Untersuchungen

über die

Convergenz und Divergenz

der

Fourierschen Darstellungsformeln.

Von

Paul du Bois-Reymond.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Untersuchungen

über die

Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.

Hülfssätze aus dem Infinitärcalcül.

Bezeichnungen und einfache Operationen des Infinitärcalcüls, die im Folgenden zur Anwendung kommen.

I.

Es handelt sich nur um Functionen, die nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Wenn der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für irgend einen numerischen Werth von x (wohin auch ∞ zu rechnen) einen unendlich grossen, oder einen endlichen von Null verschiedenen, oder einen verschwindenden Limes hat, so bezeichnen wir dies mit:

$$\varphi(x) \succ \psi(x) \ , \ \varphi(x) \sim \psi(x) \ , \ \varphi(x) \prec \psi(x) \ .$$

Im Falle $\varphi(x) \gtrless \psi(x)$ sagen wir, wenn beide Functionen unendlich werden: das Unendlich von $\varphi(x)$ ist grösser resp. kleiner als das von $\psi(x)$, und wenn sie verschwinden, sagen wir das Gleiche von der Null dieser Functionen.

Relationen wie $\varphi(x) \overset{>}{\underset{<}{\sim}} \psi(x)$ heissen infinitäre Gleich- oder Ungleichheiten. Falls zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einen endlichen gleichen Limes haben, soll dies kurz durch:

$$\varphi(x) \overset{=}{\infty} \psi(x)$$

bezeichnet werden.

II.

Man kann jede infinitäre Gleich- oder Ungleichheit mit einer beliebigen Function an beiden Seiten multipliciren, auf beliebige Potenzen erheben oder logarithmiren.

Man kann in der infinitären Gleich- oder Ungleichheit

$$\lambda(x)\,\varphi_1(x) + \mu(x) \overset{>}{\underset{<}{\sim}} \psi(x)$$

die linke Seite ersetzen durch $\varphi_1(x)$, wenn $\mu(x) < \varphi_1(x)$, $\lambda(x) \sim 1$ ist.

Man kann die infinitären Gleich- oder Ungleichheiten differenziren und integriren mit folgenden Ausnahmen: Wenn in $\varphi(x) \underset{\sim}{>} \psi(x)$ die linke Seite einen endlichen Limes hat, ist die Relation im Allgemeinen nicht differenzirbar, und die Ungleichheit $\varphi(x) > \psi(x)$ ist dann nicht integrirbar, wenn $\int \varphi(x)\,dx$ einen endlichen Limes hat, weil sich alsdann daraus $\int \varphi(x)dx \sim \int \psi(x)dx$ ergiebt. [1])

In Bezug auf das Unendlich der Functionen, wenn ihr Argument unendlich wird, hebe ich noch den Begriff der Infinitärtypen hervor. So nenne ich eine Function t, welche die Gleichheit $t f'(x) \sim f(x)$ erfüllt. Zum Typus wird man die einfachste, dieser Gleichheit genügende Function wählen.

Ueber Grenzwerthe von Ausdrücken der Form $\dfrac{f(\alpha + \varphi(x))}{f(\alpha)}$

III.

Zu Grunde lege ich den Satz: Es sei $\lambda(\alpha) > 1$ für $\alpha = 0$ und ebenso $u \underset{\sim}{<} 1$, so hat man:

---

1) Siehe: Borch. Journ. Bd. 74, pag. 297 und Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII, pag. 373 Anm.

$$\frac{\lambda\left(\alpha + \frac{\alpha u}{\lambda(\alpha)}\right)}{\lambda(\alpha)} \underset{\infty}{=} 1.$$ [2])

Hieraus wollen wir einige Schlüsse ziehen.

IV.

Es sei $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, oder wie durch Differentiation folgt $\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, $\mu(\alpha) > 1$, so hat man:

$$\frac{\psi'\left(\alpha + \frac{u}{\psi'(\alpha)}\right)}{\psi'(\alpha)} \underset{\infty}{=} 1$$

Denn setzt man in vorstehendem Ausdruck $\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ statt $\psi'(\alpha)$, so findet man:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \frac{\alpha u}{\mu(\alpha)}} \cdot \frac{\mu\left(\alpha + \frac{\alpha u}{\mu(\alpha)}\right)}{\mu(\alpha)}$$

V.

Es sei wieder $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, so ist auch:

$$\frac{\psi''\left(\alpha + \frac{u}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\psi''(\alpha)} \underset{\infty}{=} 1\,.$$

Denn aus $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ folgt auch zweimalige Differentiation: $\psi''(\alpha) = \frac{\mu_1(\alpha)}{\alpha^2}$, $\mu_1(\alpha) > 1$, woraus diese Formel sich ergiebt.

VI.

Endlich unter derselben Voraussetzung $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ sei $1 < \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, so ist auch:

---

2) Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII, pag. 381.

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} \overline{\overline{\infty}}\ 1\,.$$

Beweis: Man hat:

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} = 1 + u\,\frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)\,\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)}\,,\quad o \leqq u_1 \leqq u\,,$$

und es ist zu zeigen, dass

$$1.\ \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} < 1\ ,\quad 2.\ \frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)} \overline{\overline{\infty}}\ 1\,.$$

Um die erste Formel zu beweisen, d. i. um zu beweisen, dass

$$\sigma'(\alpha) < \sigma(\alpha)\,\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}\,,$$

führen wir ein $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, wodurch vorstehende Ungleichheit wird (in etwas abgekürzter Schreibweise):

$$\gamma'\psi' + \gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$$

Nun werde ich zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen stets

$$\gamma\psi'' > \gamma'\psi'$$

ist. Aus $\sigma = \gamma\psi' > 1$ folgt:

$$\psi' > \frac{1}{\gamma}$$

oder

$$l\psi' > l\frac{1}{\gamma}.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{\psi''}{\psi'} > \frac{\gamma'}{\gamma}\,,$$

und durch Multiplication mit $\gamma\psi'$ ergiebt sich $\gamma\psi'' > \gamma'\psi'$. Die zu beweisende Ungleichheit $\gamma'\psi' + \gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$ kürzt sich somit zu $\gamma\psi'' < \gamma\psi'\psi''^{\frac{1}{2}}$ d. i. zu

$$\psi''^{\frac{1}{2}} < \psi'$$

ab. Aber wenn man dies schreibt:

$$\frac{\psi''}{\psi'^2} < 1 \quad ,$$

und integrirt, so folgt gerade $\frac{1}{\psi'} < \alpha$ oder

$$\psi' > \frac{1}{\alpha}$$

wie dies in der That aus der Differentiation von $\psi > l\frac{1}{\alpha}$ folgt.

Zweitens war der Limes:

$$\frac{\sigma'\left(\alpha + \frac{u_1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma'(\alpha)} \overline{\overline{\infty}}\ 1 \quad , \quad o \leqq u_1 \leqq u$$

zu beweisen. Dies ist sehr einfach. Aus $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ folgt $\sigma'(\alpha) < \psi''(\alpha)$, und daher findet wegen V die vorstehende Formel a fortiori statt.

Infinitäre Auflösung einiger Gleichungen.

VII.

Es sei δ bestimmt durch die Gleichung

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) \pm \frac{\delta C}{\alpha} = = \pm N ,$$

wo $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$, so findet man:

$$\delta = \frac{uN\alpha}{C} \quad , \quad u\ \overline{\overline{\infty}}\ 1 \ .$$

Für $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ ist

$$\delta = up\alpha \quad , \quad u\ \overline{\overline{\infty}}\ 1 \ ,$$

wo p der Gleichung:

$$\psi_1(o)\, l\frac{1}{1 + p} \pm pC = \pm N \quad , \quad \psi_1(o)\ \overline{\overline{\infty}}\ \frac{\psi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}}$$

genügt.[3])

---

3) Ann. v. Cl. u. N. Bd. VIII, pag. 412.

VIII.

Es sei δ bestimmt durch diese Gleichung:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) \pm \delta\psi'(\alpha)\mathrm{v} = \mathrm{N}\,,$$

wo $\psi(\alpha) > \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$, $\mathrm{v} < 1$ sei, so ist:

$$\delta = \frac{\mathrm{uN}}{\psi'(\alpha)} \quad , \quad \mathrm{u} \underset{\infty}{=} 1\,.$$ [4]

IX.

Es sei endlich δ bestimmt durch:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = \mathrm{N}\,.$$

Man findet für $\psi(\alpha) > \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$:

$$\delta = \mathrm{u}\sqrt{\frac{2\mathrm{N}}{\psi''(\alpha)\frac{1}{2}}} \quad , \quad \mathrm{u} \underset{\infty}{=} 1$$ [5]).

---

4) Ebenda.
5) Ann. v. Cl. u. N. Bd. VIII, pag. 407 sqq.

I. Capitel.

Untersuchung des $\text{Limes}_{h=\infty}\left(J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin h\alpha\right)$

Kurze Uebersicht über den Gang dieser Untersuchung.

Da die Untersuchung des Limes $\left(J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin \text{ha}\right)$ etwas zusammengesetzter Natur ist, so wird es für Leser, die sich nicht darin zu vertiefen beabsichtigen, erwünscht sein, nicht allein über ihre Resultate eine Uebersicht zu erhalten, wie sie die Tabelle des Art. 17 zu gewähren bestimmt ist, sondern auch mit ihrem Gang im Allgemeinen sich bekannt machen zu können. Solchen Lesern aber, welche die Untersuchung jenes Limes genauer studieren wollen, wird eine kurze Zusammenstellung ihrer Hauptstationen eine nicht von der Hand zu weisende Erleichterung bieten.

Um Functionen von übersichtlicheren Schwankungen unter- Art. 1.
suchen zu können, zerlegt man das Integral J zuerst so:

$$J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin \text{ah} = \tfrac{1}{2}J - \tfrac{1}{2}J_2\ , \quad \ldots . \qquad \text{I}$$

$$J_1 = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \sin\eta \quad , \quad J_2 = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \sin\chi$$

wo

$$\eta = \eta(\alpha) = \psi(\alpha) + h\alpha$$
$$\chi = \chi(\alpha) = \psi(\alpha) - h\alpha\ .$$

Dann ergibt sich aber alsbald, dass diese Zerlegung nur dann erlaubt ist, wenn $\psi(\alpha)$ rascher unendlich wird, als der $\log\frac{1}{\alpha}$: es sei denn, dass $\sigma(\alpha)$ um ein Gewisses langsamer unendlich werde als $\frac{1}{\alpha}$, wodurch aber gerade die für die Fourierschen Reihen interessantesten Annahmen ausgeschlossen würden. Somit zerfällt die Untersuchung in zwei Theile: 1. wenn $\psi(\alpha)$ ebenso langsam oder langsamer unendlich wird, wie der $\log\frac{1}{\alpha}$, 2. wenn $\psi(\alpha)$ rascher unendlich wird.

A Der Untersuchung erster Theil: $\psi(\alpha)$ wird nicht rascher unendlich wie der $\log\frac{1}{\alpha}$.

Hier kann man von der Zerlegung I des Integrals J erst Gebrauch machen, nachdem man von J ein Theilintegral mit der Grenze Null abgetrennt und für sich untersucht hat. Der Rest kann dann mit Hülfe der Zerlegung I untersucht werden. Es wird also $J = \int\limits_0^a$ in die Integrale $\int\limits_0^{\alpha'} + \int\limits_{\alpha'}^a$ zerlegt werden, und die Kunst besteht nun darin, α' so sich auszusuchen, dass der Limes des Theilintegrals ohne Mühe sich feststellen lässt. Dies leistet
Art. 2, 3. die Bestimmung $\alpha' h = C$, wo C ungemein gross zu denken ist, dabei aber h so gross angenommen wird, dass α_1 zwischen o
Art. 4. und a fällt. Indessen muss das Integral von o bis α' noch einmal gespalten werden. Auch ist es vortheilhaft, die Untersuchung zunächst unter der einfacheren Annahme durchzuführen, dass $\sigma(\alpha) = 1$ ist, so dass man im Ganzen hat:

$$J = \int\limits_0^a d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{h}} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} + \int\limits_{\frac{\varepsilon}{h}}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin[\psi(\alpha)+\alpha h]}{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin[\psi(\alpha)-\alpha h]}{\alpha}.$$

Wenn ε hinreichend klein ist, ist der Limes des ersten Integrals rechts beliebig nahe der Null, wenn C in $\alpha' h = C$ hinreichend gross, ist der Limes des zweiten Integral nicht ausserhalb des Intervalls $-\frac{\pi}{2} \ldots +\frac{\pi}{2}$ anzutreffen, aber auch kein bestimmter. Der Limes des dritten und vierten Integrals nähert sich der Null. Wenn dann statt $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ wieder eine allge- Art.6,7,8,9
meinere Hypothese eingeführt wird, z. B. gesetzt wird $\sigma(\alpha) =$ Art. 10.
$= \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, so bleibt Null der Limes der drei übrigen Integrale und der des zweiten ist wieder enthalten im Intervall $-\varrho(o)\frac{\pi}{2} \ldots\ldots + \varrho(o)\frac{\pi}{2}$, womit der Fall $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ erledigt ist. Für $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ wird der Limes direct und zwar unter der Annahme $\varphi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ Art. 5.
berechnet. Es ergiebt sich ein etwas anderer Ausdruck für die Grenze des den Limes einschliessenden Integrals.

Der Untersuchung zweiter Theil: $\psi(\alpha)$ wird rascher B
unendlich wie $l\frac{1}{\alpha}$.

Hier darf man also setzen:

$$\int_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha = \frac{1}{2}\int_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha) \sin\eta - \frac{1}{2}\int_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha) \sin\chi, \qquad \text{Art. 12.}$$

wo $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$, $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$. Auch über $\sigma(\alpha)$ verlangt die Untersuchung Annahmen, und zwar, $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$ gesetzt, die Annahme, dass $\gamma(\alpha)$ für $\alpha = o$ verschwindet. Es zeigt sich indessen später, dass diese Annahme in Wahrheit keine Beschränkung enthält. Ausserdem ist auch $\sigma(o) = \infty$ vorausgesetzt, weil sonst lim J nach allgemeinen Sätzen Null ist. Führt man die Grössen η und χ als Veränderliche in die obigen Integrale rechts ein, so ist dabei folgendes zu bemerken. Das zweite Integral nach χ wird:

$$\int\limits_{\chi(o)=\infty}^{\chi(a)} d\chi \cdot \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)-h} \sin\chi ,$$

weil $\chi(\alpha)$ von $\alpha = o$ bis $\alpha = a$ abnimmt. Anders verhält sich $\eta(\alpha)$, das von $\alpha = o$ bis $\alpha = \alpha_1$ (wo α_1 durch $\eta'(\alpha_1) = \psi'(\alpha_1) + h = o$ bestimmt ist) abnimmt und dann wieder bis $\alpha = a$ zunimmt, so dass man das erste Integral als Summe zweier Integrale schreiben muss. Die Untersuchung des Integrals nach χ wird aber ihrerseits dadurch weniger einfach gemacht, dass die Function:

$$\sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)-h}$$

Art. 13. zwischen den Grenzen des Integrals ein Maximum für $\alpha = \alpha^*$ hat. Es wird sonach wieder eine Zerlegung des ursprünglichen Integrals J in vier Theile nöthig und man hat also zu setzen:

$$J = \int\limits_{o}^{a} d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin h\alpha = \tfrac{1}{2}\int\limits_{\eta(o)=\infty}^{\eta(\alpha_1)} d\eta \ldots + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\eta \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}\int\limits_{\chi(o)=\infty}^{\chi(\alpha^*)} d\chi \ldots + \tfrac{1}{2}\int\limits_{\chi(\alpha^*)}^{\chi(a)} d\chi \ldots$$

Irgend eines dieser vier Integrale, z. B. das erste, hat also jetzt die Form:

$$\int d\eta\, f(\eta)\, \sin\eta ,$$

wo $f(\eta)$ zwischen den Grenzen der Integration kein Maximum oder Minimum mehr hat, also dass das Integral in eine Schaar alternirender, ihrem absoluten Werthe nach abnehmender Theile zerfällt, deren Summe eingeschlossen ist zwischen dem grössten dieser Theile, und der Differenz des grössten und zweitgrössten, was erlaubt, den Limes der vier Integrale zu berechnen.

Man findet, dass die beiden Integrale nach χ unter den über $\sigma(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ gemachten Voraussetzungen, den Limes Null haben. Auch die Integrale nach η haben den Limes Null, wenn noch die fernere Hypothese hinzutritt, dass die Grösse

$$\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$ Art. 14.

mit α verschwindet. Wenn jedoch diese Grösse unendlich wird, so lässt sich zeigen, dass die nach η genommenen Integrale für $h = \infty$ zwischen unendlichen Grenzen hin und her schwanken, womit die Untersuchung ihren Abschluss findet. Art. 15.

I. Durch die Zerlegung des Integral J, zu der die Untersuchung naturgemäss zuerst ihre Zuflucht nimmt, ergiebt sich auch sogleich ihre natürliche Eintheilung.

Am nächsten liegt es, die Untersuchung des Limes $h = \infty$ von

$$J = \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin h\alpha$$

an die Umformung zu knüpfen:

$$J = \tfrac{1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2 = \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\eta - \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi\,,$$

wo, wie ich gleich bemerken will, die Functionen

$$\eta = \eta(\alpha) = \psi(\alpha) + h\alpha$$
$$\chi = \chi(\alpha) = \psi(\alpha) - h\alpha$$

im Grossen und Ganzen folgenden Verlauf haben:

Die Function $\eta(\alpha)$ wird unendlich für $\alpha = 0$. Sie hat ein Minimum für einen durch

$$\psi'(\alpha_1) + h = 0$$

bestimmte positiven Werth $\alpha = \alpha_1$, der Null wird für $h = \infty$, da $\psi'(\alpha)$ negativ ist und mit $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ unendlich werden muss. So gross wollen wir aber h von vorneherein annehmen, dass $0 < \alpha_1 < a$. Von $\alpha = \alpha_1$ an wächst $\eta(\alpha)$ bis zum Werth $\psi(a) + ah$, den wir uns mit h zugleich sehr gross vorstellen wollen. Die Function $\chi(\alpha)$ nimmt von $\chi(0) = \infty$ bis $\chi(a) = \psi(a) - ha$ fortgesetzt ab.

Aus der Zerlegung

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\eta - \tfrac{1}{2}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi = \tfrac{1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2$$

ergiebt sich zunächst eine Eintheilung unserer Untersuchung nach dem Unendlich von $\psi(\alpha)$ bei verschwindendem α. Führen wir in J_2 statt α die Veränderliche χ ein, so folgt:

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi = \int_{\chi(o)}^{\chi(a)} d\chi\frac{d\alpha}{d\chi}\sigma(\alpha)\sin\chi = -\int_{\chi(a)}^{\infty} d\chi\frac{\sigma(\alpha)\sin\chi}{\psi'(\alpha)-h}\,.$$

Nun folgt aber aus:

$$\psi(\alpha) \lesseqgtr l\frac{1}{\alpha}$$

durch Differentiation:

$$\psi'(\alpha) \lesseqgtr \frac{1}{\alpha}\,,$$

oder $\psi'(\alpha) = -\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ gesetzt, entsprechen den vorstehenden drei Zeichen die Fälle:

$$\mu(\alpha) \lesseqgtr 1\,.$$

Dadurch wird:

$$J_2 = \int d\chi\frac{\alpha\sigma(\alpha)\sin\chi}{\alpha h + \mu(\alpha)}\,.$$

Unter der Annahme $\mu(\alpha) \underset{<}{\backsim} 1$ ist dies Integral dann ersichtlich unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Unbestimmtheitsgrenzen, falls nicht $\alpha\sigma(\alpha) < \alpha h + \mu(\alpha)$.

D. h. im günstigsten Falle darf $\sigma(\alpha)$ höchstens ein Unendlich haben, das um ein Gewisses kleiner ist als das von $\frac{1}{\alpha}$. Es ist also die Zerlegung $J = \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2$ für $\mu(\alpha) \underset{<}{\backsim} 1$ ohne besondere Voraussetzungen über $\sigma(\alpha)$ nicht statthaft, die jedoch gerade die interessanteren Annahmen über $\sigma(\alpha)$ ausschliessen würden. Denn setzt man, wie es die Untersuchung der Fourierschen Reihen verlangt, $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, so muss, damit das Integral convergire, $\varrho(\alpha)$ jedenfalls $\underset{<}{\backsim} \mu(\alpha)$ sein, und lehrreich sind doch gerade die Fälle, wo $\varrho(\alpha)$ unbeschränkt langsam Null wird.

Falls $\mu(\alpha) > 1$, ist die Zerlegung gestattet, so lange $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ oder $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, wo $\gamma(o) = o$, auf welche Annahme über $\sigma(\alpha)$

wir uns, wie sich zeigen wird, beschränken dürfen, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun.

So zerfällt ganz naturgemäss die Untersuchung des Limes (J) in die Theile

$$\psi(\alpha) \lesssim \mathrm{l}\frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \psi(\alpha) > \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}\,,$$

die eine verschiedene Behandlung erheischen. Wir beginnen mit der Annahme

$$\psi(\alpha) \lesssim \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}\,.$$

A.

Untersuchung des lim J im Falle $\psi(\alpha) \lesssim \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$.

2. Allgemeine Behandlung des Limes J für $\psi(\alpha) \lesssim \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$.

Wir legen zuerst die Annahme $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ zu Grunde, denn es zeigt sich, dass die übrigen erledigt werden können, wenn diese es ist. Es ist also zu untersuchen der Limes des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \;\cos\psi(\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\,,$$

wozu im Wesentlichen eine Theilung des Integrals in vier Theile erforderlich ist, nämlich erstens die Spaltung:

$$J = J' + J'' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} + \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}\,,$$

zweitens die Spaltung des Integrals $J' = \int_0^{\alpha'}$ in zwei Theile $\int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} + \int_{\frac{\varepsilon}{h}}^{\alpha'}$, und die Zerlegung des Integrals $\int\limits_{\alpha'}^{a}$ in die Theile $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha'}^{a} d\alpha \sin\eta - \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$.

3. Nähere Angabe der ersten Zerlegung von J in $J' + J''$.

Was die erste Spaltung des Integrals J in die Theile

$$\int\limits_{0}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} + \int\limits_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha} = J' + J''$$

betrifft, so setzen wir:

$$J' = \int\limits_{0}^{\alpha' h} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

und verstehen unter α' eine Grösse, die für $h = \infty$ Null wird, jedoch so, dass $\alpha' > \alpha_1$ bleibt, unter α_1 wie im Art. 1 die Wurzel von $\psi'(\alpha_1) + h = o$ verstanden. Setzen wir $\psi'(\alpha_1) = -\frac{\mu(\alpha_1)}{\alpha_1}$, ferner $\alpha' h = C$, so folgt aus der Vergleichung von

$$\alpha' h = C$$
$$\alpha_1 h = \mu(\alpha_1)\ ,$$

dass, um beim Wachsthum von h die Relation $\alpha' > \alpha_1$ bestehen zu lassen, während α' verschwindet, C nur grösser zu sein braucht als der grösste Werth von $\mu(\alpha)$ im Intervall $o \leqq \alpha \leqq a$, so dass namentlich C unabhängig von h angenommen werden darf.

4. Der Limes des Integrals $J' = \int\limits_{0}^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$ unter der Annahme

$$\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}\ .$$

Wir setzen also $C = \alpha' h$ und:

$$J' = \int\limits_{0}^{C} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \int\limits_{0}^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{C}\ .$$

Zunächst leuchtet ein, dass das erste Integral rechts durch Verkleinerung von ε kleiner als eine beliebig kleine gegebene Grösse gemacht werden kann.

Das zweite Integral:

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

anlangend, so sei zunächst:

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) = u \quad , \quad \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) = u - v$$

wo $\varepsilon \leqq \alpha \leqq C$. Es lässt sich, falls $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ oder in $\psi'(\alpha) = -\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ $\mu(\alpha) < 1$ angenommen wird, leicht zeigen, dass v mit $\frac{1}{h}$ verschwindet. Denn man hat:

$$\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) - \psi\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) = - v$$

oder

$$(\alpha - \varepsilon)\,\frac{\mu\left(\frac{\bar{\alpha}}{h}\right)}{\bar{\alpha}} = v\ .$$

Da nun $\mu(\alpha)$ mit α verschwindet, $\bar{\alpha}$ aber zwischen den festen von h unabhängigen Grössen ε und C liegt, so verschwindet in der That v mit h. Ausserdem wird v wachsen, während α von ε bis C zunimmt, weil $\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ dabei wächst.

Setzen wir jetzt:

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos(u - v)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$= \cos u \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos v\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \sin u \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \sin v\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

und nehmen h so gross an, dass cos v und sin v zwischen den Grenzen ε und C nun wachsen oder nun abnehmen, so folgt mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes, dass die Integrale

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos v \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad , \quad \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \sin v \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

sich, während h unendlich wird, den Grenzen

$$\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad , \quad 0$$

nähern. Da nun u mit h unendlich wird, cos u also zwischen den Grenzen ± 1 unbestimmt wird, so nähert sich $\int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ mit unbegrenzt wachsendem h einer Grenze, die mit

$$j \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

bezeichnet werden kann, wo j zwischen den Grenzen $+1$ und -1 völlig unbestimmt ist.

Was hiernach das Integral

$$J' = \int_{0}^{\varepsilon} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \int_{\varepsilon}^{C} d\alpha \cos \psi \left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

betrifft, dessen erster Theil rechts durch Verkleinerung von ε unter jede Grenze sinkt, so muss es sich, da es ε gar nicht enthält, mit ins Unendliche wachsendem h der Grenze

$$j \int_{0}^{C} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

nähern, also wenn man sich, wie in unserm Belieben steht, C von vorneherein äusserst gross denkt, folgt:

$$\lim_{h=\infty} J' = j\frac{\pi}{2},$$

mit einem Fehler, den wir nach Belieben klein annehmen können.

5. Der Limes des Integrals J' im Falle $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$.

Den Fall $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ betrachten wir besonders und beschränken uns auf die Annahme $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$.

Alsdann ist:

$$\int_0^C d\alpha \cos l\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos lh \int_0^C d\alpha \cos l\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \sin lh \int_0^C d\alpha \sin l\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Die Integrale rechts sind für $C = \infty$ convergent; und geben wir ihnen resp. die Formeln $R\cos\gamma$, $R\sin\gamma$, wo

$$R = \operatorname{mod}\int_0^\infty d\alpha(\cos l\alpha + i\sin l\alpha)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \operatorname{mod}\int_0^\infty d\alpha\, \alpha^i \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

so ist

$$\int_0^C d\alpha \cos l\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha} = R\cos(lh - \gamma)$$

und schwankt für $h = \infty$ zwischen den Grenzen $\pm R$.

6. Der Limes des Integrals $J'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$ für $\psi(\alpha) \gtrless l\frac{1}{\alpha}$.

Wir haben jetzt noch den zweiten Theil von J:

$$J'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

im Fall $\psi(\alpha) \underset{<}{\backsim} 1\frac{1}{\alpha}$ zu untersuchen. Hier dürfen wir unbedenklich die Zerlegung:

$$J'' = \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha} \quad , \quad \begin{pmatrix} \eta = \psi(\alpha) + \alpha h \\ \chi = \psi(\alpha) + \alpha h \end{pmatrix}$$

anwenden, da die Integrale die untere Grenze Null nicht mehr haben, also jedenfalls convergent sind (Art. 1).

Führt man in den vorstehenden Integralen statt des veränderlichen α die Variabeln η und χ ein, so nehmen die Grössen:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha\eta} = \frac{1}{\alpha h - \mu(\alpha)} \quad , \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{1}{\alpha h + \mu(\alpha)}$$

beide von α_1 (der Wurzel von $\psi'(\alpha_1) + h = o$) an ab, also gewiss von $\alpha' > \alpha_1$ an. Nur im Falle $\psi(\alpha) \backsim 1\frac{1}{\alpha}$, d. i. $\mu(\alpha) \backsim 1$, könnte hier in Bezug auf $\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\chi}$ ein Zweifel entstehen, wenn nämlich $\mu(\alpha)$ selbst bei wachsendem α abnähme. Dann würde aber $\frac{1}{\alpha h + \mu(\alpha)}$ doch wieder abnehmen, sobald man $h > \mu(\alpha')$ voraussetzte.

Wir wollen nun nacheinander den Limes der Integrale:

$$J_1'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha} \quad , \quad J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$$

untersuchen.

7. Der Limes des Integrals $J_1'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha}$ für $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$ und $\psi(\alpha) \underset{<}{\backsim} 1\frac{1}{\alpha}$.

Wir setzen:

$$J_1'' = \int_{\eta(\alpha')}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta}\frac{\sin\eta}{\alpha} .$$

Es sei $\eta(\alpha')$, das mit der Null sich näherndem α' unendlich wird, einen Augenblick ein Vielfaches von π. Alsdann zerfällt das Integral J_1'' in eine Schaar abnehmender alternirender Theile, und es wird erwiesen sein, dass das ganze Integral J_1'' mit $\frac{1}{h}$ verschwindet, wenn sich Gleiches von dem Bestandtheil:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha')+\pi} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

zeigen lässt, oder a fortiori, wenn das Integral:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha')+\omega} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin \eta}{\alpha}$$

verschwindet, unter ω irgend eine endliche Grösse verstanden, wobei $\eta(\alpha')$ nicht mehr ein Vielfaches von π zu sein braucht.

Wir setzen also:

$$\psi(\alpha') + h\alpha' = \eta(\alpha')$$
$$\psi(\alpha'') + h\alpha'' = \eta(\alpha'') = \eta(\alpha') + \omega .$$

Statt α'' geschrieben $\alpha' + \delta$ folgt auch Subtraction:

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') + h\delta = \omega ,$$

oder wegen $\alpha' h = C$:

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') + \frac{\delta C}{\alpha'} = \omega .$$

Aus dieser Gleichung folgt für $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ die für $\alpha' < 1$ infinitäre Lösung (s. Hülfs. VII):

$$\delta = \frac{u\omega\alpha'}{C} , \quad u \,\overline{\overline{\infty}}\, 1 ,$$

und für $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ eine Lösung derselben Form, in der nur statt $\frac{\omega}{C}$ eine andere endliche Grösse steht.

Somit ist im Falle $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$:

$$\int_{\eta(\alpha')}^{\eta(\alpha'')} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \frac{\sin\eta}{\alpha} = \int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha} = \sin\bar{\eta} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{d\alpha}{\alpha} = \sin\bar{\eta}\ \log\frac{\alpha''}{\alpha'} = \sin\bar{\eta}\log\left(1+\frac{u\omega}{C}\right)$$

wo $\sin\bar{\eta}$ einen mittleren Werth vorstellt.

Man sieht also, dass vorstehendes Integral mit ins Unbegrenzte wachsendem C unter jede Grenze sinkt, wohin ihm der ganze Theil

$$\int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\eta}{\alpha}$$

von J_1'' nachfolgt. Dabei muss h immer gerade so gross gedacht werden, dass in $\alpha' h = C$ die Grösse α' der Bedingung $\alpha_1 \leqq \alpha' \leqq a$ genügt. Gleiches gilt für den Fall $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$.

8. Der Limes des Integrals $J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$, $\chi(\alpha) = \psi(\alpha) - \epsilon h$.

Ganz ähnlich ist das Integral:

$$J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha}$$

zu behandeln. Wir trennen von J_2'' wieder den Theil:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \frac{\sin\chi}{\alpha} = \int_{\chi(\alpha')}^{\chi(\alpha')-\omega} d\chi \frac{d\alpha}{d\chi} \frac{\sin\chi}{\alpha} \quad ,$$

und erhalten aus

$$\psi(\alpha') - h\alpha' = \chi(\alpha')$$
$$\psi(\alpha'') - h\alpha'' = \chi(\alpha'') = \chi(\alpha') - \omega \ ,$$

$\alpha'' = \alpha' + \delta$ gesetzt, diese Gleichung

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') - \delta h = -\omega$$

oder

$$\psi(\alpha' + \delta) - \psi(\alpha') - \frac{\delta C}{\alpha'} = -\omega$$

aus der wieder

$$\delta = \frac{\alpha' u \omega}{C} \quad , \quad u \mathrel{\overline{\overline{<}}} 1 \ ,$$

(s. Hülfs. VII) folgt.

9. Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

Damit ist dann im Ganzen nachgewiesen, dass das Integral

$$J'' = \tfrac{1}{2}J_1'' - \tfrac{1}{2}J_2'' = \int_{\alpha'}^{a} d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

mit wachsendem C unter jede Grenze sinkt, wenn $\alpha' = \frac{C}{h}$ gesetzt wird, und, während C über alle Grenzen wächst, h stets so angenommen wird, dass $\alpha_1 \leqq \alpha' \leqq a$. Dies zu dem Ergebnisse des Art. 4 gefügt, dass das Integral

$$J' = \int_0^{\alpha'} d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

wenn C äusserst gross ist, bei unbegrenzter Zunahme von h zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ hin und her schwankt, folgt endlich, dass im Falle $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^{a} d\alpha \cos \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} \, ,$$

worin C nicht mehr vorkommt, durch

$$j\frac{\pi}{2}$$

ausgedrückt werden kann, wo j zwischen den Grenzen ± 1 völlig unbestimmt ist.

Im Falle $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ haben die Grenzen, zwischen denen J schwankt, einen etwas anderen Ausdruck (Art. 5).

10. Bestimmung des $\lim \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin \alpha h$ **für den Fall** $\psi(\alpha) \gtrless l\frac{1}{\alpha}$ **wenn die Voraussetzung** $\sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ **fallen gelassen wird, Annahme:** $\alpha\sigma(\alpha) \lesssim 1$.

Nachdem wir den $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \cos\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ gleich $j\frac{\pi}{2}$ gefunden haben, ist es, soweit dies noch Interesse hat, leicht, den Limes des allgemeineren Integrals:

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

angegeben, falls $\sigma(\alpha)$ im Integrationsintervall frei von Maximis oder Minimis ist. Nehmen wir zunächst $\alpha\sigma(\alpha) = \varrho(\alpha) < 1$ an, und setzen das vorstehende Integral gleich:

$$\int_0^C d\alpha\, \varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \int_{\alpha'}^a d\alpha\, \varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

wo also wieder $\alpha' h = C$. Der erste Theil giebt nach dem zweiten Mittelwerthsatz:

$$\varrho\left(\frac{C}{h}\right) \int_{\bar{\alpha}}^C d\alpha \cos\psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad o \leq \bar{\alpha} \leq C$$

und verschwindet, wie gross C auch sein mag, für $h = \infty$. Der zweite

Theil giebt (auch nach dem zweiten Mittelwerthsatz) durch Einführung der Integrationsvariabeln η und χ ganz wie in den Art. 7 und 8 zwei Theile, die nach den dortigen Ausführungen mit wachsendem C unter jede Grenze sinken, so dass man findet:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin\alpha h = o$$

im Falle $\alpha\sigma(\alpha) < 1$.

Ist $\varrho(\alpha) \backsim 1$, so setzen wir $\varrho(\alpha) = \varrho(o) + \Delta\varrho(\alpha)$, wo $\Delta\varrho(\alpha) < 1$ und erhalten:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin\alpha h = j\frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=o} \alpha\sigma(\alpha)$$

wo j zwischen den Grenzen ± 1 unbestimmt ist.

II. Fortsetzung. Annahme $\alpha\sigma(\alpha) > 1$.

Aeusserst mühsam ist der genaue Beweis, des nach dem Allen geradezu selbstverständlichen Schlusses, dass für $\alpha\sigma(\alpha) = \varrho(\alpha) > 1$

$$\lim \int_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin\alpha h$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, wie überhaupt dergleichen Divergenzbeweise am schwersten zu fallen pflegen. Ich verzichte darauf, den Beweis hier folgen zu lassen, der einen im Verhältniss zur Wichtigkeit des zu beweisenden Satzes ungebührlichen Raum einnehmen würde. Der Satz kann übrigens als besonderer Fall eines allgemeineren Theorems über die Unbestimmtheitsgrenzen aufgefasst werden, und soll als solcher gelegentlich doch bewiesen werden. Hier will ich mich begnügen, ihn durch eine unstrenge Betrachtung plausibel zu machen.

Setzen wir $\varrho(\alpha + \varepsilon)$ statt $\varrho(\alpha)$, so wird, da nach dem Obigen $\varrho(\alpha + \varepsilon) \backsim 1$

$$\lim \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha + \varepsilon)\ \cos\psi(\alpha)\ \frac{\sin\, h\alpha}{\alpha} = j\varrho(\varepsilon)\frac{\pi}{2}\,.$$

Die Unbestimmtsgrenzen dieses Ausdrucks, nämlich $\pm\, \varrho(\varepsilon)\pi$ wachsen mit ε über jede Grenze. Doch ist damit allerdings nicht bewiesen, dass sie für $\varepsilon = o$ unendlich sind, weil gezeigt werden müsste, dass man zu diesem Resultat auch kommt, wenn man erst $\varepsilon = o$ und dann $h = \infty$ setzt.

B.

Untersuchung des $\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)\ \cos\,\psi(\alpha)\ \sin\, \alpha h$ falls $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ ist.

12. Voraussetzungen, die der Untersuchung zu Grunde gelegt werden.

Falls $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ dürfen wir also nach Art. 1 getrost setzen:

$$J = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)\ \cos\,\psi(\alpha)\ \sin\, h\alpha = \tfrac{1}{2}\int_{\eta(0)}^{\eta(a)} d\eta\, \frac{d\alpha}{d\eta}\, \sigma(\alpha)\, \sin\eta - \tfrac{1}{2}\int_{\chi(0)}^{\chi(a)} d\chi\, \frac{d\alpha}{d\eta}\, \sigma(\alpha)\sin\chi$$

$$= \tfrac{1}{2}J_1 - \tfrac{1}{2}J_2$$

wo $\eta = \psi(\alpha) + \alpha h$, $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$ und:

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{1}{\psi'(\alpha) + h}\ ,\quad \frac{d\alpha}{d\chi} = \frac{1}{\psi'(\alpha) - h}\ ,$$

und diese Zerlegung ist nach dem cit. Art. immer gestattet, wenn,

$\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)$ gesetzt, $\gamma(\alpha) < 1$ ist.[6]) Dies ist also die eine Voraussetzung. Ausserdem setzen wir noch $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha) > 1$ voraus, da sonst der lim J mit Hülfe des ersten Hauptsatzes sich sofort als Null ergeben würde.

13. Ueber den Limes des Integrals $J_2 = \int\limits_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \sin\chi$, wo $\chi = \psi(\alpha) - h\alpha$.

Beginnen wir mit dem Integral:

$$J_2 = \int\limits_{\chi(o)}^{\chi(a)} d\chi \frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h} \sin\chi\,,$$

in welchem bei von o bis a zunehmendem α die Function $\chi = \psi(\alpha) - \alpha h$ von $\chi(o) = \infty$ bis $\chi(a)$ abnimmt, so hat $\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha) - h}$ unterwegs ein Maximum und zwar für $\alpha = \alpha^*$, wo α^* durch

$$\left\{\gamma'(\alpha^*)\psi'(\alpha^*) + \gamma(\alpha^*)\psi''(\alpha^*)\right\}\left(h - \psi'(\alpha^*)\right) + \gamma(\alpha^*)\,\psi'(\alpha^*)\,\psi''(\alpha^*) = o$$

gegeben ist, woraus man findet:

$$h = \psi'(\alpha^*) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma(\alpha^*)\,\psi''(\alpha^*)}{\gamma'(\alpha^*)\,\psi'(\alpha^*)}}\,.$$

Die Grösse im Nenner hat eine für unsere Untersuchung sehr nützliche infinitäre Eigenschaft.

Wir hatten vorausgesetzt:

$$\sigma = \gamma\psi' > 1$$

oder

$$\psi' > \frac{1}{\gamma}\,,$$

woraus folgt:

$$l\psi' > l\frac{1}{\gamma}$$

6) Die obige Zerlegung von J in ein Integral nach η und eines nach χ ist nicht correct, sondern nur der Kürze halber so geschrieben, da das Integral nach η aus zwei Theilen besteht, s. Art. 14.

und durch Differentiation:

$$\frac{\psi''}{\psi'} > \frac{\gamma'}{\gamma}$$

oder wenn mit $\frac{\gamma}{\gamma'}$ an beiden Seiten multiplicirt wird, so folgt die gemeinte nützliche Eigenschaft:

$$\frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\psi''}{\psi'} > 1 \ ,$$

von der übrigens auch schon (Hülfss. VI) Gebrauch gemacht ist.

Setzt man daher:

$$h = \psi'(\alpha^*) \cdot v \ ,$$

so ist $v < 1$.

Um jetzt das Integral J_2 abschätzen zu können, setzen wir weiter:

$$\chi(\alpha^*) = \psi(\alpha^*) - \alpha^* h = M\pi$$
$$\chi(\alpha^* + \delta) = \psi(\alpha^* + \delta) - (\alpha^* + \delta) h = (M - N)\pi \ ,$$

mithin:

$$\psi(\alpha^* + \delta) - \psi(\alpha^*) - \delta h = - N\pi$$

oder:

$$\psi(\alpha^* + \delta) - \psi(\alpha^*) - \delta\psi'(\alpha^*) \cdot v = - N\pi \ .$$

Die infinitäre Lösung der vorstehenden Gleichung ist (Hülfss. VIII):

$$\delta = - \frac{N\pi u}{\psi'(\alpha^*)} \quad , \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 \ ,$$

in der δ mit N sein Zeichen wechselt.

Jetzt betrachten wir einen α^* einschliessenden Theil von J_2, also:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \gamma(\alpha) \psi'(\alpha) \sin(\psi(\alpha) - h\alpha) \quad , \quad \alpha' < \alpha^* < \alpha'' \ .$$

Die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ genüge der Gleichheit:

$$\alpha'' - \alpha' \sim \frac{1}{\psi'(\alpha^*)} \ ,$$

wozu es ausreicht, wenn α' und α'' die Form $\alpha^* \pm \delta$ gegeben wird, die Grösse N in obigen Gleichungen endlich anzunehmen. Mit Hülfe des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes kann vorstehender Integralausschnitt in die Form:

$$\left(\alpha'' - \alpha'\right) \gamma(\bar{\alpha}) \psi'(\bar{\alpha}) \sin\left(\psi(\bar{\alpha}) - h\alpha\right) \quad , \quad \alpha' \leqq \bar{\alpha} \leqq \alpha'',$$

gebracht werden. Wegen $\bar{\alpha} = \alpha^* + \frac{r}{\psi'(\alpha^*)}$, wo $r \underset{<}{\overset{\infty}{}} 1$, ist dieser Ausdruck:

$$\sim \gamma(\bar{\alpha}) \left\{ \frac{\psi'\left(\alpha^* + \frac{r}{\psi'(\alpha^*)}\right)}{\psi'(\alpha^*)} \cdot \sin\left(\psi(\bar{\alpha}) - h\bar{\alpha}\right) \right\}$$

Nach Hülfss. IV bleibt die Klammer bei Abnahme von α^* endlich, und da $\gamma(\bar{\alpha}) < 1$, α' und α'' und folglich $\bar{\alpha}$ aber mit α^* Nullwerdend gedacht sind, [7]) so verschwindet die ganze Grösse.

Das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin \chi = \int_0^{\alpha^*} + \int_{\alpha^*}^a$$

zerfällt in zwei Theile, die aus abnehmenden alternirenden Einzelintegralen bestehen. Weil aber, wie eben gezeigt, das Integral $\int_{\alpha'}^{\alpha''}$ und somit auch jedes der Integrale

$$\int_{\alpha'}^{\alpha^*} , \int_{\alpha^*}^{\alpha''}$$

verschwindet, so verschwinden auch die Integrale

$$\int_0^{\alpha^*} , \int_{\alpha^*}^a .$$

14. Ueber den Limes des Integrals $J_1 = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin \eta$, wo $\eta = \psi(\alpha) + h\alpha$.

Was endlich das Integral anlangt:

$$J_1 = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \sin \eta = \int_{\eta(0)}^{\eta(\alpha_1)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta + \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(a)} d\eta \frac{d\alpha}{d\eta} \sigma(\alpha) \sin \eta ,$$

7) Wegen der Endlichkeit von N und der infinitären Lösung $\delta = -\frac{N\pi u}{\psi'(\alpha^*)}$.

wo
$$\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)+\mathrm{h}} \quad , \quad \eta(\mathrm{o}) = \infty$$

ist, so wird die Function $\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha)$ unendlich für $\alpha = \alpha_1$, weil $\psi'(\alpha_1) + \mathrm{h} = \mathrm{o}$, und nimmt von $\alpha = \alpha_1$ an sowohl in der Richtung nach $\alpha = \mathrm{o}$ als nach $\alpha = \mathrm{a}$ hin ab. Im Intervall $\mathrm{o} \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ ist dies wegen $\gamma(\alpha) < 1$ beim Anblick von
$$\gamma(\alpha) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{h}}{\psi'(\alpha)}}$$
einleuchtend, weil $\frac{\mathrm{h}}{\psi'(\alpha)}$ von o bis -1 abnimmt, während α von o bis α_1 geht. Im Intervall $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \mathrm{a}$ setzt man
$$\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{\psi'(\alpha) + \mathrm{h}} \; .$$

Es ist $\sigma(\alpha) > 1$, und $\psi'(\alpha) + \mathrm{h}$ wächst von Null bis $\psi'(\mathrm{a}) + \mathrm{h}$ während α von α_1 bis a geht.

In beiden Integralen:
$$\int_{\infty}^{\eta(\alpha_1)} d\alpha \frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) \sin\eta \quad , \quad \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(\mathrm{a})} d\alpha \frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha) \sin\eta$$
folgen sich von $\eta(\alpha_1)$ nach $\eta(\mathrm{o}) = \infty$ resp. $\eta(\mathrm{a})$ hin die Maxima und Minima der darunterstehenden Function in gleicher Reihenfolge und mit derselben Phase beginnend. Wegen der Abnahme von $\frac{d\alpha}{d\eta}\sigma(\alpha)$ nach $\alpha = \mathrm{o}$ und $\alpha = \mathrm{a}$ hin (oder nach $\eta = \infty$ und $\eta = \eta(\alpha)$ hin) zerfallen die vorstehenden Integrale jedes in eine Schaar abnehmender alternirender Theilintegrale.

Dieses vorausgeschickt, verfahren wir ähnlich wie in früheren Fällen. Um ein Stück:
$$\int_{\eta(\alpha_1 - \delta)}^{\eta(\alpha_1)} = \int_{\alpha_1 - \delta}^{\alpha_1} \quad \text{oder} \quad \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(\alpha_1 + \delta)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \delta}$$

abschätzen zu können, setzen wir wieder

$$\eta(\alpha_1) = \psi(\alpha_1) + h\alpha_1 = M\pi \ ,$$
$$\eta(\alpha_1 + \delta) = \psi(\alpha_1 + \delta) + h(\alpha_1 + \delta) = (M + N)\pi \ ,$$
$$h = -\psi'(\alpha_1) \ .$$

Mithin:

$$\psi(\alpha_1 + \delta) - \psi(\alpha_1) - \delta\psi'(\alpha_1) = N\pi \ .$$

Für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ folgt hieraus (Hülfss. IX)

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \cdot u \quad , \quad u \overline{\overline{\infty}} 1$$

wo das u ein anderes je nach dem Vorzeichen der Wurzel ist, was wir durch die Lösungsformen:

$$-\delta' = -u_1\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \quad , \quad +\delta'' = +u_2\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}$$

andeuten wollen, indem wir δ' und δ'' als positive Grössen einführen.

Setzt man in der von α_1 bis $\alpha_1 + \delta$ genommenen Portion von J_1, der man diese Form geben kann:

$$\delta\gamma(\bar{\alpha})\psi'(\bar{\alpha}) \sin\left(\psi(\bar{\alpha}) + h\bar{\alpha}\right) \quad , \quad \alpha_1 \leqq \bar{\alpha} \leqq \alpha_1 + \delta \ ,$$

ein: $\delta \backsim \dfrac{1}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$, so wird sie Null oder kann unbestimmt zwischen endlichen oder kann unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen werden, je nach dem:

$$\frac{\gamma(\bar{\alpha})\psi'(\bar{\alpha})}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}} \begin{matrix} < \\ \backsim \\ > \end{matrix} 1 \ ,$$

wie ich gleich nachweisen werde. Dann setzen wir: $\bar{\alpha} = \alpha_1 + \delta_1$, so ist $\delta_1 = \dfrac{r}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$, $r \begin{matrix}\backsim \\ < \end{matrix} 1$. Der vorstehende Ausdruck kann geschrieben werden:

$$\frac{\gamma(\bar{\alpha})\,\psi'(\bar{\alpha})}{\psi''(\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\psi''(\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}} \ .$$

Da nun $\psi''(\alpha) = \dfrac{\lambda(\alpha)}{\alpha^2}$, $\lambda > 1$ (wie sich durch zweimalige Differentiation von $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ ergiebt), so kann der zweite Factor geschrieben werden:

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}\left(\alpha_1 + \frac{r\alpha_1}{\lambda(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{r\alpha_1}{\lambda^{\frac{1}{2}}(\alpha_1)}}$$

und wird nach dem schon benützten Satz (Hülfss. III) Eins für $\alpha_1 = 0$. Das Integral J_1 wird also jedenfalls Null, wenn:

$$\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} < 1 \text{ oder } \sigma(\alpha) < \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}} .$$

Viel umständlicher ist der Nachweis, dass das Integral

$$J_1 = \int_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha) \sin\eta$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt wird, wenn

$$\frac{\gamma(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} > 1 \text{ oder } \sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wie ich ja schon oben (Art. 11) bemerkt habe, dass dergleichen Divergenzbeweise am meisten Mühe zu machen pflegen. Dieses Mal aber will ich den Beweis, trotz seiner nicht zu vermeidenden Länge, wirklich durchführen. Aus mehreren Gründen. Einmal um doch ein Beispiel eines solchen Beweises gegeben zu haben. Dann aber, von anderen abgesehen, besonders aus dem Grunde, weil das Unendlichwerden des Integrals J_1 auch von Riemann (Ueber die Darstellb. e. F. d. e. trigon. R. Art. 13) behauptet wird, während seine Begründung mehr ein Nachweis der Möglichkeit des Unendlichwerdens sein zu sollen scheint, als ein Nachweis des Unendlichwerdens selbst. Und ein genauer Beweis einer Behauptung, der Riemann einige Seiten gewidmet hat, kann nicht überflüssig erscheinen.

15. Nachweis der Divergenz des $\lim \int\limits_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta\ ,\ \eta = \psi(\alpha) + h\alpha$

im Falle: $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}\ ,\ \sigma(\alpha) > \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Um diesen Beweis wirklich zu erbringen, benutzen wir wieder den Umstand, dass die Integrale

$$\int\limits_0^{\alpha_1} d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta\quad,\quad\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha} d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta\ ,$$

wenn man $\eta(\alpha_1)$ als ganzes Vielfache von π sich denkt, jedes in eine Schaar abnehmender alternirender Theilintegrale zerfallen, und dass beide Schaaren gleichzeitig mit einem positiven oder mit einem negativen grössten Theilintegral beginnen. Es sei also

$$\eta(\alpha_1) = m\pi\ ,\ \eta(\alpha_1 - \delta') = (m+1)\pi\ ,\ \eta(\alpha_1 - \delta' - \delta_1') = (m+2)\pi$$
$$\eta(\alpha_1 + \delta) = (m+1)\pi\ ,\ \eta(\alpha_1 + \delta + \delta_1) = (m+2)\pi$$

so wird der Werth des Integrals:

$$J_1 = \int\limits_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta$$

enthalten sein zwischen den Integralen:

$$\int\limits_{\alpha_1-\delta'}^{\alpha_1+\delta} d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta\quad,\quad\int\limits_{\alpha_1-\delta'-\delta_1'}^{\alpha_1+\delta+\delta_1} d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta$$

und wird einen unendlichen Limes haben, wenn Gleiches von einem der Integrale:

$$\int\limits_{\alpha_1-\delta'-\delta_1'}^{\alpha_1} d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta\quad,\quad\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_1+\delta+\delta_1} d\alpha\,\sigma(\alpha)\ \sin\eta$$

nachgewiesen werden kann. Wir wollen dies vom zweiten Integral nachweisen, welches wir zunächst so zertheilen:

$$II = \int\limits_0^{\delta} d\varepsilon\,\sigma(\alpha_1+\varepsilon)\ \sin\eta(\alpha_1+\varepsilon)\ +\ \int\limits_0^{\delta_1} d\varepsilon_1\,\sigma(\alpha_1+\delta+\varepsilon_1)\ \sin\eta(\alpha_1+\delta+\varepsilon_1),$$

um es sodann wieder in Eines zu vereinigen, welches die Grenzen des ersten hat. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$\begin{aligned}\eta(\alpha_1+\varepsilon) &= (m+\nu)\pi\\ \eta(\alpha_1+\delta) &= (m+1)\pi\\ \eta(\alpha_1+\delta+\varepsilon_1) &= (m+1+\nu)\pi\\ \eta(\alpha_1+\delta+\delta_1) &= (m+2)\pi\,.\end{aligned}$$

Mit Hülfe der Formeln (Hülfss. IX) findet man hieraus:

$$\varepsilon = u_\nu\sqrt{\frac{2\pi\nu}{\psi''(\alpha_1)}}\quad,\quad \delta+\varepsilon_1 = u_{\nu+1}\sqrt{\frac{2\pi(\nu+1)}{\psi''(\alpha_1)}}$$

$$\delta = u_1\sqrt{\frac{2\pi}{\psi''(\alpha_1)}}\quad,\quad \delta+\delta_1 = u_2\sqrt{\frac{4\pi}{\psi''(\alpha_1)}}\;,$$

wenn die infinitäre Lösung von $\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)-\delta\psi'(\alpha)=\varrho\pi$ mit $u_\varrho\sqrt{\frac{2\pi\varrho}{\psi''(\alpha)}}$ bezeichnet wird. Verändert man in diesen Gleichungen ε, ε_1 und ν, lässt aber δ, δ_1, α_1 constant und sieht ν als Function von ε an, so findet man:

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} + d\varepsilon\frac{d\nu}{d\varepsilon}\sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}}\left\{\nu u_{\nu+1}\frac{du_\nu}{d\nu}-(\nu+1)u_\nu\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}\right\}.$$

Dieser Werth von $d\varepsilon_1$ ist in das zweite Integral II einzuführen, worauf es die Grenzen o, δ erhält, und sich mit dem ersten vereinigt. Alsdann zerlegen wir II von Neuem und zwar in folgende drei Theile:

$\mathrm{II} = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 + \mathrm{II}_3$ wo:

$$\mathrm{II}_1 = \int_0^\delta d\varepsilon\left\{\sigma(\alpha_1+\varepsilon)-\sigma(\alpha_1+\delta+\varepsilon_1)\right\}\sin\eta(\alpha_1+\varepsilon)$$

$$\mathrm{II}_2 = \int_0^\delta d\varepsilon\left\{1-\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}}\right\}\sigma(\alpha_1+\delta+\varepsilon_1)\,\sin\eta(\alpha_1+\varepsilon)$$

$$\mathrm{II}_3 = -\int_0^\delta d\varepsilon\frac{d\nu}{d\varepsilon}\sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}}\left\{\nu u_{\nu+1}\frac{du_\nu}{d\nu}-(\nu+1)u_\nu\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}\right\}\sigma(\alpha_1+\delta+\varepsilon_1).$$
$$\sin\,\eta(\alpha_1+\varepsilon)\,.$$

Diese drei Integrale sind auf ihre relativen Grenzwerthe für $\alpha_1 = o$ zu untersuchen. Für diese Untersuchung brauchen wir den Satz, dass:

$$\frac{\sigma(\alpha_1 + \varDelta)}{\sigma(\alpha_1)}$$

für $\alpha_1 = o$ stets den Limes 1 hat, falls:

$$\eta(\alpha_1 + \varDelta) = \eta(\alpha_1) + N\pi$$

ist, wo N eine endliche Zahl vorstellt. Da nämlich alsdann

$$\varDelta = u_N \sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}}$$

ist, so läuft der Satz darauf hinaus, dass im Falle $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$, $r \sim 1$:

$$\frac{\sigma\left(\alpha + \frac{r}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\sigma(\alpha)} \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1$$

ist. Dies haben wir aber (Hülfss. VI) schon gezeigt.

Sonach können wir zunächst setzen:

$$II_1 = \delta\sigma(\alpha_1)\left\{\frac{\sigma(\alpha_1 + \bar{\varepsilon})}{\sigma(\alpha_1)} - \frac{\sigma(\alpha_1 + \delta + \bar{\varepsilon}_1)}{\sigma(\alpha_1)}\right\} \sin\eta(\alpha_1 + \bar{\varepsilon}) \;,\; o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \delta \;.$$

Der Factor $\{\ \}$ hat den Limes Null.

Untersuchen wir zweitens:

$$II_3 = -\int_0^\delta d\varepsilon \frac{d\nu}{d\varepsilon}\sqrt{\frac{2\pi}{(\nu+1)\psi''(\alpha_1)}}\left\{\nu u_{\nu+1}\frac{du_\nu}{d\nu} - (\nu+1)u_\nu\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}\right\}\sigma(\alpha_1 + \delta + \varepsilon_1)$$
$$\sin\eta(\alpha_1 + \varepsilon) \;.$$

Erstens der Factor $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$. Aus der Differentiation von $\psi(\alpha+\varepsilon) - \psi(\alpha) - \varepsilon\psi'(\alpha) = \nu\pi$ folgt:

$$\psi'(\alpha + \varepsilon) - \psi'(\alpha) = \pi\frac{d\nu}{d\varepsilon}$$

und
$$\pi\frac{d\nu}{d\varepsilon} = \varepsilon\psi''(\alpha) \cdot \frac{\psi''(\alpha + \bar{\varepsilon})}{\psi''(\alpha)} \;,\; o \leqq \bar{\varepsilon} \leqq \varepsilon \;.$$

Wegen $\varepsilon = u_\nu\sqrt{\frac{2\pi\nu}{\psi''(\alpha)}}$ ist (nach Hülfss. V) $\frac{\psi''(\alpha + \bar{\varepsilon})}{\psi''(\alpha)} \mathrel{\overline{\overline{\infty}}} 1$, und

somit
$$\frac{d\nu}{d\varepsilon} \sim \psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Ferner die Differentialquotienten $\frac{du_\nu}{d\nu}$, $\frac{du_{\nu+1}}{d\nu}$. Aus $\psi(\alpha+\varrho)-\psi(\alpha)-\varrho\psi'(\alpha)=N\pi$ ziehen wir wieder:

$$\varrho^2\psi''(\alpha)=2\pi N u_N^2\ ,\quad \frac{d\varrho}{dN}=\frac{\pi}{\varrho\psi''(\alpha+\varrho_1)}\ ,\quad o\leqq\varrho_1\leqq\varrho\ .$$

Differenziren wir die erste Relation, indem wir α constant lassen, so folgt wegen der zweiten:

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi''(\alpha+\varrho_1)}=N\frac{du^2}{dN}+u^2$$

woraus $\frac{du}{dN}\overline{\overline{\infty}}\ o$ folgt. Somit kann man im Ganzen II_3 auf die Form bringen:

$$II_3=\delta\sigma(\alpha_1)\cdot w\cdot\frac{\sigma(\alpha_1+\delta+\bar{\varepsilon})}{\sigma(\alpha_1)}\sin\eta(\alpha_1+\bar{\varepsilon})\ ,\quad o\leqq\bar{\varepsilon}\leqq\delta\ ,$$

wo w für $\alpha_1=o$ verschwindet.

Bleibt noch II_2 zu untersuchen. Wir schreiben:

$$II_2=\delta\sigma(\alpha_1)\left\{1-\frac{u_{\nu_1+1}}{u_{\nu_1}}\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1+1}}\right\}\frac{\sigma(\alpha_1+\delta+\bar{\varepsilon}_1)}{\sigma(\alpha_1)}\sin\eta(\alpha_1+\bar{\varepsilon})\ ,$$

wo $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}_1$, ν_1 mittlere Werthe vorstellen. Hier verschwindet der Factor von $\delta\sigma(\alpha_1)$ nicht. Denn man hat $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\overline{\overline{\infty}}\ 1$ und $\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1+1}}$ ist enthalten zwischen Null und $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Man könnte noch einwenden, dass $\bar{\varepsilon}$, welches der Bedingung $o\leqq\bar{\varepsilon}\leqq\delta$ genügt, im äussersten Falle Null oder gleich δ sein könnte. Allein da der Sinus zwischen den Grenzen der Integration sein Zeichen nicht wechselt, so würde es dann ja schon ausreichen, von dem Integral:

$$\int\limits_{\frac{1}{4}\delta}^{\frac{3}{4}\delta}$$

zu zeigen, dass es die Form $\delta\cdot\sigma(\alpha)\cdot v_2$ annimmt, wo $v_2\backsim 1$, und der übrig bleibende Theil

$$\int_0^{\frac{1}{4}\delta} + \int_{\frac{3}{4}\delta}^{\delta}$$

hätte dasselbe Zeichen.

Es lassen sich also die drei Integrale II_1, II_2, II_3 resp. auf die Formen $\delta\sigma(\alpha_1)\cdot v_1$, $\delta\sigma(\alpha_1)\cdot v_2$, $\delta\sigma(\alpha_1) v_3$ bringen, wo v_1 und v_3 für $\alpha = o$ verschwinden, v_2 aber nicht. Da aber $\delta\sigma(\alpha_1) \backsim \frac{\sigma(\alpha_1)}{\psi''(\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}$ nach der Voraussetzung > 1 ist, so ist auch $II_1 + II_2 + II_3 > 1$. Q. E. D.

16. Schlussbemerkung über den Limes von $J = \int_o^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha$ falls $\sigma(\alpha) = \gamma(\alpha)\psi'(\alpha)$, $\gamma(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ ist.

Unsere unter B gewonnenen Ergebnisse sind kurzgefasst diese.

Nimmt man in

$$J = \int_o^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin h\alpha$$

an $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, so ist der lim J Null für

$$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$$

und zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt für

$$\sigma(\alpha) > \sqrt{\psi''(\alpha)}\,.$$

Es frägt sich, ob die allgemeine Bedingung $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, unter welcher unsere Untersuchung angestellt wurde, alle Fälle $\sigma(\alpha)$ und $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ umfasst, in denen der lim J convergent ist. Gewiss. Denn man hat $\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, $\mu(\alpha) > 1$ und die Bedingung der Convergenz $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ wird:

$$\sigma(\alpha) < \frac{\sqrt{\alpha\mu'(\alpha) - \mu(\alpha)}}{\alpha}$$

während die allgemeine Bedingung

$$\sigma(\alpha) < \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$$

lautet. Es ist also nur zu zeigen, dass

$$\frac{\sqrt{\alpha\mu'(\alpha) - \mu(\alpha)}}{\alpha} < \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} ,$$

wozu es wieder ausreicht, die Ungleichheit

$$\alpha\mu'(\alpha) < \mu(\alpha)^2$$

nachzuweisen. Sie giebt integrirt:

$$\frac{1}{\mu(\alpha)} < l\frac{1}{\alpha}$$

oder

$$\mu(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$$

was, da ja $\mu(\alpha) > 1$, a fortiori richtig ist.

Es bliebe noch übrig, die Annahme $\sigma(\alpha) \gtrsim \psi'(\alpha)$ zu untersuchen, die natürlich erst recht auf Divergenz des lim J führt. Ein genauer Beweis lässt sich hier aber ebenso schwer führen wie Art. 11 in dem analogen Fall $\varrho(\alpha) > 1$.

17. Zusammenfassung der Resultate der bisherigen Untersuchung.

Nachdem wir somit den lim J nach allen Richtungen hin sorgfältig untersucht haben, stellen wir die gewonnenen Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Da wir zur Prüfung des ersten Hauptsatzes (s. Art. 19) setzen müssen:

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h \quad , \quad f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) ,$$

zur Prüfung des zweiten Hauptsatzes aber:

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha} , \; f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) , \; \varrho(\alpha) = \alpha\sigma(\alpha) ,$$

so wollen wir behufs rascherer Uebersicht beide Functionen, $\sigma(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$, in unsere Tabelle aufnehmen.

$\psi(\alpha)$	I. Hauptsatz $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$	II. Hauptsatz $\varrho(\alpha) = \alpha\sigma(\alpha)$	$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin h\alpha$ $\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\varrho(\alpha)\cos\psi(\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}$
$\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) < 1$	Null
	$\sigma(\alpha) \backsim \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) \backsim 1$	Unbestimmt zwischen denselben Grenzen wie $\lim_{x=0}\varrho(x)\cos\psi(x)$
	$\sigma(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) > 1$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen wie $\lim_{x=0}\varrho(x)\cos\psi(x)$.
$\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) < 1$	Null
	$\sigma(\alpha) \backsim \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) \backsim 1$	Unbestimmt zwischen Grenzen, die vom mod $\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^i\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ abhängen.
	$\sigma(\alpha) > \frac{1}{\alpha}$	$\varrho(\alpha) > 1$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen.
$\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$	Null.
	$\sigma(\alpha) > \sqrt{\psi''(\alpha)}$	$\varrho(\alpha) > \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$	Unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen.

Ueber die Grenzwerthe ähnlicher Integrale, namentlich des Integrals

$$\int_0^a d\alpha\,\sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)\sin h(\alpha + c)\ .$$

Wir haben den Limes von $\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\sin h\alpha$ unter der Annahme $f(\alpha) = \sigma(\alpha)\cos\psi(\alpha)$ untersucht. Der Leser wird sich leicht davon überzeugen, dass die Methoden und die Resultate die nämlichen wären, hätten wir $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ angenommen. Nur dass wir hier und da statt Vielfacher von π ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ hätten einführen müssen.

Etwas anderes wäre es gewesen, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \cos h\alpha$$

vorgelegen hätte. Zwar der zweite Theil der Untersuchung des Limes $J = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$, den wir mit B überschrieben haben und der $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ voraussetzt, ist hier mutatis mutandis vollgültig, und so gelten für das Integral $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos h\alpha$ im Falle $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ die oben für das Integral $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h\alpha$ gefundene Resultate auch. Falls jedoch $\psi(\alpha) \underset{<}{\backsim} l\frac{1}{\alpha}$, sind etwas andere Betrachtungen, wie unter A anzustellen, und werden abweichende Resultate erhalten.

Als Ausgangspunkt dient, dass das Integral $\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos h\alpha$ convergirt, sobald $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ ist (Art. 1). Jedenfalls ist also $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$ zu setzen, wo $\varrho(\alpha) < 1$. Das zu untersuchende Integral

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

theilt man wieder in eines von o bis α' und eines von α' bis a. Von dem Letzteren ist ganz wie unter A zu zeigen, dass es verschwindet. Das erstere anlangend, setzen wir $\alpha' h = C$ und

$$\int_0^{\alpha'} \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h = \int_0^{C} \frac{d\alpha}{\alpha} \varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos \psi\left(\frac{\alpha}{h}\right) \cos \alpha = \int_0^{\varepsilon} + \int_0^{C}$$

Der Theil von o bis ε, vor den man durch den zweiten Mittelwerthsatz den $\cos \alpha$ zu nehmen hat, giebt offenbar einen verschwindenden $\text{Limes}_{h=\infty}$. Der andere Theil ist zu behandeln, wie der analoge unter A, nur dass noch statt $\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ zu schreiben ist $\varrho(\alpha) \cdot \frac{\varrho\left(\frac{\alpha}{h}\right)}{\varrho(\alpha)}$, wovon der zweite Factor vor das Integral zu nehmen ist. Sodann sieht man leicht, dass auch dieser andere Theil für $h = \infty$ verschwindet.

Hier erhält man also das Resultat, dass für $\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$ der Limes von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

immer verschwindet, falls dies Integral convergent ist, womit auch dieser Limes vollständig erledigt ist.

Im Ganzen ergiebt sich also: Der $\text{Limes}_{h=\infty}$ von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \cos \alpha h$$

ist convergent und Null für $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$ falls $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, und für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ falls $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$. Ausserhalb dieser Grenzen divergirt entweder das Integral selbst, oder der Limes.

Betrachten wir endlich den Limes des Integrals:

$$(J) = \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c) \ ,$$

wo c irgend eine Constante, so ist er durch das Vorstehende gleichfalls bestimmt. Denn nehmen wir cos hc und sin hc vor das Integralzeichen, so handelt es sich wesentlich um die Grenzwerthe der Integrale:

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \sin\alpha h\ ,\quad \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\ \cos\alpha h\ .$$

Die Grenzwerthe des zweiten haben wir so eben gefunden, die des ersten divergiren nach Art. 17 erst für grössere Unendlich von $\sigma(\alpha)$, wie die des zweiten. Wir haben also für vorstehendes Integral die Grenzwerthe:

$\psi(\alpha)$	$\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$	lim (J)
$\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) \lesseqgtr \psi'(\alpha)$	o divergent
$\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$	$\sigma(\alpha) \lesseqgtr \sqrt{\psi''(\alpha)}$	o divergent

19. Uebersicht über die Verwendung der obigen Resultate in den beiden folgenden Capiteln.

Der erste Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale, wie ich ihn Borch. Journ. Bd. 79, pag. 41 bewiesen habe, lautet: Wenn für alle durch die Bedingung $A \leq A_1 < B_1 \leq B$ gestatteten Werthe von A_1 und B_1 die Function $\varphi(\alpha, h)$ die Gleichung:

$$\lim \int_{A_1}^{B_1} d\alpha\ \varphi(\alpha, h) = o$$

erfüllt, so ist, unter f(x) eine im Intervall $A \leq x \leq B$ integrirbare Function verstanden, auch

$$\lim \int_A^B d\alpha \; f(\alpha) \; \varphi(\alpha, h) = 0 \, .$$

Wir dürfen also $\varphi(\alpha, h) = \sin \alpha h$ annehmen. Man kann diesen Satz erweitern, indem man untersucht, unter welchen Umständen die Function $f(\alpha)$ die Bedingung der Integrirbarkeit unerfüllt lassen darf, indem sie z. B. in einzelnen Puncten unendlich wird. Es würde sich also fragen: Wenn $f(\alpha)$ für einen zwischen A und B gelegenen Punct C unendlich wird, welche Bedingungen muss $f(\alpha)$ erfüllen, damit dennoch:

$$\lim \int_A^B d\alpha \; f(\alpha) \; \sin \alpha h = 0$$

sei. Wir können bei dieser Untersuchung C = A annehmen, und, der leichteren Vergleichung mit unseren obigen Resultaten wegen, die Aufgabe so stellen:

I. Wenn in

$$\int_0^a d\alpha \; f(\alpha) \; \sin h(\alpha + c)$$

c irgend eine Constante bedeutet, und $f(\alpha)$ für $\alpha = 0$ unendlich wird, so sind die Bedingungen für $f(\alpha)$ anzugeben, unter denen vorstehendes Integral für $h = \infty$ verschwindet.

Es leuchtet ein, dass der besondere Fall $c = 0$ auch einer besonderen Betrachtung bedarf, weil durch das Verschwinden des Sinus für $\alpha = 0$ die Convergenzverhältnisse des Integrals geändert werden. So kann man den Fall $c = 0$ obigen Integrals als zur Theorie des ersten Hauptsatzes gehörig ansehen, und von diesem Gesichtspunct aus soll er zunächst auch behandelt werden. Die andere Auffassung dieses besonderen Falles ist aber die, dass hier der zweite Hauptsatz in Kraft tritt. Der zweite Hauptsatz (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 46):

$$\lim \int_0^a d\alpha \; f(\alpha) \; \Phi(\alpha, h) = f(0) \; \lim \int_0^a d\alpha \; \Phi(\alpha, h)$$

setzt in erster Linie voraus, dass der Limes rechter Hand von α unabhängig, endlich und bestimmt, aber nicht Null sei, da man sonst den ersten Hauptsatz hätte. Bezüglich der Function $f(\alpha)$ sind seine Voraussetzungen nicht so allgemein, wie die des ersten Hauptsatzes, und werden weiter unten genauer erörtert werden. Die $\Phi(\alpha, h)$ betreffenden Voraussetzungen erfüllt $\Phi(\alpha, h) = \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, und führt man diese Function in den vorstehenden zweiten Hauptsatz ein, so ist allerdings klar, dass der Limes des rechts auftretenden Integrales

$$\int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zugleich auch das obige den Limes von

$$\int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \, \sin h(\alpha + c)$$

betreffende Problem des ersten Hauptsatzes löst, wenn man hierin $c = o$ voraussetzt und $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ statt $f(\alpha)$ schreibt.

Hinsichtlich des zweiten Hauptsatzes stellen wir die Frage so:

II. Unter welchen Bedingungen für die Function $f(\alpha)$ gilt die Relation:

$$\lim \int_o^a d\alpha \, f(\alpha) \, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o) \,.$$

Wir werden auf Grund der in den Art. 17 und 18 zusammengestellten Ergebnisse in den folgenden zwei Capiteln die Fragen I und II vollständig erledigen unter der Voraussetzung

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

wo weder $\varphi(\alpha)$ noch $\psi(\alpha)$ in der Nähe von $\alpha = o$ unendlich viele Maxima haben, namentlich aber werden wir es uns angelegen sein lassen, die allgemeinen Regeln für die Gültigkeit der beiden Hauptsätze, die zum Theil von uns selbst veröffentlicht wurden, mit jenen Ergebnissen zu vergleichen.

II. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes, falls die willkürliche Function unendlich wird.

20. Die Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes.

Wir wollen zuerst die verschiedenen Regeln über den Gültigkeitsbereich des ersten Hauptsatzes auf ihre Uebereinstimmung mit den in den Tabellen Art. 17 und 18 angebenen Grenzwerthen prüfen.

Es handelt sich also um Folgendes: Angenommen die Function $f(\alpha)$ in:

$$J = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

sei im Intervall $o < \alpha \leqq a$ integrirbar, $\lim_{\alpha = o} f(\alpha)$ sei aber nicht endlich oder doch, wie für $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{1}{\alpha}$, unendlicher Werthe fähig, so existiren ein Paar Regeln um festzustellen, ob dennoch $\lim_{h=\infty} J = o$ ist, wie dies ausnahmslos stattfindet, wenn $f(\alpha)$ im Intervall $o \leqq \alpha \leqq a$ die Bedingung der Integrirbarkeit erfüllt, welche aber unendliche Werthe der Function ausschliesst. [8])

I. Es besteht eine ältere (unrichtige) Angabe, nach welcher der $\text{Limes}_{h=\infty} J$ stets Null ist, falls nur das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)$$

convergirt. [9])

8) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 21 und 41.
9) Crelle's Journ. Bd. 17, pag. 54.

II. Der Verfasser hat für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes bei allen darstellenden Integralen die ausreichende Regel gegeben, dass das Integral:

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)$$

absolut convergiren müsse.[10])

III. In dem Falle $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, und c von Null verschieden vorausgesetzt, hat die nothwendige und ausreichende Bedingung für das Verschwinden von lim J folgende doppelte Form: Für $\psi(\alpha) \underset{<}{\sim} l\frac{1}{\alpha}$ muss $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$ sein, für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ muss $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ sein.

IV. Ist dagegen $c = o$, so gilt für $\psi(\alpha) \underset{\sim}{<} l\frac{1}{\alpha}$ die Bedingung $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ und für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ dieselbe wie oben: $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ ·

21. Allgemeine Regeln über die Convergenz eines Integrals der Form

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \; .$$

Um nun die beiden apriorischen Regeln I und II mit den a posteriori gefundenen Gesetzen III und IV vergleichen zu können, wollen wir für $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ (wo σ und ψ für $\alpha = o$ ohne Maxima unendlich werden) feststellen, unter welchen Annahmen über σ und ψ das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

überhaupt convergirt, und wann es absolut convergirt. Wegen:

---

10) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 43.

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) = -\int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi\, \sigma(\alpha) \frac{d\alpha}{d\psi} \cos \psi \,,$$

ist das Integral convergent oder divergent, jenachdem $\sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\psi} < 1$ oder $\gtrapprox 1$, d. i. jenachdem

$$\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha) \,, \text{ oder } \sigma(\alpha) \gtrapprox \psi'(\alpha) \,.$$

Ferner ist das Integral $\int^{\infty} d\psi\, \sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\psi} \bmod \cos \psi$ convergent oder divergent, jenachdem das Integral

$$-\int_{\psi(a)}^{\infty} d\psi\, \sigma(\alpha)\frac{d\alpha}{d\psi} = \int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)$$

convergent oder divergent ist. Setzen wir $\sigma(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$, wo $\varphi(\alpha)$ ohne Maxima Null wird, so ist das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

convergent für Functionen $\varphi(\alpha)$, deren Null unter einer gewissen Grenze bleibt. Man kann diese Grenze nicht durch eine Function darstellen. Wenn man indessen die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz auch nicht wirklich darstellen kann, so hindert dies nicht, in den Calcul eine ideale Function $\tau(\alpha)$ einzuführen, von solcher Beschaffenheit, dass das

$$\int_0^a d\alpha \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

convergirt, dass aber jedes Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

divergirt, in welchem $\varphi(\alpha) > \tau(\alpha)$ gedacht wird.

Bekanntlich ist von den Integralen:

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots l_r\frac{1}{\alpha}} \;, \quad \int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots l_r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \;,$$

$ll\frac{1}{\alpha} = l_2\frac{1}{\alpha}$, etc. gesetzt, und μ beliebig klein gedacht, das erste unendlich, das zweite endlich. Dies erlaubt die Function $\tau(\alpha)$ in nach unseren heutigen Begriffen ziemlich enge Grenzen einzuschliesen:

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots l_r\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots \left(l_{r_1}\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \;, \quad r = 1, 2, \ldots, r_1 = 1, 2, \ldots$$

Jedenfalls also hat man:

$$l\frac{1}{\alpha}^{-1} > \tau(\alpha) > \left(l\frac{1}{\alpha}\right)^{-1-\mu}$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf die Theorie der Infinitärtypen,[11]) dass $\alpha l\frac{1}{\alpha}$ der Typus von $\tau(\alpha)$ ist. Weiter schreiben wir noch:

$$\tau(\alpha) = \left(l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots l_r\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \tau_r(\alpha)$$

wo

$$\left(l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} > \tau_r(\alpha) > \left(l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\right)^{-1-\mu} \;, \quad \mu \text{ beliebig klein.}$$

Im Ganzen haben wir die Convergenzregel: Das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \, \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

convergirt, falls

$$\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha) \,;$$

---

11) Borch. Journ. Bd. 74, pag. 294.

es convergirt absolut, falls

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)$$

convergirt, d. i. falls $\alpha\sigma(\alpha) \overset{\infty}{\leq} \tau(\alpha)$, $\tau(\alpha)$ im obigen Sinne verstanden.

22. Vergleichung der allgemeinen Regeln I und II mit den besonderen Regeln III und IV (Art. 20).

Nach Regel I des Art. 20 würde dem vorigen Art. zu Folge für $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ der Limes von

$$J = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

gleich Null sein, falls $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$. Dies ist im Intervall $1 < \psi(\alpha) \overset{\infty}{\leq} 1\frac{1}{\alpha}$ genau richtig und dies ist auch, $c \gtrless o$ angenommen, in diesem Intervall die nothwendige Bedingung. Für $c = o$ ist die nothwendige Bedingung weiter und lautet: $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$. Im Intervall $\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}$ ist dagegen Regel I falsch. Denn, wie im Art. 16 des Genaueren gezeigt, hat man in diesem Intervall $\sqrt{\psi''(\alpha)} < \psi'(\alpha)$, und die Grenze der Convergenz des Lim J ist $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$. Falsch ist also Regel I unter folgenden genaueren Bedingungen:

$$\psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}\,,\quad \sqrt{\psi''(\alpha)} \overset{\infty}{\leq} \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)\,.$$

Setzen wir z. B. $\psi(\alpha) = \alpha^{-\mu}$, so wird dies zweite Intervall:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{2}-1} \overset{\infty}{\leq} \sigma(\alpha) < \alpha^{-\mu-1}.$$

Gehört $\sigma(\alpha)$ diesem Intervall an, so ist $\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ convergent, es ist aber

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin \alpha h$$

zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt. Somit wird auch z. B. das Glied der Sinusreihe:

$$\sin nx \int_0^\pi d\alpha f(\alpha) \sin n\alpha$$

unendlich. (S. Riemann, Ueber die Darstellbarkeit d. e. trigon. R. pag. 45).

Weiter ist nach des Verfassers Angabe (II) lim J = o falls $\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)$ $\cos \psi(\alpha)$ unbedingt convergirt, d. i. falls

$$\sigma(\alpha) \underset{<}{\infty} \tau(\alpha) \; ,$$

eine Regel, die ausreicht, aber von der nothwendigen um so mehr abweicht, je grösser das Unendlich von $\psi(\alpha)$ ist.

Um einen Ueberblick zu gewinnen über den Grad der Annäherung dieser Bedingungen an die wirklich nothwendigen der Tabellen, schreiben eine Folge von Functionen $\psi(\alpha)$ hin, darunter die Functionen $\sigma(\alpha)$, welche die Convergenzgrenze des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$$

bilden, und zwar für absolute und für bedingte Convergenz. Endlich darunter die Convergenzgrenzen des Limes von

$$\int_0^a d\alpha \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

nach den Regeln und nach den Tabellen.

$\psi(\alpha)\ =$	$l_3\frac{1}{\alpha}$	$l_2\frac{1}{\alpha}$	$l\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$ .... $e^{\frac{1}{\alpha}}$	..
$\sigma(\alpha)\ =$ Grenze der bed. Convergenz excl.	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{2\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha)\ =$ Grenze der absol. Convergenz	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$ .... $\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	..
$\sigma(\alpha)\ =$ I Regel	$\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha}$	$\alpha l\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^3}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha)\ =$ II Regel	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$ .... $\frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$	..
$\sigma(\alpha)\ =$ III Regel, $c \gtrless 0$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{2\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\alpha^2}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{2\alpha}}}{\alpha^2}$	..
$\sigma(\alpha)\ =$ IV Regel, $c = 0$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\alpha^2}$ .... $\frac{e^{\frac{1}{2\alpha}}}{\alpha^2}$	..

Noch anschaulicher werden diese Verhältnisse, wenn man die Unendlich von ψ und σ durch Coordinaten darstellt, wobei es uns nicht beirren darf, dass die Grösse des Unendlich durch keine Einheit gemessen wird.[12]) Für unsere Zwecke reicht es hin, dass wir eine beliebige Anzahl von Unendlich in einer Reihenfolge nach ihrer analytisch wohl vergleichbaren Grösse anordnen können.

So entspreche jedem Puncte der Coordinatenebene in der graphischen Darstellung Tafel I[13]) ein Functionensystem

$$(\sigma(\alpha)\ ,\ \psi(\alpha))$$

und wenn der Punct unter der die Ergebnisse der Tabelle (Art. 17) darstellenden Linie und oberhalb der ψAxe gelegen ist, so entspricht

12) Ann. v. Cl. und N. Bd. VIII pag. 363, Einleitung.

13) Bedauerlicherweise ist durch nachträgliche nicht hinreichend überwachte Correctur ein entstellender Fehler in diese Figur gekommen. Selbstverständlich muss die Curve I, III zwischen den Geraden II und IV verlaufen.

dem ihm zugehörigen Functionensystem eine dem ersten Hauptsatz für $c = o$ genügende Function $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$. Analog, wenn er unter der die Ergebnisse der Tabelle Art. 18 und oberhalb der ψAxe liegt, wird durch das ihm zugehörige System σ, ψ der Satz für $c \gtrless = o$ erfüllt. Liegt der Punct oberhalb einer dieser Linien, so findet der Satz für $c = o$ resp. $c \gtrless o$ nicht statt.

23. Kurze Uebersicht über die Ergebnisse dieses Capitels, nebst einigen Bemerkungen, welche ihre graphische Darstellung veranlasst.

Es zeigt sich also, dass im Intervall $\psi(\alpha) > 1 \frac{1}{\alpha}$ der

$$\mathrm{Lim}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] \sin \alpha h = \mathrm{Lim}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \sin \alpha h$$

divergiren kann, wenn auch:

$$\int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] = \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)$$

ein convergentes Integral ist. Die Bedingung für die gleichzeitige Divergenz jenes Limes und Convergenz dieses Integrals lautete:

$$\sqrt{\psi''(\alpha)} < \sigma(\alpha) < \psi'(\alpha) \, .$$

Dagegen kann, Dank dem Sinus, im Intervall $1 < \psi(\alpha) < 1 \frac{1}{\alpha}$ der Limes von

$$\int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] \sin \alpha h$$

convergiren und verschwinden, wenngleich das Integral

$$\int_0^a d\alpha \left[\sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right]$$

divergent ist. Die Bedingung dafür ist

$$\psi'(\alpha) < \sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}\ .$$

Betrachten wir dagegen das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \Big[\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\Big] \cos h\alpha \ \text{ oder } \int_0^a d\alpha\Big[\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\Big] \sin h(\alpha + c)\ .$$

Dies Integral und sein Limes sind gleichzeitig convergent (in welchem Falle der Limes Null ist) und divergent, aber nur im Intervall $1 < \psi(\alpha) \underset{<}{\backsim} l\frac{1}{\alpha}$.

Falls $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, ist das Integral convergent für $\sigma(\alpha) < \psi'(\alpha)$, und der Limes für $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ (Art. 18), wie das obige:

$$\int_0^a d\alpha\Big[\sigma(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)\Big] \sin h\alpha .$$

Eben dies Obige ist convergent für $\sigma(\alpha) < \frac{\psi'(\alpha)}{\alpha}$, und sein Limes für $\sigma(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$ im Intervall $\psi(\alpha) \underset{<}{\backsim} l\frac{1}{\alpha}$ und für $\sigma(\alpha) < \sqrt{\psi''(\alpha)}$ im Intervall $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$. Also, und dies scheint mir beachtenswerth, ist der Limes des Integrals mit dem $\sin \alpha h$ in einem viel kleineren Bereiche des Unendlich von $\sigma(\alpha)$ convergent, wie das Integral selbst, während bei dem Integral mit dem $\cos \alpha h$ die Uebereinstimmung des Convergenzbereiches beider, des Integrals und des Limes, theils vollständig, theils doch grösser als im Falle des $\sin \alpha h$ ist.

Die Figur zeigt deutlich, dass die beste allgemeine Regel für den Gültigkeitsbereich des ersten Hauptsatzes, nämlich Regel II, von $\psi(\alpha) \backsim l\frac{1}{\alpha}$ an für zunehmende Unendlich von $\psi(\alpha)$ eine äusserst mangelhafte Uebereinstimmung mit der nothwendigen Bedingung III, IV zeigt. Wenn uns dies deshalb nicht überraschen kann, weil die Regel III eben nicht für das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin h(\alpha + c)$$

allein aufgestellt ist, sondern für sämmtliche darstellende Integrale gilt, so entsteht doch die Frage, ob für vorstehendes besondere, aber auch besonders interessante Integral nicht Regeln ermittelt werden können, die besser an die nothwendige sich anschliessen, oder ob nicht gar die nothwendige Bedingung für alle Functionen $f(\alpha)$, für welche der $\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \sin \alpha h$ verschwindet, gefunden werden könne. Besser als II an die nothwendige Bedingung III sich anschliessende allgemeine Regeln wird es schon geben. Aber ich möchte dem Analysten, der Oehl und Mühe an die Auffindung der nothwendigen für alle Functionen $f(\alpha)$ gültigen Regel wenden will, zu bedenken geben, dass schon im Falle der einfachen Function $f(\alpha) = \sigma(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ eine solche Regel zwei formell verschiedene Gesetze liefern müsste, jenachdem nämlich $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$ oder $\overline{\overline{>}} \, l\frac{1}{\alpha}$ ist. Nun betrachte man z. B. eine Function wie diese:

$$\sigma(\alpha) \cos\Big[u + v \cos\Big(u_1 + v_1 \cos\Big\{\ldots\Big\}\Big)\Big]$$

wo die Grössen σ, u, v, ... sämmtlich > 1 gedacht sind, wie viel formell verschiedene Gesetze für die σ, u, v, ... mag es hier wohl geben, und wie will man sich die Bedingung zusammengesetzt denken, die alle diese Fälle umfasst?

Es erscheint mir wahrscheinlich, dass ein dereinstiges tieferes Verständniss dieses und ähnlicher Probleme von allgemeineren Gesichtspuncten aus — wer vermöchte jetzt schon zu ahnen welchen! — erfolgen wird. Weil eben die formell verschiedenen Gesetze darauf hinweisen, dass wir es hier mit Grenzfällen einer höheren Continuität zu thun haben.

III. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes, welcher dem Convergenzbeweis für die Fourierschen Reihen zu Grunde liegt.

24. Angabe der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes.

Wir wenden uns zur Prüfung der für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o)$$

aufgestellten Bedingungen, welches auch die Bedingungen für die Darstellbarkeit von f(o) durch eine Fouriersche Reihe oder ein Fouriersches Integral sind, falls $f(\alpha)$ diese Bedingung nicht allein für $\alpha \geqq o$, sondern auch für $\alpha \leqq o$, also innerhalb eines (beliebig kleinen) den Punct $\alpha = o$ enthaltenden Intervalls, erfüllt. Es sind hier folgende Bedingungen zu verzeichnen:

I. Es genügt $f(\alpha)$ der Dirichletschen Bedingung, d. h. es hat im Intervall $o \leqq \alpha \leqq a$ nur eine endliche Anzahl Maxima.[14])

II. Die Lipschitzsche Bedingung: $f(\alpha) - f(o)$ wird nicht langsamer als eine Potenz von α Null.[15]) Noch etwas weiter geht die aus der Regel IV unmittelbar fliessende Bestimmung (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 61, Art. 11 und diese Abh. Art. 26) dass

$$\frac{f(\alpha) - f(o)}{\tau(\alpha)}$$

nicht unendlich werden darf, $\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 verstanden. In dieser Form will ich sie die Bedingung II nennen.

III. Vorausgesetzt, dass $f(\alpha)$ differenzirbar ist, gilt der zweite Hauptsatz für alle darstellenden Integrale, wenn dieses Integral:

---

14) Crelle's Journ. Bd. 4, pag. 157.

15) Borch. Journ. Bd. 63, pag. 286.

$$\int_0^a f'(\alpha)\, d\alpha$$

absolut convergent ist.[16])

IV. Falls das Integral

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

absolut convergent ist, wobei $f(\beta)$ nicht differenzirbar zu sein braucht, gilt der zweite Hauptsatz für alle darstellenden Integrale $\int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h)$, bei denen $\varphi(\alpha. h)$ die Bedingungen erfüllt, dass $\alpha\varphi(\alpha, h)$ mit α verschwindet, und mit h nicht unendlich wird, wie bei $\varphi(\alpha, h) = \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$.[17])

V. Setzt man $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, so sind nach der Tabelle Art. 17 die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, dass

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0$$

sei, formell verschieden, jenachdem $\psi(\alpha) \lesseqgtr l\frac{1}{\alpha}$ oder $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$. Im ersteren Falle wird verlangt, dass $\varrho(\alpha)$ verschwinde für $\alpha = 0$. Im zweiten muss $\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$ sein. Für $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$ gehen die beiden Forderungen in einander über, da dann aus der zweiten $\varrho(\alpha) < 1$ folgt.

Es wird sich jetzt wieder darum handeln, die vier ersteren apriorischen Gesetze mit den aposteriori gefundenen unter V verzeichneten Regeln zu vergleichen.

Um diese Vergleichung anstellen zu können, müssen wir zuvor untersuchen, was, $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gesetzt, aus den Gesetzen III und IV für die Functionen ϱ und ψ für engere Bedingungen sich ergeben.

16) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 55.

17) Borch. Journ. Bd. 79 pag. 55.

25. Unter welchen Umständen ist für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ das Integral $\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha)$ absolut convergent?

Wir beginnen damit das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha)$$

auf seine absolute Convergenz zu untersuchen.

Es soll also absolut convergent sein das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha) \cos \psi(\alpha) - \varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \sin \psi(\alpha) \right\}$$

oder, wenn man setzt:

$$\varrho'(\alpha) = h(\alpha) \cos \gamma$$
$$\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) = h(\alpha) \sin \gamma$$

das Integral:

$$\int_0^a d\alpha\, h(\alpha) \cos \left(\psi(\alpha) + \gamma\right)$$

wo $h(\alpha) = \left[\varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2 \psi'(\alpha)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = \operatorname{arctg} \varrho(\alpha) \cdot \dfrac{\varrho'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$. Für $\alpha = 0$ nähert sich γ ohne Maxima einer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen Grenze.

Mithin ist $\psi(\alpha) + \gamma > 1$, daher ist nach den Ausführungen des Art. 21

$$\int_0^a d\alpha\, h(\alpha) \bmod \cos (\psi + \gamma)$$

nur dann convergent, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, h(\alpha) = \int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2\, \psi'(\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

convergent ist. Dies convergirt aber seinerseits nur, wenn die beiden Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, \varrho'(\alpha) \quad , \quad \int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha)$$

convergiren. Denn wäre z. B. das erste nicht convergent, so könnte geschrieben werden

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \varrho'(\alpha)^2 + \varrho(\alpha)^2\, \psi'(\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left(\frac{\varrho(\bar{\alpha})\, \psi'(\bar{\alpha})}{\varrho'(\bar{\alpha})} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^a d\alpha\, \varrho'(\alpha) \,,$$

wo der Factor vor dem Integral rechts nicht verschwinden kann. Wenn $\varrho(\alpha) < 1$, ist das Integral $\int_0^a d\alpha\, \varrho'(\alpha)$ convergent. Die Convergenz des anderen Integrals

$$\int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha)$$

führt auf die Bedingung:

$$\varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha) \underset{<}{\sim} \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} \,,$$

$\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 genommen.

Es ist also das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\big(\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\big)$$

absolut convergent, wenn $\varrho(\alpha) < 1$, und die Bedingung

$$\alpha\, \varrho(\alpha)\, \psi'(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$$

erfüllt ist.

26. Untersuchung der Bedingungen für ϱ und ψ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$, welche das Integral $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$ absolut convergent machen. Es wird die Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\infty} \tau(\alpha)$ aufgestellt, und, um sie auf ihre Nothwendigkeit zu prüfen, wird zuerst eine Substitution für $f(\alpha)$ eingeführt, welche für $\psi(\alpha) > \overset{-1}{\tau(\alpha)}$ gilt.

Führen wir jetzt die analoge Untersuchung bezüglich des Integrals

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

durch, indem wir, $f(x) = \varrho(x) \cos \psi(x)$ gedacht, zu ermitteln suchen, unter welchen Bedingungen für ϱ und ψ das Integral K absolut convergirt.

Es sei $\varphi(\alpha)$ eine für $\alpha = o$ endlich bleibende Function und $\varrho(\alpha) \underset{<}{\infty} \tau(\alpha)$ ($\tau(\alpha)$ im Sinne des Art. 21 genommen), so hat man für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \varphi(\alpha)$:

$$\int_0^a d\alpha \left\{ \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta) \right\} = \int_0^a d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} \left\{ \varphi(\alpha) - \frac{\varrho(\bar{\alpha})}{\varrho(\alpha)} \varphi(\bar{\alpha}) \right\},\ o \leqq \bar{\alpha} \leqq \alpha,\ \varrho(\bar{\alpha}) \leqq \varrho(\alpha).$$

Die Klammer unter dem Integral rechts bleibt also endlich, und für $\varrho(\alpha) \underset{<}{\infty} \tau(\alpha)$ wird daher K absolut convergent sein. Unsere Untersuchung legt sich jetzt die Frage vor, ob und wie weit die eben bei Functionen der Form $\varrho(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$, wo $\varphi(\alpha)$ nur endlich zu sein braucht, gefundene ausreichende Bedingung für die absolute Convergenz von K (dass $\varrho(\alpha) \underset{<}{\infty} \tau(\alpha)$ sei), bei Functionen der speciellen Form $\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ nothwendig ist.

Um das Integral K behandeln zu können, ist es nöthig, des darin vorkommenden inneren Integrals (nach β) dadurch ledig zu werden, dass man für $f(\alpha)$ eine Function einführt, die schon von vornherein ein Differentialquotient ist. Wir setzen also statt $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \lambda(\alpha) \sin \psi(\alpha) \\ &= \lambda(\alpha)\, \psi'(\alpha) \cos \psi(\alpha) + \lambda'(\alpha) \sin \psi(\alpha) \end{aligned}$$

ein, worin wir $\lambda(\alpha) \psi'(\alpha)$ mit $\varrho(\alpha)$ identificiren und $\lambda'(\alpha)$ — wenn diese

Voraussetzungen sich gegenseitig vertragen, da nämlich $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha)$ doch < 1 angenommen werden muss — so bestimmen, dass der $\lambda'(\alpha)\sin\psi(\alpha)$ enthaltende Theil von:

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F(\beta)$$

für sich absolut convergirt, d. i. wir setzen:

$$\lambda'(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)\,.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \alpha\tau(\alpha)\;,$$

wie folgt: Aus $\lambda'(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \tau(\alpha)$ folgt zunächst:

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\sim}{}} \int_0^\alpha d\beta\,\tau(\beta)\,.$$

Setzt man nun

$$\int_0^\alpha d\beta\,\tau(\beta) \sim \alpha\tau(\alpha)\;,$$

oder durch Differentiation:

$$\tau(\alpha) \sim \tau(\alpha)\left\{1 + \alpha\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)}\right\}$$

so muss die Richtigkeit dieser Relation nachgewiesen werden. Dies ist aber sehr leicht, denn aus:

$$\tau(\alpha) > \frac{1}{l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\tau(\alpha)} < l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}$$

folgt:

$$l\frac{1}{\tau(\alpha)} \underset{<}{\overset{\sim}{}} ll\frac{1}{\alpha}$$

und durch Differentiation:

$$\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \underset{<}{\overset{\sim}{}} \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}} \quad \text{oder} \quad \alpha\frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} \underset{<}{\overset{\sim}{}} \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}\;,$$

und jene Relation ist ja schon bewiesen, wenn nur überhaupt gezeigt ist, dass: $\alpha \frac{\tau'(\alpha)}{\tau(\alpha)} < 1$.

Wir haben also die beiden Voraussetzungen:

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \alpha\tau(\alpha) \ , \ \varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1 \ .$$

Es soll untersucht werden, ob die Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \tau(\alpha)$, unter welcher K absolut convergent ist, nothwendig sei. Also müssen die vorstehenden beiden Bedingungen für λ, ϱ, ψ so beschaffen sein, dass wenigstens für einige Stärken des Unendlichwerdens von ψ die Grösse der Null, die dem ϱ gestattet ist, ein Intervall umfasst, welches die Grösse der Null von τ enthält, damit man eben feststellen könne, ob τ die nothwendige Grenze für die Functionen ϱ bildet, die K absolut convergent machen. Wie wir gleich zeigen wollen, gestatten die beiden Bedingungen $\lambda(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \alpha\tau(\alpha)$, $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1$ dem $\varrho(\alpha)$ ein hinlängliches Intervall unter der sehr allgemeinen Voraussetzung $\psi(\alpha) > \tau(\alpha)^{-1}$.

27. Nachweis, dass die Substitution des vorigen Art. für $f(\alpha)$ die Prüfung der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} \tau(\alpha)$ gestattet.

Wir setzen also:

$$\psi(\alpha) = \frac{\pi(\alpha)}{\tau(\alpha)} \ , \ \pi(\alpha) > 1 \ .$$

und

$$\lambda(\alpha) = \pi_1(\alpha) \cdot \alpha\tau(\alpha) \ , \ \pi_1(\alpha) \underset{<}{\overset{\infty}{}} 1 \ .$$

Man hat:

$$\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) = \alpha\pi\pi_1\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{\tau'}{\tau}\right) ,$$

und wenn mit $\mathfrak{t}_\tau$ und $\mathfrak{t}_\pi$ die Infinitärtypen von τ und π bezeichnet werden, so wird:

$$\varrho(\alpha) = \alpha\pi\pi_1\left(\frac{1}{\mathfrak{t}_\pi} - \frac{1}{\mathfrak{t}_\tau}\right)$$

Beide Glieder in der Klammer haben das nämliche Zeichen falls $\pi(\alpha) > 1$. In diesem Falle wird also $\varrho(\alpha)$ jedenfalls einer so grossen Null wie

$$\pi_1 \frac{\alpha\pi}{\mathfrak{t}_\tau}$$

fähig sein. Da aber π_1 beliebig langsam Null werden darf, so handelt es sich darum, ob stets

$$\pi_1 \frac{\alpha\pi}{t_\tau} > \tau(\alpha)$$

sein kann. Nun hat man $t_\tau \sim \alpha l \frac{1}{\alpha}$ (Art. 21), wodurch die vorstehende Relation wird:

$$\pi_1 \frac{\pi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha) \; .$$

Da aber jedenfalls $\frac{\pi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}} > \tau(\alpha)$ ist, so kann die Null von π_1 auch stets so klein gewählt werden, dass vorstehende Ungleichheit erfüllt ist.

Also gestatten die Bedingungen $\lambda(\alpha) \underset{>}{\sim} \alpha\tau(\alpha)$, $\varrho(\alpha) = \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) < 1$ für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ dem $\varrho(\alpha)$ ein $\tau(\alpha)$ einschliessendes Intervall.

28. Nachweis der Nothwendigkeit der Bedingung $\varrho(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$ für $\psi(\alpha) > \tau(\alpha)$.

Es lässt sich jetzt leicht zeigen, dass in dem Gebiete

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$$

$\varrho(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$ die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \, F(\beta)$$

ist, oder, wie sich daraus unmittelbar ergiebt, dass

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \, \varrho(\beta) \cos \psi(\alpha)$$

nur für $\varrho(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$ absolut convergirt, falls $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ ist.

Denn es ist:

$$K_1 = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\lambda(\alpha)\ \sin\psi(\alpha)}{\alpha}\right).$$

Dies Integral ist aber nach Art. 25 nur dann absolut convergent, wenn:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha}\right) \quad , \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergent sind, d. i. wenn:

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\sim} \alpha \quad , \quad \lambda(\alpha)\psi'(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha) \, ,$$

Die zweite Bedingung ist die zu beweisende, und die erste ist wegen $\lambda(\alpha) \underset{<}{\sim} \alpha\tau(\alpha)$ von selbst erfüllt.

29. Die nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz von K wird für das Intervall $1 < \psi(\alpha) < 1\frac{1}{\alpha}$ mit Hülfe einer anderen Substitution für $f(\beta)$ aufgestellt.

Da wir nun für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$ die nothwendige, $\varrho(x)$ betreffende Bedingung kennen, unter der

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, \varrho(\beta)\ \cos\psi(\beta)$$

absolut convergirt, so hätten wir noch die nämliche Bestimmung für das Intervall

$$1 < \psi(\alpha) < \frac{1}{\tau(\alpha)}$$

zu versuchen. Wir werden uns aber auf das leichter zu erledigende, von jenem wenig abweichende Intervall

$$1 < \psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$$

beschränken.

Wir setzen ähnlich wie oben:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\lambda(\alpha) \cos\psi(\alpha) \\ &= \lambda'(\alpha) \cos\psi(\alpha) - \lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha) \sin\psi(\alpha) \,. \end{aligned}$$

Nehmen wir also an $\psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$, und setzen z. B., um einen Versuch zu machen:

$$\psi(\alpha) = \mathrm{l}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}, \ \nu < 1 \,,$$

so ist:

$$F_1(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos\psi(\alpha) + \nu\lambda(\alpha) \cdot \frac{1}{\alpha\mathrm{l}\frac{1}{\alpha}^{1-\nu}} \cdot \sin\psi(\alpha)$$

Macht man alsdann weiter die Annahme

$$\lambda'(\alpha) \underset{<}{\sim} \frac{1}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}}, \ \mu > \nu \,,$$

also

$$\lambda(\alpha) \underset{<}{\sim} \frac{\alpha}{\mathrm{l}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}} \,,$$

(wie durch Differentiation leicht zu verificiren), so giebt der zweite Theil von $F_1(\alpha)$:

$$\frac{\nu\lambda(\alpha)}{\alpha\mathrm{l}\frac{1}{\alpha}^{1-\nu}} \cdot \sin\psi(\alpha)$$

in dem Integral $K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F_1(\beta)$ für sich einen absolut convergenten Theil, gleichwie vorher, als es sich um das Intervall $\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$ handelte, es der erste Theil von $F(\alpha)$ war, über den wir in ähnlicher Weise verfügten. Weiter findet man wie oben, dass das ganze Integral

$$K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \, F_1(\beta)$$

absolut convergent ist, wenn die Integrale:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{\lambda(\alpha)}{\alpha} \quad , \quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergiren. Das erste convergirt wegen $\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha} \underset{<}{\sim} \frac{1}{l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}}$, das zweite wegen:

$$\frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha} \underset{<}{\sim} \frac{1}{\alpha l\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+(\mu-\nu)}} .$$

Hierdurch ist dann auch, wenn $\lambda'(\alpha) = \varrho(\alpha)$ gesetzt wird, die Bedingung für $\varrho(\alpha)$ in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha)$, vermöge deren das Integral K absolut convergirt, gefunden.

Um nun die Frage allgemein zu erledigen, setzen wir in

$$F_1(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos\psi(\alpha) - \lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha) \sin\psi(\alpha)$$

wieder $\lambda'(\alpha) = \varrho(\alpha)$, und hieraus folgt $\lambda(\alpha) \sim \alpha\varrho(\alpha)$, unter der Annahme, dass der Typus von $\varrho(\alpha)$ die Bedingung $> \alpha$ erfüllt, d. h. dass ϱ nicht so rasch, wie eine Potenz von α Null wird. Wir bestimmen sodann $\lambda(\alpha)$ so, dass der den zweiten Theil von $F_1(\alpha)$, nämlich $\lambda(\alpha)\psi'(\alpha) \sin\psi(\alpha)$, enthaltende Theil von

$$K_1^{(1)} = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \, F_1(\beta)$$

für sich absolut convergirt, was der Fall sein wird, wenn $\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$, oder wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha \, \varrho(\alpha)\,\psi'(\alpha)$$

convergirt. Alsdann folgt aus der absoluten Convergenz von $K_1^{(1}$ sofort diejenige von

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

wenn $f(\beta) = \varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha) = \lambda'(\alpha) \cos\psi(\alpha)$ gesetzt wird. Nach den schon öfter benutzten Sätzen ist

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta\, F_1(\beta) = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{\lambda(\alpha)\ \cos\psi(\alpha)}{\alpha}$$

absolut convergent, wenn die Integrale

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha}\ ,\quad \int_0^a d\alpha \frac{\lambda(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\alpha}$$

convergiren. Was das zweite Integral betrifft, so wurde dessen Convergenz schon so eben verlangt. Das erste, welches geschrieben werden kann:

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\varrho(\alpha)\,\varphi(\alpha)$$

wo $\varphi(\alpha)$ für $\alpha = o$ nicht unendlich wird, ist auch convergent, wenn $\varrho(\alpha)$ nicht unendlich wird, welches eine Forderung ist, die wir für die Darstellbarkeit der Function $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos\psi(\alpha)$ ja ohnedies stellen müssen. Wir haben also im Ganzen die Bedingungen:

$$\varrho(\alpha) \underset{<}{\sim} 1\ ,\ \int_0^a d\alpha\,\varrho(\alpha)\,\psi'(\alpha) \text{ ist convergent,}$$

deren zweite auch $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$ geschrieben werden kann. Setzen wir z. B. $\psi(\alpha) = ll\frac{1}{\alpha}$, so muss sein $\frac{\varrho(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}} \underset{<}{\sim} \tau(\alpha)$. Hier kann also

z. B. $\varrho(\alpha) = \tau(\alpha) \, l\frac{1}{\alpha}$ gesetzt werden, d. i. langsamer Null werden, als die kleinsten negativen Potenzen von $l\frac{1}{\alpha}$.

30. Bemerkungen über diese Bedingung für die absolute Convergenz von K im Falle $1 < \psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$.

Man erkennt in den vorstehenden Bedingungen jene wieder, die durch die absolute Convergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \, f'(\alpha)$$

den Functionen ϱ und ψ auferlegt wurden. Da diese Bedingungen in dem Intervall $1 < \psi < l\frac{1}{\alpha}$, wie gleich zu zeigen, mehr Functionen ϱ zulassen, als die vorher für das Intervall $\frac{1}{\tau(\alpha)} < \psi(\alpha)$ gefundene nothwendige Bedingung $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ für das erstere Intervall zulassen würde, so mussten wir mindestens auf die nämlichen Bedingungen, wie sie aus der absoluten Convergenz von $\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$ folgen, fallen, da ich an einem früheren Orte gezeigt habe [18]), dass die Functionen $f(\alpha)$, die das Integral $\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$ zu einem absolut convergenten machen, auch die absolute Convergenz von

$$K = \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta \, f(\beta)$$

bewirken.

Die obige Bedingung $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ oder

18) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 58, Art. 10.

$$\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$$

gesetzt, $\varrho(\alpha)\mu(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ giebt für jedes vorgelegte $\psi(\alpha)$ ein zugehöriges Intervall, aus welchem solche Functionen $\varrho(\alpha)$ bezogen werden können, für welche das Integral K absolut convergirt. Die Grenze in der Richtung des langsamsten Nullwerdens von $\varrho(\alpha)$ ist gegeben durch

$$\varrho(\alpha)\mu(\alpha) \sim \tau(\alpha) .$$

Es wird $\mu(\alpha)$ für $1 < \psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$ zwar < 1 (denn aus $\psi(\alpha) < \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$ folgt $\psi'(\alpha) < \frac{1}{\alpha}$) aber stets $> \tau(\alpha)$ sein, da das Integral $\int\limits_0^a \mathrm{d}\alpha \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} = \int\limits_0^a \mathrm{d}\alpha\psi'(\alpha)$ nicht convergent ist, so dass vorstehende Bedingung stets $\varrho(\alpha) < 1$ ergiebt. Für $\psi(\alpha) \sim \mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$ folgt $\mu(\alpha) \sim 1$ und $\varrho(\alpha) \sim \tau(\alpha)$. Wird $\psi(\alpha)$ noch stärker unendlich als $\mathrm{l}\frac{1}{\alpha}$, so liefert die Bedingung $\varrho(\alpha)\mu(\alpha) \sim \tau(\alpha)$ das Resultat $\varrho(\alpha) < \tau(\alpha)$, welches kein Interesse mehr bietet, da das Integral $\int\limits_0^a \mathrm{d}\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\alpha \mathrm{d}\beta\,\varrho(\beta) \cos\psi(\beta)$ für $\varrho(\alpha) \gtrsim \tau(\alpha)$ und jedes Unendlich von ψ absolut convergent ist.

31. Graphische Darstellung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz.

Um diese verschiedenen Bedingungen vergleichen zu können, stellen wir sie wieder graphisch dar, wobei die ursprüngliche Dirichletsche, welche unendlich viele Maxima der Function überhaupt ausschliesst, dem Falle $\varrho(\alpha) = 0$ entsprechen würde, und nicht in die Figur aufgenommen werden kann; die übrigen werden für $\overset{-1}{\varrho(\alpha)}$ dargestellt. Der graphischen Darstellung legen wir folgende tabellarische Uebersicht zu Grunde:

$\psi(\alpha) =$	$l_3\frac{1}{\alpha}$	$l_2\frac{1}{\alpha}$	$l\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$e^{\frac{1}{\alpha}}$	
	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	nach Bedingung II $\left(f(\alpha) - f(o) \sim \tau(\alpha)\right)$ d. i. $\varrho(\alpha) \sim \tau(\alpha)$
In den Horizontalreihen rechter Hand steht das schwächste Unendlich oder die grösste Null von $\frac{1}{\varrho(\alpha)}$, für welche der zweite Hauptsatz noch gilt.	$\frac{1}{\tau_2(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau_1(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2\tau(\alpha)}$	$\frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha\tau(\alpha)}$	nach Bedingung III: abs. Conv. von $\int_0^a f'(\alpha)d\alpha$ d. i. $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$
	$\frac{1}{\tau_2(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau_1(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	$\frac{1}{\tau(\alpha)}$	nach Bedingung IV: abs. Conv. von $\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$. Für $1 < \psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$: $\alpha\varrho(\alpha)\psi'(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$ d. i. für $\psi(\alpha) > \frac{1}{\tau(\alpha)}$: $\varrho(\alpha) \lesssim \tau(\alpha)$
	1	1	1	$\alpha^{\frac{1}{2}}$	α	$\alpha e^{-\frac{1}{2\alpha}}$	nach Bedingung V: für $\psi(\alpha) \lesssim l\frac{1}{\alpha}$: $\varrho(\alpha) < 1$ für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$: $\varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$.

Zur Bestimmung von $\tau_r(\alpha)$ hat man (Art. 20) erstens den Ausdruck:

$$\tau(\alpha) = \left(l\frac{1}{\alpha} l_2\frac{1}{\alpha} \ldots . l_r\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \tau_r(\alpha) ,$$

zweitens die Ungleichheit:

$$\frac{1}{l_{r+1}\frac{1}{\alpha}} > \tau_r(\alpha) > \frac{1}{\left(l_{r+1}\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} , \ \mu \text{ beliebig klein.}$$

Bei der graphischen Darstellung, Tafel II, des Functionensystems

$$\left(\frac{1}{\varrho(\alpha)} , \psi(\alpha)\right)$$

als Punctsystem in einer $\left(\frac{1}{\varrho} , \psi\right)$ Coordinatenebene, werden die Puncte, für die $\frac{1}{\varrho} > 1$ ist, oberhalb der ψAxe, die Puncte, für die $\frac{1}{\varrho} < 1$ ist, unterhalb der ψAxe gedacht, so dass zwei Puncte $\left(\frac{1}{\varrho}, \psi\right)$ und $\left(\frac{1}{\varrho_1}, \psi\right)$ von der ψAxe oben und unten gleich entfernt liegen, wenn $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\varrho_1} \sim 1$ ist.

32. Bemerkungen über die Ergebnisse der obigen Vergleichung der Bedingungen für den zweiten Hauptsatz.

Um die eigentliche Bedeutung der in Rede stehenden Bedingungen wohl zu verstehen, fassen wir die nothwendige (V, Art. 24 oder in der graphischen Darstellung die unterste) in's Auge. Wir müssen wohl unterscheiden zwischen Bedingungen lediglich für die Darstellbarkeit einer Function und solchen allgemeinen Bedingungen, unter denen der

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

endlich und bestimmt, also convergent ist. Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function ist eine solche, welche anzeigt, wann die Formel:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} f(\alpha)$$

stattfindet, und wir dürfen sie als erfüllbar und erfüllt ansehen, auch im Falle $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ unendlich oder unbestimmt ist, wenn alsdann nur der $\text{Limes}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ ebenfalls unendlich oder zwischen denselben Grenzen wie $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ unbestimmt ist. Hiernach ist die in Rede stehende Bedingung V eine Bedingung im weiteren Sinne für die Convergenz und nicht eine solche für die Darstellbarkeit allein. Allerdings, falls gleichzeitig $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ und L endlich und bestimmt sind, so habe ich (Borch. Journ. Bd. 79, pag. 6) nachgewiesen, dass L nur $= \frac{\pi}{2}$ $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ sein kann. Neu war es mir aber, wie dies aus der Bedingung V folgt, dass $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt sein kann, während der zugehörige

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

convergent ist.

Diese Unterscheidungen macht die graphische Darstellung übersichtlich. Das gesammte schraffirte Gebiet über der Linie, welche die Grenzfunction $\frac{1}{\varrho(\alpha)}$ nach der Bedingung V darstellt, gehört den Functionssystemen

$$\big(\varrho(\alpha)\ ,\ \psi(\alpha)\big)$$

zu, für welche

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = L$$

endlich und bestimmt und zwar $=$ o ist. Dies zerfällt in die beiden durch die ψAxe getrennten Theile. Den Puncten des oberen Gebietstheiles gehören die Functionssysteme $\big(\varrho(\alpha)\ ,\ \psi(\alpha)\big)$ zu, bei denen $\varrho(\alpha) < 1$ ist, denen des unteren Gebietstheils die Systeme mit unendlich werdendem $\varrho(\alpha)$. Die Puncte des oberen Gebietstheils werden demnach bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{1}{\varrho(\alpha)} > 1\ ,\ \psi(\alpha) > 1\ ,$$

die des unteren durch die Bedingungen:

$$1 < \varrho(\alpha) < \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}\ ,\ \psi(\alpha) > 1\frac{1}{\alpha}\,.$$

Und alle Systeme dieses letzteren Gebiets entsprechen der neuen und merkwürdigen Form der Nichtdarstellbarkeit einer Function, wo $\lim_{\alpha=0} f(\alpha)$ zwischen unendlichen Grenzen unbestimmt ist, während

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0.$$

ist. Hier ein Beispiel. Es sei $\psi(\alpha) = \alpha^{-\mu}$, so wird aus $1 < \varrho(\alpha) < \alpha \sqrt{\psi''(\alpha)}$:

$$1 < \varrho(\alpha) < \alpha^{-\frac{\mu}{2}} .$$

Ist also $\mu > 0$, so erhält man für $\varrho(\alpha)$ stets einen Spielraum des Unendlichwerdens, für den $L = 0$ ist. Setzen wir z. B. $\mu = 4$, so folgt:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \left[\frac{\cos \frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}\right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = 0 ,$$

während $\qquad \lim_{\alpha=0} f(\alpha) = \lim_{\alpha=0} \frac{\cos \frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}$

zwischen unendlichen Grenzen schwankt.

Nach der Tabelle findet die Formel

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \Big[\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha=0} \Big[\varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)\Big]$$

wirklich statt: erstens für $\varrho(\alpha) < 1$, $\psi(\alpha) > 1$, dann für $\varrho(\alpha) \sim 1$, $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$, endlich für $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, $\varrho(\alpha) > \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)}$.

Im oben erörterten Sinne sind die Bedingungen I bis IV Art. 24 nicht Bedingungen für die Convergenz von L, sondern für die Darstellbarkeit von f(o). Von jenen Bedingungen schliesst am wenigsten darstellbare Functionen aus Bedingung IV. Von den übrigen Bedingungen ist III besser als II im Intervall $\psi(\alpha) < l\frac{1}{\alpha}$, umgekehrt II besser als III im Intervall $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$.

33. Allgemeine Bemerkungen über das Convergenzproblem der Fourierschen Reihen.

Da uns nun Bedingung V lehrt, dass, falls nur $\varrho(\alpha)$ verschwindet, alle Functionen $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ darstellbar sind, so haben wir hier eine erhebliche Ausdehnung des Convergenzbereiches der

Fourierschen Reihen gewonnen. Die Fouriersche Reihe stellt danach eine integrirbare Function f(x) für einen besonderen Werth $x = x_1$ dar, wenn die Unterschiede:

$$f(x_1 + \alpha) - f(x_1)\ ,\ f(x_1 - \alpha) - f(x_1)$$

in einem beliebig kleinen Intervall $o \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ auf die Form:

$$\varrho_0(\alpha) + \varrho_1(\alpha) \cos \psi_1(\alpha) + \varrho_2(\alpha) \cos \psi_2(\alpha) + \ldots$$

gebracht werden können, wo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ mit α verschwinden, und $\psi_1, \psi_2, \ldots$ mit $\frac{1}{\alpha}$ unendlich werden, und beide Functionenreihen bei $\alpha = o$ nicht unendlich viele Maxima haben. Ueber die Annahme unendlich vieler Glieder obiger Reihe ist in den „Schlussbetrachtungen I“ die Rede.

Aber so erfreulich solche Resultate sein mögen, unseren tieferen theoretischen Wissenstrieb lassen sie unbefriedigt. Sie lehren nur die ausreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit nach Fourierschen Reihen in dieser oder jener Richtung hinausschieben, aber das Grundproblem, ob die Entwickelbarkeit unter Umständen schon bei den stetigen Functionen oder erst bei den integrirbaren, oder gar bei diesen auch noch nicht aufhöre, bleibt unberührt.

Und doch ist der von uns eingeschlagene Weg, besondere Functionenformen auf ihre Darstellbarkeit zu untersuchen, der einzige, auf dem man hoffen kann, jene Frage zu erledigen.

Zum Glück zeigt es sich denn auch, dass nur noch ein Schritt in der eingeschlagenen Richtung erforderlich ist, um die Grenze der Darstellbarkeit zu erreichen.

IV. Capitel.

Darstellung der Bedingungen, unter denen die Fourierschen Reihen divergiren.

34. Auseinandersetzung des Grundgedankens dieser Untersuchung.

Betrachten wir das Integral:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

setzen $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$, $\psi(\alpha) > 1$, und nehmen h schon sehr gross an, so kann man es in drei Theile zerfallend sich denken:

$$\int_0^{\alpha_0} \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \quad \int_{\alpha_1}^{a}$$

die folgende Beschaffenheit haben: Im ersten ist $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}$ sehr gross gegen h, im dritten ist h sehr gross gegen $\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}$, das mittlere enthält den Punct $\psi(\alpha) = \alpha h$, somit auch die grösste Strecke, in der beim Wachsthum von h, periodisch wiederkehrend, keine Zeichenwechsel der Function $f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ stattfinden, oder doch abwechselnd die positiven und die negativen Werthe dieser Function weitaus überwiegen. Nehmen wir an, dass $\varrho(\alpha) > \tau(\alpha)$, oder dass

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$$

nicht convergent ist, welches die einzige Annahme ist, unter der man Divergenz des $\text{Limes}_{h=\infty}$ von

$$\int_0^a d\alpha\varrho(\alpha)\ \sin\psi(\alpha)\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

überhaupt erwarten kann, so wird solche Divergenz auch nur von der Strecke ohne Zeichenwechsel im mittleren Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ herrühren können. Unsere Untersuchung des Limes

$$\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\ \sin\psi(\alpha)\ \sin\alpha h$$

hat nun ergeben, dass für $\varrho(\alpha) < 1$

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varrho(\alpha)\ \sin\psi(\alpha)\ \frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

immer verschwindet. Greift man also aus dem mittleren Integral $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ die Strecke ohne Zeichenwechsel heraus:

$$\int_{\alpha'_0}^{\alpha'_1} d\alpha\varrho(\alpha)\ \sin\psi(\alpha)\ \frac{\sin\alpha h}{\alpha} = [\sin\psi(\alpha)\ \sin\alpha h]\int_{\alpha'_0}^{\alpha'_1} d\alpha\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$$

so ist offenbar $\alpha'_1 - \alpha'_0$ so klein, dass

$$\lim\ (\alpha'_1 - \alpha'_0)\ \frac{\varrho(\overline{\alpha})}{\overline{\alpha}}\ ,\ \alpha'_0 \leqq \overline{\alpha} \leqq \alpha'_1$$

verschwindet, wenn h unendlich wird. Die Strecke ohne Zeichenwechsel, d. i. die Strecke, in der $\psi(\alpha)$ und αh nahebei gleich sind, ist also offenbar zu klein, um Divergenz erzeugen zu können, und da die Curven $y = \psi(x)$, $y = xh$ die eine wachsend, die andere abnehmend sich kreuzen, so kann sie nicht anders als sehr klein sein. Um diese Strecke zu vergrössern, wird man an Stelle der gegen $\alpha = o$ hin nur wachsenden Function $\psi(\alpha)$ eine Function $\Psi(\alpha)$ einzuführen haben, die bei gegen Null abnehmendem α unendlich wird, aber in der Weise, dass sie, nachdem sie gewachsen ist, stets wieder eine Strecke abnimmt, um dann wieder zu wachsen, jedoch um ein grösseres Stück, als das, um welches sie eben abgenommen hatte; kurzum eine Function, die mit unendlich vielen Maximis unendlich wird. Wenn der Punct, für den $\Psi(\alpha) = h\alpha$ ist, einer Strecke angehört, in der $\Psi(\alpha)$ mit α abnimmt, so wird es möglich sein, dass längs dieser Strecke die Differenz $\Psi(\alpha) - \alpha h$ durchweg sehr klein bleibt, und der Projection dieser Strecke auf die αAxe wird ein möglichst grosses Stück $\alpha_0' \ldots \alpha_1'$ ohne Zeichenwechsel von $\sin \Psi(\alpha) \sin \alpha h$ entsprechen (Taf. III, die Fig. rechts).

Es liegt also nahe, nachdem man den $\text{Limes}_{h=\infty}$ von

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

für eine Function $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ untersucht hat, in der $\psi(\alpha)$ nur wachsend unendlich wird, zu setzen:

$$f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin\Big(u + v \sin \psi(\alpha)\Big)$$

und obigen Limes für diese Function zu discutiren, in der man u, v und ψ für $\alpha = o$ unendlich werdend abnimmt. Wer jedoch die vorstehende Untersuchung des $\lim \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ gelesen hat, wird mir gern glauben, dass die entsprechende Untersuchung für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin\Big(u + v \sin \psi(\alpha)\Big)$, so hoch unstreitig ihr Interesse sein würde, dennoch zu einem unmöglichen Umfang anwachsen müsste.

Ich habe daher vorgezogen, das Problem in einer Weise zu schematisiren, die uns bezüglich etwaiger Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln verhältnissmässig leicht ebenso viel lehrt, als wir aus der Untersuchung von lim J für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin\Big(u + v \sin \psi(\alpha)\Big)$ erfahren könnten, wenngleich ich gern zugeben will, dass die Ergebnisse dieser letzteren Untersuchung insofern allgemeiner als die der unten angestellten werden müssten, als sie, abgesehen von der Erledigung der Divergenzfrage, die nothwendigen Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function durch Fouriersche Reihen noch erheblich weiter hinaus, als durch unsere bisherigen Untersuchungen geschehen, und gerade mitten in ein höchst interessantes Functionengebiet hineinrücken würden.

35. Beschreibung der einzuführenden schematisirten Function.

Unsere Schematisirung des Divergenzproblems besteht in folgender Definition der in $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ auftretenden Function $\Psi(\alpha)$. Ein Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$, wo wir $x_0 \geqq a$ annehmen wollen, zerlegen wir in die Theile

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_0 - x_1 \\ \Delta_2 &= x_1 - x_2 \\ &\dots\dots \\ \Delta_{p+1} &= x_p - x_{p+1} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

mit der Bestimmung, dass:

$$x_0 > x_1 > x_2 \dots,$$
$$\Delta_1 > \Delta_2 > \dots,$$

und dass $x_\infty = 0$, also $\Delta_\infty = 0$, mithin

$$x_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots \text{ in infin.}$$

sei.

Nun sei die Function $\Psi(\alpha)$

$$\begin{array}{llll} \text{gleich } h_1\alpha & \text{im} & \text{Intervall} & x_1 \dots a \\ \quad ,, \quad h_2\alpha & ,, & ,, & x_2 \dots x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

wo $h_1 < h_2 < \dots$ und $h_\infty = \infty$. Bestimmt man endlich die Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ und die Grössen $h_1, h_2 \dots$ so, dass die Producte $h_p x_p, h_p x_{p-1}$ mit p unendlich werden, so ist $\Psi(\alpha)$ eine mit unendlich vielen Maximis — die hier in Spitzen ausarten — unendlich werdende Function, wie sie in der Fig. links Taf. III dargestellt ist. $\Psi(\alpha)$ springt für $\alpha = x_1, x_2, \dots$ und zwar resp. um $(h_2 - h_1)x_1, (h_3 - h_2)x_2, \dots$. Um von dem Gang der Function $\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ oder einfacher vom Gang von $\sin \Psi(\alpha)$ eine Vorstellung zu gewinnen, nennen wir Dichtigkeit der Maxima einer Function f(x) an der Stelle $x = x'$ die Längeneinheit dividirt durch die Summe der Entfernungen des x' von den beiden nächsten Maximis von f(x), bei welcher Definition die Dichtigkeit der Maxima eine stetige Function von x' ist. Hiernach ist die Dichtigkeit der Maxima von sin αh bei der Veränderung von α constant. Die Dichtigkeit der Maxima von sin $\Psi(\alpha)$ ist in jedem Intervall Δ oder $(x_{p+1} < \alpha < x_p)$ constant.

Nun springt $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ im Allgemeinen ebenfalls, wenn α einen Werth x_p passirt. Ich werde unten zeigen, dass es möglich ist, nicht allein $f(\alpha)$ sammt einer beliebigen endlichen Anzahl Differentialquotienten stetig zu erhalten, sondern in Gebiet $o < \alpha \leqq a$ sammt allen ihren Differentialquotienten. Ich will indessen gleich anführen, worauf mich Herr Weierstrass aufmerksam gemacht hat, dass, wenn man nur wünscht, $f(\alpha)$ selbst stetig zu erhalten, dies am einfachsten erreicht wird, indem man die an den Sprungstellen aneinanderstossenden Werthe $h_{p+1}x_p$ und $h_p x_p$ von $\Psi(\alpha)$ als Vielfache von π bestimmt. Z. B. nach der sofort einzuführenden Festsetzung über die $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ und $h_1, h_2, \cdots$ ist

$$x_p h_{p+1} = x_{p+1}^{-1}\,,\quad x_p h_p = x_{p-1}^{-1}\,,\quad x_p = \frac{x_0}{\prod\limits_{0}^{p-1}(2q+1)}\,.$$

Hier braucht man also nur $x_0 \pi = 1$ anzunehmen.

Um das erstrebte Resultat, nämlich die Divergenz des

$$\lim \int_0^a d\alpha\ \varrho(\alpha)\ \sin\ \Psi(\alpha)\ \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

besonders augenfällig zu machen, verfügen wir über die Grössen $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots$ in folgender Weise.

Wir setzen:

$$\begin{array}{llll}
\Delta_1 = x_0 - x_1 & = x_1 & & h_1 = \dfrac{1}{x_0 x_1} \\[2ex]
\Delta_2 = x_1 - x_2 & = 2x_2 & & h_2 = \dfrac{1}{x_1 x_2} \\[2ex]
\Delta_3 = x_2 - x_3 & = 4x_3 & & . \\
. \quad . \quad . & . \quad . & & . \\
\Delta_{p+1} = x_p - x_{p+1} & = 2^p x_{p+1} & & h_{p+1} = \dfrac{1}{x_p x_{p+1}}\,.
\end{array}$$

Aus dem System links folgt:

$$x_p = \frac{x_0}{\prod\limits_{0}^{p-1}(2^q+1)}\,.$$

36. Es wird zuerst die Divergenz des $\lim \int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ **nachgewiesen.**

Wir betrachten zuerst das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

zerlegen es in die Theile:

$$\int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^a,$$

und setzen $h = h_p$. Das dritte Integral kann geschrieben werden:

$$\int_{x_{p-1}}^a d\alpha \sin \psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \sum_{q=1}^{q=p-1} \int_{x_q}^{x_{q-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin \alpha h_q \sin \alpha h_p$$

$$= \sum_{q=1}^{q=p-1} \left\{ \frac{1}{x_q} \left| \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q} \right|_{x_q}^{\xi} + \frac{1}{x_{q-1}} \left| \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q} \right|_{\xi}^{x_{q-1}} \right\}$$

falls a der Kürze halber gleich x_0 angenommen wird, und unter Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes. Es ist ferner:

$$\frac{1}{h_p \pm h_q} = \frac{1}{h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}$$

und der grösste Werth von $\frac{h_q}{h_p}$ ist $\frac{h_{p-1}}{h_p} = \frac{x_p}{x_{p-2}} = \frac{1}{(2^{p-1} + 1)(2^{p-2} + 1)}$.

Die Coefficienten der Sinus unter dem Summenzeichen haben die Form

$$\frac{1}{x_q h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_p}}, \quad \frac{1}{x_{q-1} h_p} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_q}{h_q}}.$$

Da die Summe über $p - 1$ Summanden sich erstreckt, $x_q < x_{q-1}$, $\frac{h_q}{h_p} < 1$ ist, so wird jedenfalls die ganze Summe verschwinden, wenn

$\frac{p}{x_q h_p}$, $q = p - 1$ gesetzt, für $p = \infty$ verschwindet. Wegen $h_p = \frac{1}{x_p x_{p-1}}$ ist aber

$$\frac{p}{x_{p-1} h_p} \doteq p x_p = \frac{a p}{\prod\limits_{0}^{p-1} (2^q + 1)}$$

und verschwindet allerdings für $p = \infty$. Untersuchen wir zweitens das erste Integral:

$$\int\limits_0^{x_p} d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \sum_{q=p}^{q=\infty} \int\limits_{x_{q+1}}^{x_q} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin \alpha h_{q+1} \sin \alpha h_p$$

$$= \sum_{q=p}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{x_{q+1}} \Bigg|_{x_{q+1}}^{\xi} \frac{\sin \alpha (h_{q+1} - h_p)}{h_{q+1} - h_p} - \frac{\sin \alpha (h_{q+1} + h_p)}{h_{q+1} + h_p} + \frac{1}{x_q} \Bigg|_{\xi}^{x_q} \frac{\sin \alpha (h_{q+1} - h_p)}{h_{q+1} - h_p} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \alpha (h_{q+1} + h_p)}{h_{q+1} + h_p} \right\},$$

so kommt es wieder auf die Abschätzung der Grösse:

$$\frac{1}{x_{q+1} h_{q+1}} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{h_p}{h_{q+1}}}$$

an, wenn $p, p + 1, \ldots$ statt q gesetzt wird. Der grösste Werth von $\frac{h_p}{h_{q+1}}$ ist wieder $\frac{h_p}{h_{p+1}} = \frac{x_{p+1}}{x_{p-1}} = \frac{1}{(2^p + 1)(2^{p-1} + 1)}$. Ferner ist

$$\frac{1}{x_{q+1} h_{q+1}} = x_q = \frac{a}{\prod\limits_{0}^{q-1} (2^r + 1)}.$$

Eine Reihe der Form:

$$x_p u_0 + x_{p+1} u_1 + x_{p+2} u_2 + \cdots$$

werden wir schreiben können:

$$\frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1} (2^q + 1)} \left\{ u_0 + \frac{u_1}{2^p + 1} + \frac{u_2}{(2^p + 1)(2^{p+1} + 1)} + \cdots \right\},$$

und, falls die u endlich bleiben, verschwindet die Reihe, wenn p unendlich wird, somit auch die obige Summe, in die wir das Integral

$$\int_{0}^{x_p} d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$$

transformirt hatten.

Betrachten wir endlich das mittlere Integral:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha} = \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{(\sin \alpha h_p)^2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Big|_{x_p}^{x_{p-1}} \log \alpha - \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{\cos 2h_p\alpha}{\alpha} d\alpha .$$

Es ist

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\cos 2h_p\alpha}{\alpha} = \frac{1}{x_p h_p} \int_{x_p h_p}^{\xi} d\alpha \cos 2\alpha + \frac{1}{x_{p-1} h_p} \int_{\xi}^{x_{p-1} h_p} d\alpha \cos 2\alpha$$

Wegen $\frac{1}{x_p h_p} = x_{p-1}$, $\frac{1}{x_{p-1} h_p} = x_p$ verschwindet für $p = \infty$ das Integral links. Der letzte Bestandtheil des ursprünglichen Integrals $\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, der noch zu betrachten ist:

$$\frac{1}{2} \Big|_{x_p}^{x_{p-1}} \log \alpha = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{2^{p-1} x_p}{x_p}\right) = \frac{1}{2} \log (1 + 2^{p-1})$$

wird mit p unendlich.

37. Alsdann wird eine hinreichend langsam Null werdende Function eingeführt, damit auch $\lim \int_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ divergirt.

Wir haben also im vorigen Art. gesehen, dass das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^{a} ,$$

wenn h ins Unbegrenzte wächst, ebenfalls ohne Ende wiederkehrend Werthe annimmt, die ins Unbegrenzte wachsen. Der erste und der dritte Theil rechts nähern sich der Null und auch ein Theil des mittleren Integrals, während der andere Theil des mittleren Integrals gleich $\frac{1}{2}\log(1+2^{p-1})$ wird, so oft h bei seinem Wachsen einen der Werthe h_p passirt. Führen wir jetzt wieder $\varrho(\alpha)$ unter dem Integral ein, betrachten also:

$$\int_0^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \sin \Psi(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^{a}$$

so ist es klar, dass, falls $\varrho(\alpha) < 1$, das erste und dritte Integral und der Theil:

$$-\frac{1}{2}\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} \cos 2h_p\alpha$$

des mittleren Integrals wieder und zwar a fortiori verschwinden, wenn p unendlich wird, weil bei Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes wir jetzt $\frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$, statt wie oben $\frac{1}{\alpha}$ vor die Integrale nehmen dürfen. Der Theil des mittleren Integrals, welcher unendlich werden soll, lautet:

$$\frac{1}{2}\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{2}\varrho(\xi)\, \log(1+2^{p-1})\,,\quad x_p \leqq \xi \leqq x_{p-1}\ .$$

Dieser Ausdruck ist grösser als $\varrho(x_p)\log(1+2^{p-1})$.

Wir haben also $\varrho(x)$ so anzunehmen, dass

$$\varrho\left[\frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1}(2^q+1)}\right] \log(1+2^{p-1}) > 1\ ,$$

wenn eben $\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha}$ mit p unendlich werden soll.

Setzen wir:

$$\frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1}(2^q+1)} = \frac{a}{\prod\limits_{0}^{p-1}2^q\prod(1+2^{-q})} = \alpha$$

so folgt:

$$\frac{1}{\prod\limits_{0}^{p-1}2^q} = 2^{-p(p-1)} \sim \alpha$$

oder

$$p \sim \sqrt{\log\frac{1}{\alpha}}$$

Da nun $\log(1+2^{p-1}) \sim p$, so ist ϱ so zu bestimmen, dass

$$1 > \varrho(\alpha) > \frac{1}{\sqrt{\log\frac{1}{\alpha}}} .$$

Falls $\varrho(\alpha)$ dieser Bedingung genügt, ist

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\varrho(\alpha)\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

divergent.

38. Untersuchung der Frage, wie stark das Integral $\int_0^a d\alpha\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$ bei seiner Divergenz mit h unendlich wird.

Es ist noch von Interesse, das Unendlich des vorstehenden Limes zu bestimmen, mit andern Worten die am langsamsten Null werdende Function $\varphi(h)$ zu ermitteln, mit der multiplicirt, vorstehendes Integral endlich bleibt, wenn h unendlich wird, wobei wir der Einfachheit halber $\varrho(\alpha) = 1$ annehmen wollen. Es bleibt ohne Zweifel endlich das Product:

$$\frac{1}{\log(1+2^{p-1})}\int_0^a d\alpha\,\sin\Psi(\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha},$$

wenn p und h verbunden sind durch die Relation:

$$h = \frac{1}{x_p x_{p-1}} = \frac{1}{a^2} \prod_0^{p-1} (2^q + 1) \prod_0^{p-2} (2^q + 1) \sim 2^{p(p-1)+(p-1)(p-2)}$$

woraus folgt:

$$p \sim \sqrt{\log h}\,,$$

so dass das Product:

$$\frac{1}{\sqrt{\log h}} \int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

endlich bleibt, wenn h unendlich wird.

39. Verallgemeinerung des Functionen-Schema $\Psi(x)$.

Wir wollen noch die schematisirte Function $\Psi(x)$ nach allgemeineren Principien zusammensetzen, indem wir uns die Frage vorlegen, wie die $x_1, x_2, \ldots$ und $h_1, h_2 \ldots$ überhaupt zu bestimmen sind, damit das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zwischen unendlichen Grenzen schwanke, wenn h unendlich wird.

Setzen wir zunächst:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_0 - x_1 &&= u_0 x_1 \\ \Delta_2 &= x_1 - x_2 &&= u_1 x_2 \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Delta_{p+1} &= x_p - x_{p+1} &&= u_p x_{p+1} \end{aligned}$$

so folgt aus diesem System:

$$x_p = \frac{x_0}{(1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_{p-1})}\,.$$

Falls also $\prod_0^\infty (1 + u_p) = \infty$ ist, hat man:

$$x_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots \text{ in infin.}$$

Beiläufig bemerkt, erhält man durch Addition des obigen Systems:

$$x_0 - x_{p+1} = u_0 x_1 + u_1 x_2 + \cdots u_p x_{p+1}$$

$$= x_0 \left\{ \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{u_1}{(1+u_0)(1+u_1)} + \cdots \frac{u_p}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_p)} \right.$$

woraus für $p = \infty$ folgt:

$$1 = \frac{u_0}{1+u_0} + \frac{u_1}{(1+u_0)(1+u_1)} + \cdots \frac{u_p}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_p)}$$

ein (lediglich an die Bedingung $\prod\limits_0^\infty (1 + u_p) = \infty$ gebundener) Satz, den ich mich nicht erinnere, erwähnt gefunden zu haben, und der gelegentlich nützlich sein kann. Für $1 + u_0 = 1 + u_1 = \cdots = x$ folgt daraus die gemeine geometrische Reihe.

Für unsere Zwecke muss der $\log\left(1 + \frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}\right)$ oder die Grösse $\frac{x_{p-1} - x_p}{x_p}$, d. i. die Grösse u_p mit p unendlich werden. Man hat also zuerst:

$$u_p > 1 .$$

Weiter muss sein $\lim \frac{h_{p-1}}{h_p} < 1$. Drittens muss sein

$$\frac{p}{x_p h_p} < 1 .$$

Endlich muss die Reihe

$$\sum_p^\infty \frac{1}{x_p h_p}$$

für $p = \infty$ verschwinden, d. i. die Reihe

$$\frac{1}{x_1 h_1} + \frac{1}{x_2 h_2} + \cdots$$

convergent sein. Unter diesen vier Bedingungen wird der $\lim_{h=\infty}$ $\int\limits_0^a d\alpha \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, wenn $\varrho(\alpha)$ hinreichend langsam Null wird, divergiren. Nach dem Olivier-Abelschen Satz muss $\lim \frac{p}{x_p h_p}$

Null sein, wenn die Reihe mit dem Gliede $\frac{1}{x_p h_p}$ convergiren soll. Setzt man also

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p}$$

und wie oben

$$x_{p-1} - x_p = u_{p-1} x_p$$

so reduciren sich die Bedingungen für die u und v auf diese:

1. $\lim u_p = \infty$.
2. v_p ist das Glied einer absolut convergenten Reihe.

Denn die Bedingung $\lim \frac{h_{p-1}}{h_p} < 1$, welche lautet:

$$\lim \frac{v_p}{v_{p-1}} \frac{1}{1 + u_{p-1}} < 1$$

ist schon durch 1. erfüllt.

40. Ueber die allgemeinere Frage: Wie rasch kann überhaupt das Integral $\int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ mit h unendlich werden.

Um nun schliesslich die hieraus entspringende Frage zu erledigen, wie rasch überhaupt das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

mit h unendlich werden kann, so hat man zu benützen, dass

$$\frac{\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}}{l(1 + u_{p-1})}$$

endlich bleibt. Wir haben:

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p} = \frac{1}{x_0 v_p}(1 + u_0)(1 + u_1) \cdots (1 + u_{p-1}) ,$$

und dürfen $x_0 = 1$ annehmen. Die Aufgabe ist aus der Beziehung

$$\frac{\prod\limits_{0}^{p-1}(1 + u_q)}{v_p} = h$$

das grösstmögliche Unendlich von $l(1 + u_{p-1}) = \lambda(h)$ darzustellen, welches entsteht, wenn den u_q und v_p alle ihnen durch die oben gefundenen Bedingungen (dass u_p mit p zugleich beliebig rasch unendlich werde, und dass v_p das Glied einer unbedingt convergenten Reihe sei) gestatteten Formen ertheilt werden.

Nimmt man die Logarithmen an beiden Seiten und bringt die Gleichung in diese Form:

$$l(1 + u_{p-1}) = lh - \left\{\sum_{1}^{p-2} l(1 + u_q) + l\frac{1}{v_p}\right\}$$

so sieht man zunächst, dass $l(1 + u_{p-1})$ jedenfalls nicht $>$ lh sein kann. Sehen wir zu, ob es $\backsim$ lh gedacht werden darf.

Man schreibe der Kürze halber:

$$l(1 + u_{q-1}) = w_q \ , \ v_p = \gamma_p \frac{\tau(p)}{p} \ , \text{ wo } \gamma_p < 1 \ ,$$

und bringe obige Gleichung in die Form:

$$w_p \left\{ 1 + \frac{\sum\limits_{1}^{p-1} w_q}{w_q} + \frac{1}{w_p}\, l\frac{p}{\tau(p)\gamma_p} \right\} = lh \ .$$

Um das Resultat $w_p \backsim lh$ zu erhalten, ist es am günstigsten, das Unendlich der Glieder in der Klammer links zu verkleinern. Wir nehmen das Unendlich von γ_p^{-1} so klein an, dass $l\frac{p}{\tau(p)\gamma_p} \backsim lp$. Wird jetzt noch angenommen $w_p \backsim e^{Mp}$, so ist der Limes des zweiten Gliedes in der Klammer (dem im Falle $w_p = e^{Mp}$ die Form $\frac{e^{Mp} - e^M}{e^M - 1}$ ertheilt werden kann) ein endlicher. Der des dritten Gliedes ist es natürlich auch, es ist also für $w_p \gtrsim e^{Mp}$ auch $w_p \backsim lh$.

Daher lh wirklich das grösstmögliche Unendlich jenes Integrals:

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

vorstellt.

Somit wird das Integral

$$J = \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

falls $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ gesetzt wird, und $\varrho(\alpha) < 1$, durch lh dividirt, stets den Limes Null haben, wird aber durch $\lambda(h) < lh$ dividirt, einen unbestimmten Limes haben können.

Dies Resultat wird auf eine beliebige integrirbare Function $f(\alpha)$ auszudehnen sein, weil keine Function möglich ist, die ein rascheres (periodisch wiederkehrendes) Wachsen des Integrals ergeben könnte, als die in diesem Artikel abgeleitete $\sin \Psi(\alpha)$.

Jetzt lässt sich auch feststellen, bei einer wie kleinen Null von $\varrho(x)$ in $f(x) = \varrho(x)\varphi(x)$, $\lim_{x=0} \varphi(x)$ von Null und unendlich verschieden angenommen, zuerst divergente Fouriersche Reihen auftreten. Aehnlich wie Art. 37 hat man für $\varrho(x)$ die Bedingung zu erfüllen: $\varrho(x_p)\, l(1 + 2^{p-1}) \dot{>} 1$, wo $x_p \cdot \prod_0^{p-1}(1 + u_{p-1}) = x_0$ ist. Setzen wir ferner $\varrho(x) = r(lx)$, so haben wir: $r\left(\sum_1^{p-1} w_q\right) l(1 + 2^{p-1}) > 1$, oder, wenn das Integral mit $\sin \Psi(\alpha)$ wie lh unendlich werden soll, muss sein: $r(w_p)\, l(1 + 2^{p-1}) > 1$. Nun ist festzustellen, für welche am langsamsten unendlich werdenden Functionen w_p man $w_p \sim \sum_0^p w_p$ hat. Führt man statt der Reihe ein Integral ein, so findet man leicht $w_p = e^{\mu p}$, woraus $\varrho(e^{\mu p}) \cdot p > 1$, und endlich: $\varrho(\alpha) > \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ sich ergiebt.

Während also in den Art. 37, 38 für das endlich bleibende Verhältniss $\frac{1}{\sqrt{\text{lh}}}\int\limits_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ gefunden wurde $\varrho(\alpha) > \frac{1}{\sqrt{\text{l}\frac{1}{\alpha}}}$, so hier für den endlichen Limes $\frac{1}{\text{lh}}\int\limits_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ die Bedingung $\varrho(\alpha) > \frac{1}{\text{l}\frac{1}{\alpha}}$.

Und für irgend eine Function $f(x) = \varrho(x)\varphi(x)$ (wo $\varphi(x) \sim 1$), wird man Divergenz des Integrals J erst für $\varrho(x)\,\text{l}\frac{1}{x} > 1$ erwarten können.

41. Stetigmachung der schematisirten Function Ψ. Sie wird zunächst mit beliebig vielen Differentialquotienten stetig gemacht.

Nun sei $\Psi_1(\alpha)$ eine Function, die sonst überall gleich $\Psi(\alpha)$ ist, und die nur in den Intervallen $(x_p - \varepsilon_p \ldots x_p + \varepsilon'_p)$ anders bestimmt werden soll. So hat man:

$$\int\limits_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \sin \Psi_1(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \int\limits_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=\infty} \int\limits_{x_p - \varepsilon_p}^{x_p + \varepsilon'_p} d\alpha \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha h \left\{ \sin \Psi_1(\alpha) - \sin \Psi(\alpha) \right\},$$

wenn man der Bequemlichkeit halber annimmt $x_1 + \varepsilon'_1 < a < x_0 - \varepsilon_0$.

Die Summe rechts können wir schreiben:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{W_p(\varepsilon_p + \varepsilon'_p)}{x_p - \varepsilon_p} = \sum_{p=1}^{p=\infty} (\varepsilon_p + \varepsilon'_p) \frac{\varrho(\bar\alpha)}{\bar\alpha} \sin \bar\alpha h \left\{ \sin \Psi_1(\bar\alpha) - \sin \Psi(\bar\alpha) \right\}, x_p - \varepsilon_p \leqq \bar\alpha \leqq x_p + \varepsilon'_p$$

wo W_p endlich bleibt auch für $p = \infty$. Nun kann man aber ε_p und ε'_p stets so wählen, dass die vorstehende Summe endlich bleibt. Natürlich muss $\varepsilon_p < x_p$ angenommen werden, und setzen wir noch $\varepsilon_p = \varepsilon'_p$, so braucht nur $\Sigma \frac{\varepsilon_p}{x_p}$ endlich zu sein, was vollauf erreicht wird, wenn man z. B. $\varepsilon_p = x_p^2$ setzt. Dann also geht aus der Gleichheit Eingangs dieses Art. hervor, dass die Integrale

$$\int_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \sin \Psi_1(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} \quad , \quad \int_0^a d\alpha\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

beide mit h unendlich werden, während die Function $\Psi_1(\alpha)$ in den Intervallen $(x_p - \varepsilon_p \ldots . x_p + \varepsilon_p)$ noch ganz beliebig ist. In diese Intervalle fallen die Sprünge der Function $\Psi(\alpha)$ und wir können nun ohne Weiteres die Function $\Psi_1(\alpha)$ so annehmen, dass nicht allein sie sondern auch beliebig viele ihre Differentialquotienten im ganzen Intervall $x_p - \varepsilon_p \leqq \alpha \leqq x_p + \varepsilon_p$ stetig sind, wie dies aus der Interpolationstheorie bekannt ist. Es sei z. B. die Stetigkeit von $\Psi_1(\alpha)$ und von m Differentialquotienten dieser Function im Intervall $x_p - \varepsilon_p \leqq \alpha \leqq x_p + \varepsilon_p$ verlangt, so setzen wir in diesem Intervall:

$$\Psi_1(\alpha) = S_p(\alpha) = a_0^{(p)} + \alpha a_1^{(p)} + \alpha^2 a_2^{(p)} + \ldots \alpha^n a_n^{(p)}$$

Für $\alpha > x_p + \varepsilon_p$ ist zunächst $\Psi_1(\alpha) = h_p\alpha$, für $\alpha < x_p - \varepsilon_p$ ist zunächst $\Psi_1(\alpha) = h_{p+1}\alpha$. Man hat also die Coefficienten $a_q^{(p)}$ in $S_p^{(\alpha)}$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} S_p(x_p - \varepsilon_p) &= h_{p+1}(x_p - \varepsilon_p) \\ S_p(x_p + \varepsilon_p) &= h_p(x_p + \varepsilon_p) \\ S_p'(x_p - \varepsilon_p) &= h_{p+1} \\ S_p'(x_p + \varepsilon_p) &= h_p \\ S_p^{(r)}(x_p \pm \varepsilon_p) &= o \; ; \; r = 2, 3, .. m . \end{aligned}$$

Da dies $2m + 2$ Gleichungen sind, so darf n nicht kleiner als $2m + 1$ sein. (Siehe die Figur links, Taf. III.)

42. Stetigmachung der Function Ψ. Sie wird durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt. Vorbereitung.

Schliesslich wollen wir noch zeigen, wie man eine Function $\Psi_2(\alpha)$ an die Stelle von $\Psi(\alpha)$ setzen kann, die im Intervall $o < \alpha \leqq a$ mit allen ihren Differentialquotienten stetig ist.

Während wir im vorigen Art. die bei Annäherung an $\alpha = o$ unbegrenzt oft springende Function $\Psi(\alpha)$ durch eine stetige Function $\Psi_1(\alpha)$ in der Weise ersetzt haben, dass wir in die Function $\Psi(\alpha)$ in der Umgebung der Sprungstellen stetig sich ändernde Strecken einfügten, so wollen wir jetzt anders verfahren. Man kann die unstetige Function nach der von Fourier herrührenden Methode durch darstellende Formeln ausdrücken, wobei die unstetige Function als Grenze einer stetigen sich darbietet, in deren analytischem Ausdruck ein Parameter einen Grenzwerth erhält. Setzt man z. B.

$$f(x,k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^b d\alpha\,\varphi(\alpha)\,k e^{-k^2(\alpha-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{k(a-x)}^{k(b-x)} d\alpha\,\varphi\left(x+\frac{\alpha}{k}\right)e^{-\alpha^2},$$

so erhält $\lim_{k=\infty} f(x,k)$ für $a < x < b$ den Werth $\varphi(x)$, und, wenn x ausserhalb dieses Intervalls liegt, den Werth Null.

Betrachten wir ferner dies Integral:

$$\psi_p(x,k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\,\alpha h_p \cdot k\varkappa_p e^{-k^2\varkappa^2_p(\alpha-x)^2},$$

welches in das erstere durch Vertauschung von $\alpha h_p, k\varkappa_p, x_{p-1}, x_p$ mit $\varphi(\alpha)$, k, a, b übergeht, so wird es im Intervall $x_p < \alpha < x_{p-1}$ gleich xh_p, ausserhalb Null werden, wenn k (und damit zugleich kx_p) unendlich wird. Bildet man dann weiter die Summe:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \psi_p(x, k)$$

so kann man darin erstens, wie ich sofort zeigen werde, die $\varkappa_p$ stets so bestimmen, dass die Reihe convergirt und unbegrenzt oft nach x differenzirbar ist. Eine Reihe mit dem Gliede $U_p = u_p e^{-v_p}$ convergirt u. A. wenn:

$$\lim\left[v_{p+1} - v_p - (lu_{p+1} - lu_p)\right] > 0$$

ist. (Um dies zu beweisen, bilde man $\frac{U_{p+1}}{u_p}$ mit $U_p = e^{-(v_p - \log u_p)}$.)

Nun geben wir, indem wir die Bestimmungen des Art. 35 hinsichtlich der Grössen x_p, h_p festhalten, $\psi_p(x,k)$ die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{p-1}x_p\bar{\alpha}h_p \cdot k\varkappa_p e^{-k^2\varkappa^2_p(\bar{\alpha}-x)^2}, \quad x_p \leqq \bar{\alpha} \leqq x_{p-1}.$$

Es ist $x_p x_{p-1} h_p = 1$, und da $\bar{\alpha} \leqq x_{p-1}$ ist, so ist vorstehender Ausdruck höchstens:

$$\sim 2^p \varkappa_p e^{-k^2 \varkappa^2 p (\bar{\alpha} - x)^2} .$$

Die Grösse $(\bar{\alpha} - x)^2$ nähert sich mit unendlich werdendem p wachsend der Grenze x^2, also reducirt sich die Behufs der Convergenz der Reihe $\Sigma\psi_p(x, k)$ zu erfüllende Bedingung:

$$\lim \left\{ k^2 \varkappa_{p+1}^2 (\bar{\alpha} - x)_{p+1}^2 - k^2 \varkappa_p^2 (\bar{\alpha} - x)_p - \left(\log 2 + \log \frac{\varkappa_{p+1}}{\varkappa_p} \right) \right\} > 0$$

auf:

$$k^2 x^2 \lim(\varkappa_{p+1}^2 - \varkappa_p^2) + k^2 \lim \varkappa_{p+1}^2 \left[(\bar{\alpha} - x)_{p+1}^2 - (\bar{\alpha} - x)_p^2 \right] \lim\left(\log 2 + \log \frac{k_{p+1}}{\varkappa_p} \right) > 0$$

welche z. B. für $\varkappa_p = p$ erfüllt ist. Dies würde sie auch sein, wenn wir irgend einen n ten Differentialquotienten von $\psi_p(x, k)$ genommen hätten statt dieser Grösse selbst. In der letzten Klammer hätte der $\log \frac{\varkappa_{p+1}}{\varkappa_p}$ den Factor $2n + 1$ erhalten. So dass allerdings $\Sigma\psi_p(x, k)$ beliebig oft differenzirbar ist.

Im Ganzen hat also $\sum\limits_{p=q}^{p=\infty} \psi(x, k)$ die Eigenschaften: erstens zu convergiren, zweitens sammt unbegrenzt vielen Differentialquotienten eine stetige Function von x zu sein, drittens für $k = \infty$, falls x zwischen x_r und x_{r-1} liegt, wo $r - 1 \geqq q$, den Grenzwerth xh_r anzunehmen.

43. Stetigmachung etc. Einführung der mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetigen Function.

Dies festgestellt, wollen wir die Function $\Psi_2(x)$ auf folgende Weise bestimmen. Sie unterscheidet sich von der eben discutirten Summe nur dadurch, dass auch k in jedem Gliede verschieden ist. Indem jedoch $k_1 < k_2 < \ldots$ angenommen wird, hat die Summe

$$\Psi_2(x) = \Sigma\psi_p(x, k_p)$$

die eben hervorgehobenen drei Eigenschaften ebenfalls. Die k_p bestimmen wir so. Wir unterscheiden die Intervalle

$$\ldots (x_3 + \varepsilon_3 \ldots x_2 - \varepsilon_2) , (x_2 + \varepsilon_2 \ldots x_1 - \varepsilon_1) , (x_1 + \varepsilon_1 \ldots x_0 - \varepsilon_0) ,$$

die wir mit $\ldots i_3, i_2, i_1$ bezeichnen und diese:

$\cdots(x_3 - \varepsilon_3 \cdots x_3 + \varepsilon_3)$, $(x_2 - \varepsilon_2 \cdots x_2 + \varepsilon_2)$, $(x_1 - \varepsilon_1 \cdots x_1 + \varepsilon_1)$, $(x_0 - \varepsilon_0 \cdots x_0)$ die wir mit $\ldots j_3$, j_2 , j_1 , j_0 bezeichnen.

Irgend eine der Grössen $\psi_p(x, k)$ ist in Bezug auf ihre Veränderung mit x beschaffen wie folgt. Bilden wir den Differentialquotienten:

$$\frac{d\psi_p(x, k)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \alpha h_p \,.\, k^3 \varkappa_p^3 (\alpha - x) e^{-k^2 \varkappa^2_p (\alpha - x)}$$

so ist er positiv in sämmtlichen Intervallen i_{p+1} , i_{p+2} , $\cdots$ negativ in den Intervallen i_{p-1} , i_{p-2} , $\cdots$

Jetzt bestimmen wir eine Grösse k_p so, dass $\psi_p(x, k_p) - xh_p$ im Intervall i_p numerisch kleiner als δ_p sei, und dass in allen übrigen Intervallen $\psi_p(x, k_p)$ selbst δ_p nicht erreiche, was immer möglich ist, da für $k = \infty$ beide Grössen: $\psi_p(x, k) - xh_p$, $\psi(x, k)$, wenn x in den bezeichneten Intervallen befindlich ist, verschwinden. Um die zweite Forderung zu erfüllen, wird es genügen, wenn δ_p durch $\psi(x_p - \varepsilon_p , k_p)$ und $\psi(x_{p-1} + \varepsilon_{p-1}, k_p)$ nicht mehr erreicht wird. Wenn nun diesen Bestimmungen gemäss k_1 , k_2 , $\ldots$ in allen Grössen $\psi_1(x , k_1)$, $\psi_2(x , k_2)$, $\ldots$ gewählt sind, so setzen wir:

$$\Psi_2(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \psi(x , k_p)$$

und haben in irgend einem Intervall i_r:

$$\Psi_2(x) - \Psi(x) < \delta_1 + \delta_2 + \cdots \text{ in infin.}$$

Die Grössen δ_1 , δ_2 , $\cdots$ stehen in unserem Belieben. Setzen wir $\delta_1 = \frac{1}{2}\delta$, $\delta_2 = \frac{1}{4}\delta$, $\delta_3 = \frac{1}{8}\delta$, $\cdots$ wo δ ein vorgeschriebenes beliebig Kleines vorstellt, so gelangen wir zu der Einsicht, dass es eine Function von x

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \Psi(\alpha)\, \gamma_p e^{-\gamma^2_p(\alpha - x)^2}$$

giebt, die unbegrenzt oft nach x differenzirbar ist, und in den Intervallen i_1 , i_2 , $\ldots$, welche sich beliebig nahe an die Intervalle $(x_1 \cdots x_0)$, $(x_2 \cdots x_1)$, $\cdots$ anschliessen, die Function Ψ bis auf einen Fehler unter vorgeschriebener Grenze δ darstellt.

44. Stetigmachung etc. Nachweis, dass, Ψ_2 an die Stelle von Ψ gesetzt, das Fouriersche Integral gleichfalls einen divergenten Limes hat.

Die Differenz $\Psi_2(x) - \Psi(x)$ hat im Intervall i_r noch folgende Eigenschaft. Sie besteht aus den Theilen:

$$\sum_{p=1}^{p=r-1} \psi_p(x, k_p) \;,\; \psi_r(x, k_r) - \Psi(x) \;,\; \sum_{p=r+1}^{p=\infty} \psi_p(x, k_p) \;.$$

Der erste Theil hat wegen $x > \alpha$ einen negativen Differentialquotienten, der dritte einen positiven und der mittlere Theil:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_r}^{x_{r-1}} d\alpha \cdot \alpha h_r \cdot \gamma_r e^{-\gamma^2_r(\alpha - x)^2} - x h_r$$

hat im Intervall $x_r < x < x_{r-1}$ nur ein Maximum.

Dann die Grösse:

$$\int_a^b d\alpha\, \alpha e^{-\gamma^2(\alpha - x)^2} = \frac{1}{e^{\gamma^2 x}} \int_a^b d\alpha\, \alpha \frac{e^{2x\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$$

besteht aus zwei Factoren, von denen der erste von $e^{-a^2\gamma^2}$ bis $e^{-b^2\gamma^2}$ abnimmt, der zweite von $\int_a^b d\alpha\, \alpha \frac{e^{2a\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$ bis $\int_a^b d\alpha\, \alpha \frac{e^{2b\alpha\gamma^2}}{e^{\alpha\gamma^2}}$ zunimmt, beides in einer Weise, dass zwischen den Grenzen a, b höchstens ein Maximum oder Minimum sein kann. Dann ist aber ein Maximum vorhanden, denn der Differentialquotient:

$$2\gamma^2 \int_a^b d\alpha\, \alpha(\alpha - x) e^{-\gamma^2(\alpha - x)^2}$$

ist positiv für $x = a$, negativ für $x = b$.

Wir können also setzen:

$$\Psi_2(x) = \Psi(x) + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

wo, während x ein Intervall i_p durchläuft, eines der Δ nur zunimmt, eines nur abnimmt, und eines höchstens ein Maximum durchläuft.

Nun ersuche ich den Leser, einen Blick auf die Analyse des Art. 36 zu werfen. Wenn wir das Integral

$$\int_0^a d\alpha \sin \Psi_2(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$$

wie dort das Integral $\int_0^a d\alpha \sin \Psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h_p}{\alpha}$ zerlegen in die Theile:

$$\int_0^{x_p} + \int_{x_p}^{x_{p-1}} + \int_{x_{p-1}}^{a}$$

so lässt sich von den beiden äusseren zunächst ganz ähnlich wie dort zeigen, dass sie für $p = \infty$ verschwinden.

Denn z. B. das Integral

$$\int_{x_q}^{x_{q-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin(\alpha h_q + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \sin \alpha h_p$$

kann mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes, und indem man bedenkt, dass die Grössen $\sin \Delta_p$, $\cos \Delta_p$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich oft vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergehen können, in eine endliche Anzahl Theile der Form

$$\pm \frac{\lambda}{\varkappa} \Bigg|_{\varkappa}^{\varkappa_1} \frac{\sin \alpha(h_p - h_q)}{h_p - h_q} - \frac{\sin \alpha(h_p + h_q)}{h_p + h_q}$$

zerlegt werden, wo λ endlich ist und $\varkappa$ und $\varkappa_1$ dem Intervall angehören, welches die Grenzen des Integrals einschliessen.

Was das mittlere Integral betrifft, so hat man:

$$2\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha \sin(\alpha h_p + \Sigma\Delta) \sin \alpha h_p = \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha}(1 - \cos 2h_p\alpha) \cos \Sigma\Delta + \int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \sin 2h_p\alpha \cdot \sin \Sigma\Delta$$

Der Theil

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} \frac{d\alpha}{\alpha} \cos \Sigma\Delta$$

wird, da $\cos \Sigma\Delta$ von 1 beliebig wenig verschieden gemacht werden kann, mit p unendlich. Der Rest wird, wie abermals mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes leicht zu zeigen, Null für $p = \infty$.

Es ist also im Ganzen nachgewiesen, dass der $\mathrm{Limes}_{h=\infty}$ des Inlegrals:

$$\int_0^a d\alpha \left[\varrho(\alpha) \sin \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\beta \Psi(\beta) \gamma_p e^{-\gamma^2_p (\beta-\alpha)^2} \right] \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

divergent ist, falls $\varrho(\alpha)$ eine ähnlich wie im Art. 37 zu bestimmende mit α verschwindende Function vorstellt. Es ist dann die Function

$$f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{x_p}^{x_{p-1}} d\beta \, \Psi(\beta) \, \gamma_p \, e^{-\gamma^2_p (\beta-\alpha)^2}$$

im Gebiete $o < \alpha \leqq a$ sammt ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig.

Schlussbetrachtungen.

Die vorstehende Abhandlung zerfällt wesentlich in drei Abtheilungen, von denen die erste u. A. in einer bestimmten Richtung den durch die bisherigen Untersuchungen gestatteten Spielraum für die Darstellbarkeit der Functionen durch Fouriersche Reihen und Integrale erweitert, die dritte Abtheilung dagegen die bisher gewöhnlich vermuthete Ausdehnung jenes Spielraums beschränkt, indem die Bedingungen entwickelt werden, unter denen eine Function in einem Puncte nicht darstellbar ist. Beide Untersuchungen, die der ersten und die der letzten Abtheilung, geben Veranlassung zu gewissen ergänzenden Betrachtungen, mit denen wir die Abhandlung schliessen wollen.

I.

Soweit der erste Theil der Untersuchung sich mit der Erweiterung der Bedingung für die Darstellbarkeit beschäftigt, kann sein Ergebniss so ausgedrückt werden:

Wenn eine Function f(x) in den in Betracht kommenden Intervallen integrirbar ist und ausserdem in einer beliebig kleinen einen Punct $x = x_1$ umgebenden Strecke sich auf die Form

$$f(x_1) = f(x_1) + \varrho(x - x_1) \cdot \cos \psi(x - x_1)$$

bringen lässt, in der $\varrho(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ mit x, ohne unendlich viele Maxima zu durchlaufen, verschwinden, so ist $f(x_1)$ durch eine Fouriersche Reihe oder ein Fourierschen Integral darstellbar.

Dieser Satz ist offenbar nur ein erster Schritt in einem für die Darstellbarkeit neu zu erwerbenden Gebiete. Ich werde dies sogleich näher ausführen. Bilden wir die Reihe

$$\varrho_1(x) \cos \psi_1(x) + \varrho_2(x) \cos \psi_2(x) + \ldots,$$

nehmen an, dass die ϱ_p sich in die Form $\mu_p \varrho'_p(x)$ bringen lassen, wo $\Sigma \mu_p$ eine unbedingt convergente Zahlenreihe vorstellt, dass die Grössen ψ_p ohne Maxima für $x = o$ unendlich werden, und in der Strecke $o \leqq x \leqq a$ zwischen zwei ebenso unendlich werdenden Functionen $\psi_u(x), \psi_o(x)$ eingeschlossen sind: so wird es, wie aus dem erwähnten ersten Theile dieser Abhandlung ohne Weiteres folgt, stets so grosse Werthe von h geben, dass das Integral

$$\int_o^a d\alpha \varrho'_p(\alpha) \cos \psi_p(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

für jeden Werth von p unter eine beliebig kleine endliche Grenze sinkt, und dann muss auch

$$\lim_{h=\infty} \int_o^a d\alpha \left(\sum_{p=1}^{p=\infty} \varrho_p(\alpha) \cos \psi_p(\alpha) \right) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = o$$

sein. Dies ist die naheliegendste Verallgemeinerung der im obigen Satze gestellten Bedingung. Es schliesst sich daran eine doppelte Aufgabe.

Einmal kann gefragt werden: Giebt es nicht allgemeinere Bedingungen für die Function $\psi_p(\alpha)$, wie die eben angeführte? Mit anderen Worten: unter welchen Umständen wird

$$\lim \int_o^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = o$$

sein, wenn $f(\alpha)$ die Form $\sum_{p=1}^{p=\infty} \varrho_p(\alpha) \cos \psi(p, \alpha)$ hat, und jedes Paar $\varrho_p(\alpha)$, $\psi(p, \alpha)$ den bisher bei $\varrho(\alpha), \psi(\alpha)$ vorausgesetzten Gang hat? Die andere Frage ist: Durch welche Functionen kann der Cosinus ersetzt werden?

Mit der zweiten Frage, die übrigens schliesslich auf die erste zurückführt, habe ich mich beschäftigt, und will darüber Einiges mittheilen.

Wir nehmen statt des Cosinus eine Function:

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} \mu_p \cos px$$

an, unter μ_p das Glied einer unbedingt convergenten Zahlenreihe verstanden. Bilden wir jetzt die Reihe:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \varrho(\alpha) \cos(p\psi(\alpha)) \frac{\sin \alpha h}{\alpha},$$

so ist sie, weil $\varrho(\alpha) \cos p\psi(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $\alpha = o$ endlich bleibt, von o an integrirbar und man hat:

$$\int_{o}^{a} d\alpha \varrho(\alpha) \varphi[\psi(\alpha)] \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \sum_{1}^{\infty} \mu_p \int_{o}^{a} d\alpha \varrho(\alpha) \cos(p\psi(\alpha)) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}.$$

Schreiben wir die rechte Seite

$$\sum_{1}^{\infty} \mu_p \lambda_p(h),$$

so fragt es sich, ob:

$$\lim_{h=\infty} \sum_{1}^{\infty} \mu_p \lambda_p(\alpha) = \sum_{1}^{\infty} \mu_p \lim_{h=\infty} \lambda(h) = o$$

ist. Dies wird der Fall sein, wenn die Reihe $\Sigma \mu_p \lambda_p(h)$ nicht nur für $h < \infty$, sondern auch für $h = \infty$ vollständig convergent ist (was Andere gleichmässig convergent nennen). Und dies wird wiederum stattfinden, wenn $\lambda_p(h)$, wie auch p und h gleichzeitig oder nacheinander unendlich werden, endliche Grenzen nicht übersteigt.

Das successive Unendlichwerden von p und h ist rasch erledigt. Denkt man sich in:

$$\lambda_p(h) = \int_o^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \cos p\psi(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

h endlich und p unendlich werdend, so verschwindet dies Integral nach dem ersten Hauptsatz, da man einen beliebig kleinen Null enthaltenden Theil des Integrals abschneiden kann, und im Reste für $\psi(\alpha)$ eine neue Veränderliche eingeführt werden darf, ohne dass die Grenzen unendlich werden. Bleibt p endlich und wird h unendlich, so verschwindet das Integral, ebenfalls wegen des ersten Theils der Abhandlung.

Complicirter ist die Untersuchung des Falles, wo gleichzeitig p und h unendlich wird, die in die Theile

$$p \overset{<}{\underset{>}{\sim}} h$$

zerfällt. Am Leichtesten wird man mit dem Fall $p \overset{\sim}{>} h$ fertig, weil alsdann die Gleichung $\psi'(\alpha_1) + \frac{h}{p} = o$ (Art. 1) für hinreichend grosse Werthe von p keine Wurzel zwischen o und a hat. Im Falle $p < h$, liegt dort eine Wurzel, und man muss alsdann, ähnlich wie bei der Untersuchung des

$$\lim \int_o^a d\alpha\, \varrho(\alpha)\, \cos \psi(\alpha)\, \frac{\sin\, \alpha h}{\alpha},$$

mehrere Zerlegungen anwenden und die infinitäre Auflösung gewisser Gleichungen benützen. Im Ganzen nimmt die Untersuchung des Integrals mit $\cos p\psi(\alpha)$ nicht weniger Raum ein, als die mit $\cos \psi(\alpha)$ allein.

Man kann aber noch weiter gehen, indem man für die Function $\varphi(x)$ nicht die Form $\Sigma \mu_p \cos px$ voraussetzt, wonach $\varphi(x)$ stetig ist, sondern annimmt, dass $\varphi(x)$ eine durch eine Sinuscosiuus-Reihe dargestellte Function ist, welche beliebig viele Unstetigkeiten besitzt, die nur nicht in jedem kleinsten Intervall vorkommen dürfen. Wenigstens finde ich diese Angabe, allerdings ohne nähere Begründung, in meinen Notizen aus einer Zeit, wo ich eine Uebung und Sicherheit in dergleichen

Untersuchungen besass, welche man leider nur durch steten Gebrauch dieser Eigenschaften sich erhalten kann. Das zu untersuchende Integral ist in diesem allgemeinen Falle ein Anderes, und man erhält es durch Summation der Sinus-cosinus-Reihe.

Mit der so als darstellbar nachgewiesenen oder nachzuweisenden Funktion $\varrho(\alpha)\,\varphi(\psi(\alpha))$ kann man alsdann wieder andere Functionen

$$\Sigma \varrho_p(\alpha)\,\varphi_p(\psi_p)$$

zusammensetzen, und ich glaube, dass wir hiermit, wenigstens in allgemeinen Zügen, die Ergebnisse hinsichtlich der Darstellbarkeit der Functionen durch Fouriersche Darstellungsformeln, welche auf dem eingeschlagenen Wege zu erreichen sind oder sein mögen, erschöpft haben.

II.

Das Hauptergebniss des dritten Theils dieser Abhandlung ist die Bemerkung, dass das Integral

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

für $h = \infty$ einen divergenten Limes haben kann, auch wenn $f(x)$ für $x \geqq o$ stetig ist. Geben wir diesem Ergebniss die Form, dass

$$\lim_{h=\infty} \int_{-a}^{+b} d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x}$$

auch im Falle $f(x)$ im Intervall $-a \cdots +b$ stetig ist, für $x = o$, statt $\pi f(o)$ zu geben, ein zwischen unendlichen Grenzen unbestimmtes Resultat liefern kann, so können wir diesen Satz unmittelbar auf die Fourierschen Darstellungsformeln beziehen.

Es könnte hier ein Einwand versucht werden, der allerdings aus einer etwas zurückgebliebenen Auffassung des Functionsbegriffs entspränge, dem ich aber doch sogleich zu begegnen für rathsam halte. Man könnte nämlich einwerfen, dass die Nichtdarstellbarkeit von $f(x) = \varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ für $\alpha = o$ ganz und gar nichts Neues an sich habe, da ja die Function $\Psi(\alpha)$ im Puncte $\alpha = o$ unendlich sei, und somit der Sinus seinen Sinn verliere. Läge z. B. die Function $x \sin \frac{1}{x}$ vor, so sei für $x = o$ der $\sin \frac{1}{x}$ ein Zeichen ohne Bedeutung, wie ja mit dem Zeichen $\frac{1}{o}$, wenn unter Null die Abwesenheit jeglicher Grösse verstanden wird, auch kein Sinn verbunden werden könne.

Indessen, wie angedeutet, ist auf Grund des richtigen Functionsbegriffs dies Bedenken leicht zu beseitigen.

Ich will darauf kein Gewicht legen, dass man analytisch den Sinus, der doch durch Umkehrung eines algebraischen Integrals erhalten wird, auch so definiren kann, dass $x \sin \frac{1}{x}$ für $x = o$ Null ist; denn in unserer Function $\varrho(\alpha) \sin \Psi(\alpha)$ ist $\Psi(\alpha)$ eben keine hinreichend einfache Function, um daran ähnliche Operationen durchführen zu können.

Nun, wenn ich überhaupt von einer Function spreche, bin ich alsdann an einen analytischen Ausdruck gebunden, oder ist sie nicht vielmehr gegeben, wenn ich festgesetzt habe, welchen Werth sie für jeden numerischen Werth ihres Arguments vorstellen soll? Jetzt bestimme ich eine Function $f(x)$ durch die Bedingungen:

1. $f(o) = o$

2. Für $x \gtrless o$ sei $f(x) = \varrho(x) \sin \Psi(x)$ im Sinne des Art. 35. Diese Function ist für ein den Punct $x = o$ enthaltendes Intervall stetig, für ein ähnliches Intervall unter Ausschluss des Punctes $x = o$ sogar mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig, und gleichwohl für $x = o$ nicht darstellbar.

Man kann übrigens aus der Function $\varrho(x) \sin \Psi(x)$ noch andere nicht darstellbare Functionen erhalten, deren Entwickelung nach Fourierschen Reihen oder deren Ausdruck durch ein Fouriersches Integral in jedem kleinsten Intervall unendlich wird. Denn bilden wir die Function

$$f(\sin px) = \varrho(\sin px) \cos \Psi(\sin px)$$

mit der Bestimmung $f(o) = o$, so ist diese Function für jedes x stetig. Gleiches gilt von dieser:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \varrho(\sin px) \cos \Psi(\sin px) .$$

Setzt man endlich:

$$H(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-A}^{+B} d\alpha\, F(\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x} ,$$

so hat diese Function in jedem kleinsten Intervall einen Punct, in dem sie unendlich ist, oder genauer, die μ_p können stets so bestimmt werden, dass dies der Fall ist. Es bedarf das aber des Beweises, da wir zwar die Reihe $F(\alpha)$ gliedweise integriren können, aber den Grenzübergang $h = \infty$ nicht ohne Weiteres gliedweise ausführen dürfen. Nehmen wir eine bestimmte Reihe $\Sigma \mu_p$ an, und setzen der Kürze halber:

$$\lambda_p(h) = \int_{-A}^{+B} d\alpha\, \varrho(\sin p\alpha) \cos \Psi(\sin p\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x} ,$$

ferner

$$H(x) = \sum_{1}^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) = H_m + R_m$$

wo

$$H_m = \sum_{1}^{m} , \quad R_m = \sum_{m+1}^{\infty} ,$$

so wird die Function H_m in einer Reihe von Puncten mit h unendlich. Sollte nun zufällig die Function R_m in denselben Puncten gerade so unendlich werden, dass das Unendlichwerden von H_m dadurch aufgehoben würde, so könnte dies nicht mehr der Fall sein, wenn anstatt R_m gesetzt wurde

$$R'_m = a \sum_{m+1}^{\infty} \mu_p \lambda_p(h) ,$$

weil die unendlich werdenden Werthe mit der beliebigen Zahl a multiplicirt sind.

Setzt man jetzt:

$$F(x) = \sum_{1}^{m_1} + \sum_{m_1+1}^{m_2} + \sum_{m_2+1}^{m_3} + \cdots \text{ in infin.},$$

so wird $a_1 \left\{ \sum_{m_1+1}^{m_2} + \text{etc} \right\}$ das Unendlichwerden von $\sum_{1}^{m_1}$ nicht aufheben.

Weiter wird $a_2 a_1 \left\{ \sum_{m_2+1}^{m_3} + \cdots \right\}$ das von $\sum_{1}^{m_1} + a_1 \sum_{m_1+1}^{m_2}$ nicht aufheben, u. s. f.

Es wird also

$$F(x) = \sum_{1}^{m_1} + a_1 \sum_{m_1+1}^{m_2} + a_1 a_2 \sum_{m_2+1}^{m_3} + \cdots$$

in jedem kleinsten Intervall unendlich werden. Q. E. D.

Einige Druckfehler.

Seite

2. In der Ueberschrift von III muss es heissen: $\frac{f(\alpha + \varphi(\alpha))}{f(\alpha)}$.

16. Zweite Zeile muss es heissen: nur wachsen oder nur abnehmen.

19. Vierzehnte Zeile muss es heissen: durch Subtraction.

21. Erste Zeile Art. 9 muss es heissen: Damit ist denn . . . .

29. In der ersten Hälfte der Seite muss es heissen: $\delta = \pm\sqrt{\frac{2N\pi}{\psi''(\alpha_1)}} \cdot u$.

42. Erste Zeile muss a statt α stehen.

48. Dreizehnte Zeile muss es heissen: schreiben wir.

52. Sechszehnte und siebenzehnte Zeile: $\psi(\alpha) \underset{\backsim}{<} 1\frac{1}{\alpha}$ oder $> 1\frac{1}{\alpha}$ ist.

83. Dritte und fünfte Zeile fehlt am Schluss: $\}$ und $+ \cdots \}$