genauen Beobachtungen ganz im Klaren ist. Diese Klarheit ist aber noch nicht erreicht, da Lothablenkungen erst in neuerer Zeit und gewöhnlich nur in der Richtung der Mittagslinie gemessen zu werden pflegen, die Ergebnisse aber zum Theil den theoretischen Erwartungen widersprechen, wie dieses namentlich aus den in der Umgebung des Kaukasus vom kais. russischen Obersten Stebnizki in Tiflis angestellten Lothablenkungs-Beobachtungen zu folgen scheint, worüber Herr Staatsrath v. Struve in der dritten Sitzung der Wiener allgemeinen europäischen Gradmessungsconferenz vom Jahre 1871 berichtet hat. [1])

Ich will den Einfluss gegebener Lothabweichungen auf den polygonalen Abschluss eines Nivellements an folgendem hypothetischen Fall erläutern. In Fig. 9 stelle der Kreisausschnitt AOA_1CA ein in einer Ebene abgewickeltes Polygon vor, dessen Seiten alle auf dem idealen

1) Vergleiche: „Generalbericht der Europäischen Gradmessung für das Jahr 1871, zugleich Bericht über die dritte allgemeine Conferenz in Wien etc.

Erdellipsoid (hier auf der dasselbe ersetzenden Kugel) liegend gedacht sind. Die punktirten Linien sollen die gestörten Schwererichtungen andeuten, welche in O ihre grösste Abweichung haben und von dort aus sowohl nach links als nach rechts immer weniger abgelenkt sind, bis sie in den Punkten 4^l und 4^r mit den Normalen des Ellipsoids (hier der Kugel) wieder zusammenfallen. Die Grösse δ der sehr kleinen

Fig. 9.



Ablenkungswinkel, welche nach den bisherigen Erfahrungen eine Minute nicht überschreiten, sei durch den Ausdruck

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \frac{z}{b}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

vorgestellt, worin δ_0 den grössten Ablenkungswinkel bei O, z die rechts und links von O bis 1, 2, 3 .... gezählten veränderlichen Bogenstücke und b die gegebenen constanten Bögen $OB = OB_1$ bezeichnet. Man sieht, dass der vorstehende Ausdruck für $z = o$ die Ablenkung $\delta = \delta_0$ und für $z = b$ den Werth $\delta = o$ liefert, wie wir es wünschen.

Nivellirt man nun die von dem Anfangspunkte A des Polygons aus bis B fort, so ist der Bogen AB, welcher auf den vereinigten Normalen und Lothen senkrecht steht, der Horizont des Nivellements und daher bis dahin eine Erhebung oder Senkung der Niveaulinie in Bezug auf die ideale Erdgestalt nicht vorhanden. Die Erhebung der Niveaulinie beginnt aber bei B oder dem Punkte 4 links und steigt fortwährend an, bis sie bei dem Punkte B_1 oder 4 rechts ihre höchste Erhebung $B_1 B_2$ erreicht hat. Von dort ab bis A_2 steht der Bogen $B_2 A_2$ wieder senkrecht auf den vereinigten Lothen und Normalen des Bogens $B_1 A_1$. Wenn die hier vorausgesetzten Schwerestörungen stattfinden, so unterliegt es keinem Zweifel, dass sich zwischen den Punkten B und B_1 des Polygons die Niveaulinie um die Grösse $B_1 B_2$ über den Schnitt des Erdellipsoids (hier der Kugel) erhebt, und dass diese Erhebung sich bis zum Endpunkte A_1 des Polygons, welcher mit dem Anfangspunkte A identisch ist, fortpflanzt, also die Cote des Punktes A_1 um den Abstand $B_1 B_2$ grösser macht.

Wäre das Nivellement vom Punkte A_1 ausgegangen und in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung ausgeführt worden, so würde sich von B_1 an die Niveaulinie unter den Schnitt des Erdellipsoids gesenkt und bei Punkt B oder 4 links ihre grösste Senkung $= BB_0 = B_1 B_2$ erreicht haben, welche sich in gleicher Grösse bis A forterhalten hätte, so dass die Cote des Endpunktes A um $AA_0 = B_1 B_2 = A_1 A_2$ kleiner geworden wäre als die des Anfangspunkts A_1, was mit dem ersten Nivellement übereinstimmen würde. Will man die Grösse der Erhebung $BB_0 = O_1O_2 = B_1B_2 = 2OO_1 = 2x$ berechnen, so überlege man, dass der Winkel δ, welchen der Ausdruck (12) liefert, zugleich der Winkel ist, den die Niveaulinie mit dem Schnitt BOB_1 des Erdellipsoids bildet, dass daher dieser letztere Ausdruck für je einen Bogenzweig OB_1 und OB in der Form

$$\frac{dx}{dz} = \delta_0 \sin 1'' \left(1 - \frac{z}{b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

geschrieben und dadurch zur Differentialgleichung der Trajectorie $O_1B_2 = O_1B$ umgestaltet werden kann, woraus sich sofort durch Integration

$$2x = \delta_0 \sin 1'' \left(2 - \frac{z}{b}\right) z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

ergibt. (Für $z = b$ erhält man, wie früher (Gl 12) $2x = b\delta_0 \sin 1''$, da in diesem Falle in jener Gleichung $\varepsilon = \gamma - \beta = \delta$ ist und hier δ_0 für δ steht). Betrüge die Lothabweichung in O beispielsweise 20'',6 und wäre sie in Entfernungen von je 1 Kilometer rechts und links von O null, so hätte man, um die Gesammterhebung der Niveaulinie zu finden, $z = b = 1000^m$ zu setzen, wodurch sich $2x = 0^m,1$ ergäbe. Diese Differenz würde sich im ganzen Polygon erhalten, wenn eine weitere Lothablenkung als die angenommene nicht vorhanden wäre: der Schlussfehler würde folglich auch $2x = 0^m,1$ sein, und wer hieran zweifeln wollte, könnte seine Bedenken nur mehr gegen die hier angenommene Vertheilung der Lothablenkungen richten. In der That scheint diese Vertheilung, gegen die der abstracte mathematische Verstand zwar keinerlei Einwendung erhebt, bei der Erde nicht vorzukommen, weil sich eine Folgerung aus ihr ziehen lässt, die mit den bisherigen Ermittelungen über die Erdgestalt nicht übereinstimmt, nämlich die Folge, dass die Niveauflächen der Erde stellenweise discontinuirlich sein können. Wenn sich auch noch andere Vertheilungen der Schwerkraftsrichtungen, aus denen ein unvollkommener vertikaler Schluss eines nivellirten Polygons folgt, angeben lassen, so ziehen sie doch stets die eben erörterte mit der Wirklichkeit kaum vereinbare Folgerung nach sich, und es bleibt daher nichts anderes übrig als die Continuität aller Niveauflächen der Erde anzunehmen und den von den Lothabweichungen herrührenden Schlussfehler auf jene kleine Grösse zu beschränken, welche darin liegt, dass die Nivellirstationen beträchtliche Ausdehnungen haben, während die Theorie für das genaue Insichzurückkehren der Niveaulinie ausserordentlich kleine Stationen fordert. Da indessen diese Differenz keine grössere Bedeutung hat als die, welche sich von der Nichtberücksichtigung der veränderlichen Intensität der Schwere herschreibt (§ 1), so muss weiter zugegeben werden, dass es für praktische Zwecke und auch für Präcisionsnivellements gestattet ist, vollständig nivellirte Polygone unter der Voraussetzung gleicher Coten des Anfangs- und Endpunktes auszugleichen. Mit dieser Anerkennung der Zulässigkeit des bisherigen Ausgleichungsverfahrens ist jedoch keineswegs zugestanden, dass ein einfaches Nivellement, welches gut schliesst, schon dieses Schlusses wegen als in allen seinen Theilen richtig anzusehen sei; ich muss vielmehr auch heute noch meine ursprüngliche Behauptung aufrecht erhalten, dass der polygonale Abschluss eines Nivellements für sich allein noch keine ausreichende Garantie für dessen Genauigkeit gewähre, und dass letztere nur dann als gegeben zu erachten sei, wenn alle einnivellirten Fixpunkte durch ein zweites Nivellement controlirt sind. [1])

Die Frage über die wirkliche Gestalt der Niveaufläche der Erde wird sich a priori kaum jemals lösen lassen, da es unmöglich ist, den gegenwärtigen geognostischen Zustand unseres Planeten, der sich von den bei Aufstellung der Differentialgleichungen der Niveauflächen gemachten Hypothesen ganz und gar unterscheidet, analytisch aufzufassen. Es bleibt daher nur der empirische Weg der Lösung übrig, und dieser besteht in der Bestimmung einer sehr grossen Zahl von Lothabweichungen und einer übersichtlichen Zusammenfassung derselben in einer empirischen analytischen Formel oder in einer graphischen Darstellung. Hiezu aber wird, wie ich hoffe, die vorliegende Arbeit, der in Jahresfrist ein praktischer Theil mit Detailangaben über Messung und Rechnung folgen soll, einen Beitrag liefern.

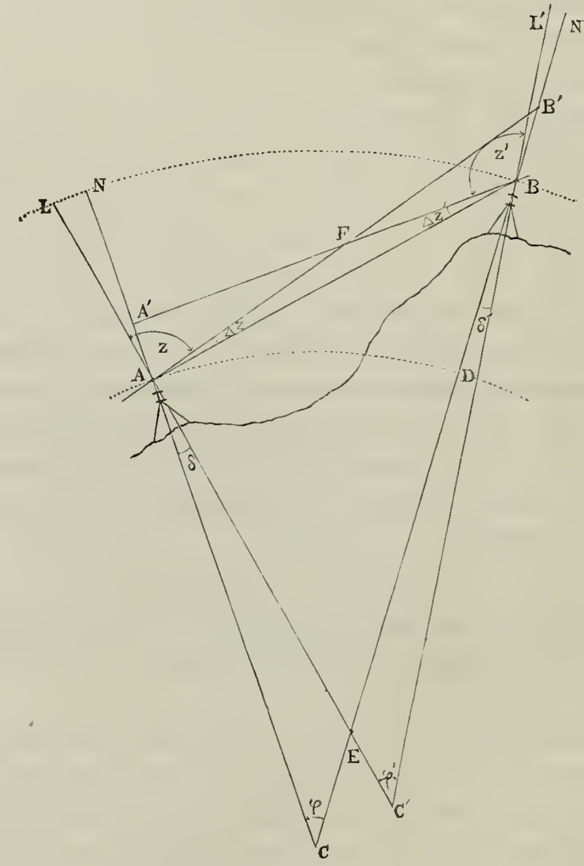
8. Die Erdkrümmung und Lothabweichung durch exactes trigonometrisches Höhenmessen zu bestimmen.

Mit der Darlegung meiner Idee, die Erdkrümmung und Lothabweichung durch exactes Nivelliren zu finden, ist selbstverständlich auch deren Erweiterung auf die gleichnamige Bestimmung durch Messung vertikaler Winkel gegeben, da diese Art der Bestimmung dem Nivelliren gegenüber lediglich der allgemeine Fall und in der That auch der

1) Man vergleiche S. 145 und 147 des „Berichts über die Verhandlungen der vom 30. Septbr bis 7. Octbr 1867 zu Berlin abgehaltenen allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung." Berlin 1868, bei G. Reiner.

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ist. Es liegt nämlich in dem bekannten trigonometrischen Höhenmessen mit gleichzeitigen und gegenseitigen Zenithdistanzen, welches bisher lediglich wegen der Elimination der Strahlenbrechung angewandt wurde, das Ueberschneiden der hori-

Fig. 10.



zontalen Visirlinien der Nivellirinstrumente, deren Winkel ich durch Aufstellung und Ablesung mehrerer Latten messe, versteckt und es kam nur darauf an es zu bemerken und praktisch zu verwerthen. Will man jedoch in besonderen Fällen nicht vom Nivelliren sondern vom Höhenmessen Gebrauch machen, so kann es in folgender Weise geschehen.

Stellen A und B in Fig. 10 die beiden Instrumenten-Standpunkte, deren horizontale Entfernung AD $= r_0 \varphi$ und deren Höhenunterschied BD $=$ h gegeben ist, vor und bezeichnen LAB' $=$ z und L'BA' $=$ z' die in A und B mit Bezug auf die Lothe LAC' und L'BC' gemessenen Zenithwinkel; nennt man ferner $\Delta z =$ BAB' und $\Delta z' =$ ABA' die an z und z' wegen der Strahlenbrechung anzubringenden Verbesserungen, und $\delta =$ CAC' und $\delta' =$ CBC' die in A und B stattfindenden Lothabweichungen, von denen wir eine als bekannt annehmen: so ist klar, dass man die andere

$$\delta' = \delta + \varphi - \varphi' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

auch kennt, sobald der Neigungswinkel φ' der Schwererichtungen AC' und BC' bestimmt ist.

Nach der Figur findet zwischen den eben definirten Grössen die Beziehung statt:

$$z + z' + \Delta z + \Delta z' = 180^0 + \varphi'. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Da nun $\Delta z + \Delta z' =$ r die Strahlenbrechung zwischen A und B und im Allgemeinen, wenn man unter k den mit α, m, y veränderlichen Coefficienten der Strahlenbrechung versteht, $\gamma = k \varphi'$ ist, so wird

$$\psi' = \frac{z + z' - 180^0}{1 - k}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Was den Coefficienten k betrifft, so hat es mit demselben folgende Bewandtniss. Bekanntlich ist die auf Polarcordianten bezogene Differentialgleichung der Strahlenbrechung nach meinen Bezeichnungen (Astron. Nachr. Nr. 1587, Seite 47, Gl 18, Separatabdruck 2. Heft, S. 8)

$$dr = \frac{5\alpha}{m}(1 + my)(1 - y)^4 . \, d\varphi$$

woraus sich durch Integration zwischen den Grenzen $\varphi = o$ und $\varphi = \varphi$ die Strahlenbrechung

$$r = \frac{5\alpha}{m}\int_0^{\varphi}(1 + my)(1 - y)^4 . \, d\varphi'$$

ergibt. Wendet man auf diesen Ausdruck die mechanische Quadratur an, indem man $(1 + my)(1 - y)^4 = Y$ setzt, so wird nach den Formeln von Cotes (Klügels mathem. Wörterbuch 4 Theil, Seite 136), wenn man mit Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 die Werthe von Y bezeichnet, welche sich nacheinander für $y_1 = o$, $y_2 = {}^1/_3 y$, $y_3 = {}^2/_3 y$, $y_4 = y$ ergeben, und wenn man ferner die ein oder mehrfachen Werthe von m gegen die Zahlen 1, 2 u. s. w. vernachlässigt, erhalten:

$$\int_0^{\varphi} (1 + my)(1 - y)^4 d\,\varphi' = {}^1/_8\,\varphi' (Y_1 + 3\,Y_2 + 3\,Y_3 + Y_4) \quad . \quad (35)$$

und nach vollzogener Substitution und Reduction:

$$r = \frac{5\,\alpha}{m}(1 - 2y + 2y^2 - y^3 + \cdots)\varphi' = k\varphi'. \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Der Coefficient der terrestrischen Strahlenbrechung

$$k = \frac{5\,\alpha}{m}(1 - 2y + 2y^2 - y^3 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

lässt sich auch so schreiben:

$$k = \frac{5\,\alpha}{m}\,\frac{1 - (1 - y)^5}{5y} = \frac{1 - (1 - y)^5}{my}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und da nach meiner Abhandlung in den Astronomischen Nachrichten Nr. 1478, S. 214 und 215 (Separatabdruck 1 Heft, S. 3 und 4)

$$my = \frac{h}{r_0} \cdot \frac{x}{h} = \frac{x}{r_0}$$

$$(1 - y)^5 = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\beta'\Theta}{\beta\Theta'}$$

wobei

ϱ, ϱ' die Luftdichtigkeiten,

β, β' die Barometerstände,

Θ, Θ' die absoluten Temperaturen

an den Beobachtungsorten A, B bezeichnen, so wird

$$k = \frac{r_0}{x}\left(1 - \frac{\beta'\,\Theta}{\beta\,\Theta'}\right)\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\varphi' = \frac{z + z' - 180^0}{1 - \frac{r^0}{x}\left(1 - \frac{\beta'\Theta}{\beta\Theta'}\right)\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Wäre φ' vom Beobachtungsorte B aus zu bestimmen, so änderte sich in der vorstehenden Formel nichts als der Ausdruck für k, obgleich sein Werth derselbe bleiben müsste, wie man leicht beweisen kann. Denn da für den Punkt B der Werth x negativ ist, so wird hiefür

$$y' = -\frac{x}{h - x} = -\frac{y}{1 - y}$$

$$m' = \frac{h - x}{r_0 + x} = \frac{m(1 - y)}{1 + my}$$

$$m'y' = \frac{my}{1 + my}$$

wofür man, da der mittlere Werth von $m = 0{,}0074$ und bei terrestrischen Messungen jener von y stets kleiner als 0,1 ist, auch $m'y' = my$ schreiben kann.

Für den Punkt B hat man, wenn α' die Refractionsconstant desselben bezeichnet, mit Rücksicht auf den negativen Werth von y':

$$k' = \frac{5\alpha'}{m'}(1 + 2y'^2 + y'^3 + \cdots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$k' = \frac{5\alpha'}{m'} \cdot \frac{1 - (1 + y')^5}{-5y'} = \frac{(1 + y')^5 - 1}{m'y'}\alpha'. \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Nun ist, wenn man für y' und $m'y'$ ihre Werthe setzt:

$$(1 + y')^5 = \frac{1}{(1 - y)^5} = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\beta\Theta'}{\beta'\Theta}$$

$$\alpha' = \frac{\varrho'}{\varrho}\alpha = \frac{\beta'\Theta}{\Theta'\beta}\alpha$$

$$k' = \frac{r_0}{x}\left(\frac{\beta\Theta'}{\beta'\Theta} - 1\right)\alpha' = \frac{r_0}{x}\left(1 - \frac{\beta'\Theta}{\beta\Theta'}\right)\alpha = k \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

was zu beweisen war. (Was die Werthe von α und α' betrifft, so werden diese bekanntlich aus

$$\alpha = \frac{\beta \Theta_0}{\beta_0 \Theta} \alpha_0 \text{ und } \alpha' = \frac{\beta' \Theta_0}{\beta_0 \Theta'} \alpha_0 \text{ . . . . } (44)$$

berechnet, wobei nach der Abhandlung in den Astron. Nachr. Nr. 1479, S. 226, Separatabdruck 1 Heft, S. 9: $\alpha_0 = 0{,}00027895$, $\beta_0 = 333''',22 = 751^{mm},71$ und $\Theta_0 = 225^0,64$ R $= 282^0,05$ C ist.)

Wenden wir die Formeln (39) und (40) auf die vierte der in dem zweiten Theile meiner Theorie der Strahlenbrechung (Astr. Nachr. Nr. 1590, S. 83, Separatabdruck 2, S. 26) enthaltenen Baeyer'schen Refractionsbeobachtungen am Harz an, so ist für den Beobachtungsort A (Kupferkuhle):

$$\begin{aligned}
r_0 &= 3278237^t \quad , & \log r_0 &= 6{,}515\cdot 6271 \\
\beta &= 331''',34 \quad , & \log \beta &= 2{,}520\cdot 2739 \\
\Theta &= 218{,}2 + 14{,}7, & \log \Theta &= 7{,}632\cdot 8305 \\
\alpha &= 0{,}0002687 \quad , & \log \alpha &= 6{,}429\cdot 2766 \text{ [1])} \\
z &= 89^0\ 0'\ 59'',97
\end{aligned}$$

für den Beobachtungsort B (Brocken):

$$\begin{aligned}
x &= 498^t,155 \quad , & \log x &= 2{,}697\cdot 3645 \\
\beta' &= 295''',41 \quad , & \log \beta' &= 2{,}470\cdot 4252 \\
\Theta' &= 218{,}2 + 10{,}7, & \log \Theta' &= 2{,}359\cdot 6458 \\
z' &= 91^0 20' 40'',15.
\end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich zunächst ein Strahlenbrechungscoefficient

$$k = 0{,}1642$$

und mit diesem nach Formel (40) eine Amplitude zwischen A und B:

$$\varphi' = 1555'',516$$

während nach Baeyer (Astr. Nachr. Nr. 1590, S. 82) der Winkel der Normalen in A und B, also die Erdkrümmung

---

1) Den Werth von $\log \alpha$ erhält man aus $\log \alpha_0 = 6{,}4455464$, wenn man ihn mit $\log \frac{\varrho}{\varrho_0} = \log \frac{\beta \Theta_0}{\beta_0 \Theta} = 9{,}9837893$ multiplicirt.

$$\varphi = 1544'',566$$

beträgt. Es ist also in dem vorliegenden Falle die Lothabweichung zwischen Kupferstuhle und Brocken:

$$\delta - \delta' = \varphi' - \varphi = 10'',95.$$

C. F. Gauss macht in seiner „Bestimmung des Breitenunterschieds zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona" S. 72 folgende Bemerkung:

> „Während nun die astronomischen Beobachtungen die Polhöhe von Altona 5'',52 kleiner gegeben haben, geben die von Hrn. v. Zach auf dem Brocken angestellten Beobachtungen die Polhöhe dieses Punkts 10 bis 11'' grösser, ein Unterschied, von dem doch jedenfalls nur ein kleiner Theil dem Instrumente und den in der Rechnung gebrauchten Declinationen zur Last fallen kann. Die Vergleichung des Breitenunterschieds zwischen Altona und dem Brocken mit der Krümmung, welche dem sich der Erde im Ganzen am besten anschliessenden Sphäroid entspricht, würde daher eine Abweichung von 16'' geben.

Vergleicht man diese Bemerkung mit dem Ergebniss meiner auf fremde Beobachtungen gestützten Rechnung, welche ebenfalls in der Umgebung des Brockens eine Lothabweichung von 11'' anzeigt, so dürfte diese Uebereinstimmung zweier Aussagen, die sich auf ganz verschiedenen Wegen ergeben haben, nicht ohne Bedeutung sein und jedenfalls zu einer näheren Prüfung und Würdigung meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung auffordern. Denn von ihr hängt die Genauigkeit des hier beschriebenen Verfahrens zur Bestimmung der Erdkrümmung und Lothabweichung wesentlich ab, wie ich schon vor sechs Jahren in meinem Eingangs erwähnten Vortrage (S. 34) in dem Satze andeutete, dass eine strenge Theorie der Strahlenbrechung ein Mittel werden würde, örtliche Störungen in der Richtung des Loths aufzufinden.