Von einem

Kettenbruche Euler's

und einem

Theorem von Wallis.

Von

G. Bauer.

Von einem

Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis.

Von

G. Bauer.

Nr. 1.

In den zahlreichen Abhandlungen Euler's über Kettenbrüche kehrt zu wiederholten Malen ein Problem wieder, das schon von Wallis aufgestellt wurde. Als nämlich Wallis den bekannten Ausdruck für das Verhältniss des Kreisumfangs zum Radius in Form eines unendlichen Products gefunden hatte, wandte er sich an seinen Freund Brouncker mit der Frage, wie er wohl am schnellsten diese Zahl berechnen würde. Brounker sandte ihm als Antwort den Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \text{etc.}}}}$$

als Ausdruck für das Verhältniss $\frac{4}{\pi}$. Es war diess das erstemal, dass die Kettenbruchform auftrat. Da Brounker das Verfahren, welches ihn zu diesem Ausdruck geführt hatte, nicht bekannt machen wollte, so suchte Wallis[1]) die Richtigkeit desselben zu verweisen und gab hiezu das Theorem, dass, wenn a irgend eine ganze positive Zahl ist, das Product der zwei Kettenbrüche

$$a-1+\cfrac{1^2}{2(a-1)+\cfrac{3^2}{2(a-1)+\cfrac{5^2}{2(a-1)+\text{etc.}}}} \times a+1+\cfrac{1^2}{2(a+1)+\cfrac{5^2}{2(a+1)+\cfrac{5^2}{2(a+1)+\text{etc.}}}}$$

$= a^2$ ist.

Setzt man nämlich in diesem Producte für a nach und nach die Zahlen 2, 4, 6 ... so ergibt sich aus diesem Theorem mit Hülfe der Wallis'schen Formel für π sogleich der von Brounker gegebene Werth obigen Kettenbruchs. Wallis gibt jedoch keine Herleitung seines Theorems sondern beschränkt sich darauf zu zeigen, dass das Product sich um so mehr dem Werthe a^2 nähere, je mehr Glieder der Kettenbrüche in Rechnung gezogen werden.

Der Beweis dieses Theorems hat Euler viel beschäftigt. „Viele Zeit, sagt er, habe ich darauf vergebens verwandt, aber je schwieriger die Sache schien, um so mehr Nutzen hoffte ich von der Lösung zu ziehen.“ Nachdem er schon in seiner ersten Abhandlung[2]) über Kettenbrüche dieses Theorem kurz berührt hatte, macht er es in einer zweiten Abhandlung[3]) zum Hauptgegenstand der Untersuchung und es gelingt ihm nach langem Umschweif, mit Hülfe von Integralen und Relationen zwischen denselben, die er in einer vorhergehenden Abhandlung gegeben, ein allgemeineres Theorem über das Product zweier Kettenbrüche aufzustellen, welche das Wallis'sche in sich begreift. In einer späteren Abhandlung[4]) kommt er nochmals auf dieses Theorem zurück, um eine einfachere Lösung speciell für die Wallis'schen Kettenbrüche zu geben.

Ich kann nicht finden, dass Andere sich seitdem mit diesem Theorem befasst haben; es lässt aber, wie ich hier zeigen werde, einen höchst einfachen Beweis zu, indem man einen dritten Kettenbruch zu Hülfe

---

1) Arithmetica Infinitorum. Prop. CXCI.
2) De fractionibus cont. Comment. Ac. Petrop. T. IX.
3) De fractionibus cont. observationes. Comment. Ac. Petrop. T. XI.
4) De fractionibus cont. Wallisii. Mém. de l'Ac. d. Sc. de St. Pétersbourg T. V. pag. 24.

nimmt, der mit jedem der beiden Kettenbrüchen des Theorems durch eine rationale Relation verbunden ist. Durch dieses Mittel bieten sich sogleich allgemeinere Sätze dar, welche nicht nur die von Wallis, sondern auch den von Euler gegebenen als specielle Fälle enthalten.

Ich wurde zu dieser Lösung geführt durch eine andere Untersuchung, die ebenfalls an die Arbeiten Euler's über Kettenbrüche anknüpft. Derselbe widmet nämlich eine besondere Abhandlung[1]) dem Kettenbruche

$$\cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \text{etc.}}}}$$

an dem er die bemerkenswerthe Eigenschaft entdeckt, dass sein Werth immer eine rationale Zahl ist, wenn n irgend eine ganze Zahl ist, mit Ausnahme von $n = 1$, in welchem Falle dieser Werth irrational ist. Euler setzt in dieser Abhandlung sogleich n als eine ganze positive Zahl voraus und findet seine Resultate durch sinnreiche Kunstgriffe, die eben nur in diesem Falle anwendbar sind.

In einer späteren Abhandlung[2]) betrachtet Euler noch die allgemeinere Form

$$m + \cfrac{n}{m+1 + \cfrac{n+1}{m+2 + \text{etc.}}}$$

und zeigt, dass dieser Kettenbruch in mehrere wesentlich verschiedene andere gleichgeltende Formen umgeformt werden kann.

Man kann aber grössere Allgemeinheit mit einfacherer Analyse verbinden. Ich betrachte hier zunächst den allgemeineren Bruch

---

1) Observationes circa fractiones cont. in hac forma contentas etc. Mém. de l'Ac. d. Sc. d. St. Pétersbourg T. IV. pag. 52.

2) „Observationes analyticae." Opuscula analytica T. I. Auch Stern beschäftigte sich ausführlich mit diesem Kettenbruch. Journ. v. Crelle T. XI. p. 43. Seine Analyse ist, unter der Voraussetzung, dass m und n ganze positive Zahlen sind, der von Euler auf den Fall $m = 0$ (Mém. de l'Ac. de St. Pétersburg T. IV) angewandten nachgebildet.

$$S = \cfrac{n}{\alpha_1 + \cfrac{n+\alpha_1}{\alpha_2 + \cfrac{n+\alpha_2}{\alpha_3 + \text{etc.}}}} \qquad 1)$$

welcher die zwei letztgenannten Brüche in sich begreift; lege aber weniger Gewicht auf die Verallgemeinerung der Euler'schen Resultate als auf die angewandte Methode, welche einen tieferen Einblick in die Natur des Kettenbruches gestattet und uns sodann gleichsam von selbst auch zur Lösung des Wallis'schen Problemes hinleitet, obwohl letzteres und die Untersuchung des Kettenbruchs 1) in gar keiner Beziehung zu einander zu stehen scheinen.

Nr. 2.

Schon Spottiswoode hat in einer Abhandlung über Determinanten[1]) bemerkt, dass die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruchs als Determinanten besonderer Form geschrieben werden können. Diese allerdings nur beiläufig als Beispiel gegebene Notiz scheint bisher übersehen worden zu sein. Sie ist aber nicht ohne Wichtigkeit; denn erst dadurch, dass die spröden Formen dieser Zähler und Nenner in die leicht zu behandelnde Determinantenform übergeführt werden, ist eine sichere, immer anwendbare Methode für die Behandlung der Kettenbrüche gewonnen. Diese Determinantenform ergibt sich übrigens unmittelbar aus den bekannten linearen Recursionsformeln, welche zu der Kettenbruchentwicklung Veranlassung geben.

Ist

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \text{etc.}}}} \qquad A)$$

der gegebene Kettenbruch, $\frac{P_r}{Q_r}$, der r^{te} Näherungsbruch, so findet man

1) Journ. v. Crelle. LI.

$$Q_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & & \\ -b_2 & a_2 & 1 & & & & \\ & -b_3 & a_3 & . & & & \\ & & -b_4 & . & . & & \\ & & & . & . & 1 & \\ & & & & . & a_{r-1} & 1 \\ & & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix}, \quad P_r = b_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & & & \\ -b_3 & a_3 & 1 & & & & \\ & -b_4 & a_4 & . & & & \\ & & -b_5 & . & . & & \\ & & & . & . & 1 & \\ & & & & . & a_{r-1} & 1 \\ & & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix} \qquad \text{B)}$$

Diese Determinanten haben die besondere Form, dass die Diagonalreihe die Theilnenner des Kettenbruchs enthält, und von den beiden ihr zunächst liegenden schrägen Reihen die eine die Theilzähler mit entgegengesetztem Zeichen enthält, in der andern alle Elemente $= 1$ sind, während alle übrigen Elemente $= 0$ sind. Q_r ist eine Determinante r^{ten} Grades, P_r eine solche $r - 1^{\text{ten}}$ Grades und (abgesehen vom Factor b_1) gleich dem Coefficienten von a_1 in Q_r.

Wenden wir diese Formeln an auf den Kettenbruch 1), so wird

$$Q_r = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & & \\ -(n+\alpha_1) & \alpha_2 & 1 & & & \\ & -(n+\alpha_2) & \alpha_3 & .. & & \\ & & -(n+\alpha_3) & .. & & \\ & & & .. & 1 & \\ & & & & \alpha_{r-1} & 1 \\ & & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix}, \quad P_r = n \begin{vmatrix} \alpha_2 & 1 & & & \\ -(n+\alpha_2) & \alpha_3 & .. & & \\ & -(n+\alpha_3) & .. & & \\ & & .. & 1 & \\ & & & \alpha_{r-1} & 1 \\ & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix} \qquad 2)$$

Diese Determinanten haben das Eigenthümliche, dass die Summe der Elemente jeder Vertikalreihe, die erste und letzte ausgenommen, constant $= - n + 1$ ist. Wenn man nun zu jeder Horizontalreihe alle folgenden addirt und hierauf von jeder Verticalreihe (die letzte ausgenommen) die vorhergehende abzieht, so wird

$$Q_r = \begin{vmatrix} -n & 1 & & & & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_1) & \alpha_1 & 1 & & & \alpha_r+1 \\ & -(n+\alpha_2) & \alpha_2 & .. & & . \\ & & -(n+\alpha_3) & .. & & . \\ & & & .. & 1 & . \\ & & & & \alpha_{r-2} & \alpha_r+1 \\ & & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix}, \quad P_r = n \begin{vmatrix} -n & 1 & & & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_2) & \alpha_2 & 1 & & \alpha_r+1 \\ & -(n+\alpha_3) & \alpha_3 & .. & . \\ & & -(n+\alpha_4) & .. & . \\ & & & .. & . \end{vmatrix} \qquad 3)$$

und diese Determinanten haben nun wieder die charakteristische Form B), mit Ausnahme jedoch der letzten Verticalreihe, in welcher alle Elemente $= \alpha_r + 1$ sind bis auf das letzte, welches $= \alpha_r$ ist.

Bezeichnen wir mit D_r die Unterdeterminante von Q_r, welche durch Streichen der ersten Horizontal- und ersten Verticalreihe hervorgeht; mit Δ_r die Unterdeterminante $r - 2^{ten}$ Grades, welche aus Q_r durch Streichen der zwei ersten Horizontal- und Verticalreihen entsteht und mit $(-1)^r \delta_r$ diejenige, welche durch Streichen der zwei ersten Horizontalreihen und der ersten und letzten Verticalreihe entsteht und mithin dem Product der Elemente $-(n+\alpha_2)$, $-(n+\alpha_3) \ldots$, $-(n+\alpha_{r-1})$ gleich ist, so hat man

$$\begin{aligned} Q_r &= -n D_r + (n+\alpha_1)\Delta_r + \delta_r(n+\alpha_1)(\alpha_r+1) \\ P_r &= \quad n D_r - n(n+\alpha_1)\Delta_r \end{aligned}$$

Letztere Gleichung ergibt sich aus obiger Form für P_r, wenn man das erste Element $-n$ in die Summe $-(n+\alpha_1)+\alpha_1$ zerlegt.

Aus diesen Gleichungen folgt, indem man einmal D_r, dann Δ_r eliminirt

$$\begin{aligned} P_r + Q_r &= (n+\alpha_1)\left\{-(n-1)\Delta_r + \delta_r \,.\, (\alpha_r+1)\right\} \\ P_r + nQ_r &= \quad n \,.\, \left\{-(n-1) D_r + \delta_r (n+\alpha_1)(\alpha_r+1)\right\} \end{aligned}$$

Man ersieht aber sogleich, dass der für $\frac{1}{n}(P_r + nQ_r)$ aus der zweiten Gleichung sich ergebende Ausdruck nichts anderes ist als das, was die Form 3) für Q_r wird, wenn man das zweite Element 1 der ersten Horizontalreihe durch Null ersetzt, wodurch im Werthe von Q_r das Glied mit Δ_r verschwindet, und statt des ersten Elementes $-n$ das Element $-(n-1)$ setzt. Dieselbe Veränderung in der Determinante 3) für P_r gemacht, gibt mit Weglassung des Factors n den Ausdruck für $\frac{1}{n+\alpha_1}(P_r + Q_r)$ in 4). Setzen wir also allgemein

$$V_i = \left| \begin{array}{ccccccc} -(n-1) & & & & & & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_i) & \alpha_i & 1 & & & & . \\ & -(n+\alpha_{i+1}) & \alpha_{i+1} & . & & & . \\ & & -(n+\alpha_{i+2}) & . & . & & . \\ & & & . & . & 1 & \alpha_r+1 \\ . & & & & . & \alpha_{r-2} & \alpha_r+1 \\ & & & & & -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{array} \right| \qquad 5)$$

so ist

$$\frac{n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = (n+\alpha_1)\frac{V_2}{V_1} \qquad 6)$$

Der Bruch $\frac{V_2}{V_1}$ lässt sich aber wieder in einen Kettenbruch entwickeln. Denn addirt man in V_i die erste Verticalreihe zur zweiten und zerlegt hierauf das Element $-(n+\alpha_i)$ in die zwei Theile $-n$ und $-\alpha_i$, so wird

$$V_i = \alpha_i V_{i+1} + \left| \begin{array}{ccccc} -(n-1) & -(n-1) & & & a_r+1 \\ -n & -n & 1 & & \alpha_r+1 \\ & -(n+\alpha_{i+1}) & \alpha_{i+1} & 1 & \alpha_r+1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array} \right|$$

Zieht man in letzterer Determinante die zweite Verticalreihe von der ersten ab, so geht sie über in

$$(n+\alpha_{i+1}) \left| \begin{array}{ccccc} -(n-1) & & & & \alpha_r+1 \\ -n & 1 & & & . \\ & -(n+\alpha_{i+2}) & \alpha_{i+2} & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array} \right| = (n+\alpha_{i+1}) \left| \begin{array}{ccc} -(n-1) & & \alpha_r+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{array} \right|$$

$$= (n+\alpha_{i+1}) \left| \begin{array}{ccc} -(n-1) & -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -1 & 0 & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{array} \right| = (n+\alpha_{i+1}) V_{i+2}$$

Also hat man von $i = 1$ bis $i = r-3$

$$V_i = \alpha_i V_{i+1} + (n+\alpha_{i+1}) V_{i+2} \qquad 7)$$

Ebenso findet man

$$V_{r-2} = \alpha_{r-2} \begin{vmatrix} -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix} + (n+\alpha_{r-1}) \begin{vmatrix} -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -n & \alpha_r+1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{r-2} V_{r-1} + (n+\alpha_{r-1})(\alpha_r+1)$$

$$V_{r-1} = \begin{vmatrix} -(n-1) & \alpha_r+1 \\ -(n+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix} = \alpha_{r-1}(\alpha_r+1) + (n+\alpha_r)$$

Hiernach gibt die Gleichung 6)

$$\frac{n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = \cfrac{n+\alpha_1}{\alpha_1 + \cfrac{n+\alpha_2}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{n+\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1} + \cfrac{n+\alpha_r}{\alpha_r+1}}}} \tag{8}$$

welcher Kettenbruch sich nur dadurch von dem r^{ten} Näherungsbruche von

$$S' = \cfrac{n+\alpha_1}{\alpha_1 + \cfrac{n+\alpha_2}{\alpha_2 + \text{etc.}}} \tag{9}$$

unterscheidet, dass der Nenner des letzten (r^{ten}) Theilbruchs α_r+1 statt α_r ist. Diese Gleichung 8) gilt für jeden Werth von n; auch für $n = 1$. Nur tritt für $n = 1$ der besondere Fall ein, dass der Kettenbruch 8) den constanten Werth 1 annimmt für jeden Index r und mithin ausser aller Verbindung mit $\frac{P_r}{Q_r}$ oder also dem Kettenbruche S tritt.

In diesem Falle $n = 1$ aber gestatten die Formeln 2) eine einfache Entwicklung für P_r und Q_r. Denn nachdem man in der Form 2) von Q_r zu jeder Horizontalreihe alle folgenden addirt hat, wird, für $n = 1$,

$$Q_r = \begin{vmatrix} -1 & & & & \alpha_r+1 \\ -(1+\alpha_1) & -1 & & & . \\ & -(1+\alpha_2) & \cdot\ \cdot & & . \\ & & \cdot\ \cdot & -1 & \alpha_r+1 \\ & & & -(1+\alpha_{r-1}) & \alpha_r \end{vmatrix}$$

woraus sich sofort ergibt

$$Q_r = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)\left[1 - \frac{1}{1+\alpha_1} + \frac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)} - \ldots \pm \frac{1}{(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_r)}\right]$$

Ebenso findet sich

$$P_r = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)\left[\frac{1}{1+\alpha_1} - \frac{1}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)} + \ldots \pm \frac{1}{(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_r)}\right]$$

also

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{1-\Sigma}{\Sigma} \tag{10}$$

wo Σ die in Q_r enthaltene Reihe $1 - \frac{1}{1+\alpha_1} +$ etc. bezeichnet.

Es mag noch bemerkt werden, dass wenn man in S $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ u. s. f. statt α_1, α_2 ... setzt und

$$\frac{-P_r}{Q_r} = \frac{p_r}{q_r}, \quad \frac{-n(P_r+Q_r)}{P_r+nQ_r} = \frac{p'_r}{q'_r},$$

so dass

$$\frac{p_r}{q_r} = \cfrac{n}{\alpha_1 + \cfrac{n-\alpha_1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{n-\alpha_{r-1}}{\alpha_r}}}, \quad \frac{p'_r}{q'_r} = \cfrac{n-\alpha_1}{\alpha_1} + \cfrac{n-\alpha_2}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{n-\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1} + \cfrac{n-\alpha_{r-1}}{\alpha_r - 1}}} \tag{11}$$

zwischen $\frac{p_r}{q_r}$ und $\frac{p'_r}{q'_r}$, wie sich aus 8) ergibt, immer die Relation statt hat

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{n(p'_r+q'_r)}{p'_r+nq'_r} \tag{12}$$

d. h. dieselbe Relation, welche zwischen dem Kettenbruch 8) und $\frac{P_r}{Q_r}$ besteht.

Nr. 3.

Sind die Kettenbrüche S und S' convergent, was immer der Fall sein wird, wenn die α positiv und mit dem Index steigend sind, so wird der Kettenbruch 8) bei wachsendem r nach derselben Grenze convergiren, wie der Kettenbruch 9).

In Bezug auf späteres sei hier bemerkt, dass, wenn allgemein $\frac{P_r}{Q_r}$ der r^{te} Näherungsbruch eines convergenten Kettenbruches A) ist, und $\frac{P'_{r+1}}{Q'_{r+1}}$ das was $\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}}$ wird, wenn der letzte Theilnenner a_{r+1} durch $a_{r+1}+\varepsilon$ ersetzt wird,

$$\frac{P'_{r+1}}{Q'_{r+1}}-\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}} = -\frac{(P_{r+1}Q_r - P_rQ_{r+1})\varepsilon}{Q_{r+1}(Q_{r+1}+\varepsilon Q_r)}$$

gefunden wird. Ist mithin ε positiv und sind die Theilzähler und Theilnenner sämmtlich positiv, mithin auch die P_r und Q_r, so ist diese Differenz numerisch $<\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}}-\frac{P_r}{Q_r}$ und es convergiren also $\frac{P'_{r+1}}{Q'_{r+1}}$ und $\frac{P_{r+1}}{Q_{r+1}}$ mit wachsendem r nach derselben Grenze.

Wäre ε negativ, aber numerisch $<a_{r+1}$, so dass $a_{r+1}+\varepsilon$ noch positiv bliebe, so wäre $\frac{b_{r+1}}{\alpha_{r+1}+\varepsilon} = \varepsilon'$ eine positive Grösse; der Theilnenner α_r wäre in $\alpha_r + \varepsilon'$ übergegangen und wir würden wie vorhin schliessen, dass hiedurch die Convergenz des Bruches und die Grenze, nach welcher r convergirt, nicht geändert wird.

Enthält aber der Kettenbruch negative Theilbrüche, so sind im Allgemeinen diese Schlüsse nicht mehr gültig und müsste man sich dann in jedem Falle durch besondere Untersuchung vergewissern, ob durch das Hinzutreten von ε im letzten Theilnenner die Convergenz des Bruches nicht geändert wird.

Nr. 4.

Unter dem so eben gemachten Vorbehalt ergibt sich nun aus Gleichung 8) für $r = \infty$

$$S' = \frac{n(S+1)}{S+n} \qquad 13)$$

Aus dieser Relation fliessen die Eigenthümlichkeiten des Bruches S für bestimmte Werthe der Grössen α.

Ist in dem einfachsten Falle $\alpha_i = i$, so geht S über in

$$S^{(n)} = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \text{etc}}}$$

und S′ in $S^{(n+1)}$. Diess ist der Bruch, welchen Euler in der oben angeführten Abhandlung[1]) behandelt, unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl ist. Er findet die Relation 13) durch Induction. Ist $n=1$, so gibt dieselbe $S^{(2)} = 1$ und hieraus folgt, dass $S^{(n)}$ überhaupt, sobald n eine ganze positive Zahl >1 ist, eine rationale Zahl ist, die sich durch successive Substitution aus 13) berechnen lässt. Ist n eine negative ganze Zahl, so ist diess selbstverständlich, indem in diesem Falle der Kettenbruch abbricht; immer aber gilt auch in diesem Falle die Relation 13). Der Fall $n = 1$ macht, wie oben erwähnt, eine Ausnahme, insoferne als sich der Werth von $S^{(1)}$ nicht aus der Relation entnehmen lässt, und gibt die Gleichung 10) in diesem Falle für $S^{(1)}$ den irrationalen Werth

$$S^{(1)} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Setzt man ferner

$$s^{(n)} = \cfrac{n-1}{1 + \cfrac{n-2}{2 + \text{etc.}}}$$

so besteht vermöge der Gleichung 12) dieselbe Relation zwischen $s^{(n)}$ und $s^{(n+1)}$, welche zwischen $S^{(n)}$ und $S^{(n+1)}$ besteht. Da nun $s^{(2)} = 1 = S^{(2)}$, so folgt weiter, dass überhaupt für jede ganze positive Zahl n ($n = 1$ ausgenommen)

1) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg. T. IV.

$$S^{(n)} = s^{(n)}$$

ist, der rationale Werth $S^{(n)}$ mithin durch einen endlichen Kettenbruch bestimmt ist. Diess sind die von Euler a. a. O. erhaltenen Resultate.

Setzt man in S die Grössen $m + \alpha_1$, $m + \alpha_2$ u. s. f. an die Stelle von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, so kann man statt S und S' die Kettenbrüche

$$\Sigma = m + \cfrac{n}{m + \alpha_1 + \cfrac{n + \alpha_1}{m + \alpha_2 + \text{etc.}}}, \quad \Sigma' = m + \cfrac{n + \alpha_1}{m + \alpha_1 + \cfrac{n + \alpha_2}{m + \alpha_2 + \text{etc.}}}$$

einführen und die Relation 13) geht sodann über in folgende:

$$\Sigma' = \frac{n(\Sigma + 1)}{\Sigma + n - m} \tag{14}$$

und aus dieser Relation lassen sich unschwer die Resultate ableiten, welche Euler für den Kettenbruch Σ unter der Voraussetzung $\alpha_i = i$ in den Opusc. anal.[1]) entwickelt hat.

Nr. 5.

Um die Bedeutung der auf den Kettenbruch 1) angewandten Analyse besser zu erkennen und allgemeinere Resultate zu erhalten, gehen wir von dem Kettenbruche

$$\frac{P_r}{Q_r} = \cfrac{b_1 c_0}{a_1 + \cfrac{b_2 c_1}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_r c_{r-1}}{a_r}}} \tag{15}$$

aus. Um die Gleichungen 13) auf diesen Kettenbruch anzuwenden, hätte man dort $b_i c_{i-1}$ statt b_i zu setzen. Aber statt der hieraus hervorgehenden Formen für P und Q kann man folgende Formen nehmen

1) T. T. p. 106.

$$Q_r = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ -b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & -b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -b_{r-1} & a_{r-1} & c_{r-1} \\ & & & & -b_r & a_r \end{vmatrix}, \quad P_3 = b_1 c_0 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & & \\ -b_3 & a_3 & c_3 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & & -b_r & a_r \end{vmatrix} \qquad 16)$$

In der That multiplicirt man in Q_r die i^{te} Horizontalreihe und alle folgenden mit einer beliebigen Grösse k und dividirt zugleich die i^{te} Verticalreihe und alle folgenden mit k, so ändern sich in der Determinante nur die zwei Elemente b_i und c_{i-1}, welche in $k \cdot b_i$ und $\frac{1}{k} c_{i-1}$ übergehen, während zugleich der Werth der Determinante ungeändert bleibt. Es wird also auch der Werth der Determinante nicht alterirt, wenn man c_{i-1} durch 1 ersetzt, und zugleich b_i durch $b_i \cdot c_{i-1}$.

Auf diese Determinante 16) lassen sich nun ganz dieselben Transformationen anwenden, die wir auf die Determinante 2) anwandten, wenn wir nur voraussetzen, dass, wie dort, die Summe der in einer Verticalreihe stehenden Elemente (die erste und letzte Verticalreihe ausgenommen) constant sei. Setzen wir also

$$c_i + a_{i+1} - b_{i+2} = \text{const} = d$$

für jeden Index i, wodurch der Kettenbruch 15) die Gestalt annimmt

$$\frac{P_r}{Q_r} = \cfrac{b_1 c_0}{d + b_2 - c_0 + \cfrac{b_2 c_1}{d + b_3 - c_1 + \cdot \cdot + \cfrac{b_r c_{r-1}}{d + b_{r+1} - c_{r-1}}}} \qquad 17)$$

so führt die Transformation zu der (der Gleichung 8) entsprechenden) Gleichung

$$\frac{(c_0 - d) P_r + b_1 c_0 \cdot Q_r}{P_r + b_1 Q_r} = \cfrac{b_2 c_0}{d + b_2 - c_1 + \cdot \cdot + \cfrac{b_r c_{r-2}}{d + b_r - c_{r-1} + \cfrac{b_{r+1} c_{r-1}}{d + b_{r+1}}}} \qquad 18)$$

Nur für $d = 0$ tritt ein Ausnahmefall ein (entsprechend dem Falle $n - 1 = 0$ bei dem Kettenbruche S). Denn für diesen Werth von d hat der Kettenbruch 18) den constanten Werth c_0 und tritt ausser aller Beziehung zu dem Bruche 17), während letzterer (analog dem in Nr. 2 pag. 107 erhaltenen Resultate) den Werth annimmt

$$\cfrac{b_1 c_0}{b_2 - c_0 + \cfrac{b_2 c_1}{b_3 - c_1 + \text{etc.}}} = b_1 \cdot \frac{1 - \Sigma}{\Sigma}$$

wo

$$\Sigma = 1 - \frac{c_0}{b_2} + \frac{c_0 c_1}{b_2 b_3} - + \ldots$$

Uebrigens bestehen die Gleichungen 17) und 18) für jeden Index r zusammen und unter den in Nr. 3 gestellten Bedingungen lassen sich dieselben auf $r = \infty$ ausdehnen, ohne auf die im letzten Theilnenner des Kettenbruchs 18) stattfindende Unregelmässigkeit Rücksicht zu nehmen.

Setzt man c_i constant $= c$ und dehnt die Brüche in's Unendliche aus, so kommt man wieder auf den früher behandelten Kettenbruch in etwas anderer Form zurück.

Das Gesetz, nach welchem die Brüche 17) und 18) gebaut sind, zeigt sogleich, dass die rationale Verbindung, welche zwischen ihnen besteht, darin ihren Grund hat, dass beide aus Kettenbrüchen mit der doppelten Anzahl von Gliedern, welche nach demselben Gesetz fortschreiten und nur in den Anfangsgliedern differiren, durch verschiedene Zusammenfassung der Glieder hervorgehen. In der That sind diese Brüche 17) und 18), wenn wir $\frac{c_i}{d} = \gamma_i$ und $\frac{b_i}{d} = \beta_i$ setzen, resp. den folgenden gleich

$$-b_1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{\gamma_0}{1 + \cfrac{\beta_2}{1 - \cfrac{\gamma_1}{1 + \cdots \cfrac{-\gamma_{r-1}}{1 + \beta_{r+1}}}}}} \quad \text{und} \quad c_0 - \cfrac{c_0}{1 + \cfrac{\beta_2}{1 - \cfrac{\gamma_1}{1 + \beta_3 \cdots \cfrac{-\gamma_{r-1}}{1 + \beta_{r+1}}}}}$$

welche sich nur in den ersten Gliedern unterscheiden.

Die vorhin behandelten Kettenbrüche S, S′ befinden sich mithin auch in diesem Falle, was jedoch nicht leicht a priori zu erkennen ist, und auch weder von Euler noch von Stern, der sich, wie oben erwähnt, mit diesen Brüchen ebenfalls eingehend beschäftigt hat, nicht bemerkt worden zu sein scheint. Um das vorige auf diese Brüche anzuwenden, hat man zu setzen $c_i = 1$, $b_i = n + \alpha_{i-1}$, $d = 1 - n$, also $\gamma_i = \frac{1}{1-n}$, $\beta_i = \frac{n+\alpha_{i-1}}{1-n}$.

Nr. 6.

Diese Betrachtungen führen nun sogleich zu einer Lösung des Wallis'schen Problems. Da nemlich das Auseinanderziehen des Kettenbruchs (Auflösen in eine doppelte Anzahl von Gliedern) auf verschiedene Weise bewerkstelligt werden kann, so kann es kommen, dass ein Kettenbruch durch zwei verschiedene aufgelöste Formen mit einem gegebenen zweiten und dritten Kettenbruche in rationaler Verbindung steht und hierdurch auch eine Beziehung zwischen dem zweiten und dritten gegeben ist. Setzen wir z. B. in den Gleichungen 17) und 18) $c_i = b_{i+1}$, so werden dieselben

$$\frac{P}{Q} = \frac{b_1^2}{d + b_2 - b_1 +} \cdot \cdot + \frac{b_r^2}{d + b_{r+1} - b_r}, \quad \frac{(b_1 - d)P + b_1^2 Q}{P + b_1 Q} = \frac{b_1 b_2}{d +} \cdot \cdot + \frac{b_{r-1} b_r}{d} + \frac{b_r b_{r+1}}{d + b_{r+1}}$$

Setzen wir aber $c_i = b_{i+2}$, so erhält man

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 b_2}{d +} \cdot \cdot + \frac{b_r b_{r+1}}{d}; \quad \frac{(b_2 - d)p + b_1 b_2 q}{p + b_1 q} = \frac{b_2^2}{d + b_2 - b_3 +} \cdot \cdot + \frac{b_r^2}{d + b_r - b_{r+1}} + \frac{b_{r+1}^2}{d + b_{r+1}}$$

Unter dem in Nr. 3 gemachten Vorbehalt können wir die Brüche in's Unendliche fortsetzen und erhalten sodann den Satz:

„Ist

$$\cfrac{b_1 b_2}{d + \cfrac{b_2 b_3}{d + \cfrac{b_3 b_4}{d + \text{etc.}}}} = S\,,$$

so ist

$$\cfrac{b_1^2}{d+b_1-b_2+\cfrac{b_2^2}{d+b_2-b_3+\text{etc.}}} = b_1 \frac{S+b_1}{S+d+b_1} \quad \text{und} \quad \cfrac{b_1^2}{d+b_2-b_1+\cfrac{b_2^2}{d+b_3-b_2+\text{etc.}}} = -b_1 \frac{S-b_1}{S+d-b_1}$$

($d = 0$ ausgeschlossen); mithin ist auch

$$\frac{d}{2} - b_1 + \cfrac{b_1^2}{d+b_1-b_2+\cfrac{b_2^2}{d+b_2-b_3+\text{etc.}}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{S+d-b_1}{S+d+b_1}\,,$$

$$\frac{d}{2} + b_1 + \cfrac{b_1^2}{d+b_2-b_1+\cfrac{b_2^2}{d+b_3-b_2+\text{etc.}}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{S+d+b_1}{S+d-b_1}$$

und folglich das Product der zwei letzten Kettenbrüche immer

$$= \left(\frac{d}{2}\right)^2 . \text{“}$$

In dem speziellen Falle, wo $b_i = 2i+1$ und d eine ganze gerade Zahl ist, hat man das Eingangs erwähnte Theorem von Wallis über das Product der zwei Kettenbrüche

$$\left(\frac{d}{2} - 1 + \cfrac{1^2}{d-2+\cfrac{3^2}{d-2+\text{etc.}}}\right) \times \left(\frac{d}{2} + 1 + \cfrac{1^2}{d+2+\cfrac{3^2}{d+2+\text{etc.}}}\right) = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Für $d = 4$ ist der erstere dieser Brüche der von Brouncker gegebene, dessen Werth $\frac{4}{\pi}$ ist; man zieht hieraus für denselben Kettenbruch die Werthe entsprechend $d = 8$, $d = 12$, $d = 16$ u. s. f. nämlich π, $\frac{4^2}{\pi}$, $\frac{6^2}{4^2} \cdot \pi$, u. s. f.

Zugleich gibt aber obiger Satz die entsprechenden Werthe des Kettenbruchs S, oder

$$S + d = s = d + \cfrac{1 \cdot 3}{d + \cfrac{3 \cdot 5}{d + \text{etc.}}}$$

und findet man für[1])

$$d = 4 \quad , \; d = 8 \quad , \; d = 12 \quad , \; d = 16$$

$$s = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{\frac{\pi}{2}-1}, \quad s = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{1}}{\frac{2}{1}-\frac{\pi}{2}}, \quad s = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\,.\,2}{1\,.\,3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{2\,.\,2}{1\,.\,3}}, \quad s = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\,.\,2\,.\,4}{1\,.\,3\,.\,3}}{\frac{2\,.\,2\,.\,4}{1\,.\,3\,.\,3}-\frac{\pi}{2}}, \text{ u. s. f.}$$

Nr 7.

Einen anderen Satz dieser Art leiten wir aus den Gleichungen 17) und 18) ab, wenn wir einmal $c_i = c + ih$, $b_i = b + (i-1)h$ setzen, sodann $c_i = b + ih$, $b_i = c + (i-2)h$. Im ersten Falle erhalten wir

$$\frac{P}{Q} = \cfrac{bc}{g+h+\cfrac{(b+h)(c+h)}{g+h+\cfrac{(b+2h)(c+2h)}{g+h+\text{etc.}}}},$$

$$\frac{(b-g)P+bc\,.\,Q}{P+b\,.\,Q} = \cfrac{(b+h)c}{g+\cfrac{(b+2h)(c+h)}{g+\cfrac{(b+3h)(c+2h)}{g+\text{etc.}}}}$$

wo $g = d+b-c$; im zweiten Falle

$$\frac{p}{q} = \cfrac{b(c-h)}{g+\cfrac{(b+h)\,.\,c}{g+\cfrac{(b+2h)(c+h)}{g+\text{etc.}}}}$$

$$\frac{(c-g)p+(c-h)b\,.\,q}{p+(c-h)\,.\,q} = \cfrac{bc}{g-h+\cfrac{(b+h)(c+h)}{g-h+\cfrac{(b+2h)(c+2h)}{g-h+\text{etc.}}}}$$

wo $g = d-b+c$.

Sind die Bedingungen in Nr. 3 erfüllt und daher gestattet die Kettenbrüche in's Unendliche fortzusetzeu, so werden, wenn g in beiden

1) Euler hat die Werthe dieser Kettenbrüche aus Integralformeln gefunden. Opusc. Anal. T. I De seriebus etc. etc. p. 45.

Fällen denselben Werth hat, der zweite und dritte dieser Kettenbrüche bis auf das Anfangsglied im dritten gleich und man erhält sodann den Satz:

„Ist

$$S = \cfrac{(b+h)c}{g + \cfrac{(b+2h)(c+h)}{g + \cfrac{(b+3h)(c+2h)}{g + \text{etc.}}}}$$

so ist

$$\cfrac{bc}{g+h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g+h + \cfrac{(b+2h)(c+2h)}{g+h + \text{etc.}}}} = b \cdot \frac{c-S}{S+g-b},$$

$$\cfrac{bc}{g-h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g-h + \cfrac{(b+2h)(c+2h)}{g-h + \text{etc.}}}} = b \cdot \frac{c+S}{S+g+b}$$

vorausgesetzt dass g nicht $= \pm (b-c)$ sei; und folglich ist dann auch

$$\frac{g+b+c}{2} + \cfrac{bc}{g+h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g+h + \text{etc.}}} = \frac{g-b+c}{2} \cdot \frac{S+g+b}{S+g-b};$$

$$\frac{g-b-c}{2} + \cfrac{bc}{g-h + \cfrac{(b+h)(c+h)}{g-h + \text{etc.}}} = \frac{g+b-c}{2} \cdot \frac{S+g-b}{S+g+b}$$

und das Product der beiden letzten Kettenbrüche immer

$$= \frac{g-b+c}{2} \cdot \frac{g+b-c}{2} \text{.“}$$

Der letztere Theil dieses Satzes, das Produkt der zwei Kettenbrüche betreffend, enthält nicht nur den Satz von Wallis als speziellen Fall in sich, sondern auch den Eingangs erwähnten allgemeinern von Euler gefundenen Satz [1]), welcher daraus hervorgeht, wenn man $h = b + c$ setzt.

1) Comment. Acad. Petropol. T. XI. § 45.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1873

Band/Volume: 11_2

Autor(en)/Author(s): Bauer Gustav

Artikel/Article: Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. 97-116