

Ergebnisse

aus

Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

Dritte Mitteilung

enthaltend einen Rückblick auf frühere Mitteilungen, Darstellung der Beobachtungen des Jahres 1885 und Schlussbetrachtungen über die Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung.

Mit einer Steindrucktafel.

Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

Carl Max von Bauernfeind.

A. Rückblick auf frühere Mittheilungen.

Ich befinde mich leider in der unangenehmen Lage, diese dritte und letzte Mittheilung über die von mir seit zehn Jahren sowohl im Fichtelgebirge als im Vorlande der Bayerischen Alpen angestellten Beobachtungen über die Natur und Grösse der terrestrischen Refraktion mit dem Geständnisse einleiten zu müssen, dass sich in der ersten Mittheilung aus dem Jahre 1880, welche die fichtelgebirgischen Beobachtungen auf und zwischen Döbra und Kapellenberg umfasst, und ebenso in der zweiten von 1883, welche die Ergebnisse der zwei Jahre vorher auf dem nordwestlichen Abhange der Bayerischen Alpen zwischen Schliersee und Chiemsee angestellten Refraktionsbeobachtungen darstellt, ein Fehler in der Berechnung der theoretischen Refraktionswerte forterhalten hat, der schon im zweiten Teile meiner in den Jahren 1864 und 1866 in den Astronomischen Nachrichten Nr 1478/80 und Nr 1589 erschienenen Abhandlung über die atmosphärische Strahlenbrechung gemacht wurde. Ich habe nämlich dort aus einem mir unerklärlichen Versehen die Atmosphärenhöhe h der Luftdichtigkeit ϱ umgekehrt proportional, nämlich $h = h_0 \varrho^{-1}$ gesetzt, statt für dieselbe nach der Grundgleichung (3) des ersten Theils meiner Abhandlung vom Jahre 1864 (Seite 210) $h = h_0 \varrho^{\frac{1}{2}}$ zu schreiben. Daraus folgt sofort, dass der richtige Wert von m nicht

$m_0 \varrho^{-1}$, sondern $m_0 \varrho^{\frac{1}{3}}$ und der richtige Wert von v nicht $v_0 \varrho^2$, sondern $v_0 \varrho^{\frac{4}{3}}$ ist.

Dieser Fehler fiel mir erst im Sommer des Jahres 1883 auf, als ich mein für die siebente Allgemeine Konferenz der Europäischen Gradmessung bestimmtes Referat über die terrestrische Refraktion bearbeitete, welches am 24. Oktober in Rom zum Vortrage kam. Nach Ausweis der gedruckten Verhandlungen über jene Konferenz (Generalbericht für 1883, Annex VII, Seite 5) unterliess ich es nicht, am Schlusse meiner Bericht-erstattung des bezeichneten Fehlers zu erwähnen und die Bemerkung beizufügen, dass derselbe in keiner Weise die von mir festgestellten Beobachtungsergebnisse, sondern nur das Verhältniss der nach meiner Theorie berechneten Refraktionswerte zu den beobachteten berühre. Vorläufig angestellte Näherungsberechnungen liessen mich auch erkennen, dass die Uebereinstimmung der verbesserten theoretischen Refraktionswerte mit den gemessenen im Allgemeinen sogar grösser werde als bisher, und auch hievon gab ich der Konferenz Nachricht.

Die Richtigstellung des Wertes von m und damit auch die des Wertes von v , welcher von m abhängt, bedingt nun folgende Aenderungen in den auf Seite 10 der ersten und Seite 23 der zweiten Mitteilung enthaltenen Refraktionsfaktoren m und v . Es wird nämlich, wenn man unter v_0 das Verhältniss $5 x_0 : m_0$ versteht,

$$m = m_0 \left(\frac{1 + \varepsilon x_0}{1 + \varepsilon x} \cdot \frac{\beta}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{3}} = m_0 \left(\frac{\Theta_0 \beta}{\Theta \beta_0} \right)^{\frac{1}{3}} = m_0 \varrho^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$v = v_0 \left(\frac{1 + \varepsilon x_0}{1 + \varepsilon x} \cdot \frac{\beta}{\beta_0} \right)^{\frac{4}{3}} = v_0 \left(\frac{\Theta_0 \beta}{\Theta \beta_0} \right)^{\frac{4}{3}} = v_0 \varrho^{\frac{4}{3}} \quad (2)$$

und es sind hienach auch die Sätze abzuändern, welche diese Formeln in Worte fassen. Die besonderen Werte für ϱ , m , v , welche nach Seite 76 der I. Mitteilung gleichmässig für Döbra und Kapellenberg gelten, werden nunmehr folgende:

$$\begin{aligned} \varrho &= [9,57437] \frac{\beta}{\Theta}; \quad \log m = [7,78637] + \frac{1}{3} \log \frac{\beta}{\Theta}; \\ \log v &= [8,93258] + \frac{4}{3} \log \frac{\beta}{\Theta} \end{aligned} \quad (3)$$

Für das auf Seite 80 der Mitteilung I behandelte numerische Bei-

spiel, welches die am 21. August 1878, Nachmittag 2^h 20^m angestellte Beobachtung betrifft, wird

$$\begin{aligned}\log m &= 7,86326; & \log v &= 9,24014; & \log y &= 6,81243_n \\ p &= 409,68; & p_0 &= -0,52582; & p_1 &= 57,43\end{aligned}$$

und hieraus berechnet sich nunmehr nach der Formel (17) auf Seite 12 der Mitteilung I die Refraktion zwischen Döbra und Kapellenberg für den angegebenen Zeitpunkt auf

$$r = (1 + 0,00130 + 0,00006 + 0,00002) v \varphi = 1,00138 v \varphi = 270'',18$$

während sie früher mit den unrichtigen Werten von m und v gleich $241'',03$ gefunden wurde. Der neue Wert ist somit um 12,1 Prozent grösser als der alte, und dieses Verhältnis stellt sich auch nahezu für die Gesamtheit aller für Döbra mit den neuen und alten Werten von m und v berechneten Refraktionswerte heraus, während die neuen gleichnamigen Werte für Kapellenberg im Durchschnitte um 10,7 Prozent grösser werden.

Für die drei Stationen Höhensteig (H), Irschenberg (I), Kampenwand (K) nehmen die auf den Seiten 23 und 24 der II. Mitteilung enthaltenen Faktoren m und v folgende Werte an, während der Wert von φ der in (3) angegebene bleibt. Es wird nämlich

$$\text{für H: } \log m = [7,79155] + \frac{1}{5} \log \frac{\beta}{\theta}; \quad \log v = [8,92730] + \frac{4}{5} \log \frac{\beta}{\theta} \quad (4)$$

$$\text{für I: } \log m = [7,78912] + \frac{1}{5} \log \frac{\beta}{\theta}; \quad \log v = [8,92973] + \frac{4}{5} \log \frac{\beta}{\theta} \quad (5)$$

$$\text{für K: } \log m = [7,78169] + \frac{1}{5} \log \frac{\beta}{\theta}; \quad \log v = [8,93716] + \frac{4}{5} \log \frac{\beta}{\theta} \quad (6)$$

Berechnet man das auf Seite 25 angeführte Beispiel (Beobachtung auf der Kampenwand am 22. August 1881 Mittags 12 Uhr) mit den verbesserten Werten von m und v , wie sie die vorstehende Gleichung (6) liefert, wenn $\beta = 633,9$ mm und $\theta = 288,02$ C gesetzt wird, so findet man, da der Mittelpunktswinkel von H K = $\varphi = 660'',79$ und $\log \varphi = 2,82006$ ist,

$$r = (1 + 0,04780 + 0,00153) v \varphi = 1,04933 v \varphi = 112'',72.$$

Dieser Wert ist um 24",05 oder um 27,1 Prozent grösser als der frühere, welcher 88",67 betrug. Die abgekürzten Formeln für r , welche auf Seite 26 bis 28 entwickelt und nachfolgend mit den verbesserten Werten von m und v zusammengestellt sind, geben im Durchschnitte eine Vergrösserung der neu berechneten Refraktionen gegenüber den alten von 26,02 Prozent. Diese abgekürzten und verbesserten Formeln, welche an die Stelle der auf Seite 29 Mitteilung II zu treten haben, lauten aber wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{für KH: } r &= 1,04926 \cdot v \varphi = [0,02088] v \varphi; \log \frac{\beta}{\theta} = 0,34538 \\
 \text{„ HK: } r &= 0,95571 \cdot v \varphi = [9,98033] v \varphi &= 0,39066 \\
 \text{„ KI: } r &= 1,03737 \cdot v \varphi = [0,01593] v \varphi &= 0,34489 \\
 \text{„ IK: } r &= 0,96722 \cdot v \varphi = [9,98553] v \varphi &= 0,37624 \\
 \text{„ IH: } r &= 1,01185 \cdot v \varphi = [0,00512] v \varphi &= 0,37686 \\
 \text{„ HI: } r &= 0,98897 \cdot v \varphi = [9,99518] v \varphi &= 0,39060 \quad (7)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser neuen Gleichungen erhalten die auf Seite 35 und 36 der Zweiten Mitteilung zusammengestellten „berechneten Refraktionen“ folgende Werte: (8)

1) Für die Seite Höhensteig-Kampenwand (HK, KH), und zwar
in H für HK = 55",6 für KH = 57",5 im Mittel = 56",6
in K für HK = 54",0 für KH = 55",8 im Mittel = 54",9
demnach das Hauptmittel: berechnet = 55",8 und beobachtet = 55",9

2) Für die Seite Höhensteig-Irschenberg (HI, IH), und zwar
in H für IH = 48",2 für HI = 48",0 im Mittel = 48",1
in I für IH = 47",9 für HI = 47",7 im Mittel = 47",8
demnach das Hauptmittel: berechnet = 48",0 und beobachtet = 56",1

3) Für die Seite Irschenberg-Kampenwand (IK, KI), und zwar
in I für KI = 92",0 für IK = 91",5 im Mittel = 91",8
in K für KI = 89",9 für IK = 89",6 im Mittel = 89",8
demnach das Hauptmittel: berechnet = 90",8 und beobachtet = 83",6.

Selbstverständlich haben die Aenderungen von m und v auch einen Einfluss auf die aus der allgemeinen Formel (in Bd. 67, Seite 79 der

Astronomischen Nachrichten und am Schlusse von Seite 31 der II. Mittheilung) berechneten Höhen x der Beobachtungsstationen, da in allen Gliedern jener Formel, vom zweiten an gerechnet, die Konstanten m und v vorkommen. In dem vorliegenden Falle jedoch, wo die scheinbare Zenithdistanz z nur wenig, nämlich um ε von 90^0 verschieden ist (so dass $z = 90^0 + \varepsilon$), konnten wir den Ausdruck für x in drei Teile zerlegen, von denen nur der erste Teil (C_1), und zwar in seinem dritten Gliede, m und v gleichzeitig, der dritte Teil blos v , der zweite aber weder m noch v enthält. Wenn für v der neue Wert gesetzt wird, so sind in den hinreichend genauen Näherungsformeln am Anfange der Seite 35 von Mittheilung II nur die ersten Glieder wie folgt zu ändern: C_1 wird

(9)

$$\begin{array}{lll} \text{für KH} = 32,77 & \text{für HK} = 33,10 & \text{für KI} = 90,42 \\ \text{für IK} = 91,10 & \text{für IH} = 23,24 & \text{für HI} = 23,30 \end{array}$$

Nach allen mit den berichtigten Werten von m und v vorgenommenen Neuberechnungen von Δz , $\Delta z'$, x lässt sich die Gesamtwirkung aller Aenderungen auf die Ergebnisse unserer Zweiten Mittheilung wie folgt zusammenfassen:

Zunächst ist aus der in den obigen Nummern 1 bis 3 enthaltenen Zusammenstellung ersichtlich, dass die für die Seiten HK, HI, IK neu berechneten Refraktionen, welche vorher für eine und die nämliche Seite ziemlich stark von einander abwichen, je nachdem sie aus dem oberen oder dem unteren Beobachtungsorte bestimmt wurden, nunmehr fast durchgehends sehr gut übereinstimmen, womit gegen früher ein Uebelstand gehoben ist. Ausserdem rücken aber auch fast durchgehends die Mittel der berechneten Refraktionen denen der beobachteten näher, was gleichfalls sehr zu Gunsten meiner Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre und somit für die wissenschaftliche Grundlage meiner in den Jahren 1864 und 1866 gedruckten Abhandlungen über astronomische und terrestrische Refraktion spricht. Ferner werden in den Kurven der Steindruck-Tafel I, welche zur Mittheilung II gehört, die Schwankungen der berechneten Refraktionen absolut und gegen das Hauptmittel grösser, was zur Folge hat, dass sich diese Kurven nunmehr besser an jene anschmiegen, welche die beobachteten Refraktionen dar-

stellen. Endlich bewirkt der Umstand, dass alle Höhenunterschiede positiven Zuwachs erhalten, eine bei Weitem günstigere Gruppierung der Höhenkurven gegen deren Abscissenaxe oder die gerade Linie, welche der durch Nivellement gefundenen Höhe entspricht. Demnach erstreckt sich, wie schon am Schlusse meines oben (Seite 520) erwähnten Referats gesagt ist, die Wirkung des kleinen in m und damit auch in v steckenden Fehlers nicht auf die Ableitung allgemeiner Sätze, und in dem vorliegenden Falle nähern sich sogar die verbesserten theoretischen Werte der Refraktionen den beobachteten noch mehr, als es ohnehin schon der Fall war. Dass dem so ist, ergibt sich insbesondere auch aus den Refraktionsbeobachtungen des Jahres 1885, welche hier mit den neuen Werten von m und v berechnet und in zwei Zahlentafeln und einer Zeichnung dargestellt sind.

B. Die Refraktionsbeobachtungen und Höhenmessungen des Jahres 1885.

Nach der Theorie sollte man erwarten, dass die an zwei Orten von sehr ungleicher Höhe gleichzeitig und gegenseitig beobachteten Refraktionen nur sehr wenig von einander verschieden und die auf dem oberen Punkte gefundenen etwas kleiner als die unteren sind. Das war nun bei den Beobachtungen des Jahres 1881 weder zwischen Höhensteig und Kampenwand noch zwischen Irschenberg und Kampenwand der Fall, denn die Abweichungen aller beobachteten Refraktionen waren (nach Seite 35 und 36 M. II) durchschnittlich:

für die Seite HK in $H = 76'',7$ und in $K = 35'',0$, Unterschied $= 41'',7$
 für die Seite IK in $I = 95'',8$ und in $K = 71'',4$, Unterschied $= 24'',4$

Es lag nahe, diese Unterschiede hauptsächlich in den Lothabweichungen zu suchen, welche auf den Beobachtungspunkten stattfinden, und deshalb wurden diese Abweichungen im Jahre 1884 durch den Assistenten der K. B. Kommission für die Europäische Gradmessung, Herrn Ingenieur Karl Oertel, unter der Oberleitung des Herrn Professors und Direktors Dr. Seeliger, mit Instrumenten der Königlichen Technischen Hochschule dahier bestimmt. Ueber die Ergebnisse dieser Bestimmungen

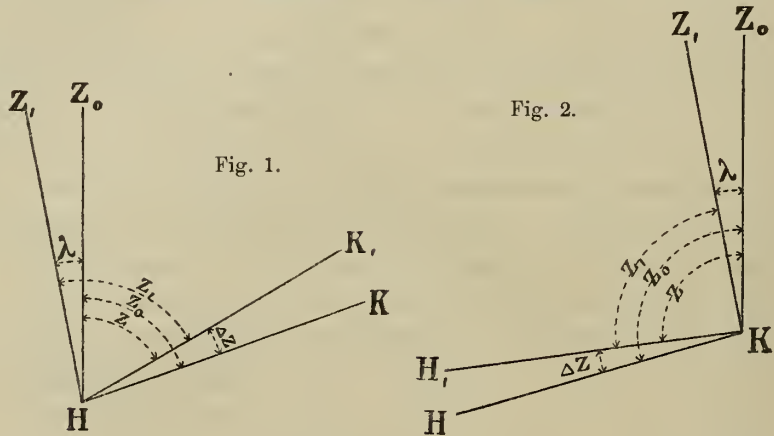
berichtete Herr Oertel in seiner auf Kosten der K. B. Gradmessungskommission im Jahre 1885 gedruckten Schrift „Astronomische Bestimmung der Polhöhen auf den Punkten Irschenberg, Höhensteig und Kampenwand.“ Hienach betragen die Lotabweichungen im Meridian, also die Unterschiede der geodätischen und astronomischen Polhöhen für Höhensteig $+ 5'',44$; für Irschenberg $+ 8'',14$; für Kampenwand $+ 12'',92$, alle in dem Sinne einer Verschiebung des Zenithpunkts dieser Orte gegen Norden. An diesen Zahlen fielen nicht ihre absoluten Grössen, sondern ihre Verschiedenheit unter sich auf; denn man hatte erwartet, dass ihre gegenseitigen Differenzen nur sehr gering sein würden, weil die unteren Stationen Höhensteig und Irschenberg nicht weit von den oberen und den an diese sich anschliessenden gewaltigen Gebirgsmassen entfernt sind. Mit den Lotabweichungen im Meridian war aber meinen Zwecken, welche in der Erforschung der Gesetze der terrestrischen Refraktion und der hievon abhängigen Genauigkeit trigonometrischer Höhenmessungen lagen, noch nicht ausreichend gedient; ich musste wissen, wie gross die Lotabweichungen an den Beobachtungsorten in den sie verbindenden drei Vertikalebene HK, FK, HI sind, und diese Kenntniss konnte nur auf Grund von astronomischen Azimuthbestimmungen gewonnen werden, welche die K. B. Gradmessungskommission im Jahre 1885 ebenso wie 1884 die Messungen der Lotablenkungen im Meridian durch den für diesen Zweck unter die Leitung des Herrn Direktors und Professors Seeliger gestellten Assistenten Herrn Karl Oertel vornehmen liess. Ueber diese Bestimmungen wird später Herr Professor Seeliger selbst ausführlich berichten; vorläufig theile ich mit dessen Erlaubnis folgende zwei hieher gehörige Ergebnisse mit:

1. Die Verbesserungen λ , welche an den in den Jahren 1881 und 1885 gemessenen Zenithdistanzen wegen der Lotabweichung anzubringen sind, betragen: (10)

für H in d. Richtung HI:	$\lambda = - 2'',59$	in d. Richtung HK:	$\lambda = - 2'',23$
„ I „ „ IH:	$\lambda = - 2'',30$	„ „ „ IK:	$\lambda = - 6'',21$
„ K „ „ KI:	$\lambda = + 2'',61$	„ „ „ KH:	$\lambda = + 7'',39$

Diese Verbesserungen sind mit den vorstehenden Zeichen den in H, I, K gemessenen Zenithdistanzen z_1 und folglich mit entgegengesetztem

Zeichen den daraus bestimmten (beobachteten) Refraktionen (Δz) beizufügen, um sie von dem Einflusse der Lotablenkungen zu befreien. Zur



Erläuterung mögen die beigedruckten zwei Figuren dienen, in denen sich Nr 1 auf Höhensteig, Nr 2 auf Kampenwand bezieht. In beiden Figuren stellt Z_0 den wahren Zenithpunkt und Z_1 den infolge der Lothabweichung nach Norden verschobenen (gestörten) Zenithpunkt vor. Der Anblick dieser Figuren zeigt sofort, dass die verbesserten scheinbaren Zenithdistanzen z folgende sind:

$$\text{für H} \quad z = z_1 - \lambda \quad \text{für K} \quad z = z_1 + \lambda$$

und dass hieraus für die von der Lotabweichung befreiten beobachteten Refraktionen Δz nachstehende Werte sich ergeben: (11)

$$\begin{aligned} \text{für H} \quad \Delta z &= z_0 - z_1 + \lambda = \Delta z_1 + \lambda = \Delta z_1 + 2'',23 \\ \text{„ K} \quad \Delta z &= z_0 - z - \lambda = \Delta z_1 - \lambda = \Delta z_1 - 7'',39 \end{aligned}$$

2. Die Verbesserungen, welche wegen der Fernrohrbiegung b an den beobachteten Zenithdistanzen und Refraktionen anzubringen sind, wurden im Jahre 1884 für das konisch verjüngte gebrochene und sehr stabil gebaute Fernrohr des grossen Universalinstruments der hiesigen Technischen Hochschule bestimmt und die Biegung b im Horizont wie folgt gefunden:

$$\text{in H} = + 5'',15; \quad \text{in I} = + 6'',40; \quad \text{in K} = + 4'',21$$

Um die Biegung b wird jede Zenithdistanz zu klein und jede Refrak-

tion zu gross gemessen; man hat deshalb letztere um den Biegungsbetrag zu verkleinern und dadurch werden die von Lotabweichung und Fernrohrbiegung befreiten Refraktionen

$$\begin{aligned} \text{in H} &= \Delta z = \Delta z_1 + 2'',23 - 5'',15 = \Delta z_1 - 2'',92 \\ \text{in K} &= \Delta z = \Delta z_1 - 7'',39 - 4'',21 = \Delta z_1 - 11'',60 \end{aligned} \quad (12)$$

Alle in 1885 beobachteten Refraktionen Δz_1 sind somit um eine konstante Grösse k zu verkleinern, welche für Höhensteig $2'',92$ und für Kampenwand $11'',60$ beträgt.

Bei Gelegenheit der vorhin erwähnten, auf den Punkten Höhensteig und Kampenwand vorgenommenen astronomischen Azimuthbestimmungen hat Herr Oertel nach meiner Anordnung und mit Benützung des zu jenen Bestimmungen dienenden grossen Universalinstruments der Technischen Hochschule an drei hiefür besonders geeigneten Tagen auch terrestrische Zenithdistanzen beobachtet, und diese Beobachtungen sind es, welche ich in gegenwärtiger dritten Mitteilung über terrestrische Refraktion veröffentliche und bespreche in der fünffachen Absicht: erstens zu zeigen, wie weit ihr aus richtigen Werten von m und v erhaltener Durchschnitt von dem mittleren Werte der 1881 gemessenen, mit unrichtigen Werten der Konstanten m und v reduzierten Refraktionen abweicht; zweitens den Einfluss der Lotabweichung und Fernrohrbiegung auf die im Jahre 1885 bestimmten Refraktionen nachzuweisen; drittens den Grad der Uebereinstimmung meiner vor 21 Jahren in den Nummern 1587 bis 1590 der Astronomischen Nachrichten (1866) aufgestellten Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung mit den auf drei Punkten des Bayerischen Hochgebirgs erhaltenen Beobachtungsergebnissen festzustellen; viertens einen Beitrag zu liefern zur Beantwortung der Frage, ob es für genaue technische Zwecke empfehlenswert und ausreichend sei, Höhenunterschiede trigonometrisch statt durch geometrisches Nivellement zu bestimmen; und endlich nach kurzer Uebersicht der Hauptergebnisse meiner Arbeiten diejenigen Punkte der Forschung zu bezeichnen, welche die Lehre von der atmosphärischen Strahlenbrechung und damit auch unsere Kenntniss von der wahren Erdgestalt weiter zu fördern imstande sind.

Demgemäss waren 1885 die Beobachtungen so angeordnet, wie sie in der Regel bei trigonometrischen Höhenmessungen befolgt werden: es wurde nämlich erstens immer nur von einem Punkte der Linie Höhen-

steig-Kampenwand (HK) aus die Zenithdistanz eines im anderen Punkte vorhandenen Signals (also einseitig) beobachtet und zweitens wurden die Beobachtungen im Gegensatze zu denen des Jahres 1881, welche bei Tag und Nacht stattfanden, ausschliesslich in den Tagesstunden gemacht. Man wird daher die Ergebnisse dieser Beobachtungen als solche betrachten müssen, welche in der Praxis des trigonometrischen Höhenmessens zu erreichen sind, wenn die Beobachtungen mit der Horizontalwinkelmessung einer Landestriangulation verbunden und folglich von einem sehr geübten Geodäten mit einem vorzüglichen Theodolithen an den passendsten Tagen ausgeführt werden.

Das zu unseren Refraktionsbeobachtungen im Jahre 1885 verwendete Universalinstrument hat der Beobachter Herr K. Oertel auf Seite 6 seiner oben erwähnten Abhandlung über Polhöhenbestimmungen beschrieben; zur Feststellung des Luftzustandes in Bezug auf Druck, Temperatur und Feuchtigkeit dienten das schon aus der zweiten Mitteilung bekannte Greiner'sche Quecksilberbarometer und ein August'sches Psychrometer, dessen Thermometerskalen in Fünftelgrade geteilt waren. Auf der Kampenwand diente fast immer als Signal ein daselbst aufgestelltes Heliotrop, und nur einige Male wurde in Abend- und Morgenstunden bei besonders ruhiger Luft auf eine das Heliotrop vertretende Signaltafel eingestellt. In Höhensteig kam wegen des für direkte Signale ungeeigneten Hintergrunds nur Heliotropenlicht zur Verwendung.

Die Beobachtungen geschahen in Zwischenräumen von je einer halben Stunde. Es wurden jedesmal zunächst Barometer und Thermometer abgelesen, hierauf folgte Einstellung des Objekts in der einen Kreislage des Instruments, Ablesen beider Libellen, sodann Ablesung der Mikroskope des Höhenkreises, wobei zur Ermittlung der Runkorrektion sowohl der dem Index im Mikroskoprechen vorausgehende als auch der ihm nachfolgende Teilstrich des Kreises, und zwar jeder zweimal eingestellt wurde. Endlich ward zur Eliminierung des Zenithpunktfehlers das Fernrohr durchgeschlagen und eine Wiederholung sämtlicher Einstellungen und Ablesungen in der entgegengesetzten Kreislage vorgenommen.

Die zur Berechnung der Beobachtungen dienenden Daten stimmen vollständig mit den in der II. Mitteilung enthaltenen überein, ausgenommen nur die Höhenunterschiede beider Punkte und im Zusammen-

hange damit die wahren Zenithdistanzen. Da nämlich das zum Beobachten benützte Instrument bedeutend höher ist als die im Jahre 1881 verwendeten Theodolithen, und da ferner auch die Mittelpunkte der Signale nicht mehr wie in dem letztgenannten Jahre in der Höhe der Drehaxen der damals verwendeten Theodolithe lagen, so mussten sich die Höhenunterschiede und Zenithdistanzen wie folgt ändern.

Das zu den in Rede stehenden Beobachtungen dienende Universalinstrument hatte eine Axen-Höhe von 0,46 m, während der 1881 in Höhensteig verwendete Theodolith 0,36 m hoch war; es stieg also gegen früher die Absehlinie HK in H um 0,10 m. Ferner befand sich die Spiegelmitte des auf der Kampenwand aufgestellten Heliotrops um 0,83 m unter der Pfeileroberfläche, und da in 1881 die Instrumentenhöhe auf K 0,30 m betrug, lag die Spiegelmitte 1,13 m unter der vormaligen Höhe der Drehaxe. Hiemit wurde der Höhenunterschied zwischen H und K gegen 1881 verkleinert um $0,10 + 1,13 = 1,23$ m und es war folglich in 1885 die wahre Zenithdistanz von H nach K gleich der in Mitteilung II angegebenen plus dem parallaktischen Winkel, welcher dem Unterschiede 1,23 m auf die Entfernung HK entspricht.

Ebenso findet man die wahre Zenithdistanz der Signaltafel auf K in H. Die Mitte derselben befand sich nämlich um 1,12 m über der Pfeileroberfläche, also um 0,82 m über der Drehaxenhöhe von 1881. Es ist somit für die nach der Signaltafel gemachten Einstellungen der frühere Höhenunterschied grösser geworden um $0,82 - 0,10 = 0,72$ m und demnach die wahre Zenithdistanz von 1885 gleich der von 1881 minus dem parallaktischen Winkel, welcher auf die Entfernung HK zu 0,72 m gehört.

Endlich hat sich für die Beobachtungen auf der Kampenwand die Instrumentenhöhe um 0,16 m vergrößert und es stand die Spiegelmitte des Heliotrops in Höhensteig um 0,40 m unter der Pfeileroberfläche, also um 0,76 m unter der Drehaxe von 1881. Es wuchs daher der Höhenunterschied von 1881 um $0,76 + 0,16 = 0,92$ m und es war 1885 die wahre Zenithdistanz des Punktes H in K gleich der von 1881 plus dem parallaktischen Winkel für 0,92 m Höhe auf die Entfernung zwischen K und H. Da nun $KH = 20446,74$ m ($\log = 4,31062$), so ergeben sich die wahren Zenithdistanzen für

$$\text{HK (Heliotrop): } z_0 = 87^{\circ} 4' 3'',65 + 12'',41 = 87^{\circ} 4' 16'',06$$

$$\text{HK (Signaltafel): } z_0 = 87^{\circ} 4' 3'',65 - 7'',26 = 87^{\circ} 3' 56'',39 \quad (13)$$

$$\text{HK (Heliotrop): } z_0 = 93^{\circ} 6' 57'',15 + 9'',28 = 93^{\circ} 7' 6'',43$$

und der Unterschied dieser Zenithdistanzen gegen die beobachteten ist bekanntlich die „beobachtete“ Refraktion.

Zur Ermittlung der „berechneten“ Refraktionen und der „trigonometrisch“ bestimmten Höhenunterschiede mussten zuerst die Refraktionskonstanten m und v festgestellt sein, und dieses geschah nach den im Eingange zu dieser Abhandlung mit (1) und (2) bezeichneten verbesserten allgemeinen Formeln, welche für die Stationen H und K die in (4) und (6) dargestellten besonderen Werte annehmen. Der in Mitteilung II gelieferte Nachweis, dass der dort auf Seite 24 stehende allgemeine Ausdruck für $r = \Delta z + \Delta z'$ in der abgekürzten Form $r = (1 - 2y)v\varphi$ benützt werden darf, gilt selbstverständlich auch für die Beobachtungen des Jahres 1885 und es sind die verbesserten Werte der terrestrischen Refraktionen Δz und $\Delta z'$ an den Endpunkten K und H der Lichtkurve KH nach der Entwicklung auf Seite 29 bis 31 der II. Mitteilung:

$$\begin{array}{ll} \text{von H aus berechnet: } \Delta z = [9,69174]r; & \Delta z' = [9,70609]r \\ \text{„ K „ „ „ } \Delta z = [9,69092]r; & \Delta z' = [9,70688]r \end{array} \quad (14)$$

Von diesen berechneten Refraktionen sind die ersteren (aus Beobachtungen in H bestimmten) in die Zahlentafel Nr 1 und die letzteren (aus Beobachtungen in K bestimmten) in die Tafel Nr 2 eingestellt. Die trigonometrischen Höhenunterschiede x sind nach den abgekürzten Formeln der Seite 35 Mitteilung II berechnet, welche infolge der verbesserten Werte von m und v für die Vertikalebene zwischen H und K die nachstehenden besonderen Werte annehmen:

$$\begin{array}{ll} \text{von H aus berechnet: } x = 33,10 - [4,31061] \cotg z - [1,51638] v \\ \text{„ K „ „ „ } x = 32,77 - [4,31061] \tg \epsilon - [1,51650] v \end{array} \quad (15)$$

In der Zahlentafel Nr 1 sind nicht die aus den Beobachtungen in H berechneten x -Werte, sondern nur deren Unterschiede gegen die durch Nivellieren gefundene Höhe eingetragen; dasselbe ist in Tafel Nr 2 mit den aus K berechneten Werten von x der Fall. Dabei ist noch weiter zu bemerken, dass die in den Formeln für x vorkommenden Werte z und $\epsilon = z - 90^{\circ}$ von den Fehlern der Fernrohrbiegung b und der Lotabweichung λ noch nicht befreit sind, sowie diese x -Werte auch nur den

beobachteten Refraktionen gegenüberstehen, die noch mit denselben Fehlern b und λ behaftet sind.

Es ist schon in Gleichung (12) gezeigt worden, dass die von den Fehlern b und λ befreiten „verbesserten beobachteten Refraktionen“ nur um einen konstanten Wert von den unverbesserten beobachteten Refraktionen verschieden sind, und dass dieser konstante Wert für $H = 2'',92$ und für $K = 11'',60$ ist. Man erhält also die den Tafeln Nr 1 und Nr 2 entsprechenden verbesserten beobachteten Refraktionen, wenn man die in Spalte 6 eingetragenen Zahlen bei Nr 1 um $2'',9$ und bei Nr 2 um $11'',6$ vergrößert. Es ändert sich folglich auch das Mittel aller verbesserten Refraktionen in H um $+ 2'',9$ und in K um $+ 11'',6$. Da nun die Seitenlänge $HK = s = 20446,74 \text{ m}$ ($\log s = 4,31062$) ist, so hat man die den Winkeln $dz = 2'',92$ und $dz' = 11'',60$ entsprechenden Höhenänderungen dx aus der Gleichung $s \cdot \operatorname{tg}(dz) = dx$ oder aus

$$dx = [8,99619] dz \quad (16)$$

zu bestimmen, was für HK den besonderen Wert $dx = 0,3 \text{ m}$ und für KH den Wert $dx = 1,2 \text{ m}$ gibt. Es ist also auch hier den in Spalte 8 der Tafeln Nr 1 und Nr 2 enthaltenen Höhendifferenzen einfach nur eine konstante Zahl ($0,3$ bei Nr 1 und $1,2$ bei Nr 2) beizufügen, und zwar mit positivem Vorzeichen, so dass, wenn man die in den Tafeln stehenden Höhendifferenzen $\Delta x'$ und die gesuchten Δx nennt,

$$\Delta x = \Delta x' + dx \quad (17)$$

wird, was also für H den Wert $\Delta x = \Delta x' + 0,3 \text{ m}$ und für K den Wert $\Delta x = \Delta x' + 1,2 \text{ m}$ gibt. (Dass dx mit positivem Vorzeichen dem $\Delta x'$ beizufügen ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Das Hauptglied im Ausdruck für x ist $(r \varphi) \cotg z$. Setzt man, was hier erlaubt ist, geradezu

$$x = (r \varphi) \cotg z$$

und differenziert diese Gleichung einerseits nach x und andererseits nach z , so wird

$$dx = - (r \varphi) \frac{dz}{\sin^2 z}$$

Alle Änderungen der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede haben folglich die umgekehrten Vorzeichen von Δz zu erhalten und werden daher sowohl für H als für K negativ. Ist nun $+x_0$ der

nivellierte Höhenunterschied von unten nach oben, x' der frühere und x der jetzige verbesserte trigonometrische Höhenunterschied, so ist $\Delta x' = x_0 - x'$ und $x = x' - dx$. Da nun nach der Definition $\Delta x = x_0 - x$ ist, so wird nach der Einsetzung der beiden Werte von x und $x_0 - x'$ aus den vorhergehenden Gleichungen in die letzte: $\Delta x = \Delta x' + dx$, was zu beweisen war. Für die Kampenwand hat man den Höhenunterschied von oben nach unten negativ zu nehmen, also ist $\Delta x' = -x_0 - (-x')$ und $-x = -x' - dx$. Da nun $\Delta x = (-x_0) - (-x)$ ist, so wird nach den erforderlichen Ersetzungen auch hier $\Delta x = \Delta x' + dx$, wie oben angegeben.

Auf die Beobachtungen und deren Ergebnisse, welche in den Tafeln Nr 1 und Nr 2 nach der Reihenfolge ihrer Aufnahmen zusammengestellt sind, folgen Zusammenstellungen der beobachteten und der berechneten oder theoretischen Refraktionen, sowie der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede gegen den nivellierten und der beobachteten Temperaturen, welche sämtlich behufs graphischer Darstellung in der dieser Abhandlung beigelegten Steindrucktafel nach Stunden geordnet sind. Die Luft-Temperaturen wurden hauptsächlich deshalb wieder eingesetzt, um ihren Zusammenhang mit den beobachteten Refraktionen in der Zeichnung deutlich sichtbar machen zu können. Obgleich meine Theorie der Lichtlinie aus den Beobachtungen auf einer Station auch die Werte der für dieselbe Zeit auf der anderen Station stattfindenden Refraktionen gibt, so habe ich es doch unterlassen letztere zu berechnen und aufzuführen, weil ihnen keine gleichzeitigen Beobachtungsergebnisse gegenübergestellt werden konnten, also die Berechnung zwecklos gewesen wäre.

Die stündlichen Mittel wurden zur Erzielung eines stetigeren Verlaufs der ihnen entsprechenden Kurve nach der bekannten Formel

$$4b_0 = a + 2b + c$$

umgerechnet, worin b irgend einen Mittelwert, a den ihm vorausgehenden, c den nachfolgenden Mittelwert und b_0 das resultierende kombinierte Mittel bezeichnet. Das Auftragen erfolgte in gleicher Weise und in gleichem Massstabe wie in Mitteilung II, d. h. es wurden bei den Refraktionen und Temperaturen die Abweichungen gegen das jedesmalige Gesamtmittel der ganzen Reihe, bei den Höhen die Unterschiede der berechneten Höhen gegen die nivellierte aufgetragen. Die hier in Betracht kommenden Mittelwerte sind:

(18)

1) Für Höhensteig nach der Zahlentafel Nr 1:

- a) aus den beobachteten Refraktionen = $69'',0$
- b) " " berechneten Refraktionen = $55'',3$
- c) " " absoluten Temperaturen = $296^{\circ},8$

2) Für Kampenwand nach der Zahlentafel Nr 2:

- a) aus den beobachteten Refraktionen = $36'',6$
- b) " " berechneten Refraktionen = $56'',0$
- c) " " absoluten Temperaturen = $283^{\circ},5$

Nach diesen Daten bedürfen die auf der Steindrucktafel dargestellten Kurven nur ganz kurzer Erklärungen, welche hier folgen. Die ausgezogenen schwarzen geraden Linien stellen in beiden Figuren theils den durch Nivellieren gefundenen Höhenunterschied zwischen Höhensteig und Kampenwand, theils die arithmetischen Mittel der beobachteten und berechneten Refraktionen, sowie der absoluten Temperaturen vor. Diese Geraden sind somit die Abscissenaxen der durch Polygone vertretenen Kurven, welche durch Auftragen der Differenzen gegen das Mittel entstanden sind, und zwar das ausgezogene schwarze Polygon durch Auftragen der Differenzen der beobachteten Refraktionen, das ausgezogene blaue Polygon durch Auftragen der Differenzen der absoluten Temperaturen, das ausgezogene rote Polygon durch Auftragen der Differenzen der trigonometrischen Höhen gegen die nivellierte Höhe. Die schwarz gestrichelten Polygone bezeichnen die in Bezug auf Lotablenkung und Fernrohrbiegung verbesserten beobachteten Refraktionen, während die rot gestrichelten Polygone die in gleicher Weise verbesserten trigonometrischen Höhenunterschiede x darstellen. Die auch auf der Zeichnung angegebenen Massstäbe der Ordinaten (nämlich 1 cm für $4''$ oder 2,5 mm für $1''$ der Refraktionen, 1 cm für 1 m Unterschied der trigonometrischen Höhen, 1 cm für 1° Celsius der Luft-Temperaturen) sind sehr gross angenommen worden, damit auch sehr geringe Unterschiede in der graphischen Darstellung noch bemerkbar sind.

C. Folgerungen aus den mitgeteilten Beobachtungen.

I. Betreffend den Einfluss der Konstanten m und v auf die berechneten Refraktionen aus den Jahren 1881 und 1885.

Es ist bereits bemerkt worden, dass wenn die berechneten Refraktionen, welche den Beobachtungen von 1881 entsprechen, mit den richtig gestellten Werten von m und v verbessert werden, eine vollständige Uebereinstimmung ihres Mittelwerts ($55'',8$) mit dem Mittelwerte der damals beobachteten Refraktionen ($55'',9$) stattfindet. Und auch die in gleicher Weise behandelten berechneten Refraktionen, welche zu den Beobachtungen von 1885 gehören, geben einen Mittelwert ($55'',7$), welcher von dem Mittelwerte der beobachteten Refraktionen ($52'',8$) so wenig abweicht, dass ebenfalls ausreichende Uebereinstimmung angenommen werden kann.

Wenn an den hier verglichenen Refraktionswerten die Verbesserungen wegen Lotablenkung und Fernrohrbiegung nicht angebracht sind, so geschah dieses aus zwei Gründen: erstens weil es im Jahre 1881 versäumt worden ist, diese Störungen zu bestimmen und ungleichartige Grössen nicht mit einander verglichen werden können; dann zweitens, weil die in Rede stehenden Werte den Resultaten entsprechen, wie sie aus guten trigonometrischen Höhenmessungen bisher stets hervorgegangen sind und wohl auch ferner hervorgehen werden, da sich diese Art der Höhenbestimmung nicht auch mit der schwierigen und kostspieligen astronomischen Messung der Lotablenkung befassen kann, und die mühsame Bestimmung der Fernrohrbiegung an den kleineren Theodolithen, welche zu trigonometrischen Höhenmessungen verwendet werden, selten sich lohnt, insoferne eine Biegung von $1''$ auf 20 Kilometer Entfernung erst einem Fehler von 1 Decimeter der Höhe entspricht und mit so kleinen Instrumenten selbst grössere Beträge als eine Sekunde kaum mehr mit Sicherheit gemessen werden können.

Die Ergebnisse unserer Beobachtungen und Untersuchungen zum ersten Punkte dieses Abschnitts sprechen also, wie man sieht, vollständig zu Gunsten meiner in den Jahren 1864 und 1866 aufgestellten Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung und hier insbesondere der terrestrischen Refraktion.

2. Den Einfluss der Fernrohrbiegung und der Lotablenkung auf die Beobachtungen des Jahres 1885 betreffend.

Gelegentlich der Polhöhenbestimmungen, welche Herr Oertel 1884 auszuführen hatte, wurde von demselben auf jeder Station auch die Biegung des schon mehrmals genannten Universalinstruments bestimmt und gefunden für (K) $b = 4'',21$ für (H) $b = 5'',15$. Die Lotablenkungen λ , welche nach den Bemerkungen auf Seite 525 dieser Abhandlung sowohl in H als in K eine Verschiebung der dortigen Zenithpunkte in der Richtung von K nach H, und zwar in H um $\lambda = 2'',23$ und in K um $\lambda = 7'',39$ bewirken, fordern, dass die gemessenen Zenithdistanzen in H um $2'',23$ vermindert und in K um $7'',39$ vergrößert werden. Beide Verbesserungen zusammen verkleinern die in H beobachteten Refraktionen um die konstante Grösse $k = 2'',92$ (welche aus $b - \lambda = 5'',15 - 2'',23$ entsteht) und die in K beobachteten Refraktionen um $k_1 = b_1 + \lambda_1 = 4'',21 + 7'',39 = 11'',60$. Um die gleichen konstanten Beträge k und k_1 , wie die einzelnen beobachteten Refraktionen ändern sich auch deren Mittelwerte, so dass nach der auf Seite 533 dieser Abhandlung stehenden Zusammenstellung Nr 18 das Mittel aller verbesserten beobachteten Refraktionen in Höhensteig von $69'',0$ auf $66'',9$ und in Kampenwand von $36'',6$ auf $25'',0$ herabsinkt.

Während also die für Höhensteig erhaltenen Werte der beobachteten Refraktionen ($66'',1$) den dafür bestimmten theoretischen ($55'',3$) durch die vereinigten Verbesserungen b und c näher gerückt werden, vergrößert sich der Abstand beider Refraktionswerte für Kampenwand ($25'',0$ gegen $56'',0$) durch die gleichnamigen Verbesserungen aussergewöhnlich; denn der Unterschied Beobachtung minus Rechnung ist für H $= 66'',1 - 55'',3 = +10'',8$ und für K $= 25'',0 - 56'',0 = -31'',0$. Indem weiter das arithmetische Mittel der 1885 beobachteten Refraktionen $= \frac{1}{2}(66'',1 + 25'',0) = 45'',6$ und der dazu gehörigen berechneten Refraktionen $= \frac{1}{2}(55'',3 + 56'',0) = 55'',7$ ist, ergibt sich ein Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung von $10,1$ Sekunden.

Insbesondere auffallend ist der jeder Theorie der Lichtkurve widersprechende grosse Unterschied der in H und K beobachteten Refraktionen,

welcher auch schon bei den Messungen des Jahres 1881 entschieden zum Ausdruck gelangte.

3. Das gegenseitige Grössen-Verhältnis der beobachteten und der berechneten terrestrischen Refraktionen betreffend.

Wenn nach Nr 1 und Nr 2 des gegenwärtigen Abschnitts C die Mittelwerte der den Jahren 1881 und 1885 zukommenden „beobachteten“ und mit den richtigen Werten von m und v „berechneten“ Refraktionen fast ganz übereinstimmen, so ist dies wohl der beste Beweis, dass an den eben besprochenen und schon im Jahre 1881 erkannten Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung die den Reductionen zu Grunde liegende Theorie der Lichtlinie nicht schuld sein kann, zumal diese schon vor mehr als zwanzig Jahren eine wichtige Bestätigung ihrer Richtigkeit dadurch erhielt, dass die Höhenmessungen am Kaukasus den von mir aufgestellten Satz über die Abnahme des Strahlenbrechungskoeffizienten vollkommen bestätigten. (Astronomische Nachrichten 1866, Nr 1590, Seite 88.)

Der Grund des Widerspruchs in der Grösse der an der unteren und oberen Station beobachteten Refraktionswerte, welche nahezu gleich sein sollen (der obere etwas kleiner als der untere), muss um so mehr ausserhalb der Refraktionstheorie gesucht werden, als diese Mittelwerte liefert, welche den Mitteln der unten und oben beobachteten Refraktionen ganz oder doch nahezu gleich sind. Einen Versuch, den in Rede stehenden Widerspruch zu beseitigen, habe ich bereits in meiner II. Mitteilung (Seite 42 bis 44) gemacht, indem ich auf Grund von Beobachtungen die zunächst auf den Beobachtungsstationen lagernden Luftschichten nicht mehr dem Dichtigkeitsgesetze unterworfen sein liess, welches den Grund meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung bildet, sondern als gleichmässig dicht annahm. Diese Annahme gebe ich auch heute noch nicht auf, nur füge ich ihr auf Grund der Messungen des Jahres 1885 noch eine zweite bei, welche auf meiner vor 15 Jahren (1872) in den Denkschriften der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (Klasse II, Band XI, Abteilung 2) veröffentlichten Abhandlung „Geodätische Bestimmung der Erdkrümmung und Lothablenkung“ beruht und entweder für sich allein oder in Verbindung mit der ersten Annahme zur Ausgleichung

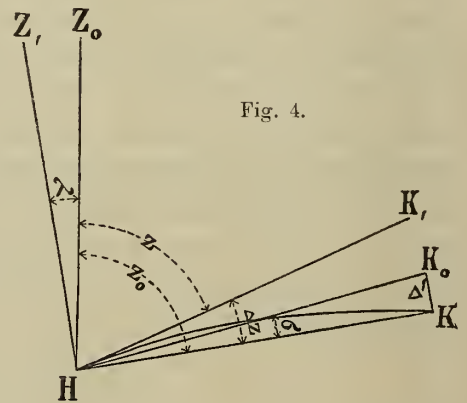
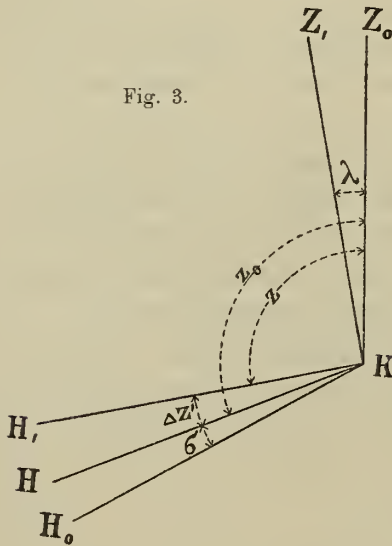
des Widerspruchs zwischen dem Refraktionswert $\mathcal{A}z'$ auf der oberen und dem $\mathcal{A}z$ auf der unteren Station dienen kann.

In jener Abhandlung habe ich nämlich nachgewiesen, dass selbst das tadelloseste Präcisionsnivellement eines mit Lotablenkung behafteten oder eine solche hervorrufenden Berges, dessen Höhe x um eine Grösse $\mathcal{A} = s \operatorname{tg} \lambda$ falsch ergibt, wenn s die Entfernung beider Stationen von einander und λ die mittlere Lotablenkung zwischen denselben ist. Ueber die Grösse $\mathcal{A}$ gibt das auf der gleichen Linie, aber in entgegengesetzter Richtung ausgeführte Kontrollnivellement keinen Aufschluss, weil der aus diesem resultierende Höhenunterschied, wenn sonst kein Fehler gemacht worden ist, ebenfalls um $\mathcal{A}$ falsch ist und die algebraische Summe der beiden gefundenen Werte $+(x \pm \mathcal{A})$ und $-(x \pm \mathcal{A})$ lediglich den Wert Null liefert, welcher dem bekannten Satz entspricht, dass der ideale Schlussfehler eines richtig nivelirten Polygons null ist. Zu dem von λ herrührenden Fehler tritt aber noch ein anderer hinzu, welcher aus den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern entspringt und gerade bei Nivellements auf Gebirgswegen nicht zu umgehen ist. Wir wollen nunmehr die Summe beider Fehler $\mathcal{A}' = s \cdot \operatorname{tg} \sigma$ setzen. Es wird dann, wenn s und $\mathcal{A}'$ gegeben sind, der parallaktische Winkel σ , unter welchem in der Entfernung s die Höhe $\mathcal{A}'$ gesehen wird, aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \sigma = \sigma \cdot \operatorname{tg} 1'' = \frac{\mathcal{A}'}{s} \quad (18)$$

gefunden, und es beträgt derselbe beispielsweise für $\mathcal{A}' = 2 \text{ m}$ und $s = 20446,74 \text{ m}$ ($\log s = 4,31062$) sehr nahe 20 Sekunden. Setzt man den Fall, dass bei der Berechnung der wahren Zenithdistanz z_0 auf K die untere Station H um 2 m zu tief angenommen wurde, so wäre (nach Fig. 3) der auf Seite 10 der II. Mitteilung enthaltene Wert von z_0 und damit auch die beobachtete Refraktion $\mathcal{A}z'$ um $20''$ zu vermehren, so dass jetzt der in Nr 2 dieses Abschnitts angeführte mittlere Wert der verbesserten beobachteten Refraktion auf K von $25''$ auf $45''$ stiege. Die wahre Zenithdistanz Z in H (II, 10) und damit die dort beobachtete Refraktion $\mathcal{A}z$ wäre, weil der Punkt K beispielsweise 2 m zu hoch angenommen wurde (nach Fig. 4) um $20''$ zu vermindern, so dass der oben (C, Nr 2) angeführte Mittelwert aller beobachteten Refraktionen von $66''$ auf $46''$ herabsänke. Es können somit auf diesem Wege die beiden For-

derungen erfüllt werden, dass die Refraktionsteile Δz und $\Delta z'$ einander nahezu gleich und die unteren stets ein wenig grösser als die oberen sind. Ich erinnere jedoch daran, dass ich hier nur ein Beispiel geben wollte, um zu zeigen, wie der zweite Weg zur Ausgleichung der Werte von Δz und $\Delta z'$ dienen kann. In unserem besonderen Falle ist jedenfalls nur der aus der Lotablenkung entspringende Höhenfehler vorhanden.



4. Betreffend die Frage, ob man für exakte technische Zwecke Höhenunterschiede weit entfernter Punkte trigonometrisch oder geometrisch bestimmen soll.

Nach Fig. 1 der beiliegenden Steindrucktafel entfernt sich die rot-gezogene Linie, welche die auf der Station Höhensteig trigonometrisch bestimmten Höhen aus den von der Lotabweichung und Fernrohrbiegung nicht befreiten Refraktionsbeobachtungen des Jahres 1885 darstellt, nicht weit von der Geraden AB, welche dem durch Nivellieren gefundenen Höhenunterschiede zwischen H und K entspricht. Dasselbe gilt von der ausgezogenen schwarzen Linie, durch welche der Gang der beobachteten Refractionen gegen das durch AB vorgestellte Mittel derselben versinnlicht ist.

Entfernt sich die Höhenlinie zwischen $8\frac{1}{2}$ Uhr Vormittags und 7 Uhr Abends höchstens um 0,5 Meter von der Axe, so beträgt der grösste Abstand der Refraktionslinie von ihrer Axe höchstens 4 Sekunden innerhalb desselben Zeitraums, der gewöhnlich zu trigonometrischen Höhenmessungen benützt wird. Auch zeigt sich, wie bei den in Mitteilung II dargestellten Höhen- und Refraktionslinien der Beobachtungen aus dem Jahre 1881, die tägliche Periode der trigonometrisch bestimmten Höhen und der denselben zu Grunde liegenden Refraktionen und Temperaturen, womit meine auf Seite 45 jener Mitteilung aufgestellte Behauptung von einer mit der Luft-Temperatur zusammenhängenden täglichen Periode der trigonometrisch bestimmten Höhen aufs Neue bestätigt wird. Die Wendepunkte der Perioden fallen in die Vormittagsstunde von 9—10 Uhr und in die Nachmittagsstunde von 5—6 Uhr.

Die von der Lotablenkung und der Fernrohrbiegung befreiten Refraktionen, durch die schwarzgestrichelte Linie in Fig. 1 der Steindrucktafel dargestellt, und die aus diesen Refraktionen trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede, denen die rotgestrichelte Linie entspricht, entfernen sich weiter von ihren Axen als die eben besprochenen gleichnamigen Höhen- und Refraktionsunterschiede, und es steigen die Maxima in der Zeit von 8 Uhr Morgens bis 7 Uhr Abends bis auf 0,6 Meter und beziehungsweise 7 Sekunden. Die tägliche Periode der Refraktionen und der hieraus trigonometrisch bestimmten Höhen ist auch hier vorhanden, die Wendepunkte C und D liegen aber etwas weiter auseinander, indem sie auf 9 Uhr Vormittags und 6 Uhr Nachmittags treffen.

Mag man sich auch mit diesem letzteren Ergebnisse begnügen, so haben doch die in Fig. 2 dargestellten Kurven, welche den Gang der Lufttemperaturen, der beobachteten und berechneten Refraktionen, sowie der aus den beobachteten theils von der Lotablenkung und Fernrohrbiegung befreiten, theils unbefreiten Zenithdistanzen trigonometrisch bestimmten Höhen in K bezeichnen, keinen Anspruch darauf, gesetzmässige Vorgänge zur Anschauung zu bringen. Schon die Temperaturkurve lässt erkennen, dass zwischen 12 und 3 Uhr, dann von $4\frac{1}{2}$ bis $6\frac{1}{2}$ Uhr, somit fast jeden ganzen Nachmittag auf der Kampenwand Temperaturstörungen stattfanden, welche den Voraussetzungen für gute Messungen von Refraktions- und Höhenunterschieden ganz und gar widersprechen. Es kann

daher nicht wundernehmen, dass die verbesserten beobachteten Refraktionen weit von dem arithmetischen Mittel der unverbesserten abstehen, und dass infolge der unregelmässigen Beschaffenheit der Atmosphäre in den Tagen vom 16. bis 20. August 1885 die 67 auf der Kampenwand angestellten Beobachtungen als unbrauchbar von unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden.

Die auf der Station Höhensteig in den Tagen vom 9. bis 13. Juli 1885 bei sehr guter Witterung ausgeführten 82 Messungen ergaben sehr brauchbare Resultate, und wenn auch die auf der Kampenwand erhaltenen wegen der durch meteorologische Verhältnisse hervorgerufenen Störungen unbrauchbar sind, so ist doch die auf ihre Ausführung verwendete Zeit mit in Anschlag zu bringen bei der Berechnung des Zeitbedarfs für die trigonometrische Höhenmessung zwischen Höhensteig und Kampenwand. Dieser Zeitaufwand beträgt aber 9 Tage für Beobachtungen und 3 Tage für den Transport und die Aufstellung des grossen Universalinstruments nebst Heliotropen, Barometern und Psychrometern, im Ganzen also zwölf Tage, wobei für Herstellung von Bretter-Hütten und massiven Beobachtungspfeilern nichts gerechnet ist, da sie anderer Zwecke wegen schon vorhanden waren und für trigonometrische Höhenmessungen allein wohl selten oder nie hergestellt werden. In dieser Zeit hätte man die 20 Kilometer lange Strecke von Höhensteig bis Kampenwand auf den sie zusammensetzenden Strassen, Eisenbahnen und Fusswegen leicht auch doppelt nivellieren und dabei eine grosse Zahl von Zwischenpunktshöhen (welche bei trigonometrischen Messungen wegfallen, mit voller Genauigkeit bestimmen können, soweit diese nicht durch die bestehende Lotablenkung eine Beeinträchtigung erleidet, die sich durch das Messungsverfahren nicht ebenso bestätigen lässt, wie der Einfluss der Erdkrümmung und Strahlenbrechung. Die Wirkung der Lotablenkung, wenn eine solche auf der Beobachtungsstation stattfindet, macht sich zwar auch in der trigonometrischen Höhenmessung geltend, indem sie die gemessene Zenithdistanz um ihren Betrag vermehrt oder vermindert, gleichwohl wird diese Art der Höhenmessung für rein wissenschaftliche Zwecke das einzige Mittel bieten, im Gegensatz zum geometrischen Nivellement, welches den Höhenunterschied zweier Punkte bekanntlich in Bezug auf die als Geoid gedachte Erdoberfläche gibt, die Höhendifferenz dieser Punkte in Bezug auf die als Rotationsellipsoid

gedachte Erdoberfläche und damit den Betrag zu bestimmen, um welchen an jedem dieser Orte beide Flächen von einander abstehen. Dagegen unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass für genaue Höhenbestimmungen weit entfernter Punkte, welche für rein technische oder ökonomische Zwecke gemacht werden, das geometrische Doppelnivellement der mehrfach wiederholten trigonometrischen Ermittlung vorzuziehen und diese gleichwie die barometrische Höhenmessung nur für Höhenbestimmungen von untergeordneter Bedeutung verwendbar ist.

D. Uebersicht aller Ergebnisse der in Bayern ausgeführten Messungen der terrestrischen Refraktion.

Fassen wir die Ergebnisse aller unserer in der Zeit von 1877 bis 1885 angestellten und in drei Mittheilungen von 1880, 1883 und 1888 veröffentlichten Beobachtungen über die terrestrische Refraktion zusammen und vergleichen sie mit den aus meiner Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung (Astronomische Nachrichten 1864 und 1866) berechneten Werten, so können folgende auf eine normale (d. h. ruhige und aus regelmässig übereinander gelagerten konzentrischen Schichten bestehende) Atmosphäre sich beziehende Sätze als erwiesen betrachtet werden:

1. Eine Seitenrefraktion oder ein Heraustreten der Lichtlinie aus der durch ihre Endpunkte bestimmten Vertikalebene findet nur selten und lediglich dann statt, wenn die Strahlen in weiter Erstreckung nahe an relativ stark erwärmten Bergabhängen vorbei oder über ausgedehnte Wasserflächen hinziehen, welche eine wesentlich niedrigere Temperatur haben als ihre Umgebung.

Solche Seitenabweichungen (Lateralrefraktionen) hängen lediglich von örtlichen Verhältnissen ab und sind deshalb kaum in mathematischen Formeln auszudrücken. Dass sie aber ausnahmsweise in Beträgen von mehreren Sekunden vorkommen, unterliegt eben so wenig einem Zweifel, als dass sie in jenen Vor- und Nachmittagsstunden am kleinsten sind, wo sich die Temperaturen der störenden Berg- oder Wassermassen und der dazwischen liegenden atmosphärischen Luft am meisten ausgeglichen haben, oder wo die barometrisch und trigonometrisch bestimmten Höhen-

unterschiede gegebener Punkte von den durch Nivellieren gefundenen am wenigsten abweichen, also in den Wendepunkten der Kurven, welche die täglichen Perioden barometrisch und trigonometrisch bestimmter Höhenunterschiede darstellen.

Es darf hier nicht verschwiegen werden, dass der berühmte Geodät und Direktor der Dänischen Gradmessung, Herr Staatsrath Dr. Andrae in Kopenhagen aus meinen in der I. Mitteilung über terrestrische Refraktion veröffentlichten Beobachtungen den Schluss ziehen zu können glaubte, dass zwischen dem Döbra- und Kapellenberge zur Zeit der Beobachtungen (6. und 11. September 1877) eine Lateralrefraktion bestanden habe, welche mit der Entfernung der Signale II, III, IV (Kapellenberg) von I (Döbraberger) gewachsen sei. Seine Excellenz begründete diesen Schluss durch folgenden am 29. November 1880 an mich geschriebenen Brief:

„Entschuldigen Sie, hochverehrter Herr College, dass ich Ihre freundschaftliche Erinnerung in Anspruch nehme, indem ich mit einer Frage beschwerlich falle. In diesen Tagen habe ich nämlich Ihre interessanten Refraktionsbeobachtungen gelesen. In dem Abschnitte, wo Sie die Lateralrefraktion behandeln, wurde ich freudig überrascht, als ich die ungemein glückliche Anordnung der Beobachtungen auf dem Döbraberger bemerkte, wo die 4 in verschiedenen Entfernungen errichteten Signale gleichzeitig im Gesichtsfelde des Fernrohrs lagen. Jetzt, dachte ich, muss der veränderliche Teil der Lateralrefraktion sich deutlich zeigen, und dies bestätigte sich ja auch beim ersten Anblicke der auf Seite 55 (oben) gegebenen „Zusammenstellung.“ Leider dauerte die Freude nicht lange, denn Seite 64 und 65 haben Sie ja unwiderleglich bewiesen, dass die erhaltenen Resultate durch plausible Variationen in der Stellung der Mikrometerschraube vollständig erklärt werden können. Es scheint mir jedoch noch immer möglich, auf etwas geändertem Wege die Einwirkungen einer Lateralrefraktion nachzuweisen, wenn die folgende Frage bejaht werden könnte, nämlich: Kann die Stellung der Mikrometerschraube nicht für die an demselben Tage ausgeführten Beobachtungen als constant angesehen werden, oder kann dies wenigstens nicht für die am 6. und 10. September 1877 angeführten Reihen gelten? Vorausgesetzt, dass die Frage, wie ich hoffe, bejaht werde, geben mir die in der „Zusammenstellung“ aufgeführten Reihen folgende mit ungeänderter Schraubenstellung bestimmte Winkeldifferenzen, nämlich:

Am 6. September Differenz zwischen „Vorm.“ und erster Reihe „Nachm.“	0",7	1",7	3",0
Am 6. September Differenz zwischen „Vorm.“ und zweiter Reihe „Nachm.“	0",8	2",3	2",6
Am 10. September Differenz zwischen „Vorm.“ und „Nachm.“ . . .	0",8	1",5	6",5
Summa	2",3	5",5	12",1

Diese Differenzsumme stimmt ja ganz vorzüglich mit der Annahme einer mit der Entfernung proportional wachsenden Lateralrefraktion. Die Beobachtungen am 11. September bestätigen dasselbe Gesetz. Ich habe aber diese zwei Reihen nicht aufgeführt, weil ich vermuthete, dass die letzte derselben, welche Sie in der „Zusammenstellung“ nicht mitnehmen, aus irgend einem Grunde kassiert werden soll. Durch gütige Beantwortung der obigen Frage werden Sie zu grosser Dankbarkeit verpflichtet Ihren mit wahrer Freundschaft und Hochachtung ergebenden Andrae.“

Nachdem ich in Uebereinstimmung mit dem Hauptbeobachter auf dem Döbraberger, damaligen Assistenten, späteren Professor zu Freiberg i/S., Herrn Dr. Max Schmidt, meinem früheren ausgezeichneten Schüler, die von Herrn Staatsrath Andrae gestellte Frage nur unter gewichtigen Beschränkungen bejahen konnte, scheint dieser seine oben ausgesprochene Ansicht von dem Bestande einer Lateralrefraktion zwischen Döbra- und Kapellenberg aufgegeben zu haben, wenigstens ist mir von einer weiteren Vertretung derselben nichts bekannt geworden. (Vergleiche Bauernfeind: 1. Ueber Refraktionsbeobachtungen, Vortrag gehalten am 16. September 1880 in München bei der 6. Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung, gedruckt in deren Verhandlungen als Anhang IV; 2. Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, I. Mitteilung, 1880, Seite 48 bis 65, dann 86. — Fischer: Der Einfluss der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontwinkeln. Berlin 1882.)

2. Die Vertikalrefraktion hat wie die Lufttemperatur eine tägliche Periode, deren Amplitude mit jener der Temperaturkurve übereinstimmt. Damit hängen auch die täglichen Perioden der barometrischen und trigonometrischen Höhenmessungen zusammen, welche von der Wärmestrahlung des Erdbodens herrühren.

Wenn die Wendepunkte der Temperatur-Refraktions- und Höhenkurven bei meinen Beobachtungen am Hohen Miesing im August 1857 in die Stunden von 9—10 Uhr Vormittags und 4—5 Uhr Nachmittags, auf dem Döbra- und Kapellenberge im Sommer 1877 und 1878 in die Zeit von 6 bis 7 Uhr Morgens und Abends, auf den Punkten Höhensteig, Irschenberg und Kampenwand im August 1881 in die Stunden von 8 bis 9 Uhr Vormittags und 6—7 Uhr Nachmittags und endlich im Juli 1885 für Höhensteig und Kampenwand allein auf die Zeit von 9—10 Uhr Morgens und 5—6 Uhr Abends fielen, so beweisen diese Schwankungen nur wiederholt, was ich schon 1862 in meinen „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen“ ausgesprochen habe und Professor Rühlmann, der meine am Miesing angestellten Beobachtungen am Valtensberge in Sachsen prüfte und die hypsometrischen Messungen von E. Plantamour in Genf mit in Betracht zog, in seiner 1870 erschienenen Schrift „Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre“ bestätigte, dass

nämlich die Grössen der täglichen Perioden der barometrisch bestimmten Höhen sowohl von örtlichen Verhältnissen (geographische Breite, Meereshöhe, Bodenbeschaffenheit) als von der Jahreszeit (Auf- und Untergang der Sonne, Temperaturgrad) abhängig sind. Was in dieser Hinsicht von den täglichen Perioden der Barometermessungen gilt, habe ich auch bei den gleichnamigen Perioden der Verticalrefraktionen und der trigonometrischen Höhenmessungen bestätigt gefunden.

Dass es gelingen werde, durch Fortsetzung der Beobachtungen im Gebirge und im Flachlande ein allgemeines Gesetz für die örtlichen und jährlichen Aenderungen dieser Perioden aufzufinden, bezweifle ich eben so sehr als die Möglichkeit, genau vorherzusagen, welche Witterung in einer bestimmten Gegend nach Wochen oder Monaten stattfinden werde. Muss man aber hierauf verzichten, so bleibt es auch ungewiss, in welchen Tagesstunden trigonometrische oder barometrische Höhenmessungen die besten Resultate liefern. Aus zahlreichen solchen Messungen, wenn sie graphisch dargestellt sind, lässt sich die gesuchte Höhe mit ziemlicher Annäherung nur finden, wenn man die Berge und Thäler der die Ordinaten verbindenden Kurve durch eine gerade Linie ausgleicht und deren Ordinate als die gesuchte Höhe ansieht. (Vergleiche Bauernfeind: 1. Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, Mitteilung I (1880), Mitteilung II (1883) und Mitteilung III (1888), 2. Neue Untersuchungen über terrestrische Refraktion, Referat erstattet am 24. Oktober 1883 zu Rom und abgedruckt als Anhang VII der Verhandlungen über die siebente Allgemeine Konferenz der Europäischen Gradmessung.)

3. Wenn der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre nicht so normal ist, wie ihn Barometerformel und Refraktionstheorie voraussetzen, sondern durch unregelmässige Erwärmung der unteren Luftschichten bis auf eine Höhe s gestört ist, so ist es gestattet, für diese Luftschichten eine gleichmässige Dichtigkeit anzunehmen und das der Strahlenbrechungstheorie zu Grunde liegende Gesetz der Dichtigkeitsänderung erst von der Höhe s an eintreten zu lassen, welche sich aus der Formel ergibt

$$s = 2 r_0 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (z' - z) \sin \frac{1}{2} (z' + z)}{\sin z}$$

worin r_0 den Erdhalbmesser bis zur Beobachtungsstation, z' die daselbst beobachtete scheinbare Zenithdistanz und z die in der Höhe s stattfindende berichtigte Zenithdistanz $z' - \gamma$ bezeichnet.

Der Beweis dieses Satzes und die Entwicklung der vorstehenden Formel beruht auf den in der II. Mitteilung (S. 42) angeführten Beobachtungen, dass die Temperatur der Luft in den untersten Luftschichten bis zu zehn und mehr Meter Höhe nach oben häufiger zu- als abnimmt, was zur Folge hat, dass in solchen Schichten die Lichtkurve der Erdoberfläche ihre konvexe Seite statt der konkaven zuwendet. Wenn also in den unmittelbar auf dem Boden lagernden Luftschichten die Lichtlinie ebenso gut nach der einen als der anderen Seite gekrümmt sein kann, so ist es im Zweifelsfalle wohl erlaubt, eine mittlere Richtung zwischen beiden sehr flachen Krümmungen, nämlich eine Gerade anzunehmen, welche die Lichtkurve an der oberen Grenze der fraglichen unteren Schichten berührt, wie es auf Seite 43 der Mitteilung II geschehen ist. (Vergleiche Prestel: Die mit der Höhe zunehmende Temperatur als Funktion der Windrichtung, Leopoldina Bd. 29, Jahrgang 1861; ferner Bauernfeind: Neue Untersuchungen über Refraktion, Referat im Anhang VII der Verhandlungen der 7. Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung; weiter Zinger, welcher in der Beilage zu meinem eben bezeichneten Referate (Seite 8 des Anhangs VII) auf Grund der in den Jahren 1871 und 1872 in Russland angestellten Versuche als unzweifelhaft bewiesen ansieht, dass bei kleinen Entfernungen häufig negative Refraktionen vorkommen, welche um so grösser sind, je näher die Beobachtungsrichtungen dem Boden liegen.)

4. Für eine ruhige und regelmässig erwärmte Atmosphäre besitzt die in den Astronomischen Nachrichten vom Jahre 1866 aufgestellte Theorie der terrestrischen Refraktion und der trigonometrischen Höhenmessung denselben Grad von Giltigkeit, welcher der zwei Jahre vorher veröffentlichten und auf dem gleichen Prinzip beruhenden Theorie der astronomischen Strahlenbrechung namentlich deshalb zukommt, weil sich aus ihr die Bessel'schen mittleren Refraktionen für alle Zenithdistanzen fast ohne jede Abweichung berechnen lassen.

Dass dieser Satz richtig ist, habe ich schon teilweise in meiner Ab-

handlung vom Jahre 1866 bewiesen, indem ich dort Messungsergebnisse aus der Kaukasischen Triangulation anführte, welche die aus meiner Theorie gezogene wichtige Folgerung von der mit der Höhe der Beobachtungsstation eintretenden Verminderung des Koeffizienten der terrestrischen Refraktion völlig bestätigten. Nach dieser Theorie verhalten sich nämlich unter sonst gleichen Umständen die Strahlenbrechungskoeffizienten zweier verschieden hoch gelegenen Beobachtungsstationen wie die vierten Potenzen der Höhen der über diesen Stationen ruhenden atmosphärischen Schichten, und nach einer aus Tiflis datierten brieflichen Mitteilung des damaligen Oberstlieutenants (jetzigen Generallieutenants und Mitglieds der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung) Herrn Stebnizki vom 16/28. April 1865 nahm der auf einer Station von 100 m Meereshöhe 0,085 betragende Refraktionskoeffizient mit der Höhe in dem Masse ab, dass er auf 4000 m Seehöhe nur mehr 0,058 betrug. Meine auf Seite 88 der Nr 1590 der Astronomischen Nachrichten im Einzelnen mitgeteilte Berechnung gab den theoretisch bestimmten Koeffizienten in 4000 m Höhe = 0,061 gegenüber dem von 0,085 für die Höhe von 100 Meter.

Die umfassendste Bestätigung der Richtigkeit meiner Strahlenbrechungstheorie liegt aber in den Refraktionsbeobachtungen, welche ich seit zehn Jahren im Fichtelgebirge und in den Vorbergen des Bayerischen Hochlands angestellt und (mit Einrechnung der gegenwärtigen) in drei Mitteilungen veröffentlicht habe. Zeigen auch die in diesen Mitteilungen enthaltenen graphischen Darstellungen der beobachteten und berechneten Refraktionswerte nicht in allen Fällen eine genaue Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung, so lassen sie doch durch die ihnen entsprechenden Kurven sehr wohl erkennen, dass die theoretischen Refraktionen von den beobachteten im Ganzen nicht stark abweichen und, abgesehen von den Endpunkten der täglichen Refraktions- und Temperatur-Perioden, häufig auch in Zwischenpunkten einander ganz oder nahezu gleich sind, und dass in allen Fällen, wo die beobachteten Refraktionen wegen Ungunst der Witterung nicht ausgeschlossen werden mussten, die arithmetischen Mittel der beobachteten und berechneten Werte übereinstimmen.

E. Schlussbetrachtungen.

In meinem am 16. September 1880 in der sechsten Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung erstatteten Referate über die von Kommissären dieser internationalen Veranstaltung angestellten Refraktionsbeobachtungen habe ich ausgeführt, dass mich der Gedanke, die Lehre von der atmosphärischen Strahlenbrechung zu fördern, schon seit dem Jahre 1857 ernstlich beschäftigte, wo ich mich entschloss, aus eigenen Mitteln und mit Unterstützung von zehn tüchtigen meiner damaligen Zuhörer zunächst Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die mit der Höhe eintretenden Veränderungen der Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre anzustellen, um hiedurch eine bessere Grundlage für eine Refraktions-theorie zu gewinnen, als die bis dahin von den bedeutendsten Forschern wie Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock u. A. entwickelten Theorien der astronomischen Refraktion aufzuweisen hatten.

Meine im Jahre 1857 begonnenen Arbeiten kamen erst im Jahre 1862 zum Abschluss in der bei J. G. Cotta dahier erschienenen Schrift „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre.“ Diese Schrift enthält als wichtigste Ergebnisse: erstens den Nachweis einer täglichen Periode der barometrisch bestimmten Höhenunterschiede mit Erklärung derselben aus der Wärmestrahlung des Bodens, und zweitens eine aus den bis dahin bekannten auf Bergen und in freien Luftschichten beobachteten Temperaturen und Barometerständen wissenschaftlich abgeleitete Relation zwischen den absoluten Temperaturen (θ, θ_0), den Drückungen (p, p_0), den Dichtigkeiten (ϱ, ϱ_0) und den Höhen (h, h_0) der als ruhend und konzentrisch geschichtet gedachten Atmosphäre. Diese Relation, welche nach meiner Anschauung die physikalische Konstitution der Atmosphäre jedenfalls mit der für die Berechnung der in den grössten Zenithdistanzen wirksamen astronomischen Refraktionen erforderlichen Genauigkeit ausdrückt, lautet:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{h}{h_0}$$

Es verhalten sich demnach die gegebenen Punkten entsprechenden absoluten Temperaturen wie die Höhen der auf diesen Punkten ruhenden atmosphärischen Schichten und es folgt hieraus, wenn man $\Theta = 272,8 + t$ $\Theta_0 = 272,8 + t_0$ und $h_0 - h = x$ setzt, ganz einfach die Formel:

$$t_0 - t = \frac{\Theta_0}{h_0} x = \frac{272,8 + t_0}{h_0} x$$

welche besagt, dass die Temperaturabnahme nach Oben dem Höhenunterschiede der beiden Beobachtungsorte proportional ist.)*

Auf diesen Ermittlungen über die physikalische Konstitution der Atmosphäre und der von Laplace in der *Mécanique céleste*, T. IV, p. 246 entwickelten Differentialgleichung der atmosphärischen Strahlenbrechung, in die ich lediglich das von mir aufgestellte Gesetz über die Aenderung der Luftdichtigkeit

$$\frac{q'}{q} = \left(\frac{h'}{h}\right)^5 = \left(\frac{h-x}{h}\right)^5 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^5 = (1-y)^5$$

*) Genau dieselben Formeln, nur mit anderen Buchstaben geschrieben, hat siebzehn Jahre nach mir der K. K. österreichische Hauptmann und ehemalige Lehrer an der Kadettenschule zu Prag, W. Schlemüller, in seiner bei H. Dominicus dortselbst erschienenen Schrift „Der Zusammenhang zwischen Höhenunterschied, Temperatur und Druck in einer ruhenden nicht bestrahlten Atmosphäre“ aufgestellt, ohne von den Ergebnissen meiner Untersuchungen, die doch in und ausserhalb Deutschland so grosse Anerkennung und Verbreitung gefunden hatten, die geringste Notiz zu nehmen. Auf meinen am 9. Dezember 1879 an Herrn Schlemüller geschriebenen Brief erhielt ich am 28. desselben Monats Antwort, in der folgende Sätze enthalten sind: „Es kann mir nur sehr schmeichelhaft sein, dass ein so vorzüglicher Beobachter der einschlägigen Verhältnisse der Atmosphäre wie Sie zu denselben Folgerungen gekommen ist wie ich, und sie durch die Praxis bestätigt gefunden hat. Ich bin einer solchen Anerkennung nicht gewohnt, da meine Abhandlung sowohl von der Akademie der Wissenschaften zu Wien, sowie von einer Reihe der bedeutendsten naturwissenschaftlichen Zeitschriften, als nicht zur Veröffentlichung geeignet, zurückgewiesen wurde. Der Schwerpunkt meiner Abhandlung liegt jedoch nicht in der Ableitung der barometrischen Formeln, welche jedermann erhalten musste, der an das Gesetz glaubte, die Temperaturabnahme sei proportional dem Höhenunterschiede, sondern darin, dass ich mit Hilfe der dynamischen Gastheorie bewiesen habe, dass diese Abnahme dem Höhenunterschiede proportional sein muss. In erster Linie Offizier, kann ich meinen wissenschaftlichen Arbeiten nur wenig Zeit und Mittel zuwenden; dieses mag auch entschuldigen, dass ich Ihr mir aus vielfachen Citaten bekanntes Werk nicht studiert habe; nach dessen Studium werde ich in einer eventuellen Neuauflage der Abhandlung auf Ihre Priorität bezüglich der Ableitung von $p : p_0 = h^6 : h_0^6$ hinweisen.“ Wer sich weiter über den Prioritätsstreit zwischen mir und Herrn W. Schlemüller unterrichten will, kann dieses durch Nachlesen meiner bei G. Franz in München erschienenen Brochüre „Die physikalische Konstitution der Atmosphäre nach der Theorie des K. K. Hauptmanns Herrn W. Schlemüller in Prag,“ welche meinen am 3. Januar 1880 in der K. B. Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vortrag für ein grösseres Publikum wiedergibt.

einführte, beruht die Entwicklung meiner bekannten Formeln sowohl für die astronomische wie für die terrestrische Refraktion, und von den darin vorkommenden Konstanten α und m habe ich nach § 7 meiner Abhandlung vom Jahre 1864 für die erstere ausdrücklich den von Bessel aus den Bradleyschen Beobachtungen abgeleiteten Wert ($\log \alpha = 6,4455264$) beibehalten, welcher für den Barometerstand $\beta_0 = 751,71$ Millimeter und die Lufttemperatur $\tau_0 = 9^{\circ},31$ C gilt. Nur für die zweite Konstante m , welche das Verhältniß der Atmosphärenhöhe h zum Erdkrümmungshalbmesser r_0 ausdrückt, habe ich mir erlaubt, statt des berechneten Werts 0,007478 den kleineren 0,007464 zu setzen, weil hiedurch die aus meiner Theorie berechneten Refraktionswerte den von Bessel aus der Erfahrung abgeleiteten mittleren Refraktionen noch etwas besser sich anschlossen, als es ohnehin schon der Fall war. Die Berechtigung zu dieser minimalen Aenderung ist nicht zu bezweifeln.

Die Berechnung der Refraktionen für grosse Zenithdistanzen von 83° bis 90° und namentlich von 87° bis 90° ist allerdings umständlich und mühsam, und ich würde die dazu dienenden Formeln, wenn ich sie nochmals aufzustellen hätte, vielleicht abkürzen in der Weise, wie es E. Pucci in seinen „*Fundamenti di Geodesia*“ (Mailand 1883) oder F. R. Helmert in seinen „*Theorien der höheren Geodäsie*“ (Leipzig 1884) oder endlich Th. v. Oppolzer in seiner „*Astronomischen Refraktion*“ (Wien 1886) gethan, indem ich den Ausdruck für das Differential der Refraktion in zwei Faktoren zerlegte, von denen der erste nur am Beobachtungsorte unmittelbar aufzufindende Grössen enthielte, der andere aber eine Funktion der Veränderlichen wäre, die sich mittelst des Taylor'schen Satzes in eine schnell konvergierende Reihe verwandeln lässt. So lange jedoch die Astronomen noch die Bessel'schen oder diesen ähnliche Refraktionstabellen benutzen, um hieraus die zu gegebenen Zenithdistanzen, Baro- und Thermometerständen gehörigen Refraktionen in einfacher Weise zu berechnen, liegt meines Erachtens kein Bedürfnis einer neuen Entwicklung vor. Meine alte Ableitung der Formeln für die mittleren astronomischen Refraktionen hat ihre Schuldigkeit gethan, indem sie zeigte, dass die beobachteten Bessel'schen mittleren Refraktionen auch den Anforderungen der Theorie genügen, welche ich aus meiner die natürlichen Verhältnisse genau genug ausdrückenden Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmo-

sphäre streng wissenschaftlich entwickelt habe. (Die einzige bei $89\frac{1}{2}^{\circ}$ Zenithdistanz vorkommende und $12'',2$ betragende grössere Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung, fällt, wie seinerzeit schon bemerkt worden ist, wohl nur der Beobachtung zur Last.)

In neuester Zeit (1886) hat mein leider so früh verstorbener Freund und Kollege, Prof. Theodor v. Oppolzer, in der schon erwähnten akademischen Abhandlung über die astronomische Refraktion gegen meine Annahme über die Konstitution der Atmosphäre einige Einwendungen erhoben, welche die mit der Höhe sich ändernde Wärmeverteilung, die Höhe der Atmosphäre selbst und die an deren Grenzen herrschenden Temperaturen betreffen, von denen die der oberen Grenze angehörige auch als die Temperatur des Weltraums bezeichnet wird. Diese Einwendungen überraschten mich einigermassen, da Oppolzer seine erste Entwicklung der astronomischen Refraktion¹⁾ im Wesentlichen auf meine Relationen gestützt hatte, denen er jahrelang und namentlich in der Zeit sehr zugeneigt war, als die bereits erwähnten, auf ganz anderem Wege erhaltenen und mit den meinigen vollständig übereinstimmenden Formeln des Hauptmanns W. Schlemüller bekannt wurden. Es wird mir deshalb erlaubt sein, hier auf jene Ausstellungen Einiges zu erwidern.

Ueber den ersten Punkt, die Abnahme der Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe, hat sich Th. v. Oppolzer zuerst im Mai 1884 in einem der Oesterreichischen Zeitschrift für Meteorologie einverleibten Vortrage „Ueber den Zusammenhang der Refraktion mit der Temperaturverteilung in der Atmosphäre“ geäußert, und diese Aeusserung nahm er in die zwei Jahre später erschienene Abhandlung über astronomische Refraktion unverändert auf. Hienach ist die Formel des Redners über die Temperaturabnahme lediglich auf die thermo- und barometrischen Messungen gestützt, welche Gay-Lussac, Welsh und namentlich Glaisher bei ihren Ballonfahrten angestellt haben; er schloss also die von mir zu meiner Formel über die Temperaturabnahme ebenfalls benützten Thermo- und Barometerstände, welche ausser mir Forscher wie Humboldt, Saussure, Ramond, D'Aubuisson u. A. auf Bergen beobachtet haben, deshalb aus, weil die daselbst gemessenen Temperaturen nach meinen (wie er sie nennt)

1) Vergl. die „vorläufige Mitteilung“ in den Astron. Nachrichten 1877, Nr 2135, S. 365.

„bahnbrechenden Beobachtungen und Discussionen“ stets von der Wärmestrahlung des Bodens beeinflusst sind. Dieser Einfluss war mir, der sein Dasein ja zuerst nachgewiesen hat, bei Aufstellung meiner Relationen über die physikalische Beschaffenheit der Atmosphäre selbstverständlich bekannt, ich wusste aber auch schon damals, dass dieser Einfluss aus dem Unterschiede der auf zwei über einander gelegenen Punkten zur nämlichen Zeit beobachteten Temperaturen nahezu verschwindet, während er in deren Summe (dem arithmetischen Mittel) verbleibt. Diesen Umstand hat Prof. v. Oppolzer übersehen, während ich (nach meinen „Beobachtungen etc.“ S. 120) die Ergebnisse der Ballonfahrten von Gay-Lussac, Welsh und Sacharow — die von Glaisher waren noch nicht gemacht, wenigstens nicht veröffentlicht — sehr wohl berücksichtigte. Ob es genügt, die Integrationskonstante C des aus der Oppolzer'schen Differentialgleichung $dt = \epsilon \cdot d\varphi$ hervorgegangenen Ausdrucks für die Temperatur t in der Höhe, wo die Luftdichtigkeit φ stattfindet, lediglich nach den Ergebnissen der Glaisher'schen Ballonfahrt vom 5. September 1862 zu berechnen, wie es Oppolzer (nach S. 11 und 12 seiner Abhandlung) thut, bezweifle ich, weil die in Luftschiffen beobachteten Temperaturen ebensowenig fehlerfrei sind, als die auf Bergen erhaltenen; denn die Ballonfahrten gehen meist so rasch aufwärts, dass die Thermometeranzeigen nicht schnell genug den Temperaturänderungen folgen können. Es werden also die Thermometer in rasch erstiegenen Höhen stets etwas wärmer sein als die Luftschichten, in denen sie abgelesen wurden, und es werden ebendeshalb auch die Temperaturunterschiede von Schichte zu Schichte etwas zu klein erhalten werden. Dass aber die Glaisher'schen Temperaturbeobachtungen nach der „Théorie de la chaleur“ von Fourier (p. 358 ff.) oder nach den Bemerkungen von Gylden über die Wärmestrahlung des Ballons in seinen „Untersuchungen über die Konstitution der Atmosphäre“ (Petersburg 1866, S. 17 ff.) verbessert worden wäre, ist nirgends zu lesen.

Uebrigens kommt es bei der theoretischen Bestimmung der atmosphärischen Strahlenbrechung nicht so sehr auf die mit der Höhe eintretende Aenderung der Temperatur als der Dichtigkeit an und letztere findet Oppolzer aus seiner Formel fast genau so wie ich aus der meinigen, wie das unten stehende Täfelchen zeigt, das folgende Entwicklung zur Grundlage hat.

Wenn ϱ die Dichtigkeit einer oberen Schichte bezeichnet, welche unter dem Drucke p steht und die Temperatur t hat; wenn ferner ϱ_0 , p_0 , t_0 in gleicher Weise der untersten auf dem Erdboden lagernden Luftschichte angehören, und wenn endlich C die vorhin erwähnte Integrationskonstante bedeutet, für die Oppolzer auf Seite 11 seiner Abhandlung über astronomische Refraktion für $t_0 = 11^0,2$ C. den Wert $C = -40^0,4$ C. findet, so folgt aus der daselbst entwickelten Gleichung (4) die Luftdichtigkeit

$$\varrho = \frac{t - C}{t_0 - C} \varrho_0 = \frac{40,4 + t}{40,4 + t_0} \varrho_0$$

Auf Seite 12 der Oppolzer'schen Abhandlung stehen nun die von ihm hienach berechneten Temperaturen t , welche den von Glaisher bei verschiedenen Barometerständen (beziehungsweise in verschiedenen Höhen) beobachteten Temperaturen ziemlich gleich sind, und durch Einführung der Werte von t in die vorstehende Formel ergeben sich die Luftdichtigkeiten ϱ . Dabei nimmt Oppolzer wie Glaisher für den dem Abfahrtsort A des Ballons entsprechenden Barometerstand von 27,5 engl. Zoll oder 0,70 Meter die Luftdichtigkeit $\varrho_0 = 1$ an. Dieselbe Annahme muss auch ich machen, wenn ich die Luftdichtigkeit nach meiner in den Astron. Nachrichten Nr 1478, S. 210 enthaltenen Formel (3)

$$\varrho = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot \varrho_0 = \left(\frac{p}{27,5}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot \varrho_0$$

berechnen will. Aus der nachfolgenden Zusammenstellung ergeben sich unmittelbar nur die Aenderungen der Temperatur und der Luftdichtigkeit für Höhen, die vom Abfahrtsorte des Glaisher'schen Ballons aus gezählt sind und für welchen $\varrho_0 = 1$ ist. Für unseren nächstliegenden Zweck der Vergleichung der von Oppolzer und von mir nach unseren Formeln berechneten Luftdichtigkeiten genügt dieses auch. Gleichwohl habe ich in der folgenden Tabelle eine Reduction der Höhen und der Dichtigkeiten auf die Meeresfläche vorgenommen, d. h. ich berechnete aus den für A und die Meeresfläche gegebenen Daten den Höhenunterschied beider und setzte die Luftdichtigkeit ϱ_0 am Meere der Einheit gleich, statt in 686 m Höhe.

Nr	Barometer-stand		Nach Oppolzer		Nach Bauernfeind		Meeres-höhen in Meter	Reduzierte Luft-dichtigkeiten nach	
	Zoll	Meter	Temp. C.	Dichtigkeit	Temp. C.	Dichtigkeit		Oppolzer	Bauernfeind
0	29,9	0,76					0	1,0000	1,0000
1	27,5	0,70	+ 11,2	1,0000	+ 11,5	1,0000	686	0,9338	0,9338
2	25,0	0,60	+ 7,2	0,9225	+ 7,0	0,9236	1964	0,8614	0,8624
3	22,5	0,57	+ 3,1	0,8430	+ 2,2	0,8460	2365	0,7871	0,7900
4	20,0	0,51	— 1,2	0,7597	— 3,2	0,7669	3252	0,7093	0,7161
5	17,5	0,45	— 5,5	0,6764	— 9,1	0,6862	4245	0,6316	0,6407
6	15,0	0,38	— 9,9	0,5911	— 15,8	0,6034	5567	0,5520	0,5635
7	12,5	0,30	— 14,6	0,5000	— 23,5	0,5184	7415	0,4669	0,4841

Wie man hieraus entnimmt, theilte Glaisher aus seinen Beobachtungen nur so viel mit als nötig war, um die Barometerstände und Temperaturen (damit auch die Höhen über A) zu finden, welche einer Abnahme der Luftdichtigkeit von 1 in A bis auf 0,5 in 7415 Meter Höhe entsprechen. Ein Vergleich der beiden letzten Spalten der vorstehenden Tabelle zeigt deutlich genug, dass bis zu dieser Höhe die Dichtigkeiten einer normalen Atmosphäre, wie sie aus meinen und Oppolzers Formeln hervorgehen, einander fast gleich und jedenfalls nur so wenig von einander verschieden sind, dass sie einen bemerkenswerten Einfluss auf die Refraktionsberechnungen nicht ausüben können. Daher rührt auch die auffallende Annäherung der von Oppolzer im Jahre 1886 berechneten mittleren astronomischen Refraktionen an die meinigen aus dem Jahre 1864 und an die noch viel älteren auf Beobachtungen beruhenden Bessel'schen mittleren Refraktionen.

Gehen wir zu dem zweiten, auf die Höhe der Atmosphäre sich beziehenden Einwand über, so bedarf derselbe keiner weitläufigen Erörterung. Th. v. Oppolzer findet die von mir in meine Formeln eingeführte Atmosphärenhöhe h , welche sich nur auf etwa 50 Kilometer erstreckt, viel zu klein: Diese Höhe sei infolge der eine noch merkliche reflektierende und brechende Kraft der Atmosphäre voraussetzenden Dämmerungserscheinungen auf wenigstens 100 Kilometer und wegen des Aufleuchtens der Sternschnuppen sogar auf 500 Kilometer auszudehnen.

Bei der Aufstellung der Formel für die Höhe der Atmosphäre in verschiedenen Breiten ψ ging ich von zwei Voraussetzungen aus: erstens,

dass die Temperatur der Atmosphäre gleichmässig abnehme und zweitens, dass die Oberfläche der letzteren, welche da sich befindet, wo die lichtbrechende Kraft der Luft unmerklich wird, eine andere Abplattung habe, als die Erdoberfläche. Hienach fand ich (vergl. Beob. 1862, S. 123, Gl 75) die Höhe

$$h = 25100^t (1 + 0,14734 \cos 2\psi) = 48920^m (1 + 0,14734 \cos 2\psi),$$

woraus für den Pol eine Atmosphärenhöhe von 41,7 km (5,6 geogr. Meilen), für die Breite von 45° eine Höhe $h = 48,9$ km (6,6 geogr. Meilen) und für den Aequator eine solche von 56,1 km (7,5 geogr. Meilen) folgt. Aus dem Aufbaue der vorstehenden Formel hätte Prof. v. Oppolzer, wenn es ihm nicht entgangen wäre, eben so gut wie Prof. A. Ritter und Prof. F. R. Helmert¹⁾ entnehmen sollen, dass ich die Atmosphärenhöhe lediglich als ein geeignetes Mass für die Temperaturabnahme in den Luftschichten betrachte, welche noch ein wirkliches Lichtbrechungsvermögen besitzen. Wenn man aber dieses Vermögen nach dem Strahlenbrechungskoeffizienten beurteilen darf, so wird dieser in den Meereshöhen

100 m	4000 m	8000 m	12000 m	16000 m	32000 m	48000 m
-------	--------	--------	---------	---------	---------	---------

woselbst nach meiner Aufstellung die Luftdichtigkeiten stattfinden:

1,0000	0,6557	0,3955	0,2489	0,1265	0,0054	0
--------	--------	--------	--------	--------	--------	---

nach der schon auf Seite 546 dieser Abhandlung erwähnten Formel:²⁾

0,0850	0,0611	0,0416	0,0282	0,0179	0,0013	0
--------	--------	--------	--------	--------	--------	---

und daraus geht zur Genüge hervor, dass für den vorliegenden Zweck Atmosphärenhöhen von 40 bis 50 Kilometer völlig ausreichend sind, wenn man sie in der Rechnung als absolute Grössen benützen will. Sie sind indessen von mir in den Entwicklungen der astronomischen und der terrestrischen Strahlenbrechung mit einer einzigen Ausnahme als Ver-

1) Vgl. Wiedemanns Annalen 1878, Bd. 5, S. 413 und Helmerts „Theorien der höheren Geodäsie“, Bd. 2, S. 587.

2) Diese Formel steht in den Astron. Nachrichten des Jahres 1866, Bd. 67, S. 75. In neuerer Zeit setze ich dafür lieber den Ausdruck (18) auf Seite 47 desselben Bands, nämlich

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2k = \frac{5a}{m} (1 + my)(1 - y)^4.$$

hältniszahlen behandelt worden. Denn schon in den Relationen über die Konstitution der Atmosphäre kommt bloß das Verhältnis $h : h_0$ vor, welches ohne Aenderung seines Werts gestattet, Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl zu multiplizieren, also die Atmosphärenhöhe h beliebig gross anzunehmen. Ferner ist, weil an der oberen Grenze der irdischen Dunsthülle die Luftdichtigkeit zweifelsohne aufhört, das Integral der Differentialgleichung der astronomischen Refraktion zwischen den Grenzen $\varphi = 1$ und $\varphi = 0$ zu nehmen, die Atmosphäre mag so hoch sein als sie will. Endlich hätte ich auch in den Formeln für die terrestrische Refraktion wie in denen für die astronomische die Höhe h ganz weglassen und durch das Produkt mr_0 ersetzen können, wenn ich es nicht bequemer gefunden hätte sie hier beizubehalten. In der Konstanten m , welche dafür in die Rechnung einzutreten hat und in beiderlei Formeln nicht zu entbehren ist, steckt allerdings die Höhe h , und ich habe deshalb in meiner Abhandlung vom Jahre 1866 (A. N. Nr 1589, S. 71) die auf die Breite von Königsberg, sowie auf die Temperatur und den Barometerstand der Bessel'schen mittleren Refraktionen reduzierten Werte von $m = m_0$ für alle Breiten von 0° bis 90° in einer Tafel zusammengestellt, um die wegen des Faktors $(1 + 0,14734 \cos 2\psi)$ etwas umständliche Berechnung der Atmosphärenhöhe überflüssig zu machen.

Anbelangend Oppolzers dritten Einwand gegen meine Aufstellung über die Konstitution der Atmosphäre, dass sie die Temperatur an der oberen Luftgrenze, welche auch die Temperatur des Weltraums genannt wird, mit -273° viel zu hoch angebe, da dieselbe nach seiner Formel nur 45° , nach Fourier's Schätzung 50° bis 60° und nach Versuchen von O. Frölich etwa 57° C. unter Null betrage, so will ich hierauf nicht damit entgegen, dass ich eine stattliche Reihe bedeutender Forscher nennen könnte, welche nahezu dieselbe oder eine noch niedrigere Temperatur gefunden haben, sondern nur anführen, dass die Temperatur von $-272^\circ,8$ C. lediglich eine Folge des bekannten Satzes ist, dass die Grenze der Atmosphäre da liegt, wo die Elasticität der Luft aufhört, also der Ausdruck $272,8 + t = 0$ ist. Dieser Satz beruht allerdings auf der Voraussetzung, dass das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz für die ganze Atmosphäre gelte. Wenn aber auch, wie es wahrscheinlich ist, diese Annahme nicht allgemein zutrifft, so wird von der Richtigstellung jenes Gesetzes zwar die

von mir nur gelegentlich bestimmte Temperatur des Weltenraums, keineswegs aber die für die Refraktion allein wichtige Dichtigkeit der Luft an der oberen Grenze der Erdatmosphäre betroffen; denn diese Dichtigkeit ist Null, ob die Welt-Temperatur — 50° C. oder — 273° C. beträgt.

Ungefähr um dieselbe Zeit als Th. v. Oppolzer seine Erinnerungen gegen meine Theorie vorbrachte, am 15. März 1884, schrieb mir Herr Professor Helmert aus Aachen, dass er behufs der Bearbeitung des letzten Kapitels seiner „Mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie“ meine Abhandlungen über atmosphärische Strahlenbrechung eingehend studiert und in seine allgemeinen Entwicklungen meine „wohlbegründeten Annahmen für den mittleren Zustand der Atmosphäre“ eingeführt habe. Dabei hätte er meine in den Astronomischen Nachrichten von 1866, Nr 1589 entwickelten und auch auf Seite 25 und 31 der „Zweiten Mitteilung über Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion“ enthaltenen Formeln für die Strahlenbrechung r und die von einem Orte (H) aus trigonometrisch zu bestimmende Höhe x eines Punkts (K) in der Atmosphäre, welche einem in Bogenmass ausgedrückten Winkel φ und einer Zenithdistanz z entsprechen, völlig bestätigt gefunden, nicht aber diejenigen für Δz und $\Delta z'$, welche auf Seite 29 stehen und Teile der Refraktionssumme $r = \Delta z + \Delta z'$ sind. Weiter beanstandet Prof. Helmert die Ausdrücke für die Atmosphärenhöhe h und die davon abhängige Konstante m als fehlerhaft, weil sie der von mir aufgestellten Grundgleichung $h = h_0 \varphi^{\frac{1}{5}}$ nicht entsprechen.

In meiner Antwort auf den erwähnten Brief vom 22. März 1884 bemerkte ich, dass ich den zuletzt gerügten Fehler, als er mir im August 1883 aufgefallen war, bereits am 24. Oktober desselben Jahres, also fünf Monate vor der Helmert'schen Wahrnehmung, der in Rom tagenden internationalen Gradmessungsgesellschaft angezeigt und bei nächster Gelegenheit zu verbessern versprochen habe. Dieses Versprechen ist nunmehr im Abschnitte A. gegenwärtiger Abhandlung erfüllt worden. Mit der weiteren (auch in den 2. Band, S. 588 seines oben genannten Werkes übergegangenen) Behauptung Helmerts, dass meine ursprünglich in den Astron. Nachrichten (Bd. 67, Nr 1589, S. 65) aufgestellten und dort mit (64) und (65) bezeichneten Formeln für Δz und $\Delta z'$ nicht ganz korrekt

seien, verhält es sich wie folgt. Zieht man nämlich nur die beiden ersten Glieder des Ausdrucks (64) in Betracht, so heisst er

$$\Delta z = \frac{1}{2} v \varphi \left(1 - \frac{4v - m(5 - 6v)}{3v} p_0 \varphi + \dots \right)$$

und es geht, wenn man die mit v behafteten Glieder absondert und für $m p_0$ seinen Wert $\cotg z$ setzt, derselbe über in

$$\Delta z = \frac{5}{6} \varphi^2 \cotg z + \frac{1}{2} v \varphi \left(1 - \frac{4 + 6m}{3m} \right) \cotg z$$

Professor Helmholtz verlangt nun, dass für $v = 0$ auch $\Delta z = 0$ werde. Dieses ist hier nicht der Fall, indem für $v = 0$ das Glied $\frac{5}{6} \varphi^2 \cotg z$ bestehen bleibt, welches nach Helmholtz eigener Berechnung für die Refraktion auf der 20 Kilometer langen und 1080 Meter ansteigenden Linie Höhensteig-Kampenwand nur den zehnten Teil einer Sekunde beträgt. Im Hinblick auf die Geringfügigkeit des ersten Glieds des letzten Ausdrucks und in der Erwägung, dass der Koeffizient v in einer ruhigen konzentrisch geschichteten Atmosphäre nur an deren oberen Grenze Null werden kann, das Helmholtz'sche Verlangen demnach hier gar nicht einmal berechtigt ist, kann ich in den Vernachlässigungen, die ich mir (laut Anzeige) schon bei der Entwicklung der Näherungsformel für Δz gestattet habe, unbedenklich noch etwas weiter gehen und im zweiten Gliede des vorletzten Ausdrucks für Δz auch den Posten $m(5 - 6v)$ weglassen. Ich folge hierin nur dem Beispiel Helmholtz und komme deshalb zu dem gleichen Resultat wie er, nämlich zu der Formel

$$\Delta z = \frac{1}{2} v \varphi \left(1 - \frac{4 \varphi \cotg z}{3m} + \dots \right)$$

Hieraus dürfte zu entnehmen sein, dass es nicht gerade notwendig war, die an meinem Gusswerke vorgenommene kleine Ziselierarbeit so stark zu betonen, wie es auf Seite 588 des 2. Bands der „Theorien der höheren Geodäsie“ geschehen ist. Da mein Brief vom 22. März 1884 noch vor dem Abdruck der erwähnten Stelle in Aachen eingetroffen war, wie aus der Anmerkung auf S. 589 hervorgeht, so hätte sie wenigstens etwas gemildert werden können. Um jedem Missverständnis bezüglich der eben bezeichneten Anmerkung vorzubeugen, wiederhole ich, dass dieselbe nicht etwa besagen will, ich sei von Aachen aus auf den Fehler in m erst

aufmerksam gemacht worden. sondern nur, dass ich Herrn Professor Helmert die Richtigkeit seiner gleichen Wahrnehmung auf Anfrage einfach bestätigt habe. Schliesslich bin ich durch die Anmerkung auf S. 605 des genannten Werkes, dass die Temperaturangaben in der „Mitteilung II“ und in der Abhandlung „Neue Beobachtungen etc.“, welche für denselben Ort und Zeitpunkt die nämlichen sein sollten, nicht unerheblich von einander abweichen, noch zu folgender Erklärung veranlasst: Diese auf die Gesamtergebnisse keinen Einfluss üben den Abweichungen rühren davon her, dass auf den Stationen zwei Thermometer zur Bestimmung der Lufttemperatur aufgestellt waren, ein besonderes Quecksilberthermometer und das trockene Thermometer des August'schen Psychrometers. Da nun auf jeder Station 4 Beobachter paarweise Tag und Nacht abwechselnd beobachteten, so mag es wohl vorgekommen sein, dass manchmal die Temperaturen, entgegen der Vorschrift, am Psychrometer oder sogar am Thermometer des Aneroids statt am besonderen Quecksilberthermometer abgelesen und in das Beobachtungsheft eingetragen wurden.

Habe ich im Vorhergehenden nur von Ausstellungen gesprochen, welche an meiner Theorie der Strahlenbrechung gemacht wurden, so ist es mir wohl auch gestattet, eine Zuschrift des Superintendenten eines grossen Vermessungsinstituts (der U. S. Coast and Geodetic Survey) in Nordamerika, Mr. C. P. Patterson in Washington mitzuteilen, welche eine auf Erfahrung beruhende unbedingte Anerkennung meiner Refraktions-theorie enthält. Der genannte Herr schrieb mir dd. Washington, 8. December 1880 in englischer Sprache Folgendes:

„Sehr geehrter Herr! So eben habe ich Ihr sehr interessantes Werk über terrestrische Refraktion¹⁾ empfangen, und ich sage Ihnen hiemit herzlichen Dank für Ihre gütige Aufmerksamkeit. Mit grossem Vergnügen benachrichtige ich Sie, dass Ihre mir aus früheren Publikationen wohl-bekannte Refraktionstheorie unseren Beobachtungen zugrunde gelegt wurde, und erlaube mir, Ihre Aufmerksamkeit auf die völlige Uebereinstimmung der Formeln 18 und 19 (Seite 12), dann der Formel 15a (Seite 81) Ihres Werkes mit den auf Seite 11 und beziehungsweise Seite 10 der beifolgenden Schrift unseres Assistenten C. A. Schott hinzulenken,²⁾ sowie darauf, dass Ihre Höhen-

1) „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion.“ Erste Mitteilung, Verlag der K. Akademie der Wissenschaften, 1880.

2) „Methods and Results, Contributions to Hypsometry.“ Washington, Government printing office, 1879. Die Formeln 18 und 19 beziehen sich auf die vorhin besprochenen Werte Δz und $\Delta z'$, während 15a den von mir entwickelten Ausdruck für die trigonometrisch zu bestimmende Höhe x betrifft.

und Refraktions-Diagramme fast genau unseren eigenen entsprechen. Es ist eine Quelle grosser Befriedigung für mich, dass die graphischen Darstellungen unserer Messungs-Ergebnisse den Ihrigen so nahe parallel verlaufen, und ich spreche Ihnen hiemit meine ganz besondere Anerkennung für das gründliche und erschöpfende Verfahren aus, das Ihren Forschungen und Erörterungen eigen ist. Mit grösster Hochachtung C. P. Patterson.“

Es bleibt mir nur noch übrig, einige Worte über das Verhältnis zwischen Theorie und Beobachtung der terrestrischen Refraktion zu sagen. Alle Entwicklungen über meteorologische Vorgänge in der Atmosphäre setzen einen bestimmten Zustand der letzteren voraus, und es gelten die Entwicklungen nur für diesen, nicht für dessen Störungen. Demnach sind auch die Formeln für Refraktion, trigonometrische und barometrische Höhenmessung von der physikalischen Konstitution der Atmosphäre abhängig, wie sie bei einem mittleren (ruhigen) Zustand derselben stattfindet. In Ermanglung eines über jeden Zweifel erhabenen Gesetzes habe ich im Jahre 1862 den bekannten Näherungsausdruck für dasselbe aufgestellt, welcher der Wahrheit so nahe als möglich kommt und daher als Stellvertreter des z. Z. noch fehlenden Gesetzes gelten kann. Refraktionsbeobachtungen, trigonometrische und barometrische Höhenmessungen werden zwar nur bei guter Witterung, an hellen und windlosen Tagen gemacht, gleichwohl ist auch in diesen Zeiten der Zustand der Atmosphäre meistens nicht der normale, namentlich nicht in den untersten Luftschichten, die von der Wärmestrahlung des Erdbodens sehr stark beeinflusst werden. Es kommt vor, dass die absolute Temperatur mit der Höhe gleichmässig abnimmt, wie es das Gesetz verlangt, es kommt aber ebenso oft vor, dass das Gegenteil stattfindet oder die Temperatur in den untersten Luftschichten bis zu einer gewissen Höhe sich gleich bleibt. In dem ersteren Falle wendet die Lichtkurve der Erdoberfläche ihre konkave, in dem zweiten ihre konvexe Seite zu, in dem dritten geht sie in eine gerade Linie über. Diese von vielen Seiten bestätigte Beobachtung hat mich veranlasst, in der Mitteilung II (1883, Seite 43) den Vorschlag zu machen, das von mir aufgestellte Dichtigkeitsgesetz erst in der Höhe s eintreten zu lassen, bis zu welcher die gleichmässige Dichtigkeit der untersten Luftschichten reicht. Wie gross s unter verschiedenen lokalen und meteorologischen Verhältnissen wird, ist noch nicht genügend erforscht, so schätzenswert auch die von mehreren Autoren vorliegenden und insbesondere die auf der Russischen Sternwarte

Pulkowa, sowie auf der Baltischen Eisenbahn vom Obersten Zingerle angestellten und oben (Seite 545) erwähnten Versuche sind; es dürfte sich also empfehlen, in dieser Richtung weiter zu forschen.

Auch der Wärmestrahlung des Bodens, von der die täglichen Perioden der barometrisch und trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede abhängen, sollten die Geodäten ihre stete Aufmerksamkeit widmen, um deren Berechnung für verschiedene lokale, zeitliche und meteorologische Verhältnisse möglich zu machen. Einer der Wege, die zu diesem Ziele führen können, ist in meinen „Beobachtungen und Untersuchungen etc.“ vom Jahre 1862 angegeben. Auf demselben Wege kann man auch nach den Diagrammen der trigonometrisch bestimmten Höhenunterschiede die Temperaturdifferenzen berechnen, welche deren tägliche Perioden bedingen. Wenn hier zunächst nur von jenen trigonometrischen Höhenmessungen die Rede ist, bei welchen aus ökonomischen Gründen die Lotabweichung und Fernrohrbiegung nicht berücksichtigt werden kann, so versteht es sich wohl von selbst, dass die von diesen Fehlern freien Messungen, welche in Verbindung mit sorgfältigst ausgeführten geometrischen Nivellementen zur Feststellung von Abständen zwischen den mit „Geoid“ und „Referenzellipsoid“ bezeichneten Erdoberflächen dienen, für den vorliegenden Zweck nicht nur nicht auszuschliessen, sondern vorzugsweise zu benützen sind.

Dass die im Verlaufe eines Tags zwischen zwei gegebenen Punkten stattfindenden Refraktionen sich derart verändern, dass sie vom Morgen bis zum Mittag kleiner und von da bis zum Abend wieder grösser werden, ist bekannt und ich selbst habe die im Jahre 1849 von den damaligen Stabsofficieren, späteren Generalen Bayer und v. Hesse im Harz auf den Stationen Kupferkuhle und Brocken ausgeführten Refraktionsbeobachtungen in meine Abhandlung über terrestrische Refraktion (Astron. Nachr. von 1866, Nr 1590, S. 83) aufgenommen, um zu zeigen, dass auch diese Beobachtungen meine Theorie insoferne bestätigen, als nach ihr die Refraktionen $\Delta z'$ auf der oberen Station jederzeit kleiner sein müssen als die zur gleichen Zeit auf der unteren Station stattfindenden Refraktionen Δz . Wenn ich nun in den „Mittheilungen“ über die Ergebnisse aus meinen Beobachtungen der terrestrischen Refraktion nur von diesen allein sprach, so lag dieses in meinem Thema und es konnte mir dabei

nicht in den Sinn kommen, wie einige Geodäten vermuteten, zu glauben, ich sei der Erste gewesen, der jene Veränderlichkeit wahrgenommen hat. In dieser Hinsicht beanspruche ich kein anderes Verdienst als das, welches mir mein Freund Th. v. Oppolzer auf Seite 13 seines schon erwähnten Vortrags über Refraktion und Temperaturverteilung mit folgenden Worten zuerkannt hat: „Die terrestrische Refraktion, die gewissermassen einen Bruchteil der astronomischen darstellt, wird wie diese einer täglichen Periode unterworfen sein, ein Umstand, der in seinen Umrissen zwar schon lange den Geodäten bekannt war, der aber erst wieder in Bezug auf seine Gesetzmässigkeit und besonders auf sein Verhalten in der Nacht durch die erschöpfenden Arbeiten v. Bauernfeind's in das rechte Licht gesetzt wurde.“

Tafel Nr 1.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Höhensteig und Kampenwand.

A. Beobachtet in Höhensteig.

Nr	1885, Juli		Luft-	Absol.	Re-		Höh.	Nr	1885, Juli		Luft-	Absol.	Re-		Höh.
			druck	Temp.							druck	Temp.			
			mm	°C	Beob.	Ber.	Diff.				mm	°C	Beob.	Ber.	Diff.
		h					m			h					m
1	9. Nm	4.30	723,5	297,7	59,2	55,3	+ 0,9	42	11. Nm	3. —	722,2	298,7	64,6	55,0	+ 0,3
2	—	5. —	723,7	296,9	69,1	55,4	— 0,1	43	—	3.30	722,1	297,5	66,2	55,2	+ 0,2
3	—	5.30	723,7	296,7	69,6	55,4	— 0,1	44	—	4. —	721,9	298,5	65,8	55,0	+ 0,2
4	—	6. —	723,7	296,5	70,0	55,4	— 0,1	45	—	4.30	721,8	297,7	70,6	55,1	— 0,2
5	—	6.30	723,6	296,7	72,2	55,4	— 0,3	46	—	5. —	721,9	297,0	68,8	55,3	— 0,0
6	9. Nm	7.0	723,7	295,9	73,6	55,5	— 0,5	47	11. Nm	5.30	722,0	296,1	67,8	55,4	— 0,0
7	—	7.30	723,9	293,8	73,8	55,9	— 0,5	48	—	6. —	721,9	295,7	75,5	55,5	— 0,7
8	10. Vm	9.30	724,2	295,1	66,3	55,7	+ 0,2	49	—	6.30	722,0	294,8	74,4	55,6	— 0,6
9	—	10. —	724,0	295,9	65,7	55,6	+ 0,3	50	—	7. —	722,0	293,8	74,1	55,7	— 0,5
10	—	10.30	723,9	296,6	65,3	55,4	+ 0,3	51	12. Vm	7.30	722,1	292,4	84,7	56,0	— 1,6
11	10. Vm	11. —	723,9	296,6	62,9	55,4	+ 0,6	52	12. Vm	8. —	722,0	293,2	78,6	55,8	— 0,9
12	—	11.30	724,0	297,5	65,0	55,3	+ 0,3	53	—	8.30	722,0	294,7	71,8	55,6	— 0,3
13	—	12. —	724,0	297,9	64,6	55,3	+ 0,4	54	—	10. —	721,7	296,6	66,9	55,3	+ 0,1
14	10. Nm	12.30	724,0	297,3	63,7	55,3	+ 0,5	55	—	10.30	721,7	297,0	66,7	55,2	+ 0,2
15	—	1. —	724,0	297,9	67,2	55,3	+ 0,2	56	—	11. —	721,6	297,8	67,5	55,1	+ 0,1
16	10. Nm	1.30	724,0	298,5	67,3	55,2	+ 0,2	57	12. Vm	11.30	721,7	298,4	66,7	55,0	+ 0,1
17	—	2. —	723,9	298,6	65,1	55,1	+ 0,3	58	—	12. —	721,6	298,4	65,7	55,0	+ 0,2
18	—	2.30	723,7	299,1	66,1	55,1	+ 0,2	59	12. Nm	1. —	721,4	299,9	67,3	54,8	+ 0,0
19	—	3. —	723,7	298,5	64,5	55,1	+ 0,4	60	—	1.30	721,7	299,9	64,8	54,8	+ 0,3
20	—	3.30	723,8	297,5	67,3	55,3	+ 0,1	61	—	2. —	721,4	299,4	65,6	54,9	+ 0,2
21	10. Nm	4. —	723,6	297,4	68,0	55,3	+ 0,0	62	12. Nm	2.30	721,2	300,1	66,3	54,8	+ 0,1
22	—	4.30	723,5	296,9	67,2	55,4	+ 0,1	63	—	3. —	721,1	300,1	65,1	54,8	+ 0,3
23	—	5. —	723,7	296,4	66,9	55,5	+ 0,2	64	—	3.30	721,0	299,5	64,8	54,8	+ 0,3
24	—	5.30	723,4	296,0	68,7	55,5	— 0,0	65	—	4. —	720,9	300,1	66,0	54,7	+ 0,2
25	—	6. —	723,4	295,8	70,0	55,5	— 0,1	66	—	4.30	720,7	299,5	66,1	54,8	+ 0,2
26	10. Nm	6.30	723,4	296,0	71,2	55,5	— 0,3	67	12. Nm	5. —	720,7	299,3	66,6	54,8	+ 0,1
27	—	7. —	723,4	293,7	75,4	55,8	+ 0,3	68	—	5.30	720,2	297,7	68,4	55,0	+ 0,0
28	11. Vm	8. —	723,3	292,2	64,6	56,1	+ 0,4	69	—	6. —	720,3	297,2	70,0	55,0	— 0,2
29	—	8.30	723,2	292,7	74,7	56,0	— 0,6	70	—	6.30	720,2	297,2	73,6	55,1	— 0,5
30	—	9. —	723,2	293,3	71,9	55,9	— 0,3	71	—	7. —	720,6	296,2	73,3	55,3	— 0,5
31	11. Vm	9.30	723,2	294,6	68,6	55,7	— 0,0	72	12. Nm	7.30	720,5	294,8	79,5	55,5	— 1,1
32	—	10. —	723,1	295,5	69,2	55,6	— 0,1	73	13. Vm	7. —	721,1	291,6	82,4	56,0	— 1,3
33	—	10.30	722,9	296,7	67,5	55,4	+ 0,1	74	—	7.30	720,8	292,7	82,8	55,8	— 1,3
34	—	11. —	722,8	296,8	66,8	55,3	+ 0,1	75	—	8. —	720,8	293,2	80,6	55,8	— 1,2
35	—	11.30	722,8	297,3	65,9	55,3	+ 0,3	76	—	8.30	720,7	293,7	74,5	55,7	— 0,6
36	11. Nm	12. —	722,6	297,8	64,5	55,2	+ 0,4	77	13. Vm	9. —	720,7	295,4	74,2	55,4	— 0,6
37	—	12.30	722,4	297,6	66,2	55,2	+ 0,2	78	—	9.30	720,7	296,2	70,2	55,3	— 0,2
38	—	1. —	722,4	298,6	64,1	55,1	+ 0,4	79	—	10. —	720,5	296,8	68,8	55,2	— 0,0
39	—	1.30	722,3	298,9	66,1	55,0	+ 0,2	80	—	10.30	720,6	297,7	67,0	55,1	+ 0,1
40	—	2. —	722,3	298,3	66,2	55,1	+ 0,2	81	—	11. —	720,4	299,0	65,8	54,9	+ 0,2
41	—	2.30	722,3	298,3	67,8	55,1	+ 0,0	82	—	11.30	720,5	299,4	63,9	54,8	+ 0,4

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Höhensteig nach Kampenwand beobachteten Refraktionen.

Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	12 1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2	7	7 1/2
1	82,4	84,7	64,6	74,7	71,9	66,3	65,7	65,3	62,9	65,0	64,6	63,7	67,2	67,3	65,1	66,1	64,5	67,3	68,0	59,2	69,1	69,6	70,0	72,2	73,6	73,8
2		82,8	78,6	71,8	74,2	68,6	69,2	67,5	66,8	65,9	64,5	66,2	64,1	66,1	66,2	67,8	64,6	66,2	65,8	67,2	66,9	68,7	70,0	71,2	75,4	79,5
3			80,6	74,5		70,2	66,9	66,7	67,5	66,7	65,7		67,3	64,8	65,6	66,3	65,1	64,8	66,0	70,6	68,8	67,8	75,5	74,4	74,1	
4						68,8	67,0	65,8	63,9										66,1	66,6	68,4	70,0	73,6	73,3		
Mittel	82,4	83,8	74,6	73,6	73,1	68,4	67,7	66,6	65,8	65,4	64,9	64,9	66,2	66,1	65,6	66,7	64,7	66,1	66,6	65,8	67,8	68,6	71,4	72,8	74,1	76,6
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
Komb. Mittel	82,4	81,1	76,7	73,7	72,0	69,4	67,6	66,7	65,9	65,4	65,0	65,3	65,9	66,0	66,0	66,0	65,6	65,9	66,3	66,5	67,5	69,1	71,0	72,8	74,4	76,6

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Höhensteig aus Höhensteig-Kampenwand.

Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	12 1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2	7	7 1/2
1	56,0	56,0	56,1	56,0	55,9	55,7	55,6	55,4	55,3	55,3	55,3	55,3	55,3	55,2	55,1	55,1	55,1	55,3	55,3	55,3	55,4	55,4	55,4	55,4	55,5	55,9
2		55,8	55,8	55,6	55,4	55,7	55,5	55,4	55,3	55,3	55,2	55,2	55,1	55,0	55,1	55,1	55,0	55,2	55,0	55,4	55,5	55,5	55,5	55,8	55,5	
3			55,8	55,7	55,3	55,3	55,3	55,2	55,1	55,0	55,0		54,8	54,8	54,9	54,8	54,8	54,8	54,7	55,1	55,3	55,4	55,5	55,6	55,7	
4						55,2	55,1	54,9	54,8										54,8	54,8	55,0	55,0	55,1	55,3	55,3	
Mittel	56,0	55,9	55,9	55,8	55,7	55,6	55,4	55,3	55,2	55,1	55,2	55,3	55,0	55,0	55,0	55,0	55,0	55,1	55,0	55,1	55,2	55,3	55,4	55,4	55,6	55,7
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
Komb. Mittel	56,0	55,9	55,9	55,8	55,7	55,6	55,4	55,3	55,2	55,1	55,2	55,2	55,1	55,0	55,0	55,0	55,0	55,1	55,1	55,1	55,2	55,3	55,4	55,4	55,6	55,7

**D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen
für Höhensteig-Kampenwand.**

Anzahl	7	7 ^{1/2}	8	8 ^{1/2}	9	9 ^{1/2}	10	10 ^{1/2}	11	11 ^{1/2}	12	12 ^{1/2}	1	1 ^{1/2}	2	2 ^{1/2}	3	3 ^{1/2}	4	4 ^{1/2}	5	5 ^{1/2}	6	6 ^{1/2}	7	7 ^{1/2}
1	-1,3	-1,6	+0,4	-0,6	-0,3	+0,2	+0,3	+0,3	+0,6	+0,3	+0,4	+0,5	+0,2	+0,2	+0,3	+0,2	+0,4	+0,1	+0,0	+0,9	-0,1	-0,1	-0,1	-0,3	-0,5	-0,5
2	-1,3	-0,9	-0,3	-0,6	-0,6	+0,0	-0,1	+0,1	+0,3	+0,4	+0,2	+0,2	+0,4	+0,2	+0,2	+0,0	+0,3	+0,2	+0,2	+0,1	+0,2	-0,0	-0,1	-0,3	+0,3	-1,1
3			-1,2	-0,6		-0,2	+0,1	+0,2	+0,1	+0,1	+0,2		+0,0	+0,3	+0,2	+0,1	+0,3	+0,3	+0,2	-0,2	-0,2	-0,0	-0,7	-0,6	-0,5	
4							+0,0	+0,1	+0,2	+0,4										+0,2	+0,1	-0,0	-0,2	-0,5	-0,5	
Mittel	-1,3	-1,5	-0,6	-0,5	-0,4	-0,0	+0,1	+0,2	+0,2	+0,3	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	+0,3	+0,2	+0,1	+0,3	+0,1	-0,0	-0,3	-0,4	-0,3	-0,8
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2
K.Mittel	-1,3	-1,2	-0,8	-0,5	-0,3	-0,1	+0,1	+0,2	+0,2	+0,3	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	-0,1	-0,3	-0,4	-0,5	-0,8

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der in Höhensteig beobachteten absoluten Lufttemperaturen.

Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	12 1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2	7	7 1/2	
1	291,6	292,4	292,2	292,7	293,3	295,1	295,9	296,6	296,6	297,5	297,9	297,3	297,9	298,5	298,6	299,1	298,5	297,5	297,4	297,7	296,9	296,7	296,5	296,7	295,9	293,8	
2		292,7	293,2	294,7	295,4	294,6	295,5	296,7	296,8	297,3	297,8	297,6	298,6	298,9	298,3	298,3	298,7	297,5	298,5	296,9	296,4	296,0	295,8	296,0	293,7	294,8	
3			293,2	293,7		296,2	296,6	297,0	297,8	298,4	298,4		299,9	299,9	299,4	300,1	300,1	299,5	300,1	297,7	297,0	296,1	295,7	294,8	293,8		
4							296,8	297,7	299,0	299,4										299,5	299,3	297,7	297,2	297,2	296,2		
Mittel	291,6	292,6	292,9	293,7	294,4	295,3	296,2	297,0	297,6	298,2	298,0	297,5	298,8	299,1	298,8	299,2	299,1	298,2	298,7	298,0	297,4	296,6	296,3	296,2	294,9	294,3	
Anzahl	1	2	3	3	2	3	4	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	2	
K.Mittel	291,6	292,4	293,0	293,7	294,5	295,3	296,2	297,0	297,6	298,0	297,9	298,0	298,6	299,0	299,0	299,1	298,9	298,6	298,4	298,0	297,4	296,7	296,4	295,9	295,1	294,3	

Tafel Nr. 2.

Refraktionen und Höhenunterschiede zwischen Kampenwand und Höhensteig.

A. Beobachtet auf Kampenwand.

Nr	1885, August		Luft-	Absol.	Re-		Höh.	Nr	1885, August		Luft-	Absol.	Re-		Höh.
			druck	Temp.	fraktion	Diff.					druck	Temp.	fraktion	Diff.	
			mm	°C	Beob.	Ber.					mm	°C	Beob.	Ber.	
1	16. Vm	h 9.—	637,2	282,8	39,2	56,4	+ 2,6	36	17. Nm	h 3.30	634,2	286,7	33,9	55,6	+ 2,8
2	—	9.30	637,2	282,5	38,8	56,4	2,4	37	—	4.—	634,2	286,6	33,6	55,6	2,9
3	—	10.—	637,5	283,6	39,5	56,3	2,3	38	—	4.30	634,1	286,6	33,5	55,6	2,9
4	—	10.30	637,4	283,1	36,1	56,4	2,6	39	—	5.—	634,0	286,6	31,1	55,6	3,1
5	—	11.—	637,3	284,0	35,7	56,2	2,7	40	—	5.30	634,2	286,1	33,4	55,7	2,9
6	16. Vm	11.30	637,2	284,0	35,8	56,2	+ 2,7	41	17. Nm	6.—	634,0	283,6	34,0	56,1	+ 2,8
7	—	12.—	637,2	283,8	36,5	56,2	2,6	42	19. Nm	1.30	629,4	278,3	35,5	56,6	2,8
8	Nm	1.—	637,2	284,2	35,2	56,2	2,8	43	—	4.—	629,5	277,3	36,4	56,7	2,7
9	—	1.30	637,1	284,1	33,7	56,2	2,9	44	—	4.30	629,4	277,6	35,8	56,7	2,8
10	—	2.—	636,9	285,2	32,8	56,0	3,0	45	—	5.—	629,4	277,7	38,2	56,7	2,5
11	16. Nm	2.30	637,0	285,5	34,0	56,0	+ 2,8	46	20. Vm	7.—	629,3	280,0	41,0	56,3	+ 2,2
12	—	3.—	637,1	285,3	34,8	56,0	2,8	47	—	7.30	629,2	279,3	43,5	56,4	1,9
13	—	3.30	636,8	285,7	39,7	55,9	2,3	48	—	8.—	629,2	280,1	42,3	56,3	2,0
14	—	4.—	636,8	286,1	34,2	55,9	2,8	49	—	8.30	629,3	280,4	42,0	56,2	2,1
15	—	4.30	637,0	285,9	34,2	55,9	2,8	50	—	9.—	629,3	282,9	40,7	55,8	2,2
16	16. Nm	5.—	636,9	285,5	33,4	56,0	+ 2,9	51	20. Vm	9.30	629,2	284,5	41,1	55,6	+ 2,1
17	—	5.30	637,0	285,8	34,6	55,9	2,8	52	—	10.—	629,2	283,2	39,4	55,8	2,3
18	—	6.—	637,0	285,2	37,3	56,0	2,6	53	—	10.30	629,2	282,9	37,0	55,8	2,5
19	—	6.30	636,8	284,8	35,2	56,1	2,7	54	—	11.—	629,2	283,1	37,3	55,8	2,5
20	17. Vm	7.—	635,2	281,9	41,6	56,4	2,1	55	—	11.30	629,0	284,9	37,7	55,5	2,5
21	17. Vm	7.30	635,2	282,5	35,5	56,3	+ 2,7	56	20. Nm	12.—	628,9	285,1	36,8	55,5	+ 2,5
22	—	8.—	635,0	282,9	44,6	56,2	1,8	57	—	1.—	628,8	283,6	36,8	55,7	2,5
23	—	8.30	635,0	283,3	36,5	56,2	2,6	58	—	1.30	628,9	283,8	40,3	55,7	2,2
24	—	9.—	634,9	283,0	41,0	56,2	2,2	59	—	2.—	628,9	281,8	35,8	56,0	2,7
25	—	9.30	635,0	283,1	39,4	56,2	2,3	60	—	2.30	629,0	281,7	35,2	56,0	2,7
26	17. Vm	10.—	634,8	283,4	38,9	56,1	+ 2,4	61	20. Nm	3.—	629,1	283,1	36,3	55,8	+ 2,6
27	—	10.30	634,6	283,3	36,9	56,1	2,6	62	—	3.30	628,8	282,6	35,7	55,8	2,7
28	—	11.—	634,9	283,3	36,9	56,2	2,6	63	—	4.—	628,8	283,3	35,3	55,7	2,7
29	—	11.30	634,7	283,1	36,6	56,2	2,6	64	—	4.30	629,0	283,3	36,6	55,7	2,6
30	—	12.—	634,7	283,6	36,3	56,1	2,6	65	—	5.—	628,8	282,6	36,4	55,8	2,6
31	17. Nm	1.—	634,6	284,5	33,5	55,9	+ 2,9	66	20. Nm	5.30	629,0	281,1	36,0	56,1	+ 2,7
32	—	1.30	634,6	285,0	32,9	55,9	3,0	67	—	6.—	628,9	282,0	37,4	55,9	2,5
33	—	2.—	634,5	285,3	32,8	55,8	3,0								
34	—	2.30	634,6	285,2	33,1	55,8	3,0								
35	—	3.—	634,3	286,4	32,7	55,6	2,9								

B. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der auf Kampenwand beobachteten Refraktionen.

Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2
1	41,6 35,5	44,6 36,5	"	"	39,2 38,8	"	39,5 36,1	"	35,7 35,8	"	36,5	35,2 33,7	"	32,8 34,0	"	34,8 39,7	"	34,2 34,2	"	33,4 34,6	"	37,3 35,2	"
2	41,0 43,5	42,3 42,0	"	"	41,0 39,4	"	38,9 36,9	"	36,9 36,6	"	36,3	33,5 32,9	"	32,8 33,1	"	32,7 33,9	"	33,6 33,5	"	31,1 33,4	"	34,0	"
3					40,7 41,1	"	39,4 37,0	"	37,3 37,7	"	36,8	36,8 35,5	"	35,8 35,2	"	36,3 35,7	"	36,4 35,8	"	36,2 36,0	"	37,4	"
4												40,3						35,3 36,6		36,4			"
Mittel	41,3 39,5	43,5 39,2	43,5 39,2	40,3 39,8	39,3 39,8	39,3 36,7	36,6 36,7	36,6 36,7	36,6 36,6	36,6 36,6	36,6 36,6	35,2 35,6	33,8 34,1	34,6 36,4	34,9 35,0	34,8 34,7	34,9 35,0	34,9 35,0	34,9 35,0	34,8 35,1	35,6 35,2	36,2 35,2	
Anzahl	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1
Komb. Mittel	41,3 40,9	41,4 40,6	41,4 40,6	39,9 39,8	38,7 37,3	36,7 36,6	36,2 35,6	35,1 34,3	34,1 34,3	34,1 34,3	34,1 34,3	35,6 35,1	35,1 34,3	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	35,6 34,9	

C. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der berechneten Refraktionen für Kampenwand aus Kampenwand-Höhensteig.

Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2
1	56,4	56,3	56,2	56,2	56,4	56,3	56,4	56,2	56,2	56,2	56,2	56,2	56,0	56,0	56,0	56,0	55,9	55,9	55,9	56,0	55,9	56,0	56,1
2	56,3	56,4	56,3	56,2	56,2	56,2	56,1	56,1	56,2	56,2	56,1	55,9	55,8	55,8	55,8	55,6	55,6	55,6	55,6	55,6	55,7	56,1	
3				55,8	55,6	55,8	55,8	55,8	55,5	55,5	55,7	56,6	56,0	56,0	56,0	55,8	55,8	56,7	56,7	56,7	56,1	55,9	
4												55,7	55,7	56,0	56,0	55,7	55,7	55,7	55,8				
Mittel	56,3	56,4	56,3	56,2	56,1	56,1	56,1	56,0	55,9	55,9	56,1	55,9	55,9	55,9	55,8	55,8	56,0	56,0	56,0	56,0	55,9	56,0	56,1
Anzahl	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1	
Komb. Mittel	56,3	56,3	56,3	56,2	56,1	56,1	56,1	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	55,9	55,8	55,9	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,1

D. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen für Kampenwand-Höhensteig.

Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2
1	+2,1	+2,7	+1,8	+2,6	+2,6	+2,4	+2,3	+2,6	+2,7	+2,7	+2,6	+2,8	+2,9	+3,0	+2,8	+2,8	+2,3	+2,8	+2,8	+2,9	+2,8	+2,6	+2,7
2	2,2	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,6	2,6	2,6	2,9	3,0	3,0	3,0	2,9	2,8	2,9	2,9	3,1	2,9	2,8	
3					2,2	2,1	2,3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,8	2,7	2,7	2,6	2,7	2,7	2,8	2,5	2,7	2,5	
4												2,2	2,2					2,7	2,6	2,6			
Mittel	+2,2	+2,3	+1,9	+2,4	+2,3	+2,3	+2,3	+2,6	+2,6	+2,6	+2,6	+2,7	+2,7	+2,9	+2,8	+2,8	+2,6	+2,8	+2,8	+2,8	+2,8	+2,6	+2,7
Anzahl	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	3	3	1	
K.Mittel	+2,2	+2,2	+2,1	+2,2	+2,3	+2,3	+2,4	+2,5	+2,6	+2,6	+2,6	+2,7	+2,7	+2,8	+2,8	+2,7	+2,7	+2,7	+2,8	+2,8	+2,7	+2,7	+2,7

E. Nach Stunden geordnete Zusammenstellung der auf Kampenwand beobachteten absoluten Lufttemperaturen.

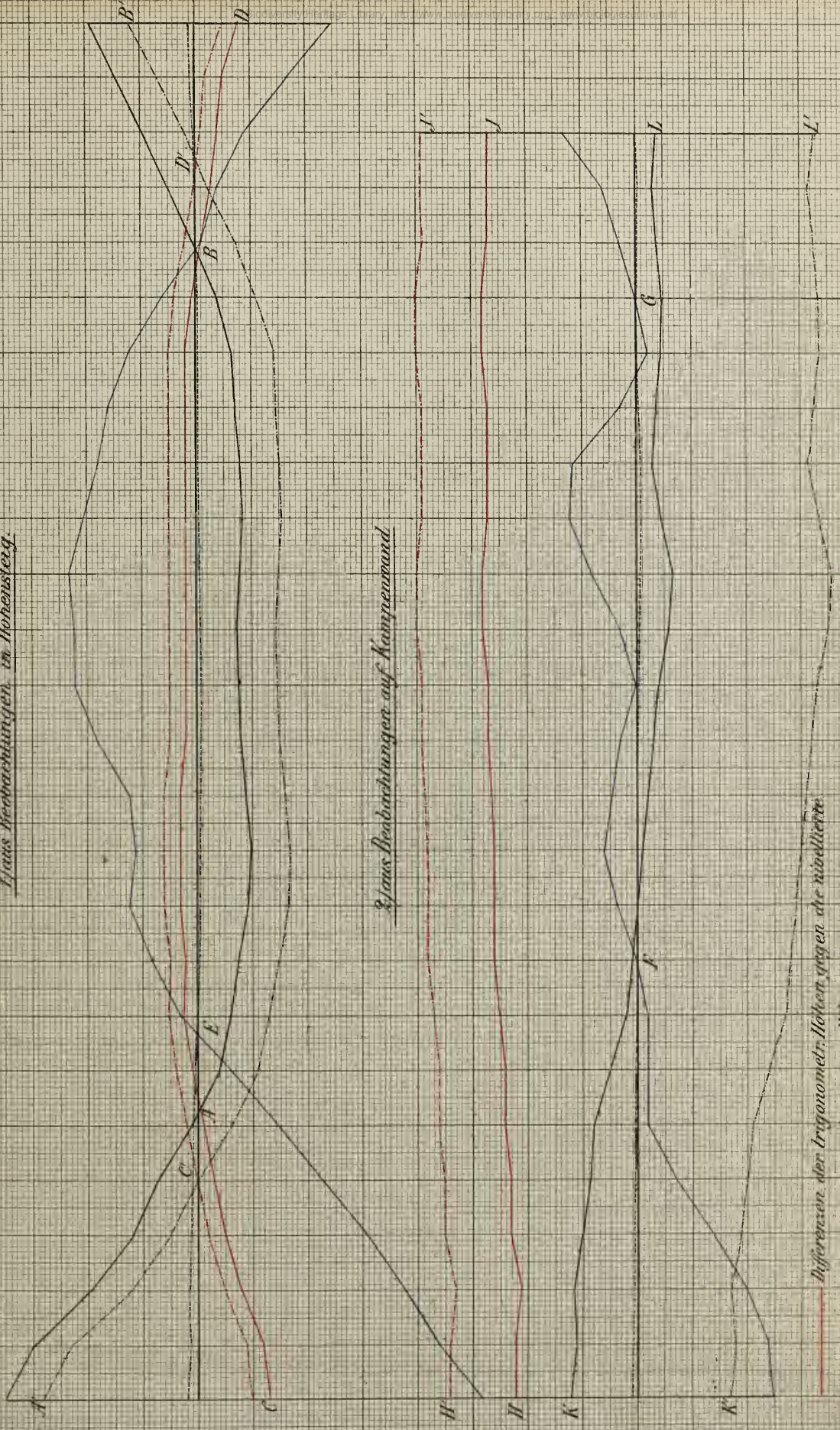
Anzahl	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2
1	281,9	282,5	282,9	283,3	282,8	282,5	283,6	283,1	284,0	284,0	283,8	284,2	284,1	285,2	285,5	285,3	285,7	286,1	285,9	285,5	285,8	285,2	284,8
2	280,0	279,3	280,1	280,1	283,0	283,1	283,4	283,3	283,1	283,6	283,6	284,5	285,0	285,3	285,2	286,4	286,7	286,6	286,6	286,6	286,1	283,6	
3					282,9	284,5	283,2	282,9	283,1	284,9	285,1	283,6	278,3	281,8	281,7	283,1	282,6	277,3	277,6	277,7	281,1	282,0	
4													283,8					283,3	283,3	282,6			
Mittel	281,0	280,9	281,5	281,9	282,9	283,4	283,1	283,5	284,0	284,2	284,1	282,8	284,1	284,9	284,1	284,9	285,0	283,3	283,4	283,1	284,3	283,6	284,8
Anzahl	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	4	3	3	1
K.Mittel	281,0	281,1	281,5	282,1	282,8	283,3	283,3	283,3	283,5	283,9	284,1	283,8	283,5	283,8	284,3	284,7	284,6	283,8	283,3	283,5	283,8	284,1	284,8

Nachmittag

Vormittag

Temperaturen, Refractionen und Höhendifferenzen.

Vaus Beobachtungen in Höhensteig.



2. aus Beobachtungen auf Kampferwand

Differenzen des trigonometr. Höhen gegen die nivellirte

verbess. trigon. Höhen

Differenzen der absoluten Temperaturen gegen das arith. Mittel

beobachteten Refractionen

verbess. beob. Refractionen gegen dasselbe Mittel

berechneten Refractionen gegen das arithem. Mittel

Maßstab der	
Temperaturen	1 cm = 1°C
Refractionen	1 cm = 4"
Höhendifferenzen	1 cm = 1 m