Allgemeine Einleitung.

Wenn ein brauchbares Verfahren entdeckt wird, eine sogenannte willkürliche Function in eine Reihe der Form:

$$A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots$$

zu entwickeln, wo $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\cdots$ bestimmte mit jener zu entwickelnden Function ausser Zusammenhang stehende Functionen sind, die Grössen A_0, A_1, $\cdots$ aber von x unabhängige Coefficienten vorstellen: so wird eine solche Entwickelung, welche der willkürlichen Function gleichsam eine Uniform anzieht, und ihren besonderen Character in die constanten Coefficienten verlegt, stets die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich lenken, und zwar um so nachhaltiger, je einfacher die Functionen φ und die Coefficienten A zusammengesetzt sind. Daher waren auch die allereinfachsten Reihenentwickelungen, die Potenzreihen und die trigonometrischen Reihen von jeher bevorzugter Gegenstand mathematischer Speculation, so dass die Analysis den Untersuchungen, welche man über diese Formeln oder doch mit ihrer Hülfe angestellt hat, ihre merkwürdigsten Gebiete verdankt.[1])

1) Die im Texte angeführten Reihen bleiben die merkwürdigsten Formeln der Analysis, trotz der *Loi suprême* von Wronski, von dessen Bestrebungen ich durch mündliche Mittheilungen Richelots und durch Aufsätze des Herrn Abel Transon (Nouv. Ann. de Math. II Serie, Tome XIII) Kunde habe. Herr Abel Transon spricht sein Befremden darüber aus, dass die Mathematiker keine besondere Vorliebe für die Wronskischen „Gesetze" an den Tag legen. Ich muss das Urtheil der Mathematiker in Schutz nehmen. Betrachten wir Wronski's allgemeinstes Ergebniss, dass er irgend eine Funktion $f(x)$ in jede Reihe der Form $A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \ldots$ zu entwickeln lehrt, welcher Art die Functionen φ_0, $\varphi_1 \ldots$ auch sein mögen, so liegt, wie mir scheint, die Sache so: Ist die Möglichkeit der Entwickelung nachgewiesen oder wahrscheinlich gemacht, so ist Wronski's Coefficientenbildung, weil sie für alle Reihen dieselbe ist, und daher im gegebenen Fall äusserst verwickelt ausfallen muss, im Allgemeinen unbrauchbar. Man versuche z. B. die Coefficienten der Entwicklung nach Kugelfunctionen auf diese Weise zu bestimmen. Steht dagegen die Möglichkeit der Entwickelung selbst in Frage, so ist die Form der Coefficienten

* * *

Die Potenzreihen und die trigonometrischen Reihen, so ungleich ihr äusserer Eindruck auch sein mag, lassen sich doch als verschiedene Erscheinungsformen ein und derselben unendlichen Operation auffassen, als welche man nach Belieben eine von ihnen betrachten kann. Wenn man aber genauer zusieht, so erkennt man, dass diese Verwandtschaft mehr in den Bezeichnungen liegt, und dass zwischen den Potenzreihen und den trigonometrischen Reihen, wenn bei beiden die Voraussetzungen gemacht werden, welche ihre Eigenthümlichkeiten zur Geltung bringen, dem Sinne nach ein tiefer Unterschied waltet. Um es kurz zu sagen, die trigonometrischen Reihen sind ein Grenzfall der Potenzreihen, bei dem aber Voraussetzungen zulässig sind, ja in den Vordergrund treten, die der allgemeine Fall ausschliesst, wodurch sich dann das Imaginäre als das eigentliche Gebiet der Potenzreihen erweist, während die trigonometrischen Reihen, so weit an ihnen etwas Besonderes ist, dem Reellen angehören. Führen wir dies nun genauer aus.

---

wieder zu verwickelt, um die Convergenzprüfung der Reihe, in der sie auftreten, zu ermöglichen.

Aus diesen Gründen scheint, wenigstens vor der Hand, den Wronski'schen Ergebnissen nur ein formales Interesse zugesprochen werden können.

Von Anwendungen, die auf andere Reihenformen führen, abgesehen, wird man indessen Wronski darin nur beipflichten können, dass er das Hauptgewicht auf die Form $A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots$ legt, in der das Argument gleichsam aus der individuellen Function, die nur noch in den Coefficienten A steckt, herausgeholt ist. Entwickelungen anderer Gestalt giebt es die Fülle. Eine solche will ich als Beispiel hier anführen. Wenn in der Formel

$$\pi f(x) = \lim_{h=\infty} \int_A^B d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin h(\alpha - x)}{\alpha - x}$$

statt h geschrieben wird $\frac{2n+1}{2}$, so hat man wegen $\sin \frac{2n+1}{2} u = \sin \frac{u}{2}\left(1 - 2\sum_1^n \cos pu\right)$:

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_A^B \varphi(\alpha, x) f(\alpha) d\alpha + \sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{\cos px \int_A^B \varphi(\alpha, x)\cos p\alpha f(\alpha) d\alpha + \sin px \int_A^B \varphi(\alpha, x) \sin p\alpha f(\alpha) d\alpha\right\}$$

wo $\varphi(\alpha, x) = 2\frac{\sin\frac{\alpha - x}{2}}{\alpha - x}$. Diese Reihe ist ihrer Form wegen merkwürdig. Sie geht in die Fouriersche Reihe über, wenn den beliebigen Grössen A, B die Werthe $-\pi, +\pi$, ertheilt werden, und Eins statt φ gesetzt wird.

Bekanntlich kann eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (u_p z^p + v_p z^{-p})$$

als trigonometrische Reihe geschrieben werden, indem man $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für z einführt. Diese Umformung, durch die man die Function $F(\varphi) = f(z)$ nach sin und cos der Vielfachen der reellen Grösse φ entwickelt erhält, ist es nicht, die wir hier brauchen, da es den Charakter einer trigonometrischen Reihe offenbar nicht verändert, wenn nur ihre Coefficienten complex sind. Sie lässt sich dann ja aus zwei reellen Reihen derselben Art zusammensetzen. Lehrreicher ist es umgekehrt die trigonometrische Reihe als Potenzreihe aufzufassen, indem man setzt:

$$f(z) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (a_p \cos pz + b_p \sin pz) = F(\zeta) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (u_p \zeta^p + v_p \zeta^{-p}),$$

wo $\zeta = e^{-iz}$, $u_p = \dfrac{a_p + ib_p}{2}$, $v_p = \dfrac{a_p - ib_p}{2}$.

Untersuchen wir die Convergenz der so erhaltenen Potenzreihe:

$$F(\zeta) = \sum_{p=o}^{p=\infty} (u_p \zeta^p + v_p \zeta^{-p}).$$

Es ist $\mathrm{mod}\, u_p = \mathrm{mod}\, v_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$. Bezeichnet man mit R die grösste Zahl für die $R^p\sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ nicht mit p unendlich wird, so ist die Reihe $F(\zeta)$ convergent im Ringgebiet zwischen den um $\zeta = o$ als Mittelpunct gezogenen Kreisen mit den Halbmessern $\dfrac{1}{R}$ und R, falls nämlich $R > 1$. Ist $R < 1$, so giebt es keine Convergenz, und ist $R = 1$, so artet der Convergenzring in eine Kreisperipherie aus. Da nun $\mathrm{mod}\,\zeta = e^y$, so erhalten wir, $R = e^Y$ gesetzt, für f(z) folgendes Convergenzgebiet: Es ist eingeschlossen zwischen den Geraden $x = \pm Y$, unter Y den grössten Werth von y verstanden, für den noch $\sqrt{a_p^2 + b_p^2 e^{pY}}$, oder $a_p e^{pY}$, $b_p e^{pY}$ nicht mit p unendlich werden. Ist dieser Werth Y gleich Null, so artet das Gebiet in eine Linie aus, und ist Y negativ, so giebt es keine Convergenz. Was aber für $R = 1$ oder $Y = o$ in jener Ausartungsperipherie oder für f(z) in der Ausartungslinie $y = o$ stattfindet, bedarf einer besonderen Untersuchung. Die Functionentheorie im engeren Sinne lehrt uns darüber nichts.

Die Untersuchung der Convergenz einer Potenzreihe in der Ausartungslinie ihres Convergenzringes bildet den eigentlichen Gegenstand der Theorie der trigonometri- Reihen.

Denn wenn die Reihe f(z) ein Convergenzgebiet hat, so sind in diesem Gebiet die Function f(z) und deren Ableitungen stetig. Umgekehrt, wenn f(z) oder deren Ableitungen unstetig sind, so kann dies nicht innerhalb eines Convergenzgebietes stattfinden. Die Convergenz von f(z) wird sich auf die Ausartungslinie $y = o$ beschränken müssen Es folgt hieraus, dass die Fälle, in welchen die trigonometrischen Reihen uns besonders merkwürdig erscheinen, lediglich der Analysis des Reellen angehören. Die Thetareihen z. B., welche in der Jacobischen Form wie trigonometrische Reihen aussehen, sind ihrem Wesen nach Potenzreihen und haben vom Standpunkte der Theorie der trigonometrischen Reihen aus gar kein Interesse.

* * *

Nachdem wir jetzt die trigonometrischen Reihen in zwei Klassen eingetheilt haben, die erstere, mit Convergenzgebieten, welche wir als Potenzreihen auffassen und ausscheiden, die zweite, mit einer Convergenzlinie, welche wir als echte trigonometrische Reihen ansehen, so ist noch mit einigen Worten auf die engere Benennung: Fouriersche Reihen einzugehen.

So pflegt man die trigonometrischen Reihen

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

zu nennen, wenn ihre Coefficienten durch die Ausdrücke:

$$\pi a_0 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \; , \; \pi a_p = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha \; , \; \pi b_p = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha$$

darstellbar oder richtiger dargestellt sind. Wir wissen gegenwärtig, unter welchen genaueren Bedingungen dies möglich ist, und wissen namentlich, dass die Integrirbarkeit von f(x) dazu ausreicht.[II]) Jene Benennung erfreut sich indessen keineswegs geschichtlicher Berechtigung, sondern die als Fouriersche zu bezeichnenden Reihen müssten anders umgrenzt werden.

Die vorstehende Bestimmung der Coefficienten der trigonometrischen Reihe rührt eben nicht von Fourier her, sondern der Form nach von Lagrange[III]), und ist mit vollem Bewusstsein zuerst von Euler gegeben[IV]). Euler's scharf gedachte aber zu beschränkte Vorstellung war, dass jede Function f(sin x, cos x), die nach Potenzen von sin x, cos x sich entwickeln lässt, auch in eine nach Vielfachen von x fortschreitende Sinus oder Cosinusreihe entwickelbar sei, und er hat die Coefficienten dieser Entwickelungen wirklich in der heute bekannten Form schon dargestellt.

Fourier's Coefficientenbestimmung ist jedenfalls nicht besser als die Eulersche und beide scheinen mir sogar weniger befriedigend als die ursprüngliche von Lagrange.[V]) Fourier's bahnbrechender Schritt war vielmehr die durch überzeugende Beispiele bestätigte Divination, dass die trigonometrischen Reihen auch unstetige Functionen darstellen, und dass man die zu entwickelnde Function vom Argument in beliebiger Weise abhängig annehmen darf — natürlich innerhalb des Functionsbegriffs seiner Epoche. Um diesen Schritt gehörig zu würdigen, muss man sich in der einschlägigen Literatur des vorigen Jahrhunderts umsehen. Man kann auf Grund der obigen Ueberlegungen die Schöpfung Fourier's der Eulerschen gegenüber kurz so kennzeichnen: Die von Euler gemeinten Reihen haben ein Convergenz*gebiet*, die von Fourier in die Analysis eingeführten haben nur eine Convergenz*linie*. Indessen es würde misslich sein, die einmal gebräuchlich gewordene Bezeichnung: Fouriersche Reihen so zu verschieben, wie es nach dem Gesagten

---

II) Abhandl. d. k. bayer. Akad. der W. II. Cl. XII. Bd. I. Abth.

III) Miscell. Taurin. Tom. III, pag. 260.

IV) Nov. Act. Acad. scient. Petrop. Tom. XI, 1798. Ich verdanke diese Nachweisung Herrn W. Borchardt.

V) Dirichlet giebt im I. Bande des Dowe'schen Repertoriums die Lagrangesche Coefficientenbestimmung wieder, und zeigt an einem Beispiel, dass sie ungenau ist. Der Grund der Ungenauigkeit ist aber die nicht als berechtigt nachgewiesene Häufung zweier Grenzübergänge, nämlich erstens in den Coefficienten von der Summe zum Integral, zweitens von der endlichen Gliederzahl zur unendlichen.

geschichtlich Rechtens wäre, und ich verzichte daher auf Vorschläge in dieser Richtung.

Um noch einen anderen mathematischen Ausdruck zu erwähnen, dem die nachfolgenden Betrachtungen gelten, so theilt Fourier mit Niemand den Ruhm, die nach ihm genannte Formel:

$$\pi f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x)$$

entdeckt zu haben. Wiewohl wir die näheren Umstände, auf denen ihre Eigenthümlichkeit beruht, jetzt völlig durchschauen, so erfüllen ihre Leistungen uns doch stets von Neuem mit Bewunderung, wie wir vom Anblick einer vorbeistürmenden Locomotive immer wieder mächtig ergriffen werden, wenn wir ihren Mechanismus auch noch so genau kennen.

* * *

In den gesicherten Besitzstand der Analysis wurden die Fourierschen Reihen

$$2\pi f(x) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} \left(\sin px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sin p\alpha + \cos px \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \cos p\alpha \right)$$

eingereiht durch die berühmte Abhandlung von Lejeune-Dirichlet im IV. Bande des Crelle'schen Journals pag. 157. Es möchte diese Abhandlung die erste sein, in der die Nothwendigkeit erkannt wurde, innerhalb der Mannigfaltigkeit voraussetzungsloser Functionen, auch im Reellen, gewisse Classen mit noch immerhin höchst allgemeinen Charakteren auszusondern. Hierin liegt in meinen Augen der hohe Werth jener Abhandlung, namentlich gegenüber anderen gleichzeitigen oder früheren Versuchen, die Fouriersche Entwicklung zu beweisen.

Während also Dirichlet den Functionsbegriff dem Gegenstande entsprechend zu beschränken lehrte, war er doch frei von den seit ihm veralteten Vorstellungen über das Wesen und die Stetigkeit der Functionen. So sind seiner natürlichen und sachgemässen Ausdrucksweise jene *portions de fonctions* gewichen, welche aus der Anschauung entspringen mochten, als ob eine Function gleichsam ein einheitlicher Organismus sei, aus dessen Stücken man allerdings, wie seit Fourier zugegeben werden musste, neue Functionen zusammensetzen könne, die aber den ungeheuerlichen Character ihrer Entstehung an der Stirne trügen.

Wenn die Entwickelung des modernen Functionsbegriffs unstreitig von den Fourierschen Entdeckungen ihren Ausgang nahm, so wird man gerechter Weise die bewusste Förderung jenes Begriffs und der damit zusammenhängenden Principien der Integralrechnung u. s. w. auf Fourier's grossen Schüler zurückführen müssen, der mehr als irgend einer seiner Zeitgenossen, besonders durch seine Untersuchungen über die Darstellungsformeln für willkürliche Functionen, zur Läuterung dessen beigetragen hat, was man die Metaphysik der Analysis zu nennen pflegt.

* * *

Die Gültigkeit der Fourierschen Entwicklung ist von Dirichlet bewiesen worden für den Fall, wo die darzustellende Function $f(x)$ im Intervall $-\pi \cdots +\pi$ nicht unendlich viele Maxima hat, eine Bedingung, welche ich die Dirichletsche genannt habe. Nicht im Geringsten beeinträchtigt es die Bedeutung seiner Leistung, wenn er in einer Ankündigung am Schlusse seiner Abhandlung, den Gültigkeitsbereich der Fourierschen Entwickelung, wie aus dem IV. Capitel dieser Abhandlung folgt, überschätzt hat, indem er sie auf alle Functionen anwendbar erklärt, welche (in seinem Sinne) integrirbar seien, also jedenfalls auf alle stetigen Functionen. Er scheint dies unter der Herrschaft einer jener Täuschungen niedergeschrieben zu haben, die in diesen abstrakten Gebieten nur zu oft uns das ersehnte Gestade in unmittelbarer Nähe vorspiegeln, um uns, sobald das Trugbild sich aufgelöst hat, in tiefster Rathlosigkeit über den nunmehr einzuschlagenden Weg und in banger Ungewissheit über die Richtigkeit unserer Voraussetzungen zurückzulassen. Indessen soll Dirichlet den Glauben an den von ihm behaupteten Satz doch nicht verloren haben; auch ist ja dieser Glaube an die Entwickelbarkeit wenigstens aller stetigen Functionen in Fouriersche Reihen bis auf den heutigen Tag ein Stück der mathematischen öffentlichen Meinung geblieben [VI]).

Um so höher wird man es Herrn Lipschitz anrechnen müssen, dass er jene Convergenzfrage, so viel ich weiss, seit Dirichlet zuerst, wieder zum Gegenstand einer Veröffentlichung gemacht hat, in welcher er eine Erweiterung der Dirichletschen Bedingung mit dessen Methoden findet, und die Möglichkeit andeutet, dass eine dieser erweiterten Bedingung nicht genügende Function auch nicht entwickelbar sei [VII]).

* * *

In der Richtung der Bestrebungen des Verfassers, der sich mit der allgemeinen Theorie der Darstellungsformeln für willkürliche Functionen beschäftigte, und über den Gültigkeitsumfang seiner Ergebnisse natürlich möglichst genau sich zu unterrichten wünschte, lag es, auch die Convergenz der Fourierschen Darstellungen auf das eingehendste zu untersuchen.

Er will den Leser nicht davon unterhalten, wie er zuerst von der Allgemeingültigkeit der Entwickelbarkeit der Functionen in trigonometrische Reihen fest überzeugt war, wie er hundert schliesslich als fehlerhaft sich ergebende Versuche machte, sie zu beweisen, wie er, *après maint labeur et usaige* lediglich aus der Dauer und der Viel-

---

VI) Um nur auf Riemann mich zu berufen, so findet man bei ihm zwei Stellen (Dissert. pag. 1, „neuere Untersuchungen haben indessen gezeigt, etc.“ und Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigon. Reihe, pag. 16, „In der That für alle Fälle der Natur, etc.“), die schwerlich anders sich deuten lassen, als so, dass Riemann mindestens alle stetigen Functionen durch trigonometrische Reihe darstellbar annahm.

Die Angabe, dass Dirichlet den Glauben an seinen Satz nicht verloren zu haben scheine, schöpfe ich aus einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Weierstrass.

VII) Borch. Journ. 63. Bd. p. 286. Die im Texte gemeinte Muthmassung (auf der letzten Seite des Aufsatzes), auf welche Hr. Lipschitz schwerlich Gewicht legt, dass möglicherweise schon eine Function, für welche $l\frac{1}{x}\big(f(x) - f(o+o)\big)$ nicht verschwindet, für $x = o$ nicht darstellbar sein könne, trifft in der That zu. Die durch Fouriersche Reihen nicht darstellbaren Functionen beginnen da, wo $\lambda(x)\big(f(x) - f(o+o)\big)$ für $x = o$ nicht verschwindet, und $\lambda(x)$ so langsam, oder langsamer unendlich wie $l\frac{1}{x}$ wird. Im Fall, wo $\lambda(x)$ wie $l\frac{1}{x}$ unendlich wird, bleibt die Fouriersche Reihe aber endlich. (Diese Abh. Art. 40, Schluss.)

seitigkeit seiner erfolglosen Anstrengungen die Ueberzeugung schöpfte, dass die Dirichletsche Behauptung falsch sei, und wie auf solche Weise er endlich auf den Weg geführt wurde, den er von vorneherein hätte einschlagen sollen, nämlich seine Untersuchung genau da anzufangen, wo Dirichlet die seinige, soweit sie gedruckt ist, hatte fallen lassen, d. i. bei den Functionen mit unendlich vielen Maximis Aber eben nicht die schwer zu bewältigenden allgemeinen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der darzustellenden Function waren zu Grunde zu legen, sondern es galt, das Problem möglichst zu vereinfachen, also zu beginnen mit der Untersuchung der Entwickelbarkeit einer Function, wie etwa $\varrho(x)$ cos $\psi(x)$, wo $\varrho(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ für $x = o$ ohne Maxima verschwinden, und zusammengesetztere Functionen erst dann herbeizuziehen, wenn mit den einfacheren die Grenze der Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen nicht erreicht wurde. Als für diesen Zweck dienliche, nächst zusammengesetztere Functionen waren, wie einige Ueberlegung zeigt, solche der Form $\varrho(x)$ cos $\Psi(x)$ anzusehen, wo $\Psi(x)$, statt wie $\psi(x)$ ohne Maxima unendlich zu werden, vielmehr in geeigneter Weise mit unendlich vielen Maximis unendlich wird. Die auf die Darstellbarkeit der Functionen bezüglichen Ergebnisse der angedeuteten Untersuchung waren kurzgefasst folgende:

Alle Functionen $\varrho(x)$ cos $\psi(x)$ sind, unter den obigen Bestimmungen über $\varrho(x)$ und $\psi(x)$, für $x = o$ darstellbar, wogegen man bei Einführung der Function $\varrho(x)$ cos $\Psi(x)$ sogleich ein Gebiet zum Theil nicht darstellbarer Functionen betritt.

So wurde denn der durch das Convergenzproblem zu bohrende Tunnel an beiden Enden, an dem der Convergenz und an dem der Divergenz, gleichzeitig in Angriff genommen, und es gelang — mit Hülfe einer gewissen neuen Rechnungsart sogar verhältnissmässig leicht — dem practischen Bedürfniss jedenfalls vollauf zu genügen, und auch eine vor der Hand wohl befriedigende theoretische Einsicht in diese dunkelen Fragen zu gewinnen. Eine vollständige Einsicht keineswegs. Vielmehr möchten gerade die nachfolgenden Untersuchungen hinreichenden Grund zu der Vermuthung enthalten, dass unsere analytischen Hülfsmittel noch nicht ausreichen, um die allgemeine nothwendige Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function aufzustellen. Vielleicht aber gelangt man sogar dahin, überhaupt am Vorhandensein solcher Bedingungen zu zweifeln. (Diese Abh. Schluss des II. Cap.)

Es wird dem Leser nicht unwillkommen sein, wenn der Abhandlung ein etwas eingehender Bericht über ihren Inhalt vorangeschickt wird, der jedoch seinerseits eingeleitet werden mag durch eine kurze Uebersicht dessen, was über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen bereits festgestellt ist.

* * *

Ueber den gegenwärtigen Stand der Convergenzfrage der Fourierschen Darstellungsformeln.

Um zuerst die Aufgaben, mit denen wir uns beschäftigen wollen, scharf auszusprechen, gehen wir aus von der Sinus-Cosinus-Reihe:

$$\pi F(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin px\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\varphi(\alpha)\,\sin p\alpha + \cos px\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\varphi(\alpha)\,\cos p\alpha\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\varphi(\alpha)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}$$

$$= \lim_{h=\infty}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\alpha\varphi(x+2\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\sin\alpha}\,,\quad h = 2n+1\,.$$

Wenn wir h unendlich werden lassen, ohne auf seine Form $2n+1$ Rücksicht zu nehmen, und wir erhalten ein bestimmtes Resultat, so können wir für die besondere Form $2n+1$ kein anderes Resultat erhalten, und dürfen von der Einführung dieser Form absehen. Wenn wir aber für $h = 2n+1 = \infty$ eine divergente Grenze erhalten, so wird sie auch divergent sein, wenn wir über h gar nichts voraussetzen.

Es wird sich um Werthe x handeln, die dem Intervall $-\pi < x < +\pi$ angehören, so dass $\frac{\pi - x}{2} = a$, $-\frac{\pi + x}{2} = -b$, $\varphi(x + 2\alpha) = f(\alpha)$ gesetzt, der

$$\lim_{h=\infty} \int_{-b}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

zu untersuchen ist. Wir vereinfachen die Frage, indem wir

$$\int_{-b}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} = \int_{0}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} + \int_{0}^{b} d\alpha f(-\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

schreiben und den Limes der Integrale rechts einzeln bestimmen. Diese Untersuchung reducirt sich aber ersichtlich auf die des einen Integrals:

$$\int_{0}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha} .$$

Kennen wir die Bedingungen für f(x), unter denen dieser Limes den Werth $\frac{\pi}{2} f(o)$ erhält, so wird das Convergenzproblem gelöst sein mit Ausnahme des besonderen Falles, wo die Integrale $\int_{0}^{a}$, $\int_{-b}^{0}$ beide an der Grenze divergiren, jedoch so dass ihre Summe convergirt, ein Fall, der hier kein Interesse bietet.

Nehmen wir $a < \frac{\pi}{2}$ an, und $o < \varepsilon < a$, so ist:

$$\int_{0}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\sin \alpha} = \int_{0}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \int_{0}^{\varepsilon} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}\right) \int_{0}^{\bar{\varepsilon}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} + \frac{a}{\sin a} \int_{\bar{a}}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}, \quad o \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \bar{a} \leq a.$$

Wenn nun für positive a, b, c die Gleichungen gelten:

$$\lim_{h=\infty} \int_{b}^{c} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = o \; \ldots . \qquad \text{I}$$

$$\lim_{h=\infty} \int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o), \; \ldots .. \qquad \text{II}$$

so muss, wie aus dem Obigen hervorgeht, die Fouriersche Entwicklung richtig sein. Wenn dagegen für gewisse Functionen f(x) zwar die erste Formel eintrifft, dagegen der Limes $h = \infty$ von

$$\int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen unbestimmt ist, und dies so, dass der Limes jedes Integrals $\int_{o}^{\bar{a}} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$, im Fall $\bar{a} < a$, dem absoluten Werthe nach nicht über den Limes des Integrals $\int_{o}^{a}$ sich erheben kann; so wird, weil $1 - \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}$ beliebig klein gedacht werden darf, die Fouriersche Entwickelung divergiren.

Dieselben Integrale I, II entscheiden über die Richtigkeit der Fourierschen Formel:

$$\int_{o}^{\infty} d\alpha \int_{A}^{B} d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x) = \pi f(x),$$

wie dem Leser früherer Abhandlungen des Verfassers bekannt ist.

In diesen Abhandlungen ist weiter gezeigt, dass jene Sätze I, II besondere Fälle dieser sind:

$$\lim_{h=\infty}\int_b^c d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = 0 \,\ldots\ldots \qquad \text{Ia}$$

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha, h) \,\ldots\ldots \qquad \text{IIa}.$$

Die Function $\varphi(x, h)$ betreffend, setzt der erste Satz voraus, dass $\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha, h)$ zwischen irgend welchen dem Intervall $b \ldots c$ angehörigen Grenzen Null ist, der zweite, dass $\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha, h)$ von a unabhängig ist.

Diese beiden Sätze nenne ich den ersten und den zweiten Hauptsatz der Theorie der darstellenden Integrale.

Die Bedingungen, welche die beiden Hauptsätze der Function f(x) auferlegen, habe ich unter den allgemeinsten Voraussetzungen über $\varphi(x, h)$ eingehender Prüfung unterworfen in einer Abhandlung: Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38. Wie ich in dieser Abhandlung bemerkte, hat vermuthlich jedes darstellende Integral seine eigene Theorie und ganz besonders gilt dies von den Integralen I und II. Den Gültigkeitsbereich dieser speciellen Formeln festzustellen, ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Folgendes sind die bereits für diesen Gültigkeitsbereich aufgestellten Regeln.

* * *

Der erste Hauptsatz

$$\lim\int_b^c d\alpha f(\alpha) \sin\alpha h = 0 \qquad \text{I}$$

$$\lim\int_b^c d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = 0 \qquad \text{Ia}$$

gilt, so oft die Function f(x) integrirbar ist, offenbar eine nothwendige Bedingung. Wird sie in einem Punct unendlich, so gilt der Satz, wenn das Integral $\int f(\alpha)d\alpha$ über die Unendlichkeitsstelle unbedingt convergirt, eine Bedingung, welche, wie Beispiele lehren, nicht die nothwendige ist.

Für endliche Functionen f(x) ist also der Gültigkeitsbereich dieses Satzes so gross, wie man es nur erwarten konnte.

Der andere Hauptsatz:

$$\lim \int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha} = \frac{\pi}{2} f(o) \qquad \text{II}$$

$$\lim \int_{o}^{a} d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h) = f(o) \lim \int_{o}^{a} d\alpha\, \varphi(\alpha, h) \qquad \text{IIa}$$

auferlegt in jedem $x = o$ ausschliessenden Intervall der Function f(x) ebenfalls nur die Bedingung der Integrirbarkeit. Weiter hat die Analyse verschiedene Annäherungsweisen der Function f(x) an $x = o$ ergeben, bei denen der zweite Hauptsatz immer stattfindet, von denen indessen keine nothwendig ist. Ich führe sie an, mit den allgemeinsten (f(x) am wenigsten einschränkenden) Bedingungen beginnend.

1. Unter gewissen Beschränkungen, welche $\varphi(x, h)$ betreffen, und $\varphi(x, h) = \frac{\sin xh}{x}$ nicht ausschliessen, gilt der zweite Hauptsatz, wenn das Integral

$$\int_{o}^{a} d\alpha \frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_{o}^{\alpha} d\beta f(\beta)$$

unbedingt convergirt.[VIII]

2. Unter keinen anderen Einschränkungen von $\varphi(x, h)$, als denen, welche der allgemeine Satz IIa vorschreibt, findet er statt, so oft das Integral

VIII) Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38, Art. 9.

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha)$$

absolut convergirt.[IX])

3. Aus der Bedingung 1 folgt (diese Abh. Art. 26, und Borch. Journ. 79. Bd. pag. 62), dass der zweite Hauptsatz stattfindet, wenn

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - f(o+o)}{\tau(x)}$$

nicht unendlich ist, wo unter $\tau(x)$ die ohne Maxima Null werdende Function gedacht ist, welche die Grenze der Convergenz und Divergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

bildet.[X]) Diese Bedingung enthält die oben erwähnte des Hrn. Lipschitz.

4. Die alte Dirichletsche Bedingung lautet, dass der zweite Hauptsatz gilt, wenn $f(x) - f(o+o)$ von einem hinreichend kleinen Werthe von x an ohne Maxima mit x verschwindet.

Es ist zu bemerken, dass von den beiden letzteren Bedingungen keine die andere vollständig enthält.

Schliesslich hebe ich noch hervor, dass man Satz II oder die Frage nach dem Werth des darin vorkommenden Integral-Limes als zur Theorie des ersten Hauptsatzes gehörig betrachten kann, indem man II schreibt:

IX) Ebenda, Art. 8.

X) Die Einführung dieser Function $\tau(x)$ kann als im Widerspruch mit dem Schluss angesehen werden, dass es keine Function giebt, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildet. Ein Widerspruch ist indessen hier nicht vorhanden. Die genauere Erörterung dieser etwas subtilen Frage werde ich demnächst an anderem Orte geben. Hier nur in der Kürze die Andeutung, dass die Function τ zu den von der Seite der Divergenz, wie von der Seite der Convergenz her sich ihr nähernden Functionen in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zu den ihm umschriebenen und eingeschriebenen Linien. Practisch braucht man übrigens unter τ nicht die Grenze der Convergenz und Divergenz selbst sich vorzustellen, sondern es genügt, darunter eine Function sich zu denken, die der Grenze näher liegt, als alle anderen in den gerade vorgelegten Calcul eingehenden.

$$\lim \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha h \,.$$

Es würde sich dann um den Limes von

$$\int_b^c d\alpha f(\alpha) \varphi(\alpha, h)$$

handeln, wenn für einen zwischen b und c gelegenen Werth von x gleichzeitig f(x) unendlich und $\varphi(x, h)$ Null wird, eine Auffassung, die im Folgenden ihre Berücksichtigung findet.

* * *

Eingehender Bericht über die folgende Untersuchung.

Die Aufgabe, den $\text{Limes}_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ für $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \cos \psi(\alpha)$ zu untersuchen, führt, wie viele andere Convergenzprobleme auf die Aufgabe, die Stärke des Null- oder Unendlichwerdens nicht explicite gegebener Functionen zu bestimmen. Beispielsweise fällt man bei der obigen Grenzbestimmung u. A. auf folgende Gleichung:

$$\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = \text{constans}$$

für eine unbekannte Function $\delta = \chi(\alpha)$, deren Nullwerden für $\alpha = o$ zu beurtheilen ist (Art. 14).

Nahe liegt es, $\psi(\alpha + \delta)$ nach Potenzen von δ zu entwickeln, bei den ersten Gliedern die Entwickelung abzubrechen, und anzunehmen, dass δ wie die Wurzel aus $\psi''(\alpha)^{-1}$ Null wird, ein Ergebniss, dass sich für einzelne Functionen ψ als richtig erweist. Dieser Schluss, bei dem ich anfangs umsomehr mich beruhigen zu dürfen glaubte, als er bei einer ähnlichen Gelegenheit auch von Riemann gemacht wird,[XI]) zwang

---

XI) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch e. trigon. R. Art. 13.

jedoch Divergenz der Fourierschen Entwickelung bei Functionen anzunehmen, für welche sich die Convergenz der Entwicklung anderweitig feststellen liess, also musste der Schluss, allgemein zu reden, unrichtig sein.

Zwischen dieser Wahrnehmung und einer wirklich genügenden Auflösung der angeführten und der ihr ähnlichen Gleichungen, lag indessen noch ein weiter Weg. Es handelte sich, wie der Erfolg zeigt, um die Aufstellung einer neuen Rechnungsart, die ich, dieser ihrer ersten grösseren Anwendung vorgreifend, in den Annalen von Clebsch und Neumann, Th. VIII, S. 363 auseinandergesetzt habe, und Infinitärcalcül nenne. An der Hand der a. a. O. erörterten Methoden bieten sich neue analytische Erscheinungen dar, deren eigenthümlichste wohl die überall auftretende, fast zur Regel werdende Unstetigkeit der Gesetze ist, welche die Geschwindigkeit des Unendlichwerdens der Functionen bestimmen, wie denn z. B. die Auflösung obiger Gleichung $\psi(\alpha + \delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = $ $= constans$ drei Formen hat, jenachdem nämlich $\psi(\alpha)$ rascher, gleich rasch, oder langsamer als der $\log \frac{1}{\alpha}$ unendlich wird.

Die im Folgenden besonders zur Anwendung kommenden Formeln aus der angeführten Abhandlung habe ich kurz zusammengestellt pag. 1—6.

Jene Rechnungsart einmal gefunden und sorgfältig durchdacht, war die Bahn frei, und da ich nun über viel weiterreichende Mittel wie früher verfügte, so habe ich mir die Genugthuung nicht versagt, auch allgemeinere Aufgaben als das nackte Convergenzproblem der Fourierschen Reihen zu untersuchen. Ich habe festgestellt den $\text{Limes}_{h \doteq \infty}$ des Integrals

$$\int_0^a d\alpha\, \sigma(\alpha)\, \cos \psi(\alpha)\, \sin h(\alpha + c)$$

für jeden Werth von c, für beliebiges Null- oder Unendlichwerden von $\sigma(\alpha)$, und beliebiges Unendlichwerden von $\psi(\alpha)$.

Für $c = o$ findet sich diese Untersuchung in den Art. 1—17. Ihre Ergebnisse enthält die Tabelle Art. 17. Den Fall $c > o$ erörtert Art. 18, und am Schluss findet man die bezüglichen Ergebnisse gleichfalls in eine Tabelle geordnet. Der ersten Untersuchung, welche bei den mannigfachen Fällen, die sie umfasst, etwas zusammengesetzt ausfallen musste, ist eine kurze Uebersicht über ihren Gang voraufgeschickt, pag. 7—11.

* * *

Die in den Tabellen Art. 17 und 18 enthaltenen Grenzergebnisse haben das Angenehme, dass sie uns in den Stand setzen, die für die beiden Hauptsätze der Theorie gefundenen Gültigkeitsbedingungen an einer hinreichend umfassenden Functionenklasse, für welche die nothwendigen Bedingungen der Darstellbarkeit bekannt sind, mit aller Schärfe zu vergleichen. Dies geschieht für den ersten Hauptsatz im zweiten, für den zweiten Hauptsatz im dritten Capitel. Da die allgemeinsten unter jenen Gültigkeitsbedingungen die Untersuchung gewisser Integrale auf die Art ihrer Convergenz, ob sie absolut oder bedingt sei, erheischen, so ist diese Untersuchung auch ein wesentlicher Theil des Inhalts der erwähnten Capitel, namentlich des dritten. Die Vergleichung der Tragweite der verschiedenen Gültigkeitsbedingungen wird durch die Figuren auf Tafel I und II übersichtlich gemacht.

Nehmen wir zu den drei ersten Capiteln noch die erste Hälfte der „Schlussbetrachtungen" dieser Abhandlung hinzu, so sind deren Ergebnisse, so weit sie nur die Darstellbarkeit der Functionen durch trigonometrische Reihen betreffen, kurzgefasst diese:

Wenn für einen Punct x_1 die Differenz

$$f(x_1) - \lim_{x = x_1} f(x)$$

auf die Form $\varrho(x_1 - x) \cos \psi(x_1 - x)$ gebracht werden kann, wo $\varrho(x)$ und $\psi(x)^{-1}$ für $x = o$ ohne Maxima Null werden, so ist $f(x_1)$ darstellbar. Diese Bedingung gestattet bedeutende Erweiterungen, theils indem man für die Function $\varrho(x) \cos \psi(x)$ eine Summe solcher Functionen $\sum_1^\infty \varrho_p(x) \cos \psi_p(x)$ einführt, theils indem man den Cosinus durch eine trigonometrische Reihe ersetzt. Von diesen Erweiterungen handelt der erste Theil der Schlussbetrachtungen, wo sie indessen, da sie nicht ganz kurz zu erledigen sind, auch wohl noch kein sehr hervorragendes Interesse bieten, nicht vollständig durchgeführt werden.

Zu erwähnen ist noch der im Art. 32 zur Sprache kommende Fall der Nichtdarstellbarkeit einer Function, wo sie nämlich in einem Puncte unendlich wird, während ihre trigonometrische Entwickelung in diesem Puncte convergirt.

* * *

Der Rest der Abhandlung, das vierte Capitel und die zweite Hälfte der Schlussbetrachtungen beschäftigt sich mit der Darlegung der Bedingungen, unter denen die trigonometrische Entwickelung einer endlichen und stetigen Function für einzelne Puncte divergirt. Es wird im IV. Capitel zuerst gezeigt, dass der $\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$ zwischen unendlichen Grenzen schwankt, wenn für f(x) eine Function sin $\Psi(x)$ genommen wird, die in Strecken, welche bei Annäherung an x = o gegen Null abnehmen, periodisch ist, aber mit gleichfalls gegen Null abnehmenden Perioden, so dass beim Wachsthum von h die Perioden von sin αh unbegrenzt oft in aufeinanderfolgenden Strecken denen von sin $\Psi(x)$ gleich werden (Art. 34). Alsdann weise ich nach, dass sich eine ohne Maxima verschwindende Function $\varrho(x)$ angeben lässt, so dass auch für $f(x) = \varrho(x) \sin \Psi(x)$ jener Limes verschwindet.

Nachdem dies in Ordnung gebracht ist, tritt die Frage nach den günstigsten Bedingungen für die Divergenz in den Vordergrund, und es ergiebt sich, dass für eine stetige Function die trigonometrische Reihe, durch eine Function ihrer Gliederzahl dividirt, welche rascher als der Logarithmus unendlich wird, stets Null zur Grenze hat, aber durch den Logarithmus oder eine langsamer unendlich werdende Function der Gliederzahl dividirt, zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen schwanken kann.

Bei dieser Gelegenheit zeigt sich noch, dass die divergenten trigonometrischen Reihen erst bei Functionen erscheinen, deren Differenzen $f(x_1) - \lim_{x=x_1} f(x)$ für einzelne Puncte x_1 so langsam oder langsamer wie der reciproke Logarithmus von $\frac{1}{x - x_1}$ verschwinden.

Die im vorstehenden gemeinten Functionen $\varrho(x) \sin \Psi(x)$ konnten zwar selbst stetig gemacht werden, aber es war noch zu zeigen, dass die unbegrenzt vielen Unstetigkeiten ihrer Differentialquotienten in der Nähe von $x = o$ auf die erhaltenen Resultate ohne Einfluss seien. Zu diesem Behuf wird im Art. 41 die Function $\sin \Psi(x)$ durch eine gleiches leistende mit beliebig vielen, in den folgenden Artikeln durch eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige ersetzt. Diese Function beweist zwar, was sie soll, ist aber nicht einfachen Baues. Ich zweifle nicht, dass schon ganz gewöhnliche aus trigonometrischen und Exponentialfunctionen zusammengesetzte Functionen für einzelne Argumente nicht darstellbar seien, habe dergleichen Beispiele aber erst aufzusuchen angefangen, als ich des Gegenstandes und der Art der Behandlung, die er erheischt, zu müde war, um noch hinreichende Ausdauer für diese Nachforschungen übrig zu haben.

In den Schlussbetrachtungen wird aus der für den Argumentwerth $x = o$ nicht darstellbaren Function $\varrho(x) \cos \Psi(x)$ eine andere abgeleitet, die zwar durchweg stetig ist, deren trigonometrische Entwickelung aber in jedem kleinsten Intervall Puncte besitzt, in denen sie divergirt.

Inhaltsverzeichniss.

B.

Untersuchung des $\lim_{h=\infty} J = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha\sigma(\alpha) \cos\psi(\alpha) \sin\alpha h$ **falls** $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$ **ist.**

II. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes, falls die willkürliche Function unendlich wird.

III. Capitel.

Prüfung der Regeln für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes, welcher dem Convergenzbeweis für die Fourier'schen Reihen zu Grunde liegt.

IV. Capitel.

Darstellung der Bedingungen, unter denen die Fourierschen Reihen divergiren.

Schlussbetrachtungen.