Zur

Theorie der geodätischen Linie

und des

geodätischen Dreiecks.

Von

A. Brill.

Zur Theorie der geodätischen Linie

und

des geodätischen Dreiecks.

Von

A. Brill.

Nach dem Vorgang von Gauss kann man die Lage eines Punktes auf einer krummen Oberfläche dadurch bestimmen, dass man dieselbe mit zwei Systemen von Curven überdeckt, deren eines aus geodätischen Linien besteht, während das andere durch deren Orthogonaltrajectorien gebildet wird. Wenn man in Bezug auf dieses krummlinige Coordinatensystem den Ausdruck für das Element einer Linie herstellt, so findet man, dass eine gewisse — von Gauss mit dem Buchstaben m bezeichnete — Funktion der Coordinaten [1]) auftritt, die als das Mass des Bogens der Orthogonaltrajectorie zwischen zwei benachbarten geodätischen Linien des Systems aufgefasst werden kann. Herr Christoffel [2]) hat diese Funktion abgelöst von ihrem Zusammenhang mit jenem Coordinatensystem betrachtet und durch Einführung des Begriffs der „reducirten Länge" eines geodätischen Bogens die Theorie der geodätischen Linie um einen fruchtbaren Gedanken bereichert.

Aus seinen grundlegenden Untersuchungen über die Trigonometrie einer krummen Oberfläche geht hervor, dass namentlich in den Bezieh-

1) Disquisitiones generales circa superficies curvas, Band IV von Gauss' Werken, § 19.

2) Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke von E. B. Christoffel, Abhandlungen der k. Acad. d. Wissensch. zu Berlin 1868.

ungen zwischen den infinitesimalen Aenderungen der Seiten und Winkel eines auf einer Oberfläche verschobenen Dreiecks und denen der krummlinigen Coordinaten seiner Eckpunkte die reducirte Länge eine hervorragende Rolle spielt. So fruchtbar nun sich diese Formeln für die allgemeine Theorie der geodätischen Linie erwiesen haben, so wenig waren sie es bis jetzt für die Trigonometrie der krummen Oberflächen. Denn einen Vorschlag zu einer Classification der Flächen abgerechnet, enthält die erwähnte Abhandlung keine Ergebnisse in dieser Richtung, und spätere Arbeiten von Weingarten,[1]) Beltrami[2]) und Lie[3]) geben anderen Methoden den Vorzug. Hat nun auch durch die schöne Bemerkung von Weingarten jene Frage nach einer Classification einen raschen Abschluss gefunden, so liegt eben der Schwerpunkt der Untersuchungen von Christoffel auf einem anderen Gebiet. Er beruht in der Allgemeinheit seiner Fragestellung. Ich habe darum versucht, auf derselben Grundlage, unter Einführung jedoch eines anderen Systems von unabhängigen Differentialen, Relationen zwischen den Verschiebungen und den Aenderungen der Stücke eines Dreiecks aufzustellen, die einfach und übersichtlich genug sind, um eine geometrische Discussion zu ermöglichen. Dieselbe ergab mir unter Anderem einen neuen Beitrag zur Frage von der Verschiebbarkeit. Ich finde, dass ein geodätisches Dreieck auf einer krummen Oberfläche ohne Seiten- und Winkel-Aenderungen immer und nur dann in einer gewissen Richtung verschiebbar ist, wenn sich in derselben ausser ihm noch drei ihm unendlich nahe benachbarte ohne Aenderung der Seiten allein verschieben lassen.

Dabei zeigt es sich, dass die geometrische Seite der Untersuchung an Anschaulichkeit gewinnt, wenn man ein gewisses geometrisches Gebilde, das den Character der Fläche längs einer geodätischen Linie erkennen lässt, in den Vordergrund rückt, den Flächenstreif nämlich, der zwischen zwei von einem Punkt ausgehenden unendlich nahe benachbarten geo-

---

1) Sitzungsberichte der k. Acad. der Wissensch. zu Berlin, 1882. Auf die Frage der Classification der Flächen bezieht sich auch eine Arbeit von v. Mangoldt, Freiburg, Berichte der naturf. Gesellschaft 1882.

2) Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Signor Christoffel nella teoria delle superficie. Rendicont. del Istit. Lomb. Ser. II, 2b.

3) Untersuchungen über geodätische Curven, Mathematische Annalen Bd. XX.

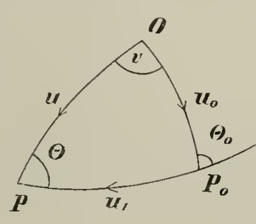
dätischen Linien gelegen ist, und dessen characteristische Eigenschaften einer Theorie der geodätischen Linie zur Grundlage dienen können. Der Untersuchung dieses Gebildes und der „reducirten Länge" auf Rotationsflächen ist die letzte Nummer dieser Abhandlung gewidmet.

I.

Schneidet man auf allen von einem Punkt O einer krummen Oberfläche ausgehenden geodätischen Linien gleiche Stücke ab, so trifft die Verbindungslinie der Endpunkte nach einem Satze von Gauss jene Linien allenthalben unter rechtem Winkel. Die Länge eines solchen Abschnittes $\overline{OP}$ einer geodätischen Linie, welche den Punkt P mit dem Pol O verbindet, sei u, v der Winkel, welchen in O diese Linie mit einer festen durch O gehenden geodätischen Linie $\overline{OP_0}$ bildet. Man kann dann u, v als krummlinige Coordinaten des Punktes P ansehen, und u als geodätischen Radius, die Orthogonaltrajectorie, längs deren u constant ist, als geodätischen Kreis bezeichnen. Bildet der geodätische Radius $\overline{OP}$ mit einem benachbarten $\overline{OP^1}$ einen unendlich kleinen Winkel dv, und betrachtet man den schmalen Flächenstreif, den $\overline{OP}$ und $\overline{OP^1}$ mit einander einschliessen, so wird dessen Breite an irgend einer Stelle, z. B. im Punkte P, durch das zwischen beiden Radien eingeschlossene Bogenelement des geodätischen Kreises gemessen, der durch P geht. Sei dessen Länge $= g\,dv$, wo g eine wesentlich positive Grösse ist, dann ist der Ausdruck für das Linienelement ds an dieser Stelle:

$$ds^2 = du^2 + g^2 dv^2.$$

Die Grösse g, welche im Allgemeinen sowohl von u als von v abhängt, kann hiernach in P als das Mass der Breite des Flächenstreifs gelten, der von zwei in O sich schneidenden unendlich benachbarten geodätischen Linien eingeschlossen wird. Ich will denselben kurz als einen *geodätischen von O ausgehenden Flächenstreif* bezeichnen.



Nun besitze der Punkt P in Bezug auf ein anderes krummliniges Coordinatensystem derselben Art, mit dem Pol in P_0, die Coordinaten u_1, v_1, wo $v_1 = \Theta_0$ der Winkel von $\overline{P_0P}$ mit der geodätischen Verbindungslinie $\overline{OP_0}$ der beiden Pole und in demselben Sinne, wie v gezählt ist. Dann geschieht der

Uebergang von dem einen Coordinatensystem zum anderen durch die folgenden Formeln für die Transformation rechtwinkliger Coordinaten:[1])

$$(1)\ldots\quad \begin{aligned} du_1 &= du\cos\Theta + g\,dv\sin\Theta \\ g_1 dv_1 &= -\,du\sin\Theta + g\,dv\cos\Theta, \end{aligned}$$

wo Θ den Winkel der in P sich schneidenden geodätischen Linien der beiden Systeme bedeutet, und g_1 das Mass der Breite des von P_0 ausgehenden geodätischen Streifs P_0P im Punkte P ist. Die Umkehrung dieser Formeln ergiebt:

$$(1^a)\ldots\quad \begin{aligned} du &= du_1\cos\Theta - g_1 dv_1\sin\Theta \\ g\,dv &= du_1\sin\Theta + g_1 dv_1\cos\Theta. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial u_1} = \cos\Theta;\qquad \frac{\partial u}{\partial v_1} = -\,g_1\sin\Theta,$$

wo hier wie im Folgenden partielle Differentialquotienten mit rundem ∂ bezeichnet werden. Durch Vergleichung der Ausdrücke:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u}{\partial v_1}\right) = \frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)$$

erhält man:

$$(2)\ldots\quad \frac{\partial\log g_1}{\partial u_1}\cdot\sin\Theta = -\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}.$$

Durch Vergleichung von:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right) = \frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)$$

folgt ebenso:

$$(3)\ldots\quad \frac{\partial\log g_1}{\partial u_1}\cdot\cos\Theta = \frac{\partial\log g}{\partial u} + \frac{1}{g}\frac{\partial\Theta}{\partial v}.$$

Addirt man die Gleichungen (2), (3), nachdem man erstere mit $-\operatorname{cotg}\Theta$ multiplicirt hat, so kommt:

$$(4)\ldots\quad \frac{\partial\log(g\sin\Theta)}{\partial u} + \frac{1}{g}\frac{\partial\Theta}{\partial v} = o.$$

---

1) Diese, sowie die folgenden Formeln (1a) bis (4), (6), (6a), bleiben auch noch gültig, wenn die Systeme von geodätischen Linien v = const., und v_1 = const. nicht mehr geodätischen Polarcoordinaten entsprechen, d. h. nicht durch einen Punkt gehen, sondern etwa durch Annahme je einer Orthogonaltrajectorie bestimmt sind.

Addirt man nun zu der Gleichung:

$$\frac{\partial \log g_1}{\partial u_1} \cdot \cos \Theta = \frac{\partial \log g}{\partial u} - \frac{\partial \log (g \sin \Theta)}{\partial u}$$

die Identität:

$$o = -\frac{\operatorname{cotg} \Theta_0 \sin \Theta}{g_1} + \frac{\partial \log (g_0 \sin \Theta_0)}{\partial u}.$$

wo g_0 eine Constante ist, die wir dem Werthe von g für $u = u_0$, $v = o$ gleichsetzen wollen, Θ_0 der Werth, den der Winkel Θ für $v = o$ annimmt, wo denn also $\Theta_0 = v_1$ ist, so erhält man:

$$(5) \ldots . \frac{\partial \log g_1}{\partial u_1} \cos \Theta = \frac{\partial \log g}{\partial u} + \frac{\operatorname{cotg} \Theta_0 \sin \Theta}{g_1} - \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{g \sin \Theta}{g_0 \sin \Theta_0},$$

wo sich der letzte Term auf die Endpunkte des geodätischen Radius u_1, längs dessen also v_1 constant ist, bezieht. Man kann denselben noch etwas umgestalten.

Beschränkt man sich nämlich auf die Fortbewegung längs des Radius u_1, so folgt aus $d v_1 = o$ (1):

$$(6) \ldots . \qquad \operatorname{cotg} \Theta = \frac{d u}{g \,.\, d v}.$$

Die Gleichung (4) erhält hierdurch die Form:

$$(6^a) \ldots . \qquad \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{d \Theta}{d v} = o.$$

Diese Gleichung, eine directe Consequenz der (1), vertritt bekanntlich zusammen mit (6) die Differentialgleichung der geodätischen Linie, hier derjenigen, längs deren v_1 constant ist.

Mit Hilfe von (6) wird dann die Gleichung (4):

$$\frac{d \log (g \sin \Theta)}{d v} = \frac{\partial \log g}{\partial v}.$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den Grenzen $v = o$ (wo denn $g = g_0$, $\Theta = \Theta_0$ ist) und $v = v$, so kommt:

$$(7) \ldots . \quad \log \frac{g \sin \Theta}{g_0 \sin \Theta_0} = \int_o^v \frac{\partial \log g}{\partial v} d v = \int \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \log g}{\partial u \, \partial v} d O,$$

wo $d O$ das Element der Oberfläche ist, und die Integration sich über die ganze Fläche des aus den geodätischen Linien $O P_0$, $P_0 P$, $O P$ gebildeten Dreiecks erstreckt.

Die Formeln (5), (7) enthalten bemerkenswerthe Beziehungen zwischen den Stücken des geodätischen Dreiecks OP_0P (dessen Seiten u, u_0, u_1, dessen Winkel v, Θ, $\pi - \Theta_0$ sind), den Grössen g, g_0 und g_1, sowie deren Differentialquotienten, und können als die Verallgemeinerungen bekannter Relationen der sphärischen Trigonometrie angesehen werden. Für die Kugel vom Halbmesser 1 ist nämlich der Ausdruck für das Bogenelement, wenn man die geographische Breite und Länge eines Punktes bezw. mit u und v bezeichnet:

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u \cdot dv^2.$$

Man hat also in diesem Falle:

$$g = \sin u, \quad g_0 = \sin u_0 \text{ und } \frac{\partial g}{\partial v} = o$$

zu setzen. Aber wegen der Verschiebbarkeit der Kugeloberfläche in sich selbst ist auch:

$$g_1 = \sin u_1.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (5), (7), so gehen dieselben in den Sinus- und den Tangenten-Satz der sphärischen Trigonometrie über.

Ich wende die Formeln (5), (7) nun auf den Fall eines unendlich schmalen geodätischen Dreiecks einer krummen Oberfläche an. Setzt man $v = o$, $\Theta = \pi$, so ergiebt sich, vermöge (7) (weil g und g_0 wesentlich positive Grössen sind):

$$\Theta_0 = \pi$$

und:

$$(8) \ldots . \qquad \lim \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta_0} = \frac{g_0}{g},$$

wo sich das Zeichen lim auf den Grenzübergang zu dem unendlich schmalen Dreieck bezieht. Mit Rücksicht hierauf erhält die Gleichung (5) die Gestalt:

$$(9) \ldots . \quad g_0 = g g_1 \left(\frac{\partial \log g_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \log g}{\partial u}\right).$$

Zugleich wird:

$$u_0 = u + u_1.$$

Führt man jedoch den Uebergang so aus, dass (2. Fall):

$$u = u_0 + u_1$$

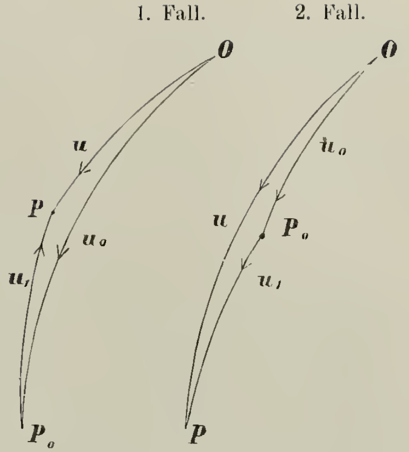
wird, so kommt:

$$\Theta = \Theta_0 = v = o,$$

und an Stelle der Gleichung (9) tritt die folgende:

$$(9^a) \ldots \quad g_0 = g g_1 \left(\frac{\partial \log g_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \log g}{\partial u} \right),$$

während (8) bestehen bleibt. Diesen beiden Fällen entsprechen die beifolgend gezeichneten penultimaten Formen des Dreiecks.



Im ersten Falle zeigt die Linie u_0 ein symmetrisches Verhalten gegenüber den beiden Stücken u und u_1. Da vermöge der Formel (9) dies auch mit der Funktion g_0 gegenüber g und g_1 der Fall ist, so schliesst man auf folgende merkwürdige Eigenschaft dieser Funktion. Nach Früherem ist g_0 das Mass der Breite des von O ausgehenden Streifs OP_0 in dem Punkte P_0. Weil nun der Ausdruck für g_0 bei Vertauschung von u, g mit bezw. u_1, g_1, also bei Vertauschung der Punkte O und P_0 sich nicht ändert, so ist g_0 auch das Mass der Breite des von P_0 ausgehenden Streifs $P_0 O$ in dem Punkte O. Diesem neutralen Verhalten gegen die Endpunkte entspricht die Bezeichung: „reducirte Länge von OP_0", welche Herr Christoffel der Funktion g_0 beigelegt hat.

Eine andere ebenfalls von Herrn Christoffel bereits bemerkte Eigenschaft der reducirten Länge ergiebt sich aus der dem zweiten Fall entsprechenden Formel (9ª). Differenzirt man dieselbe in der Weise, dass man den Punkt O sich in der Richtung PO über O hinaus um unendlich wenig verschoben denkt, und bezeichnet man die Differentialquotienten von g und g_0, die dieser Aenderung entsprechen, durch:

$$\frac{\delta g}{\delta u}, \frac{\delta g_0}{\delta u_0},$$

so kommt:

$$\frac{\delta g_0}{\delta u_0} = -g_1 \frac{\delta d g}{\delta u \, d u} + \frac{\delta g}{\delta u} \cdot \frac{d g_1}{d u_1}.$$

Lässt man nun die Länge u_0 gegen Null convergiren, so wird der Differentialquotient:

$$\frac{\delta g_0}{\delta u_0} = -1,$$

und da noch $u_1 = u$, $g_1 = g$ wird, so erhält man:

$$(10) \ldots . \quad g \cdot \frac{\delta d g}{\delta u\, d u} - \frac{\delta g}{\delta u} \cdot \frac{d g}{d u} = 1.$$

Dieser partiellen Differentialgleichung, in der sich die Differentialquotienten $\frac{d}{du}$, $\frac{\delta}{\delta u}$ bezw. auf die Verschiebungen der Endpunkte P und O beziehen, genügt die reducirte Länge $OP = u$. Auf weitere Eigenschaften, die sich aus dieser Gleichung ableiten liessen, werden wir in einem anderen Zusammenhang unten zurückkommen.

Die oben entwickelten Relationen (2)—(7) können auch zum Nachweise der Invarianteneigenschaft des Ausdrucks für das Krümmungsmass der Fläche verwandt werden, indem, wie ich hier indess nicht näher ausführen will, mit Hilfe der leicht zu erweisenden Relation:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_1}\right) = \sin \Theta . \left\{\left(\frac{\partial \log g_1}{\partial u_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \log g}{\partial u}\right)^2\right\}$$

durch Differentiation der Gleichung (2) die Identität entsteht:

$$\frac{1}{g_1} \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial u_1{}^2} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.$$

Ich wende mich nun zur Aufstellung eines Systems von Gleichungen, das die vorstehend entwickelten als besondere Fälle enthält.

2.

Wenn man die Eckpunkte eines von geodätischen Linien gebildeten Dreiecks einer krummen Oberfläche unendlich wenig verschiebt,[1]) so ändern sich im Allgemeinen Seiten und Winkel des Dreiecks. Zwischen den Veränderungen dieser Letzteren werden indess ebenso wenig Beziehungen zu erwarten sein, wie solche zwischen den endlichen Seiten und

1) Wenn in der Folge von Dreiecken die Rede ist, so sind immer „geodätische," d. h. aus geodätischen Linien gebildete gemeint, ebenso bestehen die betrachteten Verschiebungen in infinitesimalen Lagenänderungen der Eckpunkte.

Winkeln eines geodätischen Dreiecks im Allgemeinen bestehen. Es kann sich vielmehr nur darum handeln, diese Aenderungen in Funktion von sechs anderen ebenfalls unabhängigen auszudrücken. Für manche Fragen eignen sich hierzu die Coordinatenänderungen der Ecken in Bezug auf ein krummliniges Coordinatensystem der Oberfläche. Will man jedoch das fremde Element, das durch die Coordinaten der Eckpunkte in die Trigonometrie der geodätischen Dreiecke eingeführt wird, vermeiden, so kann man die Verschiebungen auf das Dreieck selbst beziehen, indem man die Tangenten der in einem Eckpunkt zusammenstossenden Seiten zu Axen eines infinitesimalen schiefwinkligen Coordinatensystems macht, gegen das man den verschobenen Eckpunkt festlegt. Die Formeln, welche auf diese Weise entstehen, erweisen sich jedoch als complicirt und der Discussion weit weniger zugänglich, als wenn man zu unabhängig Veränderlichen die Orthogonal-Projectionen der infinitesimalen Verschiebungen auf die anstossenden Dreiecksseiten macht. Ich werde im Nachfolgenden unter dieser Annahme ein System von Gleichungen entwickeln und dasselbe auf einige Fragen in Betreff der Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke von endlicher Seitenlänge anwenden.

Es seien 1, 2, 3 die Eckpunkte eines aus geodätischen Linien gebildeten Dreiecks einer krummen Oberfläche, α, β, γ die Winkel und $\overline{2\,3} = a$, $\overline{3\,1} = b$, $\overline{1\,2} = c$ die Seiten. Die „reducirten Längen" derselben bezeichnen wir durch (a), (b), (c),[1] so dass z. B. (c) das Mass der Breite eines von 1 ausgehenden Streifs im Punkte 2, oder auch eines von 2 ausgehenden Streifs in 1 bedeutet. Durch eine infinitesimale Verschiebung ω_1, die wir dem Punkte 1 ertheilen, werde derselbe nach $1'$ gebracht, so dass:

$$\omega_1 = \overline{1\,1'}.$$

Die Richtung von ω_1 werde durch die Winkel (Azimuthe) β_1, γ_1 der in 1 zusammenstossenden Seiten b, c gegen die auf ω_1 senkrechte Richtung u_1 bestimmt, und zwar soll sich die positive Richtung u_1 aus der Verschiebungsrichtung ω_1 ergeben, indem man $1\,1'$ um den Punkt 1 nach links um einen rechten Winkel dreht. Ebenso werden in den Punkten

1) Später, wenn eine Verwechslung nicht mehr möglich ist, werden wir kurz a, b, c schreiben.

2, 3 die Richtungen u_2, u_3 senkrecht zu den Fortschreitungsrichtungen $\overline{2\,2'} = \omega_2$, $\overline{3\,3'} = \omega_3$ angenommen; ferner seien α_2, γ_2; α_3, β_3 bezüglich die Winkel der Seiten a, c; a, b gegen die Richtungen u_2 und u_3. Zwischen den Azimuthen β_1, γ_1 und dem Winkel α des Dreiecks besteht eine Beziehung, die wir mit den analogen folgen lassen:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 - \gamma_1 &= \alpha - \pi \\ \gamma_2 - \alpha_2 &= \beta - \pi \\ \alpha_3 - \beta_3 &= \gamma - \pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (1)$$

Von den Eckpunkten 2′, 3′ fälle man nun die infinitesimalen Lothe auf die Seite $\overline{2\,3}$, d. h. man projicire die neue Seite $\overline{2'\,3'}$ orthogonal auf die alte $\overline{2\,3}$.

Die Länge der Projection wird dann von der Länge der Seite $\overline{2'\,3'}$ selbst nur um eine unendlich kleine Grösse 2. Ordnung abweichen, wenn ω_1, ω_2, ω_3 solche von der 1. Ordnung sind. Der Zuwachs $\varDelta a$ der Seite $\overline{2'\,3'}$ gegenüber $a = \overline{2\,3}$ ist also darstellbar durch:

$$\varDelta a = \omega_2 \sin \alpha_2 - \omega_3 \sin \alpha_3.$$

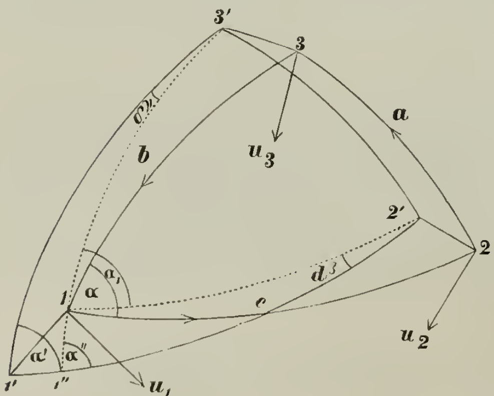
Analog erhält man:

$$\varDelta b = \omega_3 \sin \beta_3 - \omega_1 \sin \beta_1$$
$$\varDelta c = \omega_1 \sin \gamma_1 - \omega_2 \sin \gamma_2.$$

Hieraus folgt durch Umkehrung:

$$(\sin \alpha_2 \sin \beta_3 \sin \gamma_1 - \sin \alpha_3 \sin \beta_1 \sin \gamma_2)\, \omega_1 =$$
$$= \varDelta a \sin \beta_3 \sin \gamma_2 + \varDelta b \cdot \sin \gamma_2 \sin \alpha_3 + \varDelta c \cdot \sin \alpha_2 \sin \beta_3.$$

und ähnliche Formeln für ω_2 und ω_3.



Der Zuwachs der Winkel wird auf folgende Art ermittelt. Man denke sich die Ueberführung des Dreiecks 1 2 3 in die neue Lage 1′ 2′ 3′ successiv vorgenommen, und von 1 2 3 zuerst auf 1 2′ 3′ übergegangen. Dann geht der Winkel α über in $\alpha_1 = \alpha + \delta\alpha - d\alpha$, wenn mit:

$$\delta\alpha = \sphericalangle\, 3\,1\,3' \quad d\alpha = \sphericalangle\, 2\,1\,2'$$

bezeichnet wird. Aber es ist, immer bis auf unendlich kleine Grössen 2. Ordnung genau, die Breite des von 1 ausgehenden geodätischen Streifens $\overline{1\,2}$ in 2 darstellbar durch:

$$(c) \cdot d\alpha = -\omega_2 \cos\gamma_2 = -\omega_1 \sin\gamma_1 \operatorname{ctg}\gamma_2 + \varDelta c \cdot \operatorname{cotg}\gamma_2$$

ebenso ist die Breite des Streifens $\overline{1\,3}$ in 3:

$$(b) \cdot \delta\alpha = \omega_3 \cos\beta_3 = \omega_1 \sin\beta_1 \operatorname{cotg}\beta_3 + \varDelta b \cdot \operatorname{cotg}\beta_3.$$

Der Zuwachs des Winkels α wird also:

$$\alpha_1 - \alpha = \delta\alpha - d\alpha = \frac{\omega_2 \cos\gamma_2}{(c)} + \frac{\omega_3 \cos\beta_3}{(b)}$$

$$= \frac{\omega_1 \sin\beta_1 \operatorname{cotg}\beta_3}{(b)} + \frac{\omega_1 \sin\gamma_1 \operatorname{cotg}\gamma_2}{(c)} + \varDelta b \cdot \frac{\operatorname{cotg}\beta_3}{(b)} - \varDelta c \cdot \frac{\operatorname{cotg}\gamma_2}{(c)}.$$

Der Uebergang von dem Dreieck $1\,2'\,3'$ zu $1'\,2'\,3'$ werde durch eine weitere Zwischenlage $1''\,2'\,3'$ vermittelt, wo $1''$ der Schnittpunkt von $\overline{1\,3'}$ mit $1'\,2'$ ist. Setzt man:

$$\sphericalangle\, 1'\,3'\,1 = \delta\gamma; \quad \sphericalangle\, 1'\,2'\,1 = d\beta; \quad \sphericalangle\, 3'\,1''\,2' = \alpha'',$$

so ist die Breite der Streifen $2'\,1$, $3'\,1$ in dem Punkte 1 bezüglich:

$$(c)\, d\beta = \omega_1 \cos\gamma_1; \qquad (b)\, \delta\gamma = \omega_1 \cos\beta_1.$$

Andererseits ergeben sich aus der Gleichung der geodätischen Linie (§ 1. Gl. 6[a]) die Beziehungen:

$$d\beta \cdot \frac{\partial(c)}{\partial c_1} + (\alpha_1 - \alpha'') = o$$

$$\delta\gamma \cdot \frac{\partial(b)}{\partial b_1} + (\alpha' - \alpha'') = o.$$

wo $\sphericalangle\, 2'\,1'\,3' = \alpha'$ gesetzt ist, und durch den Index 1 bei c und b angedeutet wird, dass bei der Differentiation sich der Endpunkt 1 der Linie $2'\,1$, bezüglich $3'\,1$ verschiebt.

Man erhält durch Subtraction:

$$\alpha' - \alpha_1 = d\beta \cdot \frac{\partial(c)}{\partial c_1} - \delta\gamma \cdot \frac{\partial(b)}{\partial b_1}$$

$$= \frac{\omega_1 \cos\gamma_1}{(c)} \cdot \frac{\partial(c)}{\partial c_1} - \frac{\omega_1 \cos\beta_1}{(b)} \cdot \frac{\partial(b)}{\partial b_1}.$$

Der Gesammtzuwachs $\Delta\alpha$ des Winkels α beim Uebergang von dem Dreieck 1 2 3 zu 1′ 2′ 3′:

$$\Delta\alpha = (\alpha_1 - \alpha) + (\alpha' - \alpha_1)$$

ist also darstellbar in der Form:

$$\Delta\alpha = \omega_1 \left(\frac{c_1'}{c} \cos\gamma_1 - \frac{b_1'}{b} \cos\beta_1\right) + \frac{\omega_2 \cos\gamma_2}{c} + \frac{\omega_3 \cos\beta_3}{b} \qquad \ldots . (2)$$

wo die Klammern bei Bezeichnung der reducirten Längen nunmehr weggelassen werden, und hier wie in der Folge:

$$a_2' = \frac{\partial(a)}{\partial a_2}; \qquad b_1' = \frac{\partial(b)}{\partial b_1}; \qquad c_1' = \frac{\partial(c)}{\partial c_1}$$

$$a_3' = \frac{\partial(a)}{\partial a_3}; \qquad b_3' = \frac{\partial(b)}{\partial b_3}; \qquad c_2' = \frac{\partial(c)}{\partial c_3}$$

die Differentialquotienten der reducirten Längen der Seiten sind, die den Verschiebungen ihrer Endpunkte in der Richtung der Seiten entsprechen. Vermöge der oben angegebenen Umformungen kann man auch schreiben:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta b \operatorname{cotg}\beta_3}{b} - \frac{\Delta c \cdot \operatorname{cotg}\gamma_2}{c} + \omega_1 \cdot A, \qquad \ldots . (3)$$

wo:

$$A = \frac{\sin\beta_1 \operatorname{cotg}\beta_3}{b} - \frac{b_1'}{b}\cos\beta_1 + \frac{\sin\gamma_1 \operatorname{cotg}\gamma_2}{c} + \frac{c_1'}{c}\cos\gamma_1 \qquad \ldots . (3^a)$$

ist. Ich gebe dem Ausdruck A noch eine andere Gestalt. Wegen der Formeln (1), (1ª) des vor. § hat man:

$$(c)\frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = \sin\gamma_1; \qquad (b)\frac{\partial\beta_3}{\partial u_1} = -\sin\beta_1,$$

wo du_1 als Element einer geodätischen Linie aufgefasst ist, oder auch:

$$\frac{\partial \log \sin\gamma_2}{\partial u_1} = \frac{\sin\gamma_1}{(c)} \operatorname{cotg}\gamma_2; \quad \frac{\partial \log \sin\beta_3}{\partial u_1} = -\frac{\sin\beta_1}{(b)} \operatorname{ctg}\beta_3. \qquad \ldots . (4)$$

Weil ferner die Linien c, b geodätische sind, so folgt aus der Differentialgleichung für dieselben:

$$c_1' = -\frac{d\gamma_1}{d\gamma_2}; \qquad b_1' = \frac{d\beta_1}{d\beta_3},$$

und mit Rücksicht auf die eben aufgestellten Formeln:

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = \frac{d\gamma_1}{d\gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_1} = -\frac{c_1'}{c} \sin \gamma_1,$$

oder endlich:

$$\frac{c_1'}{c} \cos \gamma_1 = -\frac{\partial \log \sin \gamma_1}{\partial u_1}. \qquad \ldots . (4^a)$$

Analog wird:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial u_1} = -\frac{b_1'}{b} \sin \beta_1; \quad \frac{b_1'}{b} \cos \beta_1 = -\frac{\partial \log \sin \beta_1}{\partial u_1}. \qquad \ldots . (5)$$

Mit Hülfe der Formeln (4), (4^a), (5) gestaltet sich nun der Ausdruck A wie folgt:

$$A = \frac{\partial}{\partial u_1} \log \frac{\sin \gamma_2 \sin \beta_1}{\sin \gamma_1 \sin \beta_3}.$$

Weil aber eine Verschiebung des Punktes 1 in der Richtung u_1 die Winkel α_2 α_3 (der Seite $\overline{2\,3}$ gegen die Richtungen u_2 u_3) nicht ändert, so kann man dem Ausdruck A die elegante, in Bezug auf die drei Eckpunkte des Dreiecks symmetrische Form geben:

$$A = \frac{\partial}{\partial u_1} \log Q,$$

$$\text{wo:} \quad Q = \frac{\sin \alpha_3 \sin \beta_1 \sin \gamma_2}{\sin \alpha_2 \sin \beta_3 \sin \gamma_1} \qquad \ldots . (6)$$

ist. Mit Hülfe dieser Bezeichnung gewinnen die Formeln für die Winkeländerungen, welche das Dreieck 1 2 3 durch Verschiebung der Eckpunkte um die infinitesimalen Strecken ω_1, ω_2, ω_3 in den durch die Azimuthe β_1, γ_1; α_2, γ_2; β_3, α_3 bestimmten Richtungen erfährt, die folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta \alpha &= \frac{\Delta b}{(b)} \cdot \operatorname{cotg} \beta_3 - \frac{\Delta c}{(c)} \operatorname{cotg} \gamma_2 + \omega_1 \cdot \frac{\partial \log Q}{\partial u_1} \\
\Delta \beta &= \frac{\Delta c}{(c)} \cdot \operatorname{cotg} \gamma_1 - \frac{\Delta a}{(a)} \operatorname{cotg} \alpha_3 + \omega_2 \cdot \frac{\partial \log Q}{\partial u_2} \\
\Delta \gamma &= \frac{\Delta a}{(a)} \cdot \operatorname{cotg} \alpha_2 - \frac{\Delta b}{(b)} \operatorname{cotg} \beta_1 + \omega_3 \cdot \frac{\partial \log Q}{\partial u_3},
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots . (7)$$

während die Seitenänderungen Δa, Δb, Δc durch die Formeln bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= \omega_2 \sin\alpha_2 - \omega_3 \sin\alpha_3 \\ \Delta b &= \omega_3 \sin\beta_3 - \omega_1 \sin\beta_1 \\ \Delta c &= \omega_1 \sin\gamma_1 - \omega_2 \sin\gamma_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (8)$$

und zwischen den Azimuthen und den Dreieckswinkeln die Beziehungen (1) bestehen.

Die hervorragende Bedeutung, welche die Grösse Q für dieses Formelsystem besitzt, wird noch durch den Umstand erhöht, dass die Differenz:

$$\sin\alpha_2 \sin\beta_3 \sin\gamma_1 - \sin\alpha_3 \sin\beta_1 \sin\gamma_2$$

im Nenner der Ausdrücke für ω_1, ω_2, ω_3 erscheint, die durch Umkehrung der Formeln (8) sich ergeben. Verschwinden also die Grössen Δa, Δb, Δc, ohne dass die ω verschwinden, d. h. wird das Dreieck ohne Aenderung der Seitenlängen verschoben, so werden die Winkeländerungen den Verschiebungsgrössen der betreffenden Eckpunkte und den Differentialquotienten der Grösse Q nach den Richtungen u proportional, welche auf den Richtungen ω senkrecht stehen; Q selbst aber wird $= 1$. Nennt man nun die drei Richtungen u_1, u_2, u_3, welche von den Ecken des Dreiecks 1 2 3 ausgehen, dann conjugirt, wenn die zu ihnen senkrechten Verschiebungsrichtungen ω_1, ω_2, ω_3 die Eigenschaft haben, dass längs derselben eine Verschiebung des Dreiecks ohne Seitenänderung möglich ist, so hat man den Satz, dass zwischen den Azimuthen der Dreiecksseiten in Bezug auf drei „conjugirte" Richtungen die Gleichung:

$$Q = 1$$

besteht, und umgekehrt folgt aus dieser Gleichung, dass die Richtungen u conjugirte sind. Im Falle der Flächen constanter Krümmung, wo eine Verschiebung ohne Seitenänderung zugleich ohne Winkeländerung erfolgt, gehen conjugirte Richtungen, durch geodätische Linien verlängert, offenbar immer durch einen Punkt der Fläche.

Wenn die 3 Richtungen u conjugirte sind nicht nur für das Dreieck 1 2 3, sondern auch für ein Dreieck $1'$ 2 3, für welches der Punkt $1'$ gegen 1 unendlich wenig in der Richtung u_1 verschoben ist, so ist Q auch für dieses Dreieck gleich 1, und man hat:

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} = o$$

oder $\Delta\alpha = o$. Bei einer Verschiebung der Eckpunkte des Dreiecks 1 2 3 in den Richtungen ω bleibt alsdann nicht nur jede Seite. sondern auch ein Winkel α des Dreiecks (im Punkte 1) ungeändert. Diese Behauptung kann auch umgekehrt werden: wenn bei einer Verschiebung die Seiten und ein Winkel α ungeändert bleiben, so bestehen für die zu den Verschiebungsrichtungen senkrechten Richtungen u_1, u_2, u_3 die Gleichungen

$$Q = 1; \qquad \frac{\partial Q}{\partial u_1} = o.$$

Damit also bei der infinitesimalen Verschiebung eines gegebenen geodätischen Dreiecks **alle** Seiten und Winkel ungeändert bleiben, ist es nothwendig und hinreichend, dass die zu den Verschiebungsrichtungen der Eckpunkte senkrechten Richtungen „conjugirte“ seien nicht nur für das gegebene sondern auch für irgend drei von diesem verschiedene Dreiecke, deren Eckpunkte von den gegebenen in den Richtungen jener Senkrechten unendlich wenig abstehen.

Von den conjugirten Richtungen u_1, u_2, u_3 sind im Allgemeinen zwei willkührlich annehmbar, die dritte ist dadurch bestimmt. Durch passende Wahl Jener kann man irgend zwei von den partiellen Differentialquotienten der Grösse Q zum Verschwinden bringen. und also die Unveränderlichkeit zweier von den Winkeln bei der Verschiebung erreichen. Die von dreien hingegen ist für ein gegebenes Dreieck nicht erreichbar wenn die Lage des Dreiecks nicht besondere Bedingungen erfüllt.

Führt man an Stelle der Verschiebungsgrössen ω und ihrer Winkel mit den anstossenden Seiten die Orthogonalprojectionen der ω auf diese Letzteren ein, welche durch die sechs Gleichungen definirt sind:

$$\left.\begin{array}{lll} -\omega_1 \sin\beta_1 = \Delta b_1; & -\omega_2 \sin\gamma_2 = \Delta c_2; & -\omega_3 \sin\alpha_3 = \Delta a_3 \\ -\omega_1 \sin\gamma_1 = \Delta c_1; & -\omega_2 \sin\alpha_2 = \Delta a_2; & -\omega_3 \sin\beta_3 = \Delta c_3, \end{array}\right\} \ldots. (9)$$

so gewinnen die Gleichungen für die Zuwächse der Seiten (§ 2) (8) die Form:

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= \Delta a_3 - \Delta a_2 \\ \Delta b &= \Delta b_1 - \Delta b_3 \\ \Delta c &= \Delta c_2 - \Delta c_1. \end{aligned}\right| \quad \ldots . (10)$$

Wegen der Relationen zwischen den Azimuthen und den Winkeln des Dreiecks:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \gamma_1 &= \alpha - \pi \\ \gamma_2 - \alpha_2 &= \beta - \pi \\ \alpha_3 - \beta_3 &= \gamma - \pi \end{aligned}$$

bestehen ferner die Gleichungen:

$$\cos\beta_1 = \sin\beta_1 \operatorname{cotg}\alpha + \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}; \quad -\cos\beta_3 = \sin\beta_3 \operatorname{cotg}\gamma + \frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma};$$

$$-\cos\gamma_1 = \sin\gamma_1 \operatorname{cotg}\alpha + \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha}; \quad \cos\gamma_2 = \sin\gamma_2 \operatorname{cotg}\beta + \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}.$$

Transformirt man mit ihrer Hülfe die Gleichung (2), so erhält man mit Rücksicht auf (9) die erste Formel des folgenden Systems:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\frac{\Delta a_2}{c\sin\beta} + \frac{\Delta a_3}{b\sin\gamma} + \Delta b_3 \cdot \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{b} + \Delta b_1\left(\frac{b_1'}{b}\operatorname{cotg}\alpha + \frac{c_1'}{c\sin\alpha}\right) \\ &\quad + \Delta c_1\left(\frac{c_1'}{c}\operatorname{cotg}\alpha + \frac{b_1'}{b\sin\alpha}\right) - \Delta c_2 \cdot \frac{\operatorname{cotg}\beta}{c}. \\ \Delta\beta &= \Delta a_2\left(\frac{a_2'}{a}\operatorname{cotg}\beta + \frac{c_2'}{c\sin\beta}\right) - \Delta a_3\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{a} - \frac{\Delta b_3}{a\sin\gamma} + \frac{\Delta b_1}{c\sin\alpha} \\ &\quad + \Delta c_1\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{c} + \Delta c_2\left(\frac{c_2'}{c}\operatorname{cotg}\beta + \frac{a_2'}{a\sin\beta}\right) \\ \Delta\gamma &= \Delta a_2\frac{\operatorname{cotg}\beta}{a} + \Delta a_3\left(\frac{a_3'}{a}\operatorname{cotg}\gamma + \frac{b_3'}{b\sin\gamma}\right) + \Delta b_3\left(\frac{b_3'}{b}\operatorname{cotg}\gamma + \frac{a_3'}{a\sin\gamma}\right) \\ &\quad - \Delta b_1\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{b} - \frac{\Delta c_1}{b\sin\alpha} + \frac{\Delta c_2}{a\sin\beta}. \end{aligned}\right| (11)$$

Die Coefficienten der Δa_2, Δa_3 etc. in diesen Formeln sind Funktionen nur noch der Winkel, der reducirten Längen der Dreiecksseiten und ihrer Differentialquotienten nach den beiden Endelementen.

3.

Ich wende mich nun zur Betrachtung besonderer Fälle.

1. Geht die Verschiebung des Dreiecks ohne Seitenänderungen vor sich, so ist:

$$\varDelta a_2 = \varDelta a_3; \quad \varDelta b_1 = \varDelta b_3; \quad \varDelta c_2 = \varDelta c_1.$$

Andererseits hat man wegen (5) in § 1:

$$\frac{c_1'}{c} \operatorname{cotg} \alpha + \frac{b_1'}{b} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{cotg} \beta}{c} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial b_1} \log \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Diese Formel bleibt richtig, wenn man in derselben β mit γ, b mit c, $\frac{\partial}{\partial b_1}$ mit $-\frac{\partial}{\partial c_1}$ vertauscht, denn sie entspricht dann einem Dreieck, für welches die Seiten und Winkel nur in der umgekehrten Anordnung aufeinander folgen. Dies von der Rückseite betrachtet, fällt aber mit dem ersten zusammen. Es besteht also auch für dieses die Gleichung:

$$\frac{b_1'}{b} \operatorname{cotg} \alpha + \frac{c_1'}{c} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\operatorname{cotg} \gamma}{b} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\partial c_1} \log \frac{c \sin \alpha}{a \sin \gamma}.$$

Führt man diese Beziehungen in das Formelsystem (11), § 2, ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin \alpha \cdot \varDelta \alpha = {} & \sin \alpha \cdot \varDelta a_2 \cdot \left(\frac{1}{b \sin \gamma} - \frac{1}{c \sin \beta}\right) + \varDelta b_3 \cdot \frac{\partial}{\partial c_1} \log \frac{c \sin \alpha}{a \sin \gamma} \\
& + \varDelta c_1 \cdot \frac{\partial}{\partial b_1} \log \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}; \\
\sin \beta \cdot \varDelta \beta = {} & \varDelta a_2 \cdot \frac{\partial}{\partial c_2} \log \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} + \sin \beta \cdot \varDelta b_3 \left(\frac{1}{c \sin \alpha} - \frac{1}{a \sin \gamma}\right) \\
& + \varDelta c_1 \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} \log \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}; \\
\sin \gamma \cdot \varDelta \gamma = {} & \varDelta a_2 \cdot \frac{\partial}{\partial b_3} \log \frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta} + \varDelta b_3 \frac{\partial}{\partial a_3} \log \frac{a \sin \gamma}{c \sin \alpha} \\
& + \sin \gamma \cdot \varDelta c_1 \cdot \left(\frac{1}{a \sin \beta} - \frac{1}{b \sin \alpha}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (1)$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass ein geodätisches Dreieck ohne Winkel- und Seitenänderung nach allen Richtungen unendlich wenig verschiebbar ist, wenn sich die Sinus der Winkel wie die reducirten Längen der gegenüberstehenden Seiten verhalten, so zwar, dass diese Proportion nicht nur für das Dreieck selbst, sondern für jedes demselben unendlich benachbarte erfüllt ist. Es genügt indess, den Nachweis zu führen, dass eine infinitesimale Drehung des Dreiecks um jeden der drei Eckpunkte ohne Winkel- und Seitenänderung erfolgt. Derselbe beruht darauf, dass man. um z. B. die Drehbarkeit um die Ecke 1 nachzuweisen. prüft. ob die Gleichung:

$$(b) \sin \gamma = (c) \sin \beta$$

ausser für das Dreieck selbst für noch zwei andere erfüllt ist, von denen je zwei Eckpunkte mit jenen zusammenfallen, während der dritte durch eine infinitesimale Verschiebung von 2 längs c bez. 3 längs b entsteht.

Wenn bei der infinitesimalen Drehung eines geodätischen Dreiecks um die Ecke 1 sich die Seiten nicht ändern. so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass auch der Winkel im Drehpunkt sich nicht ändert, die, dass die Gleichung $(b) \sin \gamma = (c) \sin \beta$ für das gegebene Dreieck erfüllt ist. Ist diese Bedingung für alle Dreiecke erfüllt, deren Spitzen in 1 und deren Grundlinien Abschnitte der geodätischen Linie a sind. so folgt aus Gleichung (7) § 1, dass die Grösse (b), die man in diesem Fall als Funktion der Länge b und des Winkels γ gegen die festgedachte geodätische Linie c ansehen kann, von γ unabhängig wird, dass unsere Fläche also eine Rotationsfläche (oder eine auf eine solche abwickelbare Fläche) ist. deren Meridiane die Linien $\gamma =$ const., deren Parallelkreise $b =$ const. sind.

II. Wenn ein Eckpunkt des geodätischen Dreiecks sich auf einer der anstossenden Seiten verschiebt, z. B. der Eckpunkt 2 auf der Seite a, so ist (§ 2) (1):

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 = \beta - \frac{\pi}{2}.$$

daher (9):

$$\varDelta c_2 = - \varDelta a_2 \cdot \cos \beta.$$

Verschieben sich zugleich die Eckpunkte 3 auf b; 1 auf c, so folgt ebenso:

$$\varDelta a_3 = - \varDelta b_3 \cdot \cos \gamma; \quad \varDelta b_1 = - \varDelta c_1 \cdot \cos \alpha.$$

Führt man dies in die Gleichungen (§ 2) (11) ein, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta\alpha &= \varDelta c_1 \cdot \frac{b_1'}{b} \sin\alpha - \varDelta a_2 \cdot \frac{\sin\beta}{c} \\
\varDelta\beta &= \varDelta a_2 \cdot \frac{c_2'}{c} \sin\beta - \varDelta b_3 \cdot \frac{\sin\gamma}{a} \\
\varDelta\gamma &= \varDelta b_3 \cdot \frac{a_3'}{a} \cdot \sin\gamma - \varDelta c_1 \cdot \frac{\sin\alpha}{b}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (2)$$

Sollen diese Verschiebungen zugleich ohne Winkeländerung erfolgen, so ergiebt sich aus dem Verschwinden der rechten Seiten die (nothwendige und hinreichende) elegante Bedingungsgleichung:

$$b_1'\, c_2'\, a_3' = 1.$$

Für die Verschiebbarkeit der Eckpunkte je auf der anderen anstossenden Seite erhält man ebenso:

$$c_1'\, a_2'\, b_3' = -1.$$

Diese zwei Gleichungen sind u. A. für die entwickelbaren Flächen erfüllt, wo denn:

$$(a) = a_3 - a_2; \quad (b) = b_1 - b_3; \quad (c) = c_2 - c_1$$

ist. Aber es lässt sich zeigen, dass immer dann, wenn eine Verschiebung der Eckpunkte eines Dreiecks längs der links (oder auch der rechts) anstossenden Seiten ohne Winkeländerung möglich sein soll, die Fläche eine abwickelbare sein muss. Denn lässt man etwa die Seite a unendlich klein werden, so reducirt sich a_3' auf 1, a_2' auf -1, ferner wird dann $b_1' = -c_1'$; $b_3' = -c_2'$, und die obigen Gleichungen ergeben:

$$c_1'\, c_2' + 1 = o.$$

Gilt diese Gleichung längs des ganzen geodätischen Streifs, in welchen das Dreieck übergegangen ist, so folgt aus der für diesen sonst noch bestehenden Gleichung (10) (§ 1), dass

$$(c) \cdot \frac{\partial^2 (c)}{\partial c_1\, \partial c_2} = o,$$

eine Differentialgleichung, deren Integral mit Rücksicht auf:

$$c_1'\, c_2' + 1 = o$$

in:

$$(c) = c_1 - c_2$$

übergeht. Der Streif muss also in die Ebene abwickelbar sein.

III. Wenn eine Seite des Dreiecks bei der infinitesimalen Lagenänderung sich in sich selbst verschiebt (wobei ihre Länge sich übrigens ändern kann), so wird, wenn dies z. B. die Seite a ist, nach der vorstehenden Nummer:

$$\Delta c_2 = -\Delta a_2 \cos\beta; \quad \Delta b_3 = -\Delta a_3 \cos\gamma.$$

Führt man diese Relationen in die Gleichungen (§ 2) (11) ein, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha &= -\Delta a_2 \cdot \frac{\sin\beta}{c} + \Delta a_3 \cdot \frac{\sin\gamma}{b} + \Delta b_1 \left(\frac{b_1'}{b} \operatorname{cotg}\alpha + \frac{c_1'}{c\sin\alpha}\right) \\
&\qquad + \Delta c_1 \left(\frac{c_1'}{c} \operatorname{cotg}\alpha + \frac{b_1'}{b\sin\alpha}\right) \\
\Delta\beta &= \Delta a_2 \cdot \frac{c_2'}{c} \sin\beta \quad + \Delta b_1 \cdot \frac{1}{c\sin\alpha} \quad + \Delta c_1 \cdot \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{c} \\
\Delta\gamma &= \quad \Delta a_3 \cdot \frac{b_3'}{b} \sin\gamma - \Delta b_1 \cdot \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{b} \quad - \Delta c_1 \cdot \frac{1}{b\sin\alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (3)$$

Multiplicirt man die erste Gleichung dieses Systems mit 1, die zweite mit $-c_1'$, die dritte mit b_1' und addirt die drei, so erhält man auf der rechten Seite die Summe:

$$-\Delta a_2 \cdot \frac{\sin\beta}{c}(1 + c_1' c_2') + \Delta a_3 \cdot \frac{\sin\gamma}{b}(1 + b_1' b_3').$$

Wenn nun noch die Verschiebung ohne Winkeländerung erfolgt, dieser Ausdruck also verschwindet, so ist im Allgemeinen durch die Verschiebungsgrösse Δa_2 des einen Endpunktes der Seite a Alles bestimmt.

Nur wenn:

$$c_1' c_2' + 1 = o$$

ist, wird $\Delta a_3 = o$, welchen Werth auch Δa_2 haben mag. Der Eckpunkt 3 bleibt dann fest. Aus der letzten der drei obigen Gleichungen folgt dann aber:

$$\Delta c_1 = -\Delta b_1 \cos\alpha,$$

woraus sich ergiebt, dass der Eckpunkt 1 sich auf Seite b bewegt. Das neue Dreieck ist aus dem alten dann durch Lagenänderung bloss der Seite c entstanden, während die Winkel ungeändert bleiben, und die

Schenkel des der Seite c gegenüberliegenden Winkels γ nicht ihre Lage ändern. Umgekehrt folgt aus der Annahme:

$$\varDelta a_3 = o,$$

wenn die Winkeländerungen Null sind, und nicht zugleich $\varDelta a_2$ verschwindet, dass die Gleichung:

$$c_1' c_2' + 1 = o$$

besteht. Dieselbe stellt also die nothwendige und hinreichende Bedingung für eine Lagenänderung der Seite c ohne Winkeländerungen dar. Soll dieselbe allenthalben auf der Fläche erfüllt sein, so muss diese eine entwickelbare sein, was ebenso wie in Nr. II bewiesen wird.

IV. Kehren wir noch einmal zu den Gleichungen (3) der vorigen Nummer zurück, welche die Verschiebung der Seite a in sich selbst ausdrücken, und fügen die weiteren Forderungen zu, dass der Eckpunkt 1 auf der Seite c sich bewege, und dass die Winkel ungeändert bleiben. Dann verschwinden die linken Seiten der Gleichungen (3), während ausserdem noch die Beziehung besteht:

$$\varDelta b_1 = - \varDelta c_2 \cos \alpha.$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, wenn nicht $c_1' = o$ ist, die Gleichung:

$$\varDelta a_2 = o,$$

so dass im Allgemeinen eine Verschiebung des Endpunktes 2 oder Seite a ohne Winkeländerung nicht möglich ist.

Dagegen wird dieselbe ausführbar immer und nur dann, wenn:

$$c_2' = o$$

ist, d. h. wenn der Eckpunkt 2 des Dreiecks sich an derjenigen Stelle des von 1 ausgehenden geodätischen Streifs 12 befindet, wo ein Breitezuwachs desselben nicht vorhanden ist, indem entweder ein Maximum oder Minimum der Breite oder sonst ein stationärer Zustand derselben eintritt.

Hieraus folgt — was übrigens auch geometrisch evident ist — dass, wenn man einen geodätischen Streif im Maximum oder Minimum seiner Breite durch eine geodätische Linie schneidet, die Begrenzungslinien des Streifs mit dieser gleiche Winkel bilden, d. h. solche Winkel, die sich um unendlich kleine Grössen von höherer Ordnung, als die Breite des Streifs, unterscheiden. Ist insbesondere dieser Winkel ein rechter, so erhält die geodätische Linie in zwei consecutiven Elementen die Eigenschaft des geodätischen Kreises, osculirt also den Letzteren. Wenn dies in allen Punkten eines geodätischen Kreises geschieht, derselbe also selbst eine geodätische Linie ist, so besitzen alle vom Pol ausgehenden Streifen auf diesem Kreis keinen Breitezuwachs; wird dort z. B. allenthalben die Breite ein Maximum, so ist der Umfang dieses geodätischen Kreises grösser als der der nachfolgenden und vorhergehenden. Man kann diese Bemerkung auch umkehren: Ein geodätischer Kreis, in welchem alle geodätischen Streifen, die von einem Pole ausgehen, ein Maximum oder Minimum ihrer Breite besitzen, ist zugleich geodätische Linie.

4.

Das Nachfolgende handelt von der reducirten Länge auf Rotationsflächen (und den auf dieselben abwickelbaren Flächen), deren Eigenschaften unabhängig von dem Vorstehenden entwickelt werden mögen. Nur die Gleichung der geodätischen Linie in Bezug auf das aus Meridianen und Parallelkreisen (v = const., u = const.) gebildete krummlinige Coordinatensystem nehmen wir als bekannt an. Da in dem Ausdrucke für das Linienelement du_1 auf einer Rotationsfläche:

$$du_1^2 = du^2 + g^2\, dv^2$$

g eine Funktion von u allein ist, so ergiebt sich aus § 1. (7) sogleich:

$$g \sin \Theta = g_0 \sin \Theta_0 = \varkappa.$$

wo $\varkappa$ eine längs der betrachteten geodätischen Linie PP_0 constante Grösse ist. Θ das Azimuth derselben im Punkte P (u, v), Θ_0 dasjenige im Punkte P_0 (u_0, v_0), für welchen die Funktion g den Werth g_0 annimmt. Wegen:

$$tg\, \Theta = \frac{g\, dv}{du}$$

wird alsdann:

$$v - v_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{\varkappa\, du}{g \sqrt{g^2 - \varkappa^2}}.$$

$$u_1 = \int_{u_0}^{u} \frac{g\, du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}. \qquad \ldots . (1)$$

Ich definire nun ein anderes „geodätisches Coordinatensystem“ $u_1\ v_1$ durch Annahme einer beliebigen krummen Linie OP_0 auf der Fläche, längs deren, von einem bestimmten Anfangspunkt O aus, die Grösse v_1 als Länge aufgetragen wird. Senkrecht zu den Elementen der Linie OP_0 werden geodätische Linien errichtet, auf diesen die Länge u_1 aufgetragen. Dann liegen, nach einem Satze von Gauss, die Endpunkte gleich langer Strecken wiederum auf Orthogonaltrajectorien der geodätischen Linien, längs deren v_1 constant ist. Soweit diese Letzteren verlaufen, ohne dass benachbarte sich schneiden, sind die Punkte der Fläche durch die Coordinaten $u_1\ v_1$ eindeutig bestimmt. Damit auch das umgekehrte stattfinde, denke man sich die Rotationsfläche aus unendlich vielen übereinander gerollten Blättern bestehend, die sich gegenseitig so fortsetzen, dass sie, abgerollt, einen unendlich langen Streif bilden. Entsteht durch den Schnitt benachbarter geodätischer Linien eine Enveloppe,[1]) so beziehen sich die folgenden Untersuchungen nur auf das bis zu dieser Enveloppe sich erstreckende Flächengebiet.

Dies festgesetzt, wird die Orthogonalität der Linien PP_0 und OP_0 unter Beibehaltung der oben eingeführten Beziehungen ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\sin\Theta_0 = \frac{\varkappa}{g_0} = -u_0'; \quad \cos\Theta_0 = \sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{g_0^{\,2}}} = g_0\, v_0', \qquad \ldots . (2)$$

wo u_0', v_0' die Differentialquotienten von u_0, v_0 nach v_1 genommen bedeuten.

Es verdient gleich hier bemerkt zu werden, dass diese Bedingungsgleichungen illusorisch werden, wenn die geodätischen Linien des Systems $u_1\ v_1$ alle durch e i n e n Punkt P_0, hindurchgehen, wenn also eine jener Orthogonaltrajectorien PP_0 sich in einen unendlich kleinen Kreis um diesen Punkt zusammenzieht. Dann sind nämlich u_0, v_0 als Constante, u_0', v_0' einzeln also als verschwindend anzusehen, während indess der Quotient $\frac{u_0'}{g_0 v_0'}$ als veränderlich, und zwar:

$$\frac{u_0'}{g_0 v_0'} = -tg\, v_1 \qquad \ldots . (2^a)$$

anzunehmen ist, so dass in diesem Falle $\Theta_0 = v_1$, also

1) Vgl. z. B. A. v. Braunmühl, über Enveloppen geodätischer Linien. Math. Annalen Bd. 14 und Bd. 20.

$$\varkappa = g_0 \sin v_1 \qquad \ldots . (2^a)$$

ist. wo g_0 gleichfalls eine Constante ist.

Differenzirt man die Gleichung (1), indem man sowohl u und v, als u_1 und v_1 als veränderlich ansieht, so kommt:

$$du_1 = \frac{g\,du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}} - \frac{g_0\,u_0'\,dv_1}{\sqrt{g_0{}^2 - \varkappa^2}} + \frac{\partial u_1}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa' \cdot dv_1.$$

Ebenso erhält man:

$$dv - v_0'\,dv_1 = \frac{\varkappa\,du}{g\sqrt{g^2 - \varkappa^2}} - \frac{\varkappa\,u_0'\,dv_1}{g_0\sqrt{g_0{}^2 - \varkappa^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varkappa} \cdot \varkappa' \cdot dv_1,$$

wo

$$\frac{d\varkappa}{dv_1} = \varkappa'$$

gesetzt wurde, und:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varkappa} = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{\varkappa\,g\,du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}^{\,3}} = \varkappa \cdot \frac{\partial v}{\partial \varkappa}$$

ist. Löst man die erhaltenen Gleichungen nach du und $g\,dv$ auf, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{g}\,du_1 - \frac{\varkappa}{g} \cdot g_1\,dv_1 \\ g\,dv &= \frac{\varkappa}{g}\,du_1 + \frac{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{g} \cdot g_1\,dv_1, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots . (3)$$

wo zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= -\frac{g_0\,u_0'}{\varkappa} \cdot \frac{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{\sqrt{g_0{}^2 - \varkappa^2}} + \varkappa' \cdot \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \cdot \int\limits_{u_0}^{u} \frac{g\,du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}^{\,3}} \\ &= \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \cdot \left\{ -\frac{g_0\,u_0'}{\varkappa\sqrt{g_0{}^2 - \varkappa^2}} + \varkappa' \int\limits_{0}^{u_1} \frac{du_1}{g^2 - \varkappa^2} \right\} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots . (4)$$

gesetzt wurde. Für das Bogenelement, in den Zuwächsen du_1, dv_1 ausgedrückt, erhält man:

$$ds^2 = du_1{}^2 + g_1{}^2 \cdot dv_1{}^2.$$

Daher ist (§ 1) g_1 die „reducirte Länge“ der Linie u_1 oder die „reducirte Abscisse“ für das Coordinatensystem $u_1\,v_1$.

In den Ausdruck (4) für g_1 geht ausser den Funktionen u_0, g_0, $\varkappa$ von v_1 noch die Funktion g der Variabeln u ein, welche mit u_1 und v_1 durch die Gleichung (1) verbunden ist. Die Annahme von g entscheidet bekanntlich über den Charakter der Rotationsfläche, auf welcher das Coordinatensystem gelegen ist, während über das letztere durch Annahme einer der Funktionen u_0, v_0, g_0, $\varkappa$ von v_1 entschieden wird, und die drei anderen sich durch diese vermöge der Gleichungen (2) und der Bedingung ausdrücken, dass g_0 dieselbe Funktion von u_0 wie g von u ist. In dem Ausdruck (4) für g_1 sind also zwei wesentlich willkührliche Funktionen enthalten: Die Funktion g von u und etwa die Funktion $\varkappa$ von v_1.

Je nachdem man (4) mittelst der Gleichungen (2) oder (2ᵃ) vereinfacht, d. h. je nachdem man die Anfangstrajectorie als endliche Curve oder unendlich kleinen Kreis annimmt, erhält g_1 eine der beiden Formen:

$$g_1 = \sqrt{\frac{g^2 - \varkappa^2}{g_0{}^2 - \varkappa^2}} + \varkappa' \cdot \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \cdot \int_{u_0}^{u} \frac{g\,du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}^3}, \qquad \dots (5)$$

$$g_1 = \sqrt{g_0{}^2 - \varkappa^2} \cdot \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \cdot \int_{u_0}^{u} \frac{g\,du}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}^3}. \text{ [1]} \qquad \dots (5^a)$$

---

1) Vermöge dieses Ausdrucks lassen sich die fundamentalen Eigenschaften des geodätischen Streifs in noch bequemerer Weise wie oben § 1 a. E. ableiten. Da nämlich längs eines solchen Streifs die Grösse g nur mit einer Variabeln sich ändert, so lässt sich immer eine Rotationsoberfläche finden, deren Meridianstreif hinsichtlich der durch Biegung nicht zerstörbaren Eigenschaften mit dem gegebenen übereinstimmt, und es genügt, einen solchen zu untersuchen.

Setzt man in (5ᵃ) $\varkappa = o$, so rückt der Pol P_0 (Fig. in § 1) des Coordinatensystems $u_1\, v_1$ in den Streifen, der sich längs der Linie u erstreckt, und man erhält zwischen den reducirten Längen der Linien:

$$\overline{P_0 P} = u_1; \quad \overline{OP} = u; \quad \overline{OP_0} = u_0$$

für welche alsdann die Gleichung:

$$u = u_1 + u_0$$

besteht, die einfache Relation:

$$g_1 = g\, g_0 \int_{u_0}^{u} \frac{du}{g^2} = \frac{\varphi(u) - \varphi(u_0)}{\sqrt{\varphi'(u)\, \varphi'(u_0)}}$$

wo:

$$\varphi(u) = \int \frac{du}{g^2}$$

(unbestimmt integrirt) gesetzt ist.

Die von den Herren Christoffel und Beltrami (Rendiconti del Istituto Lombardo 1869) angegebenen eleganten Eigenschaften der reducirten Länge einer geodätischen Linie folgen sämmtlich aus dieser Darstellung mit Leichtigkeit.

Ist beispielsweise die Orthogonaltrajectorie, von der man ausgeht, selbst eine geodätische Linie, so hat man die Beziehung:

$$g_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Theta_0\right) = \text{const.}$$

oder:

$$g_0^2 - \varkappa^2 = \text{const.}$$

Im Fall, dass diese Constante verschwindet, ist die Trajectorie ein Meridian. längs dessen sowohl u_0 als v_1 gezählt wird. Die unbestimmte Form, die alsdann g_1 enthält. umgeht man leicht, indem man durch partielle Integration das in g_1 auftretende Integral in die geeignete Form bringt.

Man kann den vorstehend aufgestellten Ausdruck für die reducirte Länge des geodätischen Bogens auf Rotationsflächen dazu verwenden, um eine partielle Differentialgleichung für dieselbe (oder vielmehr für eine mit ihr genau zusammenhängende Funktion) herzustellen, welche im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, die auf anderem Weg Herr M. Levy (Comptes Rendus 1878) für die reducirte Länge auf Rotationsflächen gefunden hat. Definirt man nämlich eine Funktion φ von u_1 und v_1 durch die Gleichung:

$$g_1 \varphi = -\varkappa' \sqrt{g^2 - \varkappa^2} \qquad \ldots (6)$$

— wobei indess der später besonders zu behandelnde Fall $\varkappa' = o$ ausgeschlossen sein soll, — so wird wegen (4)

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left\{\frac{g_1}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}}\right\} = \frac{\varkappa'}{g^2 - \varkappa^2}. \qquad \ldots (6^a)$$

Daher ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\varkappa'^2}{g_1^2}. \qquad \ldots (7)$$

Durch logarithmisches Differenziren bezüglich nach u_1 und v_1 ergiebt sich aus dieser Gleichung:

$$\frac{\partial \log g_1}{\partial u_1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)$$

$$\frac{\partial \log g_1}{\partial v_1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_1}\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right) + \frac{\varkappa''}{\varkappa'}.$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (6) (7) und (3) erhält man nun durch logarithmische Differentiation der Gleichung (6) nach v:

$$o = \varkappa \left[\frac{\partial \log g_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial u_1} \right] - \frac{\varphi}{\varkappa'} \left[\frac{\partial \log g_1}{\partial v_1} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial v_1} - \frac{\varkappa''}{\varkappa'} + \frac{\varkappa \varkappa'}{\varphi} \frac{\partial \log \varphi}{\partial u_1} \right].$$

Mit Hilfe der vorstehenden Beziehungen zieht sich diese Gleichung folgendermassen zusammen:

$$\varkappa \varkappa' \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1{}^2} - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial v_1} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} = o. \qquad \ldots . (8)$$

Man kann hieraus auch noch die Funktion $\varkappa$ von v_1 entfernen, indem man:

$$d v_1 \cdot \varkappa \varkappa' = d V_1 \qquad \ldots . (9)$$

setzt. Man erhält so:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1{}^2} - \varphi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial V_1} + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial V_1} = o, \qquad \ldots . (10)$$

wo in dem Ausdruck, den das Linienelement annimmt:

$$d s^2 = d u_1{}^2 + G_1{}^2 \cdot d V_1{}^2$$

die Grösse G_1 definirt ist durch die Gleichung:

$$\varkappa \cdot G_1{}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 1.$$

Die Funktion φ, welche — mit Ausnahme des Falles $\varkappa' = o$ — die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (10) in allgemeinster Weise befriedigt, ist der mit zwei willkührlichen Funktionen behaftete Ausdruck:

$$\varphi = \frac{g_0 u_0'}{\varkappa \varkappa'} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_0{}^2 - \varkappa^2}} - \int_o^{u_1} \frac{\partial u_1}{g^2 - \varkappa^2}, \qquad \ldots . (11)$$

wo mit Hülfe von (9) statt v_1 die Variable V_1 einzuführen, und die in g auftretende Grösse u mittelst (1) durch u_1 und v_1 (bez. V_1) zu ersetzen ist.

Eine explicite Darstellung indess der Funktion φ in u_1 und v_1 lässt sich nur in besonderen Fällen ausführen.

Die oben ausgeschlossene Annahme $\varkappa' = o$, wo denn also $\varkappa$ von v_1 unabhängig ist, entspricht dem Fall, dass alle geodätischen Radien mit einem Parallelkreis der Rotationsfläche denselben Winkel bilden, dass also alle denselben (reellen oder imaginären oder unendlich fernen) Parallelkreis berühren. Dann wird der Ausdruck für g_1:

$$g_1 = \sqrt{\frac{g^2 - \varkappa^2}{g_0^{\,2} - \varkappa^2}}. \qquad \ldots . (12)$$

Diese Grösse stellt sich folgendermassen in u_1 und v_1 dar. Aus der Gleichung (1) berechnet sich:

$$u_1 = \varphi(u) - \varphi(u_0),$$

wo $\varphi(u)$ von v_1 unabhängig ist; daher durch Umkehrung:

$$u = \Phi(u_1 + \varphi(u_0)) = \Phi(u_1 + V_1),$$

wenn man:

$$\varphi(u_0) = V_1,$$

das heisst:

$$\frac{g_0\, u_0'}{\sqrt{g_0^{\,2} - \varkappa^2}} = \frac{d V_1}{d v_1}$$

setzt. Alsdann ist auch:

$$\sqrt{g^2 - \varkappa^2} = -\varkappa \cdot f(u_1 + V_1)$$

eine Funktion von $u_1 + V_1$, und endlich:

$$g_1\, d v_1 = -\varkappa \cdot \frac{f(u_1 + V_1)}{\sqrt{g_0^{\,2} - \varkappa^2}}\, d v_1 = f(u_1 + V_1) \cdot d V_1.$$

Das Linienelement nimmt somit die Form an:

$$d s^2 = d u_1^{\,2} + f^2(u_1 + V_1) \cdot d V_1^{\,2}, \qquad \ldots . (13)$$

welche für das betrachtete Coordinatensystem zuerst Herr Dini (Giornale di mat., Napoli, T. III. p. 68) aufgestellt hat.

Eine letzte Anwendung der für die reducirte Länge auf Rotationsflächen gegebenen Formel mag sich auf Flächen von constantem Krümmungsmass beziehen, für welche ebenfalls die explicite Darstellung von g_1 in u_1 und v_1 ausführbar ist. Ich beschränke mich auf Flächen von constantem negativem Krümmungsmass, als deren Typus die Rotationsfläche der Tractrix gelten kann. Für diese nimmt bekanntlich das Linienelement die Form an:

$$d s^2 = d u^2 + e^{\frac{2u}{a}} \cdot d v^2, \qquad \ldots . (14)$$

wo a eine Constante ist, $-\frac{1}{a^2}$ das Krümmungsmass der Fläche, e die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Alsdann erhält man aus F. (1):

$$u_1 = a\int\limits_{u_0}^{u} \frac{dg}{\sqrt{g^2 - \varkappa^2}} = a \log\mathrm{nat} \cdot \frac{g + \sqrt{g^2 - \varkappa^2}}{g_0 + \sqrt{g_0^{\,2} - \varkappa^2}},$$

oder, mit Benützung hyperbolischer Funktionen, indem man:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

setzt:

$$g = \varkappa \cdot \cosh\frac{u_1 + c}{a};$$

$$\sqrt{g^2 - \varkappa^2} = \varkappa \cdot \sinh\frac{u_1 + c}{a},$$

wo:

$$g_0 = \varkappa \cosh\frac{c}{a}$$

gesetzt worden ist. Ferner wird:

$$\int\limits_{o}^{u_1} \frac{du_1}{g^2 - \varkappa^2} = \frac{a}{\varkappa^2} \cdot \frac{\sinh\frac{u_1}{a}}{\sinh\frac{u_1 + c}{a} \cdot \sinh\frac{c}{a}}.$$

Daher, vermöge (4):

$$g_1 = \frac{a\varkappa'}{\varkappa} \cdot \frac{\sinh\frac{u_1}{a}}{\sinh\frac{c}{a}} - \frac{u_0' g}{\varkappa} \cdot \frac{\sinh\frac{u_1 + c}{a}}{\sinh\frac{c}{a}}. \qquad \ldots.(15)$$

Wenn nun $u_0' = o$ ist, so hat man $\varkappa = g_0 \sin v_1$, wo g_0 eine Constante ist, und also im Falle eines Coordinatensystems mit reellem Pol:

$$g_1 = a \sinh\frac{u_1}{a}. \qquad \ldots.(15^a)$$

In jedem anderen Falle ist:

$$\frac{u_0' g_0}{\varkappa} = -1,$$

daher, wegen:

$$g_0 = e^{\frac{u_0}{a}},$$

$$\varkappa = -g'_0 a = -a\varkappa' \cosh\frac{c}{a} - \varkappa c' \sinh\frac{c}{a}$$

oder:

$$\frac{a\varkappa'}{\varkappa} = -\frac{1 + c' \sinh\frac{c}{a}}{\cosh\frac{c}{a}},$$

wo $\varkappa'$ und c' die Differentialquotienten von $\varkappa$ und c nach v_1 sind. g_1 kann also in die Form gebracht werden:

$$g_1 = A \sinh\frac{u_1}{a} + \cosh\frac{u_1}{a}, \qquad \ldots.(16)$$

wo:

$$A = \frac{\sinh\frac{c}{a} - c'}{\cosh\frac{c}{a}}$$

ist.

Der Ausdruck 15ª für g_1, der einem geodätischen Polarcoordinatensystem mit reellem Pol entspricht, ist unabhängig sowohl von der Lage des Pols als auch von der Anfangslage der geodätischen Radien des Systems. Dies wird alsdann auch mit dem zugehörigen Ausdruck für das Linienelement der Fall sein. Die Rotationsfläche der Tractrix ist demnach in jeder Art in sich selbst verbiegbar.

Andererseits kann die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_1{}^2} = \frac{g_1}{a^2},$$

die eine Fläche von negativem Krümmungsmaass allgemein definirt, durch Transformation der Variabeln v_1, wobei sich g_1 mit einer Funktion von v_1 multiplicirt, auf die Form (16) für g_1 immer gebracht werden.

Durch die vorstehende kurze Rechnung ist also zugleich ein neuer Beweis für die Verbiegbarkeit einer Fläche von constantem negativem Krümmungsmaass in sich selbst geliefert.