© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ueber

die kanonischen Perioden

der

Abel'schen Integrale.

Von

J. Lüroth
in Freiburg in Baden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale.

Riemann hat in seiner Theorie der Abel'schen Functionen die Lehre von den Perioden auf die Theorie des Zusammenhanges der Flächen gegründet. Wenn auch bei Flächen von leicht zu übersehender Gestalt es einfach ist sich vom Verlauf der Querschnitte eine Vorstellung zu machen, so ist dies doch für ein so complicirtes Gebilde, wie eine Riemann'sche Fläche es ist, ziemlich schwer. Jedenfalls aber bieten sich Schwierigkeiten dar, wenn man darauf ausgeht, ein System von Querschnitten zu legen, wie es Riemann in § 19 ff. seiner Abhandlung [1]) benutzt. Riemann's Interpreten Roch, Prym, Durège, C. Neumann in ihren Bearbeitungen und Erweiterungen der ganzen Theorie oder einzelner Specialfälle geben allgemeine Regeln zur Construction eines kanonischen Querschnittssystemes nicht an.

Clebsch und Gordan in ihrer Bearbeitung der Theorie der Abel'schen Functionen (1866) verliessen ganz den Riemann'schen Weg und es gelang ihnen in der That bei einfachen Verzweigungspunkten ohne Zuhilfenahme der Riemann'schen Fläche, nur mit Benutzung der Schleifen, rein rechnerisch die kanonischen Perioden aus den über die Schleifen genommenen Integralen zusammenzusetzen [2]). Schläfli gab später (1873) [3]) eine etwas andere Darstellung einzelner Theile der Clebsch-Gordan'schen Theorie mit Benützung der Riemann'schen Fläche ohne die Herstellung der Fundamentalperioden zu vereinfachen. Schon vorher (1871) hatte ich versucht, eine Regel zu

1) Riemann's Werke. S. 122.
2) Clebsch und Gordan. Theorie der Abel'schen Functionen. 1866. Vierter Abschnitt. S. 80 ff.
3) Borchardt's Journal. Band 76 S. 149.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

deren Herleitung zu finden und es war mir gelungen, zunächst eine besonders einfache Gestalt der Fläche herzustellen, in welcher es nicht schwierig war nach Analogie einer zweiblätterigen Fläche die kanonischen Querschnitte zu ziehen [1]). Mein Aufsatz, der leider etwas kurz gehalten war, gab Clebsch Veranlassung, sich weiter mit der Frage zu beschäftigen und an eine neue Darstellung der Möglichkeit, eine typische Gestalt der Riemann'schen Fläche herzustellen, noch einige Erweiterungen anzuknüpfen [2]). Praktische Anwendungen davon machten Kasten [3]) auf eine dreiblätterige Fläche und Graf [4]) auf eine sechsblätterige Fläche mit 20 Verzweigungspunkten. Der letztere stellt auch die kanonischen Perioden auf.

Endlich hat Clifford [5]) eine Darstellung der von Clebsch und mir vorgetragenen Sätze gegeben, die im Wesentlichen nichts Neues lehrt.

Die Herstellung der erwähnten typischen Gestalt der Riemann'schen Fläche ist nicht mühelos und zudem nur bei einfachen Verzweigungspunkten ausführbar. Mehrfache Verzweigungspunkte kann man freilich in einfache auseinanderziehen und nach der Herstellung der gewünschten Verzweigung wieder zusammenschieben, wobei man die gezogenen Querschnitte in bestimmter Weise über die Enden der Verzweigungsschnitte hinüberwerfen muss.

Klein ging bei mehreren Abhandlungen, die in dieses Gebiet einschlagen, von der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche ab und legte eine andere zu Grunde, indem er die complexe Variable x in anderer Weise deutete [6]); insbesondere betrachtete er auch als Ort von x eine geschlossene Fläche mit henkelartigen Ansätzen [7]). Die Oberfläche einer solchen kann man ohne Schwierigkeiten in eine einfach zusammenhängende zerlegen und zwar bieten sich kanonische Querschnitte fast am directesten dazu dar. Doch ist wohl bei dieser Darstellung von x einmal der Zu-

---

1) Math. Annalen Bd. 4 Seite 181.
2) „ „ „ 6 „ 216.
3) Zur Theorie der dreiblättrigen Riemann'schen Fläche. Göttingen. Dissertation 1876.
4) Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Bern. Dissertation 1878.
5) Proceed. London math. Soc. Band 8 S. 292.
6) Zuerst in Math. Ann. Band 7 S. 558; und in einigen späteren Abhandlungen in den Math. Annalen.
7) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882. Abschnitt 2. S. 24 u. ff.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

sammenhang des Ortes auf der Fläche mit dem Werthe von x ein complicirter, andererseits ist es nicht leicht eine gegebene Riemann'sche Fläche in der richtigen Weise auf eine Fläche mit der gehörigen Anzahl von Henkeln zu beziehen. Ich hielt es daher nicht für unnöthig die Frage, wie man bei einer beliebigen Riemann'schen Fläche die kanonischen Perioden finden könne, auch ferner im Auge zu behalten. Es gelang mir schliesslich eine Methode zur Beantwortung jener Frage zu finden, indem ich von der Darstellung der Riemann'schen Fläche Gebrauch machte, welche Klein in seinen Arbeiten über höhere Gleichungen häufig benutzt hat [1]) und die schon von Riemann angegeben worden sein soll. Bei ihr werden die Blätter in der Ebene neben einander gelegt, nachdem sie vorher so deformirt sind, dass sie sich zu einem Polygon zusammenschliessen. Auch hier ist der Zusammenhang zwischen dem Flächenpunkt und dem Werthe der Variabeln x ein nicht einfacher und daher zog ich es vor bei meiner ersten Publication über diese Methode [2]) mich der alten Riemann'schen Fläche zu bedienen und an die Lehre vom Zusammenhang anzuknüpfen.

In der vorliegenden Arbeit habe ich dagegen die letztere Theorie ganz vermieden und versucht die Zahl der kanonischen Perioden durch andere Betrachtungen zu bestimmen, die, wie ich hoffe, hinlänglich einfach und streng sind. Einige Beispiele zeigen, dass die dargelegte Methode die kanonischen Periodenwege zu finden eine überaus einfache ist und sich ohne Schwierigkeit anwenden lässt.

§ 1.

Den gesammten Werthvorrath, den eine n-werthige, algebraische Function y der complexen Veränderlichen x darbietet, kann man, nach Riemann's Vorgang mit Hilfe von Verzweigungsschnitten in n einwerthige stetige Zweige zerlegen.

Um dies zu erreichen bestimmt man die Verzweigungspunkte — deren Zahl q sei — $w_1, w_2, \ldots w_q$ der Function y und verzeichnet dieselben in der Ebene E, welche nach Argand-Gauss zur Darstellung der

1) Math. Ann. Bände 10—20; besonders 14 Seite 134.

2) Sitzungsberichte der physik.-medic. Societät zu Erlangen. Sitzung vom 12. Febr. 1883.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

complexen Grösse x dient. Man verbindet dann die Punkte w_1, $w_2 \ldots w_q$ durch ein Liniensystem L' so, dass die Linien des Systems keinen Theil der Ebene E inselförmig einschliessen, dass aber das Umlaufen eines einzelnen Verzweigungspunktes oder einer Gruppe derselben — die nicht aus allen besteht — unmöglich ist, wenn man nicht die Linien des Systems überschreiten will.

Man kann das System L' in verschiedenen Weisen anordnen. Man kann z. B. die Punkte w zu Ecken eines offenen Polygons machen (Fig. 1), oder man kann einen Punkt wählen, der selbst kein Verzweigungspunkt ist und diesen mit den Punkten w durch Linien verbinden (Fig. 2); oder endlich man kann zu den q Verzweigungspunkten noch k andere Punkte, Knotenpunkte, hinzunehmen und diese $q + k$ Punkte durch Linien in Verbindung setzen, welche die Bedingung erfüllen, dass weder sie alle noch ein Theil von ihnen ein geschlossenes Polygon bilden (Fig. 3, wo, wie in Fig. 1 und 2, die Verzweigungspunkte durch fette Punkte bezeichnet sind). Die $q + k$ Punkte sollen Ecken, die sie verbindenden Linien Seiten von L' heissen.

Fig. 1.

Fig. 2.

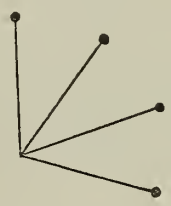
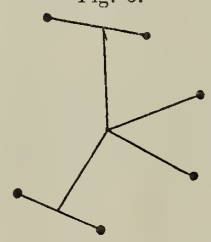


Fig. 3.



Man erkennt leicht (etwa durch den Schluss von n auf $n + 1$), dass die Anzahl der Seiten von $L' = q + k - 1$ ist. Jede Seite hat zwei Ufer und man kann, wie ebenfalls unschwer zu erkennen, das ganze System L' so umlaufen, indem man stets an den Seiten entlang geht und die Ecken in Bogen umgeht, dass jedes Ufer jeder Seite durchmessen wird, aber nur einmal, und dass der ganze Weg in sich zurückläuft.

In einem Punkte x_0, der weder Verzweigungspunkt noch Knotenpunkt ist, kann man nun n Potenzreihen $P_1 (x - x_0)$, $P_2 (x - x_0) \ldots P_n (x - x_0)$, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreiten, aufstellen, die für y gesetzt die zwischen x und y bestehende Gleichung $f(x\,y) = o$ erfüllen. Setzt man eine dieser Reihen in der ganzen Ebene E fort ohne

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die Seiten von L' zu überschreiten, so erhält man eine eindeutige Function von x_1, die der Gleichung $f(x\,y) = o$ genügt und also einen eindeutigen stetigen Zweig von y vorstellt. Macht man dies mit allen n Potenzreihen, so ist der ganze durch die Gleichung $f(x\,y) = 0$ gegebene Werthvorrath in n Zweige zerlegt und jeder Werth von y findet sich in einem und nur einem Zweige vor. Um die n Zweige zu trennen, benützt Riemann bekanntlich für jeden derselben zur Repräsentation von x ein besonderes Blatt und die Gesammtheit der n Blätter bildet die Riemann'sche Fläche T. In jedem Blatte hat man das Liniensystem L' zu zeichnen, die verschiedenen Copien desselben im 1ten, 2ten . . n^{ten} Blatte seien bez. L_1, L_2, . . L_n und ihre Gesammtheit bilde das Liniensystem L mit $n(q + k)$ Ecken und $n(q + k - 1)$ Seiten. Zwei Punkte in verschiedenen Blättern der Fläche T, oder in einem Blatte und der Ebene E sollen entsprechend heissen, wenn für sie x den nämlichen Werth hat. Aehnliche Aussage soll von Figuren gelten.

Betrachtet man die beiden Ufer einer Seite von L, so finden sich entweder auf beiden Ufern dieselben Functionswerthe, oder aber verschiedene Werthe. Im letzteren Falle ergibt sich bekanntlich, dass diejenigen Werthe, welche im i^{ten} Blatte auf dem einen Ufer einer Seite stehen, im k^{ten} nicht auf dem entsprechenden, sondern dem gegenüberliegenden Ufer sich vorfinden, so dass ein stetiger Uebergang von dem einen Ufer im i^{ten} Blatte zum gegenüberliegenden im k^{ten} Blatte führt, während die Functionswerthe auf den beiden Ufern im i^{ten} bez. k^{ten} Blatte Unstetigkeit zeigen. Zwei gegenüberliegende Ufer, die stetig miteinander zusammenhängen, sollen mit demselben Buchstaben oder der gleichen Zahl bezeichnet werden. Jeder Buchstabe bezeichnet dann einen Uebergang, nämlich den stetigen Uebergang der von einem Ufer zu dem gleichbezeichneten Ufer führt. Die Zahl der Uebergänge ist gleich der Seitenzahl von L, d. h. $= n(q + k - 1)$ [1]).

Wir nehmen an $f(x\,y)$ sei irreducibel. Dann ist es stets möglich $n-1$ Uebergänge zu finden, durch deren alleinige Benutzung man von jedem Blatte in jedes andere gelangen kann [2]). Diese sollen fundamentale heissen. Wenn eine Gruppe von

1) Beispiele siehe im § 10.

2) Clebsch und Gordan. Abel'sche Functionen. Seite 82.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Blättern bestehend aus dem α^{ten}, β^{ten} . . . $\varkappa^{ten}$ existirte, aus der kein Uebergang in ein anderes Blatt führte, so seien $y_\alpha\ y_\beta \ldots y_\varkappa$ die Werthe von y, welche einem x in den genannten Blättern entsprechen. Dann wäre

$$(\eta - y_\alpha)\ (\eta - y_\beta) \ldots (\eta - y_\varkappa) = F\,(x\ \eta)$$

eine einwerthige Function von x, weil jeder Weg nur die $y_\alpha\, y_\beta \ldots y_\varkappa$ unter sich umtauschen würde, und folglich wäre $f\,(x\ \eta)$ reducibel, gegen unsere Annahme. Es muss also ein Uebergang aus dem 1ten Blatte ins λ^{te} führen, aus einem der beiden ein weiterer Uebergang in das μ^{te} Blatt u. s. w., womit unsere Behauptung bewiesen ist. Offenbar kann man aber nicht mit weniger als n — 1 Uebergängen das Resultat erreichen.

§ 2.

Ist $\varphi\,(x\ y)$ eine rationale Function von x und y, so ist das Integral

$$\int_{P_0}^{P} \varphi\,(x\ y)\ d\,x$$

von einem Punkte P_0 der Fläche T nach einem andern Punkte P genommen nicht unabhängig vom Wege, über welchen integrirt wird. Ist aber $\varphi\,(x\ y)$ ein Integrand erster oder zweiter Gattung, wie bis auf Weiteres angenommen werden soll, so kann man zeigen, dass obiges Integral eine einwerthige Function von P ist, wenn man sich vornimmt den Integrationsweg nur durch fundamentale Uebergänge zu führen.

Zum Beweise braucht man, wie bekannt, nur darzuthun, dass das fragliche Integral über eine geschlossene Curve erstreckt, die nur fundamentale Uebergänge überschreitet, den Werth Null hat. Hiezu dient der folgende Satz I.

Es sei s ein Uebergang, der von einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Curve C in zwei Punkten vom α^{ten} ins β^{te} Blatt oder umgekehrt überschritten werde. Seien P Q zwei Punkte auf C hart an einem Ufer von s, R S die gegenüberliegenden am andern Ufer.

Wenn man nun, beim Durchlaufen von C, von P nach R und von Q nach S gelangt, indem man stets in derselben Richtung weiter geht (Fig. 4)[1]),

1) Die Figuren sind hier, wie im folgenden, nur schematische. Die unmittelbar oberhalb s liegenden Theile gehören in's α^{te}, die unterhalb liegenden in's β^{te} Blatt.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so kann man aus C die neue Curve C′ ableiten dadurch, dass man, statt s zu überschreiten, auf dem einen Ufer von P nach Q und auf dem andern von S nach R geht. Dann hat man in PQURSVP die Curve C′, die geschlossen ist und dem Integral $\int \varphi\,(x\,y)\,d\,x$ denselben Werth verleiht wie C, weil die Werthe von $\varphi\,(x\,y)$ längs PQ mit denjenigen längs RS übereinstimmen und die Richtung der Integration bei beiden Ufern die entgegengesetzte ist.

Fig. 4.

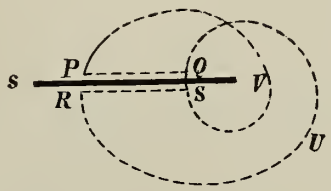
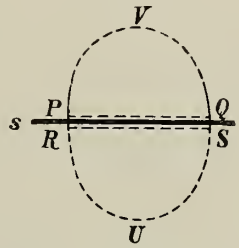


Fig. 5.



Wenn man aber, wie in Fig. 5, von P nach R und von S nach Q kommt, so werden die beiden Wege RUS und PVQ keinen Punkt gemein haben und die Curve C liefert also jetzt zwei getrennte Curven $C_1 = RUSR$ und $C_2 = PQVP$ und man erkennt, dass das Integral über C gleich dem über $C_1 + C_2$ ist.

Wenn C den Uebergang s mehr als zweimal passirt, so ist der Satz dennoch anwendbar, wenn man unter PR einerseits und QS andererseits zwei zunächst benachbarte Schnittpunkte versteht. Die Curve C′ im ersten Fall, oder die $C_1 + C_2$ im letzten Falle, schneidet aber s in zwei Punkten weniger als C dies thut. Ferner erkennt man, dass die Curve C′ im ersten, bez. $C_1 + C_2$ im zweiten Fall, jeden andern Uebergang genau ebenso oft schneidet als C.

Nun nehmen wir an s sei ein fundamentaler Uebergang und C überquere nur fundamentale Uebergänge. Dann muss die Anzahl λ von Schnittpunkten mit s gerade sein. Wäre sie ungerade, so könnte man aus C nach dem Satz I entweder eine nicht zerfallende Curve oder eine zerfallende Curve ableiten, die s in zwei Punkten weniger schnitte. Im ersten Falle würde C′ in $\lambda - 2$ Punkten s schneiden; im zweiten würde entweder C_1 in $\lambda - 2\,\mu$ Punkten schneiden und C_2 in $2\,\mu - 2$ oder C_1 in $\lambda - 2\,\mu - 1$ und C_2 in $2\,\mu - 1$. Es ist aber, weil λ ungerade, auch

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$\lambda - 2$, $\lambda - 2\mu$, sowie $2\mu - 1$ ungerade; und man käme somit sicher auf eine Curve die mit s weniger Schnittpunkte als λ, aber wieder eine ungerade Zahl gemein hat. Und so weiter gehend würde man schliesslich eine geschlossene Curve K finden, die s nur in einem Punkte träfe und sonst nur fundamentale Uebergänge passirte. Auf dieser Curve K könnte man dann ohne s zu passiren durch fundamentale Uebergänge vom α^{ten} Blatt in's β^{te} kommen und der fundamentale Uebergang s wäre unnöthig, so dass man mit $n - 2$ solchen ausreichte, was nicht möglich ist.

Eine geschlossene Curve, die nur fundamentale Uebergänge überschreitet, muss also jeden eine gerade Anzahl Male überschreiten.

Nehmen wir nun in der vorigen Ueberlegung an λ sei gerade, so ist $\lambda - 2$ gerade, ebenso $\lambda - 2\mu$ und $2\mu - 2$; dagegen sind $\lambda - 2\mu - 1$ und $2\mu - 1$ ungerade. Da aber C_1 und C_2 wieder geschlossene Curven sind, so ist der letztere Fall nicht möglich und folglich erhält man Curven mit wenigen Schnittpunkten, die dem Integral denselben Werth ertheilen wie C, so dass entweder

$$\int_C = \int_{C'} \quad \text{oder} \quad \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

ist. Indem man auf C' oder C_1 und C_2 dasselbe Verfahren anwendet, kann man die Zahl der Schnittpunkte mit s noch weiter herabsetzen bis man schliesslich zu einem System geschlossener Curven kommt, welche einzeln s gar nicht mehr schneiden. Mit den andern Uebergängen verfährt man ebenso und findet endlich, dass das über C erstreckte Integral denselben Werth hat wie eine Summe von Integralen, von welchen jedes einzelne über eine geschlossene Curve genommen ist, die gar keinen Uebergang mehr passirt und folglich ganz in einem Blatte verläuft. Da aber in einem Blatte y und folglich auch $\varphi(x\,y)$ eine einwerthige Function von x ist, so ist ein solches Integral $= o$ und somit ist auch das vorgegebene, über C erstreckte Integral $= o$, womit der am Anfang des § angekündigte Satz bewiesen ist. Die Riemann'sche Fläche T, wenn sie durch die Bedingung beschränkt ist, dass man nur fundamentale Uebergänge überschreiten darf, soll als Fläche T' bezeichnet werden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Also ist $\int_{P_0}^{P} \varphi(x\,y)\,dx$ in T′ eine einwerthige Function des Ortes P. Sie ist aber bekanntlich keine stetige Function, sondern erleidet an den Seiten von L Unstetigkeiten, auch dann, wenn man zwei Punkte als obere Grenzen nimmt, die auf verschiedenen mit demselben Buchstaben bezeichneten Ufern sich gegenüberliegen. Sind P′ und P″ zwei solche Punkte auf den beiden mit s bezeichneten Ufern, so ist die Differenz

$$\int_{P_0}^{P'} \varphi(x\,y)\,dx - \int_{P_0}^{P''} \varphi(x\,y)\,dx,$$

beide Integrale in T′ genommen, die nämliche, wo auch die unendlich nahen Punkte P′ und P″ längs des Ueberganges s gewählt sein mögen[1]). Sie ist die zum Uebergange s gehörige Periode.

Da bei den fundamentalen Uebergängen das Integral stetig ist, so ist die Zahl der Perioden, weil einzelne = o werden können, höchstens gleich der Zahl der nicht-fundamentalen Uebergänge, also

$$= n(q + k) - 2n + 1 = \sigma.$$

§ 3.

Zwischen den Perioden bestehen eine Reihe von Gleichungen. Es sei ξ irgend ein besonderer Werth von x und $P(x - \xi)$ eine der nach ganzen oder gebrochenen Potenzen fortschreitenden Reihen, welche für y gesetzt der Gleichung $f(x\,y) = o$ genügen. Beschreibt nun x in E um ξ einen kleinen Kreis, so wird der entsprechende Punkt X der Riemann'schen Fläche eine geschlossene Curve beschreiben, wenn $P(x - \xi)$ nach ganzen Potenzen fortschreitet, dagegen eine offene, wenn die Reihe nach Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{\mu}}$ geordnet ist. Im letzten Falle muss x den Kreis der Ebene E μ-mal durchlaufen, bis X eine geschlossene Curve in T beschreibt. Jedem Punkte ξ in E entsprechen soviele geschlossene

1) Siehe hiefür z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. Auflage. Leipzig 1884. Seite 192.

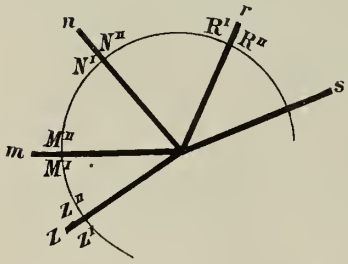
© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Curven in T als zu ihm Reihen $P(x - \xi)$ gehören, indem jede Reihe eine Curve liefert. Zu einem gewöhnlichen Punkte gehören also n Curven, zu einem Verzweigungspunkte weniger als n, etwa zum Punkte w_i nur c_i Curven. Jede dieser Curven besteht entweder aus einem einzigen Kreise oder aus mehreren, in verschiedenen Blättern liegenden Stücken von Kreisen, welche die dem ξ entsprechenden Punkte von T umgeben und sich zu Vollkreisen zusammenschliessen. Diejenigen der beschriebenen Curven, welche zu den Verzweigungspunkten und Knotenpunkten gehören, seien als die Curven U bezeichnet; ihre Zahl ist $= nk + \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda = \nu$, und sie seien in irgend einer Folge als $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ unterschieden.

Da wir unter $\varphi(xy)$ einen Integranden erster oder zweiter Gattung verstehen, so enthält $\varphi[x, P(x - \xi)]$ für keinen Punkt ξ und keine der zu ihm gehörenden Entwickelungen ein Glied mit $\frac{1}{x-\xi}$ und folglich ist das Integral gleich Null, welches über die von $P(x-\xi)$ gelieferte Curve genommen ist. Daher liefern die ν Curven U alle für das Integral den Werth Null. Nun möge eine von ihnen in dem α^{ten}, $\beta^{ten} \ldots \varkappa^{ten}$ Blatte verlaufen und die Uebergänge m, n, r, s ... z bez. von M′ zu M″, N′ zu N″, ... Z′ zu Z″ passiren (Fig. 6)[1]. Dann hat man

$$o = \int_{M''}^{N'} \varphi(xy)\,dx + \int_{N''}^{R'} \varphi(xy)\,dx + \ldots + \int_{Z''}^{M'} \varphi(xy)\,dx$$

Fig. 6.



wo bei den einzelnen Integralen als Wege die einzelnen Kreisbogen dienen, welche U zusammensetzen.

Zieht man nun in T′ von P_0 nach den Punkten M′ M″ N′ N″ ... Z″ Curven, dann ist der Weg

$$M' P_0 M'' N' P_0 N'' \ldots Z' P_0 Z'' M'$$

in T′ geschlossen und liefert für das Integral

1) Der Raumersparniss wegen sind die einzelnen Blätter neben einanderliegend gezeichnet.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

den Werth Null. Bezeichnet man mit $(P_0 P)$ das Integral $\int_{P_0}^{P} \varphi(xy)\,dx$, wenn sein Weg in T' verläuft, so entsteht durch Combination der beiden Resultate

$$o = (P_0 M'') - (P_0 M') + (P_0 N'') - (P_0 N') + \ldots + (P_0 Z'') - (P_0 Z').$$

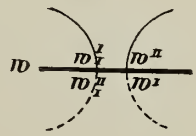
Die Differenzen $(P_0 M'') - (P_0 M')$ u. s. w. sind aber die den Uebergängen m, n, . . . zugehörigen Perioden oder, je nach Definition, vielleicht auch das Negative derselben.

Nennt man die Perioden bez. (m), (n) . . . (z), so ist demnach $(P_0 M'') - (P_0 M') = \pm (m)$, je nachdem (m) definirt war, u. s. w. und somit hat man die Gleichung

$$\pm (m) \pm (n) \ldots \pm (z) = o.$$

Da ν Curven U existiren, so gibt es auch ν solcher Gleichungen. Deren linke Seiten sind aber nicht unabhängig. Ueberschreiten nämlich die beiden Curven U_i und U_k denselben Uebergang w (Fig. 7), die eine von W' zu W'', die andere von W_1' zu W_1'' und integrirt man beidemale im Uhrzeigersinne, so tritt in der linken Seite der Gleichung, die von U_i herrührt,

Fig. 7.



$$(P_0 W'') - (P_0 W') = \pm (w)$$

dagegen in der andern Gleichung, die U_k entspricht,

$$(P_0 W_1'') - (P_0 W_1') = \mp (w)$$

auf, zwei Differenzen die entgegengesetzt gleich sind. Kommt also in der einen Gleichung die Periode $+ (w)$ vor, so tritt in der zweiten $- (w)$ auf. Jeder Uebergang gehört aber auch nur zu zweien der Curven U, von welchen er, an seinen beiden Enden, überschritten wird. Addirt man also die sämmtlichen Gleichungen so entsteht $o = o$, so dass von den ν Gleichungen mindestens eine eine Folge der übrigen ist. Besteht nur e i n e Beziehung zwischen den Gleichungen — wie dies nachher bewiesen werden soll — so kann man demnach $\nu - 1$ der Perioden linear und ganzzahlig durch die übrigen ausdrücken, deren Zahl $= \sigma - (\nu - 1)$

$$= nq - \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda - 2(n-1)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{q} (n - c_\lambda) - 2(n-1) = 2\varrho$$

ist.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

§ 4.

Es soll nun bewiesen werden, dass in der That zwischen den ν aufgestellten Gleichungen nur eine Beziehung besteht. Schreiben wir die von der Curve U_i herrührende Gleichung $G_i = o$. Wenn man in allen den Ausdrücken $G_1 \ldots G_\nu$ die σ Perioden durch Variable $x_1 x_2 \ldots x_\sigma$ ersetzt und die entstehenden Functionen mit $g_1 g_2 \ldots g_\nu$ bezeichnet, so fragt es sich, ob eine Gleichung von der Form

$$\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \ldots \gamma_\nu g_\nu \equiv o;$$

die wir kurz $\Gamma \equiv o$ schreiben wollen, noch in anderer Weise möglich ist als durch die Annahme $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_\nu$. Da jede Periode nur in zweien der Ausdrücken G_i auftritt, so kommt jede Variable x_i nur in zweien der Functionen g_i vor und zwar einmal mit dem Coefficienten $+ 1$, das andere Mal mit dem $- 1$ versehen.

Gesetzt x_1 käme in g_1 und g_2 vor, so hätte es in Γ den Coefficienten $\gamma_1 - \gamma_2$ und $\Gamma \equiv o$ würde $\gamma_1 = \gamma_2$ verlangen. Enthielten g_1 und g_2 noch eine Variable x_2 die in ihnen zusammen genommen nur einmal vorkäme, so müsste sie in einer andern Function etwa g_3 nochmals vorhanden sein. Dann hätte x_2 in Γ den Coefficienten $\gamma_1 - \gamma_3$ und es müsste $\gamma_3 = \gamma_1$ sein. In $g_1 g_2 g_3$ möge nun ferner eine Variable x_3 auftreten, die nur einmal in diesen drei Functionen und also noch in einer vierten g_4 sich findet. Dann ergibt sich $\gamma_4 = \gamma_1$. Auf diesem Wege weitergehend kann man offenbar die Gleichheit aller γ_i nachweisen, wenn nur die eben wiederholt benützte Bedingung erfüllt ist, dass es immer in einer Gruppe von Functionen g eine Variable gibt, die nur einmal in jener Gruppe auftritt. Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies stets der Fall ist, ausser wenn die Gruppe die sämmtlichen Functionen g umfasst.

Wenn in einer Gruppe $g_1, g_2 \ldots g_h$ von h $(< \nu)$ Functionen jede vorkommende Variable zweimal vorkommt, so heisst dies, weil ja die Variablen an die Stelle der Perioden getreten sind: in den Ausdrücken $G_1, G_2, \ldots G_h$ kommt jede Periode zweimal vor; und dies sagt wieder aus, dass jeder nicht-fundamentale Uebergang, der von einer der Curven $U_1, U_2, \ldots U_h$ überschritten wird, auch noch von einer zweiten passirt wird.

Man kann nun in einem einzigen zusammenhängenden Zug die Ufer aller nicht fundamentalen Uebergänge durchlaufen, so dass jedes

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ufer nur einmal dabei betreten wird. Um dies zu zeigen bemerken wir zunächst, dass der Satz I des vorigen § sich auch umkehren lässt. Wenn nämlich zwei geschlossene Curven (Fig. 5 auf Seite 337) RUSR und PVQP beide dem Uebergang s in einem Theile ihres Verlaufes zur Seite liegen, die eine in einem, die andere im zweiten der beiden durch s verbundenen Blätter, so kann man aus beiden die neue geschlossene Curve PVQSURP ableiten, welche mit zweimaligem Ueberschreiten von s geschlossen ist. Nun kann man, wie schon in § 1 erwähnt, das im ersten Blatte befindliche Liniensystem L_1 in einem Zuge umlaufen. Führt ein fundamentaler Uebergang a vom ersten Blatte in's α^{te} Blatt, so kann man den Weg um L_α, der auch geschlossen ist, mit dem um L_1 zu einem einzigen geschlossenen Weg vereinigen, der a zweimal passirt, wobei die beiden Wegstrecken, die im ersten und α^{ten} Blatte auf den Ufern von a lagen, wegfallen. Führt nun der fundamentale Uebergang b von einem der beiden eben benutzten Blätter in's β^{te} Blatt, so kann man den eben hergestellten Weg, indem man b zweimal überquert, mit dem um L_β wieder zu einem einzigen zusammenhängenden Weg zusammen schmelzen. So kann man weiter gehen und wird nach n — 1 Operationen zu einem Wege W_0 gelangen, der jeden fundamentalen Uebergang zweimal überschreitet und den Ufern jedes nicht-fundamentalen Ueberganges entlang führt. Wir können dabei den Weg W_0 so einrichten, dass er in der Nähe der Ecken des Liniensystems L soweit es möglich ist die im vorigen § beschriebenen Curven U benutzt, so dass also in jedem Blatte diese Ecken in Kreisstücken umgangen werden[1]). Es gehören aber von jeder Curve U Stücke zum Weg W_0. Denn wenn man die Entstehung von W_0 betrachtet, so sieht man, dass der Weg um L_1 von Curven U alle die Stücke benutzt, die im ersten Blatte liegen, der um L_α dagegen alle im α^{ten} Blatte liegenden Stücke; durch die Verschmelzung beider fällt keines dieser Kreisstücke weg — sondern nur Verbindungsstrecken zweier Kreisstücke — vielmehr schliessen sich nur zweimal je zwei vorher getrennte Kreisstücke an einander (Fig. 8^a und 8^b;[2]) 8^a zeigt die beiden Wege ABCE..FGHK.. im 1ten und LMNP..QRST... im α^{ten}

1) Beispiele für die Gestaltung von W_0 finden sich in § 10.

2) Die im ersten Blatte verlaufenden Curvenstrecken sind ausgezogen, die im α^{ten} Blatte gestrichelt; a führt vom 1ten Blatte oben zum α^{ten} unten.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Blatte vor der Verschmelzung; 8^b dagegen den Weg A B, durch a nach C, dann weiter D . . . E F G H . . . . . K L durch a nach M . . . N P Q R . . und zurück längs L_1 nach A).

Fig. 8a.

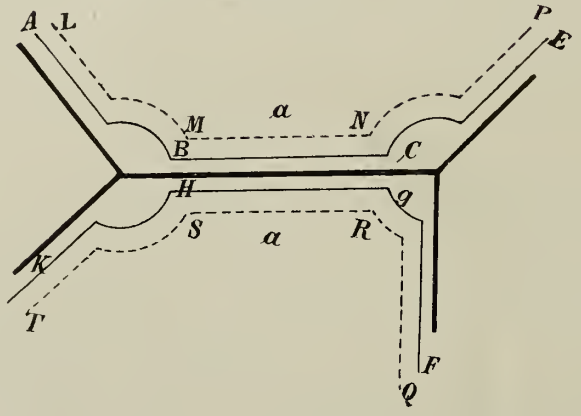
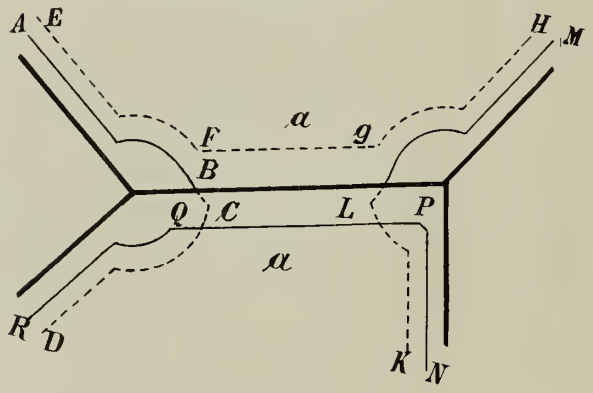


Fig. 8b.



Man stelle nun in einer Hilfsebene jede Curve U_i durch einen beliebig gewählten Punkt P_i dar und verbinde zwei Punkte P_i und P_k durch eine gerade oder krumme Linie, wenn die beiden Curven U_i und U_k denselben nicht fundamentalen Uebergang überschreiten. Dabei werde die Verbindungslinie mit demselben Buchstaben bezeichnet wie der Uebergang. In einem Punkte P_i sollen die verschiedenen von ihm ausgehenden Verbindungslinien, wenn man ihn im Uhrzeigersinn umläuft, in derselben Ordnung aufeinanderfolgen, in der die gleichbezeichneten Ueber-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

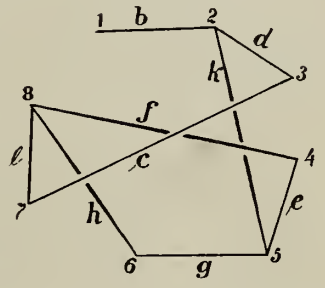
gänge von U_i überschritten werden, wenn man diese Curve im Uhrzeigersinn durchwandert.

Es wird manchmal nicht möglich sein dabei Ueberschneidungen zweier Verbindungslinien zu vermeiden, wenn man sie nicht mit einer kleinen Ausbiegung über einander wegführen will. Die so entstehende Figur soll, mit Benutzung eines Listing'schen Ausdrucks,[1]) das Diagramm des Weges W_0 heissen, da es ähnlichen Zwecken dient wie Listing's Diagramm. (Wir bemerken dabei, dass die Betrachtungen die im Folgenden auf das Diagramm gegründet werden, auch ohne Bezug auf ein räumliches Bild sich durchführen liessen.) Wenn z. B. 8 Curven U vorhanden sind, welche (wie im ersten Beispiel des § 10) die folgenden nicht-fundamentalen Uebergänge in der beigesetzten Ordnung überschreiten,

U_1	b	U_5	gke
U_2	kbd	U_6	gh
U_3	cd	U_7	cl
U_4	ef	U_8	hlf

so hat das Diagramm die in Fig. 9 gegebene Gestalt. Das Diagramm des Weges W_0 kann nicht in getrennte Theile zerfallen. Zum Beweise bemerken wir zuerst, dass eine Curve U nicht nur fundamentale Uebergänge passiren kann. Denn U ist eine geschlossene Curve, würde sie nur fundamentale Uebergänge passiren, so müsste sie jeden eine gerade Anzahl Male überschreiten (§ 2), während sie doch jeden von ihr überschrittenen Uebergang nur einmal überquert.

Fig. 9.



Für das Diagramm heisst dies: von jedem Punkte P_i geht mindestens eine Verbindungslinie aus. Man kann aber auch weiter zeigen, dass zwischen irgend zwei Punkten P_i und P_k Verbindung ist. Denn U_i trifft mindestens einen nicht-fundamentalen Uebergang p; beginnt man W_0 auf dem einen Ufer von p, bei der Curve U_i und geht p entlang, so kommt man zu einer Curve U_α. Wenn α nicht $=$ k ist, so muss

1) Census räumlicher Complexe. Abhandl. d. math. Classe d. kgl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. 10. Band. 1861/62. Seite 115.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

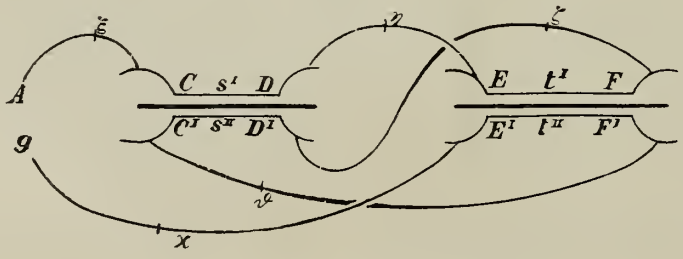
man, weil W_0 sicher ein Stück von U_k enthält, von U_α auf W_0 längs eines nicht-fundamentalen Ueberganges q weiter gehen können und gelangt zu U_β, von dem wieder ein nicht-fundamentaler Uebergang nach $U_\gamma \ldots$ führt u. s. w., bis man längs w gehend schliesslich von $U_\varkappa$ zu U_k gelangt. Im Diagramm kommt man also von P_i über die Verbindungslinien p q ... w und die Punkte $P_\alpha P_\beta \ldots P_\varkappa$ nach P_k. Damit ist der oben angeführte Satz bewiesen.

Kehren wir nun wieder zur früheren Untersuchung zurück, die uns zu dem zu widerlegenden Resultate geführt hatte, dass jeder nicht-fundamentale Uebergang der von einer der h Curven $U_1 U_2 \ldots U_h$ durchsetzt wird, auch noch von einer zweiten durchsetzt wird. Wäre dies richtig, so müsste ein Theil unseres Diagramms bestehend aus den h Punkten $P_1, P_2, \ldots P_h$ vom Rest isolirt sein. Denn wenn von einem der Punkte P_l, wo $l \leqq h$, eine Verbindungslinie z nach einem Punkte P_m mit $m > h$ ginge, so würde der Uebergang z von U_l und von U_m überschritten, während doch noch eine zweite der Curven $U_1 U_2 \ldots U_h$ ihn überschreiten sollte. Unsere Annahme kann also nur dann richtig sein, wenn die h Punkte $P_1 \ldots P_h$ mit den ν Punkten $P_1 \ldots P_\nu$ identisch sind. Folglich wird jede Gruppe von Ausdrücken $g_1 g_2 \ldots g_h$ bei der $h < \nu$ ist, sicher eine nur einmal auftretende Variable enthalten; und damit ist der am Ende des vorigen § angekündigte Satz bewiesen.

§. 5.

Im Folgenden soll W_0 abgeändert und dabei sollen die Perioden durch neue Grössen ausgedrückt werden. Dazu dient die folgende Entwickelung. Ein geschlossener oder ungeschlossener Weg W, der in A beginnt und in G endigt, (Fig. 10) führe unendlich dicht an den beiden

Fig. 10.



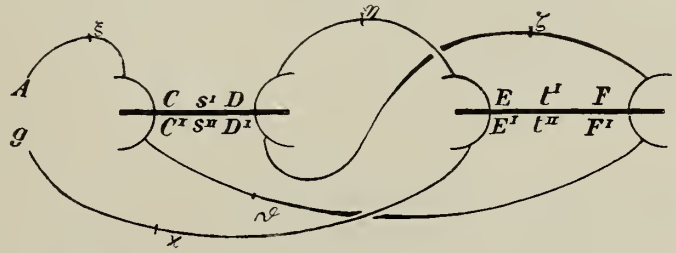
© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ufern s' s'' bez. t' t'' von zwei Uebergängen s und t entlang und zwar so dass man, in der Richtung von A nach G gehend, dieselben in der Reihenfolge s' t' s'' t'' durchläuft.

Man wähle nun auf s' und s'' zwei Paare von gegenüberliegenden Punkten C C' resp. D D' und auf t' und t'' zwei Paare E E' und F F' aus und ersetze W durch den neuen Weg (Fig. 10[a])

A C C' F' F D' D E E' G

Fig. 10a.



der in den Punkten C C', D D'. E E', F F' die Uebergänge s und t überschreitet. Die Curvenstücke A C, D E, F D', C' F', E' G sind beiden Wegen gemeinsam; auf ihnen seien bezüglich die Punkte ξ, η, ζ, ϑ, $\varkappa$ angenommen um dann die Integrale $\int \varphi(xy)\,dx$ von A aus über W und W' bis zu jenen Endpunkten erstreckt zu vergleichen.

Das Integral über W' genommen soll, wie das über W genommene, durch Zusammenstellung der Endpunkte in einer Klammer bezeichnet und das erstere vom letzteren durch einen Accent unterschieden werden. Wenn der Weg unzweideutig bezeichnet ist, fällt jene Angabe fort.

So ist dann

1) $(A\,\xi)' = (A\,\xi)$,

weil von A nach ξ nur ein Weg führt.

2) Dagegen ist

$$(A\,\eta)' = (A\,C\,C'\,F'\,F\,D'\,D\,\eta)$$
$$(A\,\eta) = (A\,C\,D\,\eta)$$

daher

$$(A\,\eta)' = (A\,\eta) + (D\,C\,A\,C\,C'\,F'\,F\,D'\,D).$$

(C A C) ist = o, weil es (A C) + (C A) gleicht; (D C) = (D D') + (D' C') + (C' C); somit folgt

$$(A\,\eta)' = (A\,\eta) + (D\,D'\,C'\,F'\,F\,D'\,D) = (A\,\eta) + (D'\,C'\,F'\,F\,D').$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

3) $(A\zeta)' = (ACC'F'F\zeta)$
$(A\zeta) = (ACDEF\zeta)$.

Also
$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDCC'F'F).$$
Ersetzt man wie oben (DC), so wird
$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDD'C'F'F)$$
und wenn man $(D'F) + (FD') = o$ zufügt
$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDD'F) + (FD'C'F'F).$$
Schreibt man das zweite Integral rechts mit cyklischer Vertauschung der Buchstaben, so wird
$$(A\zeta)' = (A\zeta) + (FEDD'F) + (D'C'F'FD').$$
4) $(A\vartheta)' = (ACC'\vartheta)$; $(A\vartheta) = (ACDEFD'C'\vartheta)$
daher ist
$$(A\vartheta)' = (A\vartheta) - (C'CACDEFD'C')$$
$$= (A\vartheta) - (C'CDEFD'C').$$
Ersetzt man hier (CD) durch $(CC'D'D)$, so wird das zweite Integral $= (C'D'DEFD'C') = (D'DEFD') = -(FEDD'F)$ und folglich
$$(A\vartheta)' = (A\vartheta) + (FEDD'F).$$
5) $(A\varkappa)' = (ACC'F'FD'DEE'\varkappa)$
$(A\varkappa) = (ACDEFD'C'F'E'\varkappa)$.

Wenn man die Integrale, die sich gegenseitig zerstören, fortlässt, so wird
$$(A\varkappa)' = (A\varkappa) + (E'F'FEE') + (C'D'DCC')$$
oder, weil die beiden rechts Null sind
$$(A\varkappa)' = (A\varkappa).$$
Bezeichnet man die Integrale
$(DEFD'D)$ mit σ
$(C'F'FD'C')$ mit τ,
so sind σ und τ über geschlossene Curven genommen und man hat die Gleichungen
$$(A\xi)' = (A\xi)$$
$$(A\eta)' = (A\eta) + \tau$$
$$\text{I} \quad (A\zeta)' = (A\zeta) + \tau - \sigma$$
$$(A\vartheta)' = (A\vartheta) - \sigma$$
$$(A\varkappa)' = (A\varkappa).$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ferner folgen durch Subtraction die Beziehungen

$$(\xi\eta)' = (\xi\eta) + \tau;\quad (\xi\zeta)' = (\xi\zeta) + \tau - \sigma;\quad (\xi\vartheta)' = (\xi\vartheta) - \sigma;\quad (\xi\varkappa)' = (\xi\varkappa)$$

$$(\eta\zeta)' = (\eta\zeta) - \sigma;\quad (\eta\vartheta)' = (\eta\vartheta) - \tau - \sigma;\quad (\eta\varkappa)' = (\eta\varkappa) - \tau$$

$$(\zeta\vartheta)' = (\zeta\vartheta) - \tau;\quad (\zeta\varkappa)' = (\zeta\varkappa) - \tau + \sigma$$

$$(\vartheta\varkappa)' = (\vartheta\varkappa) + \sigma.$$

Schreibt man

$$AC\,.\,\underline{CD}\,.\,DE\,.\,\underline{EF}\,.\,FD'\,.\,\underline{D'C'}\,.\,C'F'\,.\,\underline{F'E'}\,.\,E'G$$

als Bezeichnung des ersten Weges W, so ist der zweite W', der durch „Elimination" der unterstrichenen Strecken CD u. s. w. entsteht, gegeben durch

$$AC\,.\,C'F'\,.\,FD'\,.\,DE\,.\,E'G$$

wobei die CC', DD' u. s. w. weggelassen sind.

Deutet man den Ort der Punkte $\xi\eta\zeta\vartheta\varkappa$ an, schreibt unter EF und D'C' bez. $-\sigma$ und $-\tau$; dagegen unter CD und F'E' resp. τ und σ, so ist der erste Weg

$$A\xi C\,.\,\underset{\tau}{\underline{CD}}\,.\,D\eta E\,.\,\underset{-\sigma}{\underline{EF}}\,.\,F\zeta D'\,.\,\underset{-\tau}{\underline{D'C'}}\,.\,C'\vartheta F'\,.\,\underset{\sigma}{\underline{F'E'}}\,.\,E'\varkappa G$$

und man erkennt die einfache Regel, dass das Integral zwischen irgend zweien der Punkte $\xi\eta\zeta\vartheta\varkappa$ auf dem Weg W' genommen, gleich dem zwischen denselben Punkten längs W genommenen Integrale ist plus der Summe derjenigen der vier Grössen τ, $-\sigma$, $-\tau$, σ, welche oben zwischen den betreffenden beiden Buchstaben stehen.

Es sei jetzt $\psi(xy)$ eine zweite rationale Function von x und y; indem man nur die Punkte eines bestimmten Weges — W oder W' — betrachtet sei sie mit $u(x)$ bezeichnet, wobei x einen Punkt dieses Weges darstellt.

Wir bilden nun

$$J' = \int_A^G u(x)\,(Ax)'\,dx$$

über W' genommen, wo $(Ax)'$ das von A bis x über W' genommene $\int \varphi(xy)\,dx$ bezeichnet. Zerlegt man J' in 5 Theile und bezeichnet den einzelnen Theilen entsprechend x durch $\xi\eta\zeta\vartheta$ oder $\varkappa$, so wird, wenn man von den Gleichungen I Gebrauch macht

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$J' = \int_A^C u(\xi)(A\xi)\,d\xi + \int_{C'}^{F'} u(\vartheta)[(A\vartheta) - \sigma]\,d\vartheta$$
$$+ \int_F^{D'} u(\zeta)[(A\zeta) + \tau - \sigma]\,d\zeta + \int_D^E u(\eta)[(A\eta) + \tau]\,d\eta$$
$$+ \int_{E'}^G u(\varkappa)(A\varkappa)\,d\varkappa.$$

Vergleicht man mit dem über W genommenen Integrale

$$J = \int_A^G u(x)(Ax)\,dx$$

indem man auch dies in die einzelnen Theile zerlegt, so sieht man, dass J von J' diejenigen Theile enthält, welche weder σ noch τ enthalten, dass aber noch hinzukommt die Integralsumme

$$\int_C^D u(\lambda)(A\lambda)\,d\lambda + \int_E^F u(\pi)(A\pi)\,d\pi + \int_{D'}^{C'} u(\mu)(A\mu)\,d\mu$$
$$+ \int_{F'}^{E'} u(o)(Ao)\,do$$

wo mit $\lambda\,\mu\,o\,\pi$ vier Punkte auf CD, C'D', E'F' und EF bezeichnet sind. Nimmt man λ und μ einerseits, o und π andererseits sich gegenüberliegend an, so ist

$$d\lambda = d\mu,\ d\,o = d\pi,\ u(\lambda) = u(\mu),\ u(\pi) = u(o)$$
$$(A\mu) = (A\lambda) + (\lambda D) + (DEFD') + (D'\mu) = (A\lambda) + \sigma$$
$$(A\,o) = (A\pi) + (\pi F) + (FD'C'F') + (F'\,o) = (A\pi) + \tau;$$

daher die obige Summe

$$= \sigma \int_{D'}^{C'} u(\mu)\,d\mu - \tau \int_E^F u(\pi)\,d\pi$$

wird. Alles zusammengefasst wird nun

$$J' = J - \sigma\left\{\int_{D'}^{C'} u(\mu)\,d\mu + \int_F^{D'} u(\zeta)\,d\zeta + \int_{C'}^{F'} u(\vartheta)\,d\vartheta\right\}$$
$$+ \tau\left\{\int_E^F u(\pi)\,d\pi + \int_F^{D'} u(\zeta)\,d\zeta + \int_D^E u(\eta)\,d\eta\right\}.$$

Der Coefficient von $(-\sigma)$ ist das Integral $\int \psi(xy)\,dx$ über den-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

selben Weg genommen, auf den τ sich bezieht; es sei mit T bezeichnet. Der Coefficient von τ dagegen ist obiges Integral über den Weg von σ erstreckt. Nennt man seinen Werth Σ, so folgt also:

$$J' = J + \tau \Sigma - \sigma T \qquad \text{II}$$

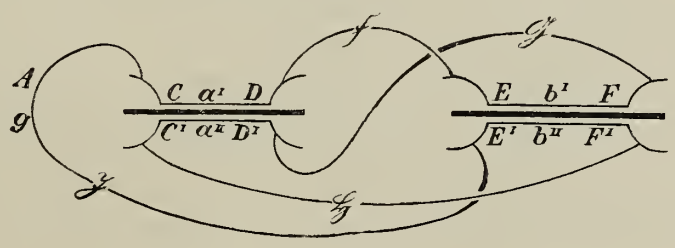
§ 6.

Um die Anwendung auf die Perioden von $\int \varphi(xy)\,dx$ zu machen, denkt man sich in T' den oben (Seite 343) beschriebenen Weg W_0 durchlaufen und die Buchstaben nebeneinandergestellt, welche die Ufer der Uebergänge bezeichnen, in der Reihenfolge, wie sie beim Durchwandern von W_0 getroffen werden. In dieser Reihe R_0, die man sich wie den Weg W_0 cyklisch geschlossen denken muss, ist es nun möglich, dass niemals zwei gleiche Buchstaben durch zwei andere ebenfalls gleiche Buchstaben getrennt werden. Dann ist die beabsichtigte Umänderung nicht möglich und, wie später gezeigt wird, auch nicht nöthig. Wenn aber „Trennungen" gleicher Buchstaben durch andere gleiche auftreten, so seien etwa die beiden a durch die beiden b getrennt. Indem wir die dazwischenliegenden Buchstabengruppen durch besondere Zeichen bezeichnen und die beiden durch a bez. durch b bezeichneten Ufer noch durch a' und a'', b' und b'' unterscheiden, können wir R_0 schreiben

$$R_0 = a' \mathfrak{F} b' \mathfrak{G} a'' \mathfrak{H} b'' \mathfrak{J}.$$

Mit Anwendung der im vorigen § entwickelten Methode kann man nun aus W_0 einen neuen Weg W_1 ableiten. Nimmt man a' a'' b' b'' für die vorhin mit s' s'' t' t'' bezeichneten Ufer und setzt die Buchstaben CDEF wie in Fig. 11 an die Enden der Kreisstücke, welche im Wege W_0 die vier in Frage kommenden Ecken von L umgehen, so ist der Weg W_1 gegeben durch die Reihe $\mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\mathfrak{J} = R_1$,

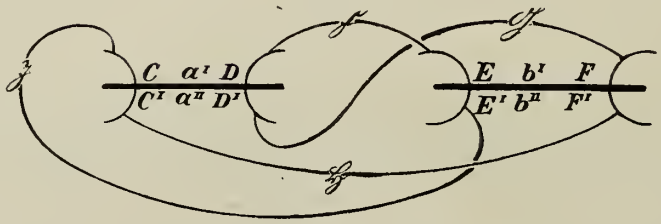
Fig. 11.



© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wobei zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ und zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ ein Durchgang durch a, zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$, sowie zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{J}$ einer durch b stattfindet. (Fig. 12).

Fig. 12.



Die Perioden des Integrals sind die Werthe von $\int \varphi(xy)dx$ in T' auf einer Curve von einem Punkte auf dem ersten Ufer eines Ueberganges nach dem gegenüberliegenden Punkte des zweiten Ufers genommen. Als solche Curve, deren Gestalt gleichgültig ist, kann man W_0 wählen. Dann ist die Periode (a) für den Uebergang a gleich dem Integral über den Weg $\mathfrak{F}b'\mathfrak{G}$ genommen, die (b), welche zu dem Uebergang b gehört, ist der Werth des Integrales über den Weg $\mathfrak{G}a''\mathfrak{H}$ genommen. Für irgend einen andern Uebergang s von denjenigen c, d, e, f..., welche ausser a und b noch in R_0 auftreten, kann man die Periode (s), statt durch ein über W_0 genommenes Integral, ausdrücken durch ein über W_1 zwischen denselben, an beiden Ufern von s sich gegenüberliegenden, Punkten genommenes. Bezeichnet man den letzteren Werth mit $(s)_1$, so ist nach dem vorigen §

$$(s) = (s)_1 + \delta(a) + \varepsilon(b),$$

wo δ und ε Zahlen bezeichnen, die entweder 0, 1 oder — 1 sind und sich nach früherer Regel leicht bestimmen. Weil $\int \varphi(xy)dx$ in T' einwerthig ist, so ist das um W_0, als um eine geschlossene Curve, genommene Integral gleich Null. Denselben Werth hat also auch das über W_1 genommene Integral.

Trägt man die Werthe der Perioden (c) (d), ... durch die Grössen $(c)_1$, $(d)_1$, ... ausgedrückt, in die Beziehungen ein, welche zwischen den Perioden im § 3 nachgewiesen wurden, so entstehen zwischen den Grössen (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, ... lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, deren rechte Seiten Null sind. Diese Gleichungen kann man aber ein-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

facher durch directe Betrachtung erhalten. Der Weg W_1 verfolgt wie der W_0 in der Nähe der Ecken von L Stücke der Curven U. Möge nun, wie oben im § 3, eine dieser Curven die von ihr überschrittenen Uebergänge in den Punkten M' M'' ... treffen. Dann ist (siehe Seite 340)

$$(M''N') + (N''R') + (R''S') + \ldots + (Z''M') = o.$$

Man gehe nun von einem Punkte A in W_1 aus und integrire immer in derselben Richtung längs W_1, dann ist

$$(M''N') = (A\ N)' - (AM'')'$$
$$(N''\ R') = (AR')' - (AN'')'$$
$$\ldots\ldots$$
$$(Z''M') = (AM')' - (AZ'')'$$

wo die Klammern rechts den Accent tragen, um die Integration längs W_1 anzudeuten. Damit wird die obige Gleichung

$$(AM')' - (AM'')' + (AN')' - (AN'')' + \ldots\ldots = o.$$

Es ist aber $(AM') - (AM'')$, beide Integrale längs W_0 genommen, die zum Uebergang m gehörige Periode $\pm(m)$. Entsprechend ist $(AM')' - (AM'')'$ die zu demselben Uebergang gehörige neue Grösse $\pm(m)_1$. Aehnlich verhalten sich die übrigen Differenzen und somit erhält man statt der Gleichung

$$\pm(m) \pm(n) + \ldots \pm(z) = o$$

jetzt die Gleichung

$$\pm(m)_1 \pm(n)_1 + \ldots \pm(z)_1 = o.$$

Dabei fallen nicht nur die den fundamentalen Uebergängen entsprechenden Grössen weg, sondern auch die, welche mit $(a)_1$ und $(b)_1$ zu bezeichnen wären, weil ja W_1 die Uebergänge a und b überschreitet.

Zum Wege W_1 kann man auch ein Diagramm construiren, das man aber aus dem für W_0 offenbar erhält, wenn man die mit a und b bezeichneten Verbindungslinien fortnimmt. Da W_1, wie W_0, noch Theile von jeder Curve U enthält, so muss es möglich sein, von jeder Curve U zu jeder andern zu gelangen, indem man dem Wege W_1 folgt und folglich kann das Diagramm von W_1 nicht in getrennte Theile zerfallen.

Dies ist aber nur möglich, wenn im Diagramm von W_0 geschlossene Polygone vorhanden sind, welchen die Verbindungslinien a und b angehören.

Mit dem Wege W_1 bezw. mit der ihn darstellenden Reihe R_1

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$= \mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{F}\mathfrak{J}$ kann man nun ganz ähnliche Betrachtungen anstellen. Enthält er keine Trennungen eines Paares gleicher Buchstaben durch ein anderes Paar gleicher mehr, so ist die Umformung beendigt. Kommen aber solche Trennungen noch vor und schreibt man, eine heraushebend,

$$R_1 = \grave{c}\,\mathfrak{F}_1\, d\,\mathfrak{G}_1\, c\,\mathfrak{H}_1\, d\,\mathfrak{J}_1,$$

so kann man aus W_1 den geschlossenen Weg W_2 ableiten, der durch die Uebergänge c und d hindurchführt und mit der Buchstabenreihe

$$R_2 = \mathfrak{H}_1\, \mathfrak{G}_1\, \mathfrak{F}_1\, \mathfrak{J}_1$$

bezeichnet werden kann. Ist s irgend einer der ausser c, d in W_1 noch vorhandenen, nicht überschrittenen Uebergänge e, f... so ist, nach dem früheren, das Integral von einem Punkte von s nach dem gegenüberliegenden, genommen

über W_1 gleich $(s)_1$

über W_2 „ $(s)_2$

und

$$(s)_1 = (s)_2 + \delta_1 (c)_1 + \varepsilon_1 (d)_1.$$

Dabei sind δ_1 und ε_1 Factoren, die einen der Werthe 0, 1, oder — 1 haben. Hiemit wird nun

$$(s) = (s)_2 + \delta (a) + \varepsilon (b) + \delta_1 (c)_1 + \varepsilon_1 (d)_1,$$

so dass alle Perioden sich durch (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$ und die über W_2 genommenen Integrale $(e)_2$, $(f)_2$... linear und ganzzahlig ausdrücken. Umgekehrt sind aber auch $(c)_1$ und $(d)_1$ lineare und ganzzahlige Functionen von (c), (d), so dass sich auch $(s)_2$ linear und ganzzahlig durch (s), (a), (b), (c), und (d) darstellen lässt. Die oben gefundenen Gleichungen zwischen den Perioden, von welchen

$$\pm (m)_1 \pm (n)_1 + \ldots = 0$$

eine war, gehen dann in Gleichungen über, wie die:

$$\pm (m)_2 \pm (n)_2 + \ldots = 0.$$

Das zu W_2 gehörige Diagramm entsteht aus dem für W_1 durch Fortlassen der c und d genannten Verbindungslinien, und es muss wie das letztere zusammenhängend sein. Auf W_2 und die Reihe R_2 kann man dieselben Operationen anwenden und so fortfahren, bis man zu einem Wege W_p und einer Reihe R_p kommt, in welcher Paare gleicher Buchstaben durch andere Paare gleicher Buchstaben nicht mehr getrennt sind.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Anzahl der in R_p noch übrigen verschiedenen Buchstaben sei q'. Da nun beim Uebergange von R_{i-1} zu R_i zwei Buchstaben wegfallen und R_0 deren σ enthielt, so ist

$$\sigma = 2p + q'.$$

Die Perioden (a) (b), . . . drücken sich nach den bewiesenen Sätzen linear und ganzzahlig aus durch die auf die weggefallenen Buchstaben a, b, c, d, . . m, n bezüglichen Integrale (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, $(e)_2$ . . . $(m)_{p-1}$ $(n)_{p-1}$ und durch diejenigen q' Werthe $(r)_p$, $(s)_p$, $(t)_p$ . . . . welche auf dem Wege W_p erlangt werden, wenn man von einem Ufer zum andern der in R_p noch übrigen Uebergänge r, s, t . . . integrirt. Auch das Umgekehrte ist richtig.

Die von den Curven U_1, . . U_ν gelieferten linearen und homogenen Gleichungen zwischen den Perioden bestehen hier zwischen den q' Grössen $(r)_p$, $(s)_p$, $(t)_p$ . . . . Es wird nachher gezeigt werden, dass diese Werthe alle gleich Null sind. Daher sind die in Rede stehenden Gleichungen nichtssagend. Zwischen den Grössen (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, . . . $(m)_{p-1}$, $(n)_{p-1}$ ergeben also die Curven U keine Gleichung, ebenso wie auch zwischen den 2ϱ Perioden, durch welche sich die übrigen ausdrücken lassen, keine von den U herrührende Gleichung besteht. Da nun, weil die $(r)_p$, $(s)_p$, $(t)_p$ . . . alle Null sind, sich die 2ϱ Perioden durch die $2p$ Grössen (a) (b) . . . $(n)_{p-1}$ linear und ganzzahlig ausdrücken lassen und auch das Umgekehrte richtig ist, so muss $2p = 2\varrho$ sein. Damit folgt $q' = \nu - 1$ und

$$p = \varrho = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{q} (n - c_\lambda) - (n - 1).$$

Da p ganz ist, muss folglich auch ϱ ganz sein.

Auch zu W_p gehört ein Diagramm, das, wie alle früheren, nicht zerfallen darf. Weil nun jedes neue Diagramm zwei Verbindungslinien weniger hat als das vorhergehende, so hat dies letzte $\sigma - 2p = q'$ Verbindungslinien zwischen den ν Punkten P_1 P_2 . . P_ν. Um soviele Punkte zu verbinden, braucht man aber mindestens $\nu - 1$ Linien; daher muss $q' \geqq \nu - 1$ sein.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

§ 7.

Die im vorigen § gegebene Begründung der Gleichung $2p = 2\varrho$ würde ganz stichhaltig sein, wenn man wüsste, dass es andere Beziehungen zwischen den in Frage kommenden Grössen, als die oben betrachteten nicht gäbe. Man kann aber noch in anderer Weise zeigen, dass $p = \varrho$ sein muss. Zunächst ist am Ende des vorigen § direct bewiesen, dass $q' \geqq \nu - 1$ ist, woraus $2p \leqq \sigma - 2(\nu - 1) \leqq 2\varrho$ sich ergibt.

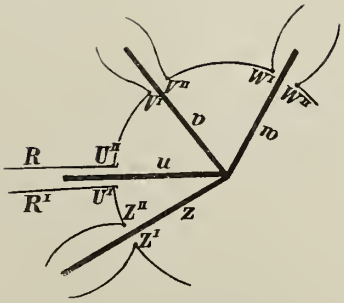
Der Weg W_0 läuft zum Theil längs der Ufer gewisser Uebergänge entlang, die er nicht überschreitet, zum Theil folgt er — und zwar in der Nähe der Ecken von L — kleineren oder grösseren Kreisstücken, die Theile der verschiedenen Curven U bilden. Aus der Art, wie der Weg W_0 gebildet wurde, (§ 4, Seite 343) erkennt man, dass alle diejenigen Kreisstücke von W_0, welche auf der Curve U_i gelegen sind, diese Curve vollständig erfüllen, wenn man von den beliebig klein zu machenden Stücken unmittelbar auf beiden Ufern eines Ueberganges absieht, der nicht überquert wird. (Die kleinen Kreisstücke von Q, P, F, G in Fig. 8^b bis zum Uebergang sind solche Stücke). Da beim Herstellen von W_1, $W_2 \ldots$ aus W_0 nur Uebergänge überschritten werden die vorher verboten waren, so wird bei jedem dieser Wege, und also auch bei W_p, die Eigenschaft bestehen, dass alle zu W_p gehörigen Stücke von U_i diese Curve vollständig erfüllen, ja sogar werden weniger der unendlich kleinen Stücke fehlen als früher, weil jetzt Uebergänge überschritten werden, die vorher gesperrt waren.

Von den Uebergängen, welche von U_i ausgehen d. h. von U_i überschritten werden, mögen nun beim Wege W_p immer noch die u, v, w ... z verboten sein und diese Reihe möge zugleich angeben, wie sie sich folgen, wenn man, etwa im Uhrzeigersinn, U_i durchläuft, so dass man nach Ueberschreitung von z wieder zu u zurück kömmt.

Wenn man nun den Weg W_p verfolgt, so führt er (Fig. 13) von U'' längs U_i zu V', also von u nach v; später dann von V'' nach W' d. h. vom einen Ufer von v nach dem von w u. s. w., schliesslich von Z'' nach U', also von z nach u. In R_p müssen also die Buchstabenpaare vorkommen u v, v w, w x, ... z u. Was ihre Reihenfolge angeht, so kann man R_p schreiben $\mathfrak{u}\,v\,\mathfrak{U}\,v\,w\,\mathfrak{V}'$, wo mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}'$ Buchstabengruppen be-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Fig. 13.



zeichnet sind. Das Paar w x kann nun nicht in $\mathfrak{U}$ stehen, weil sonst v v durch w w getrennt wäre; also muss es in $\mathfrak{V}'$ sich befinden, das man schreiben kann $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}\,\mathrm{w}\,\mathrm{x}\,\mathfrak{W}'$. Das Paar x y kann weder in $\mathfrak{U}$ noch in $\mathfrak{V}$ stecken, ebenfalls weil sonst die Trennungen v . x . v . x bez. w . x . w . x auftreten würden, und muss also sich in $\mathfrak{W}'$ finden; Schreibt man $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}\,\mathrm{x}\,\mathrm{y}\,\mathfrak{X}'$, so wird jetzt

$$R_p = \mathrm{u}\,\mathrm{v}\,\mathfrak{U}\,\mathrm{v}\,\mathrm{w}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{w}\,\mathrm{x}\,\mathfrak{W}\,\mathrm{x}\,\mathrm{y}\,\mathfrak{X}'$$

und so kann man fortschliessen und erkennt, dass in R_p die Paare u v, v w, w x . . . . z u in dieser Reihenfolge auftreten müssen, damit Trennungen nicht da sind. Somit kann man schreiben

$$R_p = \mathrm{u}\,\mathrm{v}\,\mathfrak{U}\,\mathrm{v}\,\mathrm{w}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{w}\,\mathrm{x} \ldots \mathrm{z}\,\mathrm{u}\,\mathfrak{Z}.$$

Bezeichnet nun t einen andern Uebergang, der nicht von U_i getroffen wird, so müssen in R_p die beiden t in einer der mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ . . $\mathfrak{Z}$ bezeichneten Buchstabengruppe stehen, weil sonst Trennungen vorkämen. Wenn man also annimmt sie seien in $\mathfrak{Z}$ enthalten, und dann $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'\,\mathrm{t}\,\mathfrak{Z}''\,\mathrm{t}\,\mathfrak{Z}'''$ schreibt, so gelangt man von einem Punkte R auf dem einen Ufer von t zum gegenüberliegenden Punkte R' entweder auf dem durch $\mathfrak{Z}''$ repräsentirten Weg, wobei man U_i gar nicht trifft, oder auf dem Weg $\mathfrak{Z}'''\,\mathrm{u}\,\mathrm{v}\,\mathfrak{U}\,\mathrm{v}\,\mathrm{w}\,\mathfrak{V} \ldots \mathrm{z}\,\mathrm{u}\,\mathfrak{Z}'$, wobei man die ganze Curve U_i (mit Ausnahme der öfter genannten unendlich kleinen Stücke) durchläuft. Was von U_i gilt, gilt von jeder Curve, die auf dem von R zu R' führenden Wege liegt.

Das über W_p genommene Integral von R nach R' kann man nun zerlegen in die Theile, die längs der Ufer der Uebergänge erstreckt sind und die Summe der Theile, die sich auf die Curven U_i beziehen. Da jede Curve U_i, die überhaupt auf dem Wege liegt, ganz umlaufen wird, so ist das über sie genommene Integral = o. Wenn aber in R_p zwischen den beiden t ein Buchstaben s steht, so steht er da zweimal; der Weg W_p führt also zwischen R und R' an beiden Ufern von s und zwar in entgegengesetzten Richtungen entlang und die beiden Integraltheile, die sich auf s beziehen, heben sich auf. Somit ergibt sich $(t)_p = o$, womit für jeden der Uebergänge r, s, t . . die gegen Ende des § 6 benutzte Eigenschaft bewiesen ist.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die oben durchgeführte Betrachtung hat, wie erwähnt, gezeigt, dass, wenn man $R_p = \mathfrak{A}\, t\, \mathfrak{B}\, t\, \mathfrak{C}$ schreibt, unter $\mathfrak{A}\, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Gruppen von Buchstaben verstanden, dann die sämmtlichen von einer Curve U ausgehenden Uebergänge, die in W_p nicht überschritten werden, sich entweder in $t\, \mathfrak{B}\, t$ oder in $t\, \mathfrak{C}\, \mathfrak{A}\, t$ vorfinden. Zu den beiden Enden von t mögen nun die Curven U_α und U_β gehören, so dass man also beim Durchlaufen dieser Curven t passirt. Dann müssen alle andern Uebergänge von U_α, ausser t, die in W_p noch nicht überschritten werden, sich in $\mathfrak{C}\, \mathfrak{A}$ und die ausser t noch in U_β vorhandenen verbotenen Uebergänge in $\mathfrak{B}$ vorfinden. Von einer der beiden Curven braucht kein weiterer Uebergang derart als t auszugehen; wenn von beiden kein weiterer solcher Uebergang ausginge, so wären in dem Diagramm des Weges W_p die beiden Punkte P_α und P_β zwar unter sich durch t verbunden, aber vom übrigen isolirt. Dies ist nicht möglich, wenn nicht das ganze Diagramm nur aus diesen beiden Punkten besteht. In diesem Falle setzt sich aber der Weg W_p aus dem Umlaufen von U_α, dem einen Ufer von t, der Curve U_β und dem andern Ufer von t zusammen, so dass R_p einfach $t\, t$ ist. Dann ist $\nu = 2$, $q' = 1$, daher $q' = \nu - 1$.

Ist aber $\nu > 2$, so müssen mindestens von einem der beiden Punkte. von P_α z. B. weitere, von t verschiedene Linien ausgehen. Würden dann von P_β keine Verbindungslinien ausser t ausgehen, so würde durch Weglassen von t der Punkt P_β vom Rest des Diagramms isolirt werden und das ganze Diagramm also zerfallen. Man kann aber zeigen, dass das Diagramm auch dann durch Fortlassen von t sich in getrennte Theile spaltet, wenn von P_α und von P_β mehr als die eine Verbindungslinie t ausgeht.

Denn würde sich das Diagramm nicht spalten, so könnte man von P_α auf einer Linie $\mathfrak{a}$ zu einem Punkte P_γ, von da längs $\mathfrak{b}$ zu P_δ, von da längs $\mathfrak{c}$ nach P_ε u. s. w. und schliesslich längs $\mathfrak{m}$ von P_λ zu P_β gelangen. Es würden sich dann der Buchstabe $\mathfrak{a}$ sicher in der Gruppe $\mathfrak{C}\, \mathfrak{A}$. und der $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{B}$ vorfinden. Da nun die Namen der von P_γ ausgehenden Verbindungslinien dieselben sind, wie die der von U_γ überschrittenen. noch in W_p verschlossenen, Uebergänge und diese alle entweder der Gruppe $\mathfrak{C}\, \mathfrak{A}$ oder der $\mathfrak{B}$ angehören, so wird, weil $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{C}\, \mathfrak{A}$ gehört, auch $\mathfrak{b}$ in dieser Gruppe sich finden; dieselbe Ueberlegung zeigt dann dass,

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

weil $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{E}\mathfrak{A}$ gehört, auch $\mathfrak{c}$ in dieser Gruppe stehen muss. So weiter gehend könnte man schliesslich zeigen, dass auch $\mathfrak{m}$ derselben Gruppe angehören müsste, während es doch nach unserer Annahme sich in $\mathfrak{B}$ vorfindet. Damit ist also bewiesen, dass das Diagramm von W_p durch Weglassen irgend einer Seite zerfällt. Für eine solche Figur ist aber die Anzahl ν der Punkte um Eins grösser, als die q' der Verbindungslinien, also hat man $\nu = q' + 1$; $q' = \nu - 1$, womit weiter

$$p = \varrho$$

sich ergibt.

Somit ist endgiltig dargethan, dass alle Perioden eines Integrals erster oder zweiter Gattung sich aus höchstens

$$2p = 2\varrho = \sum_{\lambda=1}^{q} (n - c_\lambda) - 2(n - 1)$$

Grössen linear und ganzzahlig zusammensetzen lassen.

§ 8.

Die am Ende des vorigen § genannten 2 p Grössen sind diejenigen, welche oben in § 6 mit (a), (b), $(c)_1$, $(d)_1$, ... $(m)_{p-1}$, $(n)_{p-1}$ bezeichnet waren. Diese Perioden sind aber kanonische oder Fundamentalperioden. Um dies zu zeigen nimmt man an, die beiden in § 5 gebrauchten Functionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ seien Integranden erster Gattung. Ist dann der mit W bezeichnete Weg unser W_0, so ist das Integral $J = o$, weil $\int \varphi(xy)\,dx$ bei gegebener unterer Grenze eine in T' einwerthige und endliche Function ist und folglich von $\psi(xy) \int \varphi(xy)\,dx$ das gleiche gilt und weil ferner W_0 in T' geschlossen ist. In der Gleichung II des § 5 ist dann J' über W_1 genommen und sei mit J_1 bezeichnet. Nennt man nun (A) und (B) diejenigen Grössen, die zu $\psi(xy)$ in derselben Beziehung stehen wie (a) und (b) zu $\varphi(xy)$, so liefert die Gleichung II

$$J_1 = (a)(B) - (b)(A).$$

Auf J_1 wendet man dasselbe Verfahren an und erhält ein über W_2 genommenes Integral J_2

$$J_2 = J_1 + (c)_1 (D)_1 - (d)_1 (C)_1$$

wo wieder $(C)_1$ und $(D)_1$ sich in derselben Weise zu ψ verhalten, wie $(c)_1$ und $(d)_1$ zu φ. Indem man so fort geht entsteht schliesslich die Gleichung

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$J_p = (a)(B) - (b)(A) + (c)_1(D)_1 - (d)_1(C)_1 + (e)_2(F)_2 \ldots\ldots$$
$$+ (m)_{p-1}(N)_{p-1} - (n)_{p-1}(M)_{p-1}.$$

Die linke Seite ist aber $= o$. Denn das Integral $\int \varphi(xy)dx$ hat in zwei gegenüberliegenden Punkten eines der in R_p noch auftretenden Uebergänge denselben Werth (§ 7) und da das ganze Integral

$$\int \psi(x\,y)\,d\,x \int \varphi(x\,y)\,d\,x$$

an den beiden Ufern entlang in entgegengesetztem Sinne erstreckt ist, so entsteht Null. Weil ferner jede Curve U_i ganz umlaufen wird und der Integrand in seiner Entwickelung ein Glied mit $\frac{1}{x-\xi}$ nicht enthält, so hat auch der auf U_i bezügliche Integraltheil den Werth Null. Somit hat man die Gleichung

$$o = (a)(B) - (b)(A) + (c)_1(D)_1 - (d)_1(C)_1 + \ldots$$
$$+ (m)_{p-1}(N)_{p-1} - (n)_{p-1}(M)_{p-1},$$

welche die zwischen den fundamentalen Perioden der beiden Integrale

$$\int \varphi(x\,y)\,d\,x \text{ und } \int \psi(x\,y)\,d\,x$$

bestehende bilineare Gleichung in der von Riemann gegebenen Form darstellt.

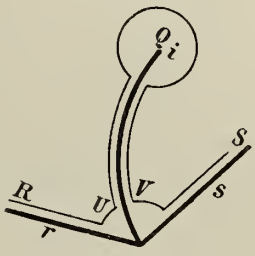
§ 9.

Die Betrachtungen der früheren §§ setzen ein Integral erster oder zweiter Gattung voraus. Wenn dagegen ein Integral vorliegt, das für gewisse Entwickelungen logarithmisch unendlich wird, so ist die Fläche T' nicht mehr zu einer eindeutigen Darstellung geeignet, wenn nicht etwa die fraglichen Reihen zu einem Verzweigungs- oder Knotenpunkte von L gehören. Sind die Punkte der Fläche T, für welche das Integral logarithmisch unendlich wird und die weder Verzweigungspunkte noch Knotenpunkte sind, die $Q_1\ Q_2 \ldots Q_l$, so wird man am einfachsten jeden dieser Punkte durch eine Curve, die in dem Blatt verläuft in dem er liegt, mit einem Eckpunkt des Liniensystems L in Verbindung setzen und zwar so, dass diese Curven keine Seiten von L treffen. Die l Curven seien a_1, $a_2 \ldots a_l$. Setzt man nun fest, dass sie nicht überschritten werden dürfen, so entsteht aus T' die neue Fläche T'', in der das Integral eine ein-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

werthige Function der oberen Grenze ist. Das neue Liniensystem, das entsteht, wenn man zu den Linien von L noch die l Curven $a_1 \ldots a_l$ hinzunimmt, kann in einem einzigen zusammenhängenden Zug umlaufen werden. Denn ist (Fig. 14), die Linie a_i zwischen die Uebergänge r und s eingeschaltet, so würde der Weg W_0 von R über U und V nach S führen; geht man statt dessen über R nach U, umkreist dann a_i von U nach V und geht dann nach S weiter, so sind die beiden Ufer des Ueberganges a_i, die selbst a_i genannt seien, in W_0 aufgenommen und der Kreis um den Punkt Q_i ist dann zu den Curven U_i hinzugekommen. Wenn man mit allen Curven a_i so verfährt, so entstehe aus W_0 der neue geschlossene Weg $\mathbf{W}_0$. Da, wie die angestellte Ueberlegung zeigt, die beiden Ufer von a_i hintereinander durchlaufen werden, so wird, wenn man sich die zu W_0 gehörige Buchstabenreihe $\mathbf{R}_0$ bildet, diese genau dieselben Trennungen von Buchstabenpaaren darbieten, wie R_0. Man kann also aus $\mathbf{R}_0$ die Reihen $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2 \ldots \mathbf{R}_p$ ableiten und entsprechend aus $\mathbf{W}_0$ die Wege $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2 \ldots \mathbf{W}_p$, ohne dass dabei die nebeneinanderstehenden Buchstaben $a_1\ a_1$, $a_2\ a_2, \ldots$ $a_l\ a_l$ getrennt werden. Es wird also dann

Fig. 14.



$$\mathbf{R}_p = \mathfrak{A}_1\, a_\alpha\, a_\alpha\, \mathfrak{A}_2\, a_\beta\, a_\beta\, \mathfrak{A}_3\, a_\gamma\, a_\gamma \ldots a_\lambda\, a_\lambda\, \mathfrak{A}_{l+1},$$

wobei die Zahlen $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \lambda$ eine Permutation von $1, 2 \ldots l$ sind und die Reihe

$$\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{l+1}$$

mit der R_p identisch ist.

Wie oben in § 6 drücken sich hier die Perioden des Integrals dritter Gattung durch 2 p Grössen aus, die den dort mit (a), (b) . . . $(m)_{p-1}$ $(n)_{p-1}$ bezeichneten entsprechen und durch die $\nu - 1 + l$ Integrale, die längs $\mathbf{W}_p$ genommen sind, von einem Punkte eines in $\mathbf{R}_p$ noch auftretenden Ueberganges zum gegenüberliegenden am andern Ufer. Diejenigen Theile dieser Integrale, welche sich längs der Uebergänge erstrecken, zerstören sich gegenseitig und es bleiben nur die Theile, welche sich auf die im Wege liegenden Curven U_i beziehen, zu welchen aber jetzt auch die Kreise um die Punkte Q gehören. Wenn zu einer Curve U_i eine

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Entwickelung von $\varphi(x\,y)$ gehört, in welcher $\frac{1}{x-\xi}$ fehlt, so ist das fragliche Integral $= o$, sonst hat es einen von Null verschiedenen Werth. Ist also die Anzahl aller Curven U_i, deren zugehörige Entwickelungen in $\varphi(x\,y)$ ein Glied mit $\frac{1}{x-\xi}$ erzeugen, gleich m und sind $A_1, A_2, \ldots A_m$ die betreffenden Integralwerthe, so drücken sich die sämmtlichen Perioden des Integrales $\int \varphi(x\,y)\,d\,x$ durch die 2 p Grössen (a), (b), ... $(m)_{p-1}$, $(n)_{p-1}$ und die $A_1, A_2 \ldots A_m$ aus. Die letzteren sind aber nicht unabhängig. Denn weil in T'' $\int \varphi(x\,y)\,d\,x$ eine einwerthige Function der oberen Grenze und $\mathbf{W}_0$ in T'' geschlossen ist, wird das um $\mathbf{W}_0$ genommene Integral gleich Null. Bei dieser Integration zerstören sich wieder die über die Ufer der Uebergänge genommenen Theile; diejenigen, die sich auf eine und dieselbe Curve U_i beziehen, schliessen sich zu einem um diese Curve genommenen Integral zusammen und ergeben o oder eine der Zahlen $A_1, A_2, \ldots A_m$. Also ist

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = o$$

womit ein bekanntes Resultat wieder gefunden ist.[1]) Es lassen sich also die Perioden des Integrals dritter Gattung mit m logarithmischen Unstetigkeiten durch höchstens $2p + m - 1$ Grössen darstellen.

Ein weiteres Eingehen auf die, wie in § 8 abzuleitenden Beziehungen, wobei Integrale zweiter und dritter Gattung in Frage kommen, würde zu sehr von meinem nächsten Zweck abführen; ich kann es daher umsomehr unterlassen, als es keiner Schwierigkeit unterliegt, z. B. den Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter mit den gegebenen Hilfsmitteln abzuleiten.

---

1) Siehe z. B. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie u. s. w. 2. Auflage. Seite 204 Gl. (19a).

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

§ 10.

Zum Schlusse noch einige Beispiele.

I. Zweiblätterige Fläche mit 4 Verzweigungspunkten, zu welchen wir noch zwei Knotenpunkte hinzunehmen, (Fig. 15 in der die Verzweigungs-

Fig. 15. (Erstes Blatt)

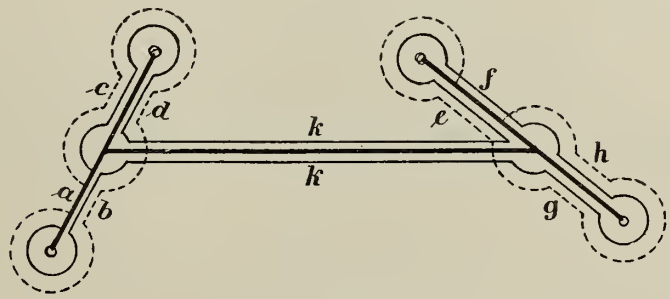
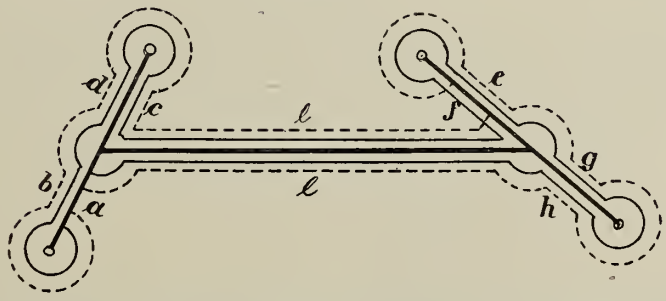


Fig. 15. (Zweites Blatt)



punkte mit kleinen Kreisen bezeichnet sind). Die nähere Untersuchung ergibt die in der Figur angegebene Art des Zusammenhangs. Nimmt man a zum fundamentalen Uebergang, so ist die Reihe

$$R_0 = c\,d\,\underline{k}\,e\,\underline{f}\,h\,g\,\underline{k}\,b\,b\,d\,c\,l\,\underline{f}\,e\,g\,h\,l$$ [1])

der entsprechende Weg W_0 ist in Fig. 15 eingezeichnet (die ausgezogene Linie), und sein Diagramm ist oben in Fig. 9 Seite 345 gegeben. Eliminirt man k und f, so entsteht

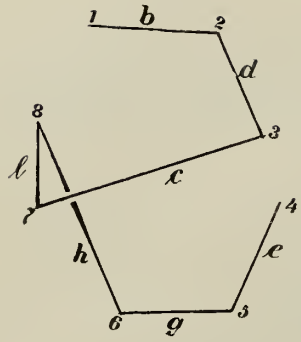
$$R_1 = c\,d\,b\,b\,d\,c\,l\,h\,g\,e\,e\,g\,h\,l$$

in der Trennungen gleicher Buchstabenpaare durch andere Paare nicht mehr vorkommen. Der Weg W_1 ist der in der Figur punktirt gezeichnete; das Diagramm zeigt Fig. 16.

1) Die zu eliminirenden Buchstaben sind hier und bei den folgenden Beispielen unterstrichen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Fig. 16.



Die fundamentalen Perioden sind die Integrale über die Uferfolgen

e f h g und h g k b b d c l.

II. Als zweites Beispiel nehmen wir das von Clebsch und Gordan gegebene, indem wir annehmen, die Verzweigungsschnitte seien alle aus einem Knotenpunkte gezogen. Dann ist der Zusammenhang der Blätter direct durch die Schleifen gegeben und wir erhalten folgende Uebersicht der Uferbezeichnungen:

Schnitte

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blätter	1	a b		e f			l m		p q				
	2	b a	c d		g h			n o	q p	r s	t u		
	3		d c			i k	m l			s r		v w	x y
	4			f e	h g	k i		o n			u t	w v	y x

Unter der Nummer eines Schnittes stehen die Bezeichnung der Ufer und jeweils links und rechts der Namen des Ufers, welches vom Knotenpunkte gesehen links bez. rechts ist. Viele Ufer sind nicht bezeichnet. Würde man für sie Zeichen einführen, so würden dieselben durchweg nebeneinander auftreten und auf alle Werthe ohne Einfluss sein. Indem wir die Uebergänge a c und e zu fundamentalen wählen wird

$R_0 =$ f l m p q i k m l s r v w x y d d g h n o q p r s t u b b h g k i o n u t w v y x f.

Eliminirt man l und q, so wird

$R_1 =$ f s r v w x y d d g h n o i k m m p p r s t u b b h g k i o n u t w v y x f

und das erste Paar von fundamentalen Periodenwegen ist gegeben durch die Buchstabenreihen

m p q i k m

i k m l s r v w x y d d g h n o.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Eliminirt man weiter s und g, so entsteht

$R_2 = f\,t\,u\,b\,b\,h\,h\,n\,o\,i\,k\,m\,m\,p\,p\,r\,r\,v\,\underline{w}\,x\,\underline{y}\,d\,d\,k\,i\,o\,n\,u\,t\,\underline{w}\,v\,\underline{y}\,x\,f$

und das zweite Paar von Periodenwegen ist gegeben durch

r v w x y d d g h n o i k m m p p r

und

h n o i k m m p p r s t u b b h.

Eliminirt man endlich etwa w und y, so kommt

$R_3 = f\,t\,u\,b\,b\,h\,h\,n\,o\,i\,k\,m\,m\,p\,p\,r\,r\,v\,v\,d\,d\,k\,i\,o\,n\,u\,t\,x\,x\,f,$

in welcher Reihe keine Trennungen mehr übrig sind. Das dritte Paar von Fundamentalperioden ist durch

x y d d k i o n u t

d d k i o n u t w v

gegeben. Es hätte keine Schwierigkeiten, die entsprechenden Wege in die Riemann'sche Fläche einzuzeichnen.

III. Betrachten wir endlich als drittes Beispiel eine siebenblätterige Fläche mit drei Verzweigungspunkten A B C. Die drei Cyklen, die angeben, wie sich bei einem ganzen Umlauf um einen der Punkte A, B oder C die Wurzeln vertauschen, seien

für A 1234567

B 1357246

C . . . . 1526374.

Legen wir die Linien A B und B C als Verzweigungsschnitte, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

Blätter		1	2	3	4	5	6	7
A B	l	a	b	c	d	e	f	g
	r	g	a	b	c	d	e	f
B C	l	p	k	m	o	h	l	n
	r	h	l	n	p	k	m	o

*

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wo in der mit l bezeichneten Zeile die Namen der linken, in der mit r bezeichneten die der rechten Ufer stehen; links und rechts angenommen wie sie erscheinen, wenn man von A über B nach C geht.

Nehmen wir a b c d e f zu fundamentalen Uebergängen, so ist

$$R_0 = g\,g\,n\,o\,l\,m\,h\,k\,o\,p\,m\,n\,k\,l\,p\,h.$$

Durch Elimination von n und h kommt

$$R_1 = g\,g\,k\,l\,p\,k\,o\,p\,m\,o\,l\,m$$

mit dem ersten Periodenpaar

o l m h k o p m

k o p m n k l p.

Wird aus R_1 k und p eliminirt, so entsteht

$$R_2 = g\,g\,o\,l\,m\,o\,l\,m$$

und für das zweite Periodenpaar ergibt sich

l p und k o.

Wenn man endlich aus R_2 o und l fortschafft, so folgt

$$R_3 = g\,g\,m\,m$$

und das dritte Periodenpaar hat die Wege

l m und m o.

Freiburg in Baden. Im November 1884.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1886

Band/Volume: 15

Autor(en)/Author(s): Lüroth Jacob

Artikel/Article: Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. 329-366