Mitteilungen

über eine

neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials.

Von

Adolf Schmidt
in Gotha.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XIX. Bd. I. Abth.

München 1895.
Verlag der k. Akademie
in Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

I.

Im 12. Jahrgange der unter dem Titel „Aus dem Archiv der deutschen Seewarte" erscheinenden Publikation habe ich vor ungefähr 5 Jahren einige mathematische Entwickelungen zur allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus gegeben, um dadurch eine Verschärfung der bisher zur Untersuchung des magnetischen Zustandes der Erde angewandten Methode anzuregen und zugleich einige Vorarbeiten für die damit gestellten Aufgaben zu liefern. Um das Verständnis des Nachfolgenden nicht von einem Zurückgehen auf jene frühere Arbeit abhängig zu machen, sei es gestattet, ihren wesentlichen Inhalt in möglichster Kürze wiederzugeben.

Die bisherigen durch die Arbeiten von Gauss eingeleiteten Versuche, die Aeusserungen der erdmagnetischen Kraft durch einen analytischen Ausdruck darzustellen, weisen, trotzdem das Beobachtungsmaterial stetig an Umfang und Verlässlichkeit gewonnen hat, keine in entsprechendem Masse wachsende Annäherung an die Wirklichkeit auf. Die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten sind selbst bei der neuesten Berechnung des erdmagnetischen Potentials durch Neumayer und Petersen nicht wesentlich kleiner als bei der ältesten, von Gauss selbst ausgeführten. Aber während sie bei dieser noch als eine Folge der Mangelhaftigkeit der empirischen Grundlage angesehen werden konnten, muss ihnen jetzt eine thatsächliche Bedeutung zugesprochen, und es muss ihre Ursache in einer Unvollkommenheit der Theorie gesucht werden, ein Schluss, den zuerst Herr Neumayer selbst aus seinen Untersuchungen gezogen hat. Eine Verbesserung der Theorie ist nun, abgesehen von der Weiterführung der Reihen, deren man sich zur Darstellung bedient, in zwei Richtungen möglich und erforderlich. Einerseits ist die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt zu berücksichtigen; anderseits und vor allem müssen die beiden bisher festgehaltenen Voraussetzungen aufgegeben werden, dass die erdmagnetische Kraft ein Potential besitzt, und dass dieses seinen Ursprung ausschliesslich im Erdinnern hat.

Als erste und wichtigste Aufgabe ergiebt sich hiernach die, eine von jeder physikalischen Hypothese freie, analytische Darstellung von der Verteilung der erdmagnetischen Kraft auf der Erdoberfläche zu geben, eine Darstellung, deren Genauigkeit beliebig weit getrieben werden kann, da sie allein von der Sicherheit der Beobachtungsdaten und von der Ausdehnung der benutzten Reihen abhängt. Mit der Lösung dieser rein mathematischen Aufgabe ist für alle weiteren Untersuchungen, deren letztes Ziel die physikalische Erklärung der erdmagnetischen Erscheinungen ist, eine ausreichende und zugleich die genaueste und bequemste Grundlage geschaffen. Von ihr aus kann zunächst die Frage entschieden werden, ob die ganze an der Erdoberfläche wirksame Kraft ein Potential besitzt oder inwieweit dies nicht der Fall ist, und es kann weiter, wenn ein Potential aufgefunden wird, derjenige Teil, der seinen Ursprung ausserhalb der Erde hat, von dem gesondert werden, dessen Ursachen im Innern derselben zu suchen sind.

Die Abplattung der Erde lässt sich mit geringer Mühe und ohne dass die Rechnung gegenüber derjenigen bei einer Kugel wesentliche Abänderungen erfährt, berücksichtigen. Die Reihenentwickelungen, als deren Argument die geocentrische (nicht die geographische) Breite oder besser ihr Complement einzuführen ist, schreiten wie dort nach Kugelfunktionen fort; es treten nur gewisse konstante Faktoren hinzu, über deren Bedeutung Folgendes zu sagen ist. Eine erste Gruppe dieser Faktoren hängt allein von der Abplattung der Erde ab. Ich habe sie unter Benutzung der Besselschen Zahl $1:\alpha = 1:299,1528$ berechnet und a. a. O. (S. 12) unter der Bezeichnung $p_m^n, \pi_m^n, q_m^n, \varkappa_m^n$ bis zur 6. Ordnung einschliesslich (d. h. für $0 \leqq m \leqq n \leqq 6$) mitgeteilt. Hier stelle ich die für den vorliegenden Zweck allein nötigen Quotienten $\pi_m^n : p_m^n$ und $\varkappa_m^n : q_m^n$ zusammen (Tabelle Ia und Ib). Die Zahlen dieser beiden Tabellen sind um eine Einheit der 6. Dezimalstelle unsicher, da die bei ihrer Bildung benutzten Werte von p_m^n π_m^n u. s. w. auf 6 Stellen abgerundet worden sind. Eine zweite Gruppe von Faktoren hängt ausser von der Abplattung auch von der Breite ab. Sie sind durch die Gleichungen

$$(1) \quad \alpha = \sqrt{1+\varepsilon^2 \cos v^2} \qquad \beta = \sqrt{1+\varepsilon^2} \qquad \gamma = \sqrt{1+\varepsilon^2 \cos v^2} : \sqrt{1+\varepsilon^2}$$

$$(\varepsilon^2 = 0{,}00671922)$$

definiert. Hierin ist, wenn a den Aequatorialradius und b den Polarradius des Erdellipsoids bezeichnet:

$$\varepsilon^2 = (a^2 - b^2) : b^2 = (2\alpha - 1) : (\alpha - 1)^2$$

Ferner ist v der geocentrische Polabstand, der mit dem geographischen, u, durch die bekannte Beziehung

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{1 + \varepsilon^2} \operatorname{tg} u$$

verknüpft ist. Tabelle II enthält, von 5^0 zu 5^0 nach u fortschreitend, die zugehörigen Werte von α, (β), γ, sowie die Werte von $\alpha \sin v$ und $\beta \sin v$, die für die numerische Rechnung wichtiger, als α und β selbst sind. Bei der Berechnung von v wurde eine stark abgekürzte Näherungsformel benützt; die angegebenen Werte weichen daher von den wahren teilweise um mehr als $0{,}5''$, doch stets um weniger als $1''$ ab. Nachdem ich sie einmal der weiteren Rechnung zugrunde gelegt hatte, war eine nachträgliche Aenderung, die einen grossen Aufwand von Korrektionsrechnungen erfordert hätte, bei der vollkommenen Bedeutungslosigkeit jener Abweichungen für den vorliegenden Zweck ausgeschlossen.

In den nach Kugelfunktionen vorgenommenen Entwickelungen habe ich eine Abweichung von dem üblichen Verfahren eingeführt. Dem von Gauss gegebenen Vorbilde folgend, hat man die Reihen gewöhnlich nach den Funktionen $P_m^n(\cos v)\cos m\lambda$ und $P_m^n(\cos v)\sin m\lambda$ mit

$$(2)\qquad \begin{aligned} P_m^n(\cos v) = \sin v^m \Big[\cos v^{n-m} &- \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\cos v^{n-m-2} \\ &+ \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\cos v^{n-m-4} - \ldots\ldots\Big] \end{aligned}$$

entwickelt. Der Umstand indessen, dass diese Funktionen von merklich verschiedener Grössenordnung sind (P_1^1, P_1^3, P_1^5, P_1^7 und damit auch $P_1^1 \cos\lambda$ u. s. w. erreichen beispielsweise die Maximalwerte 1, 0,275, 0,082, 0,023) führt bei numerischen Rechnungen zu recht störenden Uebelständen. Vor allem ist der Einfluss der einzelnen Glieder der nach Kugelfunktionen entwickelten Reihe auf den dargestellten Wert nicht ihren Coeffizienten proportional, und es wird dadurch der rasche Ueberblick über den ungefähren Funktionsverlauf und über die den einzelnen Gliedern zukommende Bedeutung wesentlich erschwert. Die mit Kugelfunktionen höherer Ordnung multiplizierten Coeffizienten, bei denen nicht m ganz oder nahezu gleich n ist, sind z. B. im Verhältnis zu ihrer Bedeutung mit den andern verglichen viel zu gross. Demgemäss müssten nun eigentlich, da es keinen Sinn hat, in einem Aggregat von Gliedern einzelne wesentlich schärfer als die übrigen anzugeben, die Coeffizienten verschieden scharf angesetzt werden. Dieses unbequeme und überdies, da eine Dezimalstelle mehr oder weniger die Schärfe der Darstellung schon beträchtlich ändert, ziemlich rohe Auskunftsmittel hat man thatsächlich wohl kaum jemals benützt; man hat vielmehr, so viel mir bekannt ist, stets alle Coefficienten bis zu derselben dezimalen Einheit berechnet, was nach dem zuvor Gesagten nicht zu rechtfertigen ist. Es mag drittens daran erinnert werden, dass die Bildung und Auflösung von Gleichungssystemen zur Berechnung der Reihencoeffizienten sehr erleichtert wird, wenn die Faktoren dieser Unbekannten, hier also die Funktionswerte der P_m^n, unter einander möglichst wenig verschieden sind.

Die gleichfalls übliche, besonders in England benützte Entwickelung nach den Functionen

$$P_n = \sqrt{a_0^n} \cdot P_0^n, \quad T_n^m = \frac{d^m P_n}{d\mu^m} \sin v^m = \frac{n!}{(n-m)!} \sqrt{a_0^n}\, P_m^n = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}\, a_m^n}\, P_m^n$$

(3) mit $\mu = \cos v$

$$\text{und } a_0^n = \frac{[1.3.5.\dots(2n-1)]^2}{n!\,n!}, \quad a_m^n = 2\,\frac{[1.3.5.\dots(2n-1)]^2}{(n-m)!\,(n+m)!} \text{ für } m > 0$$

führt, nur im umgekehrten Sinne und in noch gesteigertem Masse, zu denselben Uebelständen. Die Funktionen P_n erreichen sämtlich 1 als Maximalwert, dagegen nehmen die T_n^m mit wachsendem n und m im Gegensatz zu den P_m^n sehr schnell zu. Es ist z. B. $T_2^1 = 3\,P_1^2$, $T_2^2 = 3\,P_2^2$, $T_6^1 = \frac{693}{8} P_1^6$, $T_6^6 = 10395\,P_6^6$ und die höchsten Werte von T_2^1, T_2^2, T_6^1, T_6^6 sind 1,5, 3, 37,1 und 10395. Die Coeffizienten der höheren Reihenglieder werden also hier viel kleiner, als sie ihrer Bedeutung nach sein sollten.

Durch diese Erwägungen veranlasst habe ich in allen Entwickelungen an Stelle der P_m^n gewisse Vielfache derselben, $R_m^n = r_m^n \cdot P_m^n$, eingeführt, die so gewählt sind, dass bei allen der quadratische Mittelwert von $R_m^n \cos m\lambda$ und $R_m^n \sin m\lambda$ auf der ganzen Kugelfläche dieselbe Grösse, nämlich 1, erreicht. (Es könnte vielleicht zweckmässiger erscheinen, zu bestimmen, dass der Mittelwert von R_m^n durchgängig gleich 1 sein solle, wobei dann für $m > 0$ jede der Funktionen $R_m^n \cos m\lambda$ und $R_m^n \sin m\lambda$ im quadratischen Durchschnitt gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ würde. Da indessen hier bei der Einführung der R_m^n ausschliesslich praktische Rücksichten ausschlaggebend sein sollten, so schien es, weil in den folgenden numerischen Darstellungen die Glieder mit den Faktoren $R_m^n \cos m\lambda$ und $R_m^n \sin m\lambda$ stets selbständig auftreten, besser, in der zuvor erwähnten Weise zu verfahren, die übrigens auch für die Theorie vorteilhaft ist.)

Es ist nun, wenn $d\omega$ das Oberflächenelement der Kugel bezeichnet, bei der Integration über die ganze Kugelfläche

$$\int (P_m^n (\cos v) \cos m\lambda)^2 \, d\omega = \int (P_m^n (\cos v) \sin m\lambda)^2 \, d\omega = \frac{4\pi}{(2n+1)\, a_m^n}$$

In Bezug auf das erste Integral gilt diese Gleichung allgemein; in Bezug auf das zweite natürlich nur, wenn m von 0 verschieden ist. Der Mittelwert von $P_m^n \cos m\lambda$ und $P_m^n \sin m\lambda$ wird also, da die Kugelfläche gleich 4π ist, $((2n+1)\, a_m^n)^{-\frac{1}{2}}$. Daraus folgt unmittelbar, dass R_m^n die verlangte Beschaffenheit erhält, wenn man

$$(4) \qquad R_m^n (\cos v) = r_m^n \cdot P_m^n (\cos v) = \sqrt{(2n+1)\, a_m^n} \cdot P_m^n (\cos v)$$

setzt. Die hiernach berechneten Werte der Faktoren r_m^n finden sich in Tabelle III zusammengestellt, während Tabelle IV die Werte der Funktionen R_m^n selbst von der 1. bis zur 7. Ordnung enthält.

Es darf nicht übersehen werden, dass eine vollkommene Gleichwertigkeit der Funktionen R_m^n nur in Bezug auf ihre mittleren Beträge besteht. Ihre Maximalwerte sind verschieden; die Differenzen sind aber viel geringer als bei den P_m^n. Unter den Funktionen der ersten 7 Ordnungen (von der Konstanten $R_0^0 = 1$ abgesehen) haben R_0^1 und R_1^1 das kleinste Maximum im Betrage von 1,732, während das grösste, dasjenige von R_0^7, 3,873 beträgt. Der Umstand, dass hier im Gegensatz zu den Funktionen P_m^n die Maxima mit steigendem n nicht abnehmen, sondern zunehmen, kann obendrein als günstig bezeichnet werden, weil dadurch bei gleicher Dezimalstellenzahl der Coeffizienten gerade die ersten, wichtigsten Glieder der Entwickelung etwas schärfer als die übrigen erhalten werden.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, die durch die Einführung der R_m^n an Stelle der P_m^n herbeigeführten Aenderungen durch ein Beispiel zur Anschauung zu bringen. Ich wähle zu diesem Zwecke die Entwickelung des erdmagnetischen Potentials für den Zeitpunkt 1885,0 nach der Berechnung von Neumayer-Petersen, die man in den „Vorbemerkungen" zur 4. Abteilung von Berghaus' Physikalischem Atlas (S. 19) mitgeteilt findet. Gemäss den Bemerkungen auf S. 5 meiner zu Anfang erwähnten Abhandlung gebe ich allen Zahlen das entgegengesetzte Vorzeichen; ausserdem führe ich als Einheit die Grösse $0{,}1^5 \, cm^{-\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} s^{-1}$ ein. Mit diesen Abänderungen entnehme ich der angegebenen Publikation die folgenden Coeffizienten der nach den Funktionen P_m^n entwickelten Reihe für $(V:R)$:

n:	1	2	3	4
g_0^n	—31572,0	— 790,6	2436,3	3439,5
g_1^n	— 2481,4	4979,8	—3956,0	3059,7
h_1^n	6025,8	—1299,9	— 738,3	1187,7
g_2^n		566,7	2785,7	1975,4
h_2^n		1260,4	44,3	— 714,7
g_3^n			327,0	— 684,2
h_3^n			549,2	— 512,1
g_4^n				84,9
h_4^n				— 96,8

Die Coeffizienten der Entwickelung nach den Funktionen R_m^n sind dagegen:

n:	1	2	3	4
g_0^n	—18228,1	— 235,7	368,3	262,1
g_1^n	— 1432,6	1285,8	— 488,3	184,3
h_1^n	3479,1	— 335,7	— 91,1	71,6
g_2^n		292,6	543,7	168,2
h_2^n		650,9	8,6	— 60,9
g_3^n			156,3	— 109,0
h_3^n			262,6	— 81,6
g_4^n				38,3
h_4^n				— 43,7

Nach diesen, den folgenden Darlegungen zur Vermeidung störender Exkurse vorausgeschickten Erläuterungen stelle ich in möglichster Kürze den Gang der Rechnung im Anschluss an meine frühere Arbeit dar. In dieser habe ich noch die Entwickelung nach den Funktionen P_m^n vorausgesetzt; ich übertrage indessen die dort eingeführten Bezeichnungen hier ohne weiteres auf die entsprechenden Entwickelungen nach den Funktionen R_m^n. Die dadurch in manchen Formeln nötig werdenden Modifikationen, die sich auf den Eintritt konstanter, von den r_m^n abhängiger Faktoren beschränken, sind leicht ersichtlich; ich glaube sie deshalb, ebenso wie einige nebensächliche Abänderungen der Bezeichnung, ohne ausdrückliche Hervorhebung einführen zu dürfen.

Die beobachteten Werte der erdmagnetischen Elemente an möglichst zahlreichen Punkten der Erdoberfläche bilden die empirische Grundlage der ganzen Rechnung. Aus ihnen sind zunächst die Kraftkomponenten X (horizontal nach Norden), Y (horizontal nach Osten) und Z (vertikal nach unten) zu berechnen, für die alsdann mit Rücksicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde die von ihnen nur wenig abweichenden Grössen αX, βY, γZ, die ich $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ genannt habe, treten.

Die erste Aufgabe ist nun die, eine analytische Darstellung der Verteilung der Werte von $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ über die ganze Erdoberfläche zu finden. Diese Aufgabe kann, theoretisch betrachtet, mit beliebig weit getriebener Annäherung an den wahren Zustand gelöst werden, indem man die Grössen $\bar{X}\sin v$, $\bar{Y}\sin v$ und $\bar{Z}$ durch Reihen, die nach Kugelfunktionen der Argumente v und λ (der geographischen Länge) fortschreiten, darstellt. (Bei $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ selbst ist diese Form der Darstellung nicht möglich, da sie an den Polen unstetig werden. Dagegen könnten allerdings andere Ausdrücke, z. B. $(\bar{X}\cos\lambda + \bar{Y}\cos v \sin\lambda)$ und $(\bar{X}\sin\lambda - \bar{Y}\cos v\cos\lambda)$, an die Stelle von $\bar{X}\sin v$ und $\bar{Y}\sin v$ treten.)

Aus den für $\bar{X}\sin v$ und $\bar{Y}\sin v$ gefundenen Reihen hat man nun weiter die Funktionen

$$U = \int_0^v \bar{X}\,dv, \qquad\qquad W = \psi(v) - \int_0^\lambda \bar{Y}\sin v\,d\lambda$$

abzuleiten, wobei $\psi(v)$ den von λ unabhängigen Teil von U bezeichnet. Ergeben sich beide als identisch, so stellen sie bis auf einen konstanten Faktor das Potential V des Erdmagnetismus in der Erdoberfläche dar; es ist nämlich alsdann V der gemeinsame Wert von $b\,U$ und $b\,W$, wenn b den Polarradius der Erde bedeutet.

Fallen U und W verschieden aus, so ist damit der Beweis geliefert, dass die magnetische Kraft in der Erdoberfläche kein Potential besitzt, woraus auf die Existenz von elektrischen Strömen, die senkrecht durch diese Fläche hindurchgehen, geschlossen werden kann. Die Dichte, d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität dieser Ströme ergiebt sich eindeutig aus der Differenz $(W - U)$. In welcher Weise aber diese Ströme innerhalb und ausserhalb der Erdoberfläche geschlossen sind, bleibt dabei vollkommen unbestimmt und damit der Anteil, den sie am Zustandekommen der Werte von U und W, also auch von $\bar{X}$ und $\bar{Y}$, sowie derjenigen von $\bar{Z}$ haben.

Verlangt man nun, dass dieser Anteil ein Minimum sei, insbesondere, dass $\bar{Z}$ nirgends geändert werde, so bleibt ein möglichst grosser Teil zurück, dem ein Potential zukommt. Dasselbe werde wiederum mit V bezeichnet.

Hält man endlich die Reihenentwickelung von V mit derjenigen der vertikalen Komponente $\bar{Z}$ zusammen, so kann man das von äussern und das von innern Agentien herrührende Potential trennen. — — —

Das Endergebnis wird somit durch drei Funktionen V_i, V_a und $\bar{i} \sin v$ $(= \alpha\beta i \sin v)$ gebildet, die genau den in den Reihen für $\bar{X} \sin v$, $\bar{Y} \sin v$ und $\bar{Z}$ dargestellten Zustand des magnetischen Feldes an der Erdoberfläche zum Ausdruck bringen, und die daher gleichfalls durch Vervollkommnung der Beobachtungsdaten und Weiterführung der Reihenentwickelung den wahren Werten beliebig nahe gebracht werden können. V_i ist das Potential magnetischer Massen oder geschlossener Ströme im Erdinnern, V_a dasjenige ebensolcher Agentien im äussern Raume, endlich i die Intensität der zur Erdoberfläche senkrechten, sie durchdringenden Strömung, die innerhalb und ausserhalb so geschlossen zu denken ist, dass ihre Wirkung in dieser Fläche selbst ein Minimum ist.

Der im Vorhergehenden skizzierte Gang der Rechnung wird durch die folgenden Formeln dargestellt.

Es sei

$$
\begin{aligned}
\bar{X} \sin v &= \Sigma R_m^n \,(B_m^n \cos m\lambda + C_m^n \sin m\lambda) \\
\bar{Y} \sin v &= \Sigma R_m^n \,(D_m^n \cos m\lambda + E_m^n \sin m\lambda) \\
\bar{Z} &= \Sigma R_m^n \,(j_m^n \cos m\lambda + k_m^n \sin m\lambda)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Das Zeichen Σf_m^n steht hier und in der Folge überall für $\sum\limits_{n=0}^{n=\nu} \sum\limits_{m=0}^{m=n}$. Die Entwickelung von $\bar{Z}$ unterliegt nur der Bedingung, dass $j_0^0 = 0$ sein muss; diejenigen von $\bar{X} \sin v$ und $\bar{Y} \sin v$ sind dagegen durch eine Reihe von Bedingungsgleichungen verknüpft, die in ihrer Gesamtheit aussagen, dass die horizontale Komponente der erdmagnetischen Kraft nebst allen ihren Differentialquotienten an beiden Polen (d. h. für $v = 0$ und $v = 180^0$) endlich und von eindeutig bestimmter Richtung ist, dass also die Pole keine Unstetigkeitspunkte für sie sind. Diese Bedingungsgleichungen heissen, wenn R_m^n in der Nähe des Nordpols $(v = 0)$ bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung gleich $\alpha_m^n \sin v^m$, in der Nähe des Südpols $(v = 180^0)$ also gleich $(-1)^{n-m} \alpha_m^n \sin v^m$ ist, und wenn

$$\Sigma^0 f_m^n = f_m^m + f_m^{m+2} + \ldots$$
$$\Sigma^1 f_m^n = f_m^{m+1} + f_m^{m+3} + \ldots$$

eingeführt wird:

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} \Sigma^0 \alpha_m^n B_m^n - \Sigma^1 \alpha_m^n E_m^n = 0 & \Sigma^0 \alpha_m^n C_m^n + \Sigma^1 \alpha_m^n D_m^n = 0 \\ \Sigma^1 \alpha_m^n B_m^n - \Sigma^0 \alpha_m^n E_m^n = 0 & \Sigma^1 \alpha_m^n C_m^n + \Sigma^0 \alpha_m^n D_m^n = 0 \end{array}$$

Für $m = 0$ verschwindet jede der beiden Summen, aus denen sich die linke Seite jeder Gleichung zusammensetzt, da $E_o^n = C_o^n = 0$ ist. Die Funktionswerte α_m^n sind durch die Formel

$$(7) \qquad \alpha_m^n = 2^{n-m} \frac{n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!}\, r_m^n$$

bestimmt. Speziell ist

$$\alpha_m^m = r_m^m, \quad \alpha_m^{m+1} = r_m^{m+1}, \quad \alpha_m^{m+2} = \frac{2m+2}{2m+3} r_m^{m+2}, \quad \alpha_m^{m+3} = \frac{2m+2}{2m+5} r_m^{m+3}$$

(Die entsprechende Angabe der Werte von P_m^n für $v = 0$, a. a. O. S. 21, und die daraus geschlossene Gleichung (14) sind, ausser für $m = 0$, unrichtig.)

(Die hier zur analytischen Darstellung der Komponenten des Erdmagnetismus entwickelte Methode kann natürlich auf alle Fälle Anwendung finden, in denen eine stetige, nach Grösse und Richtung überall eindeutig definierte Funktion (eine Vektorfunktion) vorliegt, während für eine variable skalare Grösse die gewöhnliche, bekannte Entwickelung zu benützen ist. Fällt die Richtung des Vektors überall in die Ellipsoidfläche selbst, so genügen die in Bezug auf $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ angegebenen Entwickelungen; andernfalls tritt, wie hier, eine einfache Darstellung der vertikalen Komponente nach Kugelfunktionen, im allgemeinen ohne die Bedingung $j_0^0 = 0$, hinzu.)

Aus der für $\bar{Y} \sin v$ gefundenen Entwickelung ergiebt sich sofort:

$$W = \psi(v) - (D_0^0 + D_0^1 R_0^1 + D_0^2 R_0^2 + \ldots)\,\lambda + \Sigma R_m^n \left(\frac{1}{m} E_m^n \cos m\lambda - \frac{1}{m} D_m^n \sin m\lambda\right)$$
$$(8) \qquad = \psi(v) - \sin v^2 \varphi(v)\,\lambda + W_1 \qquad (m > 0)$$

Weniger einfach gestaltet sich die Ableitung von U aus $\bar{X} \sin v$. Wenn

$$\int_0^v \sin v^{m-1}\, dv = \Pi_m$$

gesetzt und durch zwei sogleich anzugebende Gleichungssysteme eine Reihe neuer Koeffizienten $\pi_m \; (= \eta_m \cos m\lambda + \zeta_m \sin m\lambda)$, G_m^n, H_m^n eingeführt wird, so ergiebt sich

$$(9) \quad U = (\pi_1 \Pi_1 + \pi_2 \Pi_2 + \dots) + \Sigma R_m^n (G_m^n \cos m\lambda + H_m^n \sin m\lambda) = f(v, \lambda) + U_0$$

Speziell ist

$$\psi(v) = G_0^0 + G_0^1 R_0^1 + G_0^2 R_0^2 + \dots$$

Um die erwähnten Gleichungssysteme in einer für die numerische Rechnung möglichst geeigneten Form zu erhalten, führe ich die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(n)_m = \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}$$

$$(10) \quad \lambda_m^0 = 1, \quad \lambda_m^1 = 1, \quad \lambda_m^p = \lambda_m^{p-2} \frac{(m+p)(m+p-1)_m}{m+p-1}$$

$$\lambda_m^p r_m^{m+p} = \mu_m^p, \qquad (m+p-1)\lambda_m^p r_m^{m+p-1} = \nu_m^p$$

Um nicht die Gleichungen zweimal (für die Koeffizienten der Kosinus und für die der Sinus von $m\lambda$) ansetzen zu müssen, schreibe ich noch

$$B_m^n \cos m\lambda + C_m^n \sin m\lambda = A_m^n, \qquad G_m^n \cos m\lambda + H_m^n \sin m\lambda = F_m^n$$

Nunmehr lauten die Gleichungen folgendermassen:

$$(11) \quad \begin{array}{rcl} \pi_m & = & \mu_m^0 A_m^m + \mu_m^2 A_m^{m+2} + \mu_m^4 A_m^{m+4} + \dots \\ \nu_m^2 F_m^{m+1} & = & \mu_m^2 A_m^{m+2} + \mu_m^4 A_m^{m+4} + \dots \\ \nu_m^4 F_m^{m+3} & = & \mu_m^4 A_m^{m+4} + \dots \\ \dots & & \dots \end{array}$$

$$(12) \quad \begin{array}{rcl} \nu_m^1 F_m^m & = & \mu_m^1 A_m^{m+1} + \mu_m^3 A_m^{m+3} + \mu_m^5 A_m^{m+5} + \dots \\ \nu_m^3 F_m^{m+2} & = & \mu_m^3 A_m^{m+3} + \mu_m^5 A_m^{m+5} + \dots \\ \nu_m^5 F_m^{m+4} & = & \mu_m^5 A_m^{m+5} + \dots \\ \dots & & \dots \end{array}$$

Aus dem Anblick der Gleichungen geht hervor, dass man, um U und W bis zu Funktionen einer bestimmten gleichen Ordnung (n) entwickelt zu erhalten, $Y \sin v$ ebensoweit, $X \sin v$ dagegen bis zu den Gliedern der nächsthöheren Ordnung entwickeln muss.

Nachdem U und W berechnet worden sind, findet man einerseits das Potential

(13) $$V = \frac{b}{2}(U_0 + W_0) = b\,\Sigma R_m^n\,(g_m^n \cos m\lambda + h_m^n \sin m\lambda)$$

andrerseits die Stromdichte der die Erdoberfläche vertikal durchdringenden Strömung

(14) $$i = \frac{1}{4\pi\alpha\beta\, b \sin v}\;\frac{\partial^2 (W-U)}{\partial v\, \partial \lambda}$$

Als positiv gelten hierbei die ins Innere der Erde gerichteten Ströme.

Schliesslich ergeben sich die Koeffizienten des Potentials innerer Kräfte

(15) $$V_i = b\,\Sigma R_m^n\,(c_m^n \cos m\lambda + s_m^n \sin m\lambda)$$

und diejenigen des aus äusseren Kräften entspringenden

(16) $$V_a = b\,\Sigma R_m^n\,(\gamma_m^n \cos m\lambda + \sigma_m^n \sin m\lambda)$$

durch die Gleichungen:

(17) $$\begin{aligned} c_m^n &= \varepsilon_m^n g_m^n - \delta_m^n j_m^n \qquad & s_m^n &= \varepsilon_m^n h_m^n - \delta_m^n k_m^n \\ \gamma_m^n &= g_m^n - c_m^n & \sigma_m^n &= h_m^n - s_m^n \end{aligned}$$

in denen

(18) $$\delta_m^n = 1 : \left(n\,\frac{\pi_m^n}{p_m^n} + (n+1)\frac{\varkappa_m^n}{q_m^n}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_m^n = n\,\frac{\pi_m^n}{p_m^n}\,\delta_m^n$$

von der Abplattung der Erde abhängige Konstanten sind. In den Tafeln Ic und Id findet man ihre, aus den Zahlen von Ia und Ib abgeleiteten Werte zusammengestellt. (Durch ein Versehen sind a. a. O. S. 23 in den vorstehend mitgeteilten Gleichungen die Koeffizienten c, s mit γ, σ vertauscht worden.)

Das Schlussresultat der ganzen Rechnung sind die drei nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihen für $V_i : b$, $V_a : b$ und $\alpha\beta b i$, von denen die letzte, wie man leicht einsieht, in der Ordnung der höchsten Glieder der Entwickelung hinter den beiden andern um einen Grad zurückbleibt.

Aus diesen drei Reihen, deren Koeffizienten vollkommen von einander unabhängig sind, können unter Beachtung der für die Ableitung von $V : b$ aus U und W getroffenen Festsetzung rückwärts die Reihen für $\bar{X} \sin v$, $\bar{Y} \sin v$ und $\bar{Z}$ gewonnen werden, was keiner weiteren Ausführung bedarf.

Ich füge der vorstehenden Formelzusammenstellung noch einige Entwickelungen hinzu, auf die ich in der mehrfach erwähnten Arbeit nur hingewiesen habe, ohne sie abzuleiten, weshalb ich hier auch auf ihre Begründung kurz eingehen will. Es ist bekanntlich möglich, auf einer der Erdoberfläche unendlich benachbarten, innern Fläche eine eindeutig bestimmte Verteilung von freiem Magnetismus anzunehmen, der in der Erdoberfläche selbst und im ganzen äussern Raume dieselben magnetischen Wirkungen entsprechen, wie sie die thatsächlich vorhandenen, als Ursache von V_i erkannten Agentien ausüben; ebenso ist es möglich, die äussern Kräfte, die in der Erdoberfläche das Potential V_a haben, durch eine bestimmte Magnetisierung einer ihr unendlich nahen äussern Fläche zu ersetzen, soweit allein ihre Wirkungen im innern Raume und in der Oberfläche in Betracht kommen. Wichtiger, weil für die physikalische Erklärung des Erdmagnetismus wahrscheinlich von grösserer Bedeutung, ist es, dass sich derselbe Erfolg, wie man weiss, durch eine Anordnung von elektrischen Strömen erreichen lässt, die parallel der Erdoberfläche eine unendlich benachbarte Fläche erfüllen. (In Wirklichkeit hat man sich natürlich, wie übrigens auch im ersten Falle, statt der Fläche eine Schicht von endlicher Dicke zu denken; es ist aber leicht einzusehen, dass, wenn deren Dicke und ihr Abstand von der Erdoberfläche gegen den Erdradius nur klein sind, die durch einfache vertikale Verschiebung unter passender Reduktion der Dichtigkeit bewirkte Kondensation der ganzen Strömung in eine Fläche die Gesamtwirkung nur um kleine Grössen höherer Ordnung ändert.) Die Verteilung dieser Strömung sowie jener magnetischen Belegung soll nun noch berechnet werden.

Das Potential des in einer Fläche (von nirgends unendlich grosser Krümmung) ausgebreiteten freien Magnetismus hat an jeder Stelle zu beiden Seiten der Fläche denselben Betrag. Genauer gesagt: bezeichnet V_ε das Potential in einem Punkte, dessen nach bestimmt festgesetzter Richtung positiv gerechneter Abstand von der Fläche ε ist, so haben $V_{+\varepsilon}$ und $V_{-\varepsilon}$ innerhalb einer und derselben Normalen bei unendlich abnehmendem ε denselben Grenzwert; es ist in oft gebrauchter symbolischer Schreibweise

$$V_{+0} = V_{-0}$$

Die Aenderung des Potentials oder, was dasselbe ist, die zur Fläche senkrechte Komponente der Kraft ist dagegen, soweit sie von dem unendlich benachbarten Teile der magnetischen Belegung herrührt, auf beiden Seiten zwar dem absoluten Betrage nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Die Differenz der beiderseitigen Werte hängt von der Flächendichtigkeit ϱ an der betreffenden Stelle ab. Was aber den Einfluss der übrigen, in endlicher Entfernung befindlichen Belegung betrifft, so liefert er als stetig veränderlich zu jener Differenz den Beitrag Null; diese bleibt somit ungeändert und ist nur von ϱ abhängig. Symbolisch geschrieben ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varrho$$

oder bei der hier zu betrachtenden Anwendung auf die magnetische Kraft in der Erdoberfläche

$$Z_{+0} - Z_{-0} = -4\pi\varrho$$

Hierbei gilt, umgekehrt wie bei Z, die Richtung der Normalen von innen nach aussen, d. h. von unten nach oben, als positiv.

Wird andrerseits die (einfach zusammenhängende) Fläche von elektrischen Strömen durchflossen, so ist die von diesen hervorgerufene magnetische Kraft beim Durchgange durch die Fläche stetig veränderlich; es ist insbesondere auch

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}$$

oder

$$Z_{+0} = Z_{-0}$$

Das Potential dagegen ist an dieser Stelle unstetig; die Differenz seiner beiderseitigen Werte in unendlich benachbarten Punkten derselben Normalen ist der Gesamtintensität S derjenigen in der Fläche verlaufenden Ströme proportional, die den betrachteten Punkt einschliessen:

$$V_{+0} - V_{-0} = 4\pi S$$

Bei der Berechnung von S sind diejenigen Ströme, die, von der Seite der positiven Normalen aus gesehen, in positivem Sinne (gegen den Uhrzeiger) verlaufen, als positiv, die andern als negativ anzusetzen.

Die Gesamtintensität S ist nun offenbar für alle Punkte einer Strömungslinie dieselbe, und sie ändert sich beim Uebergange von einer solchen Linie zu einer andern um den Betrag der zwischen beiden verlaufenden Strömung. Es ist daher

$$S = Const.$$

die allgemeine Gleichung der Stromlinien, und die gesamte zwischen $S = S_1$ und $S = S_2$ vorhandene Strömung hat die Intensität $S_2 - S_1$. Die Stromdichte ist dem wechselnden Abstande der Linien $S = Const.$ umgekehrt proportional, die Stromrichtung so beschaffen, dass man, von der Seite der positiven Normalen aus daran entlang blickend, wachsende Werte von S zur Linken hat.

In die vorstehenden Gleichungen sind nun die zur Definition des magnetischen Zustandes der Erdoberfläche, soweit derselbe ein Potential besitzt, dienenden Entwickelungen einzuführen. Es ist nach Gleichung (15) und (16)

$$V_i = b\,\Sigma R_m^n\,(c_m^n \cos m\lambda + s_m^n \sin m\lambda) \qquad V_a = b\,\Sigma R_m^n\,(\gamma_m^n \cos m\lambda + \sigma_m^n \sin m\lambda)$$

oder kürzer

$$V_i = b\,\Sigma J_m^n \qquad V_a = b\,\Sigma A_m^n$$

V_i lässt sich, da es von innern Kräften herrührt, ohne weiteres in den äussern Raum fortsetzen, V_a aus entsprechendem Grunde in das Erdinnere hinein. Dagegen ist hier V_i und dort V_a zunächst unbestimmt. Ich setze demgemäss

$$(19)\qquad \begin{aligned} (V_i)_{+\varepsilon} &= b\,\Sigma J_m^n \left(\frac{r}{b}\right)^{-n-1} & (V_a)_{+\varepsilon} &= b\,\Sigma B_m^n \left(\frac{r}{b}\right)^{-n-1} \\ (V_i)_{-\varepsilon} &= b\,\Sigma K_m^n \left(\frac{r}{b}\right)^{n} & (V_a)_{-\varepsilon} &= b\,\Sigma A_m^n \left(\frac{r}{b}\right)^{n} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Formeln will ich im Folgenden die fortwährend wiederkehrenden Indices m und n überall (auch bei den noch neu eintretenden Grössen M, N, π, p, $\varkappa$, q, δ, ε) weglassen, was ebensowenig stören wird, wie der Umstand, dass die hier vorübergehend eingeführten Funktionen A_m^n und B_m^n mit den an anderer Stelle auftretenden Koeffizienten von $\bar{X} \sin v$ in der Bezeichnung übereinstimmen.

Zur Ableitung von Z aus V muss ich auf die Gleichungen (18) und (21) meiner früheren Arbeit verweisen, denen zufolge sich aus

$$V = b\,\Sigma\left(M\left(\frac{r}{b}\right)^{-n-1} + N\left(\frac{r}{b}\right)^{n}\right)$$

für Z der Wert

$$Z = \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{\gamma}\,\Sigma\left(-(n+1)\frac{\varkappa}{q}\,M + n\frac{\pi}{p}\,N\right)$$

ergiebt. Im vorliegenden Falle wird also

$$(20)\qquad \begin{aligned} (Z_i)_{+\varepsilon} &= -\frac{1}{\gamma}\,\Sigma(n+1)\frac{\varkappa}{q}\,J & (Z_a)_{+\varepsilon} &= -\frac{1}{\gamma}\,\Sigma(n+1)\frac{\varkappa}{q}\,B \\ (Z_i)_{-\varepsilon} &= \frac{1}{\gamma}\,\Sigma n\frac{\pi}{p}\,K & (Z_a)_{-\varepsilon} &= \frac{1}{\gamma}\,\Sigma n\frac{\pi}{p}\,A \end{aligned}$$

Setzt man nun erstens, um die beobachteten Kräfte als Wirkungen einer magnetischen Oberflächenbelegung der Erde darzustellen, $V_{+0} = V_{-0}$, so folgt aus (19) (für alle Indices n, m)

$$J = K \qquad\qquad A = B$$

und damit wird mit Rücksicht auf (18) und (20)

$$-4\pi\varrho_i = (Z_i)_{+0} - (Z_i)_{-0} = -\frac{1}{\gamma}\Sigma\frac{J}{\delta} \qquad\qquad -4\pi\varrho_a = (Z_a)_{+0} - (Z_a)_{-0} = -\frac{1}{\gamma}\Sigma\frac{A}{\delta}$$

Verlangt man dagegen, um die beobachteten Wirkungen auf Ströme zurückzuführen, dass identisch $Z_{+0} = Z_{-0}$ sein soll, so gelangt man durch die Gleichungen (20) zu den Beziehungen

$$-(n+1)\frac{\varkappa}{q}J = n\frac{\pi}{p}K \qquad\qquad -(n+1)\frac{\varkappa}{q}B = n\frac{\pi}{p}A$$

und erhält alsdann aus (19) und (18) mit leichter Umformung:

$$4\pi S_i = (V_i)_{+0} - (V_i)_{-0} = b\,\Sigma\frac{J}{\varepsilon} \qquad\qquad 4\pi S_a = (V_a)_{+0} - (V_a)_{-0} = -b\,\Sigma\frac{A}{1-\varepsilon}$$

In den so gewonnenen Gleichungen, die in ausführlicher Schreibweise folgendermassen lauten:

$$(21)\quad \varrho_i = \frac{1}{4\pi\gamma}\Sigma\frac{1}{\delta^n_m}R^n_m(c^n_m\cos m\lambda + s^n_m\sin m\lambda), \quad \varrho_a = \frac{1}{4\pi\gamma}\Sigma\frac{1}{\delta^n_m}R^n_m(\gamma^n_m\cos m\lambda + \sigma^n_m\sin m\lambda)$$

$$(22)\quad S_i = \frac{b}{4\pi}\Sigma\frac{1}{\varepsilon^n_m}R^n_m(c^n_m\cos m\lambda + s^n_m\sin m\lambda), \quad S_a = -\frac{b}{4\pi}\Sigma\frac{1}{1-\varepsilon^n_m}R^n_m(\gamma^n_m\cos m\lambda + \sigma^n_m\sin m\lambda)$$

liegt die vollständige Lösung der beiden am Beginn dieser Entwickelungen gestellten Aufgaben.

II.

Vom ersten Beginn meiner Beschäftigung mit den im vorigen Abschnitte dargestellten Untersuchungen an war es mein begreiflicher Wunsch, die theoretischen Entwickelungen auf den thatsächlichen Zustand der erdmagnetischen Kraft anzuwenden. In diesem Wunsche wurde ich durch die Ergebnisse eines ersten, 1886 unternommenen Versuches nur bestärkt, da sich daraus für den allein berücksichtigten horizontalen Teil der Kraft zwar die Unvereinbarkeit der Beobachtungen mit der Hypothese eines Potentials zu ergeben schien, während doch wegen der verhältnismässigen Geringfügigkeit der auftretenden Widersprüche eine sichere Entscheidung auf der gewählten Grundlage unmöglich war. Ich hatte die Berechnung auf die von der deutschen Seewarte veröffentlichten, übrigens schon vorher von Quintus Icilius zu einer Potentialbestimmung benutzten Karten der Deklination und der Horizontalintensität für 1880,0 gestützt, Karten, deren Massstab nicht gestattete, bei der Entnahme der Funktionswerte über 0,001 $cm^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}\,s^{-1}$ bei H und $0^{\circ}\!,1$ bei δ hinauszugehen. Als ich einige Jahre später Zeit fand, die Aufgabe wieder aufzunehmen, musste es mein Bestreben sein, für die endgültige Berechnung schärfere Werte zu benützen. Der schwierigen und zeitraubenden Arbeit, mir diese in genügender Vollständigkeit zu verschaffen, wurde ich durch einen auch in sachlicher Hinsicht sehr glücklichen Umstand enthoben. Herr Direktor Neumayer wünschte die von ihm zusammen mit H. Petersen durchgeführte Potentialberechnung einer kontrollierenden Wiederholung zu unterziehen, und er forderte mich nach dem Tode seines verdienstvollen Mitarbeiters auf, für diesen einzutreten. Ich zögerte keinen Augenblick, auf dieses Anerbieten einzugehen, das mir ein an Vollständigkeit und kritischer Durcharbeitung einzig stehendes Material [1]) — ist es doch von einem seit Jahrzehnten thätigen Forscher in planmässiger Arbeit mit allen Mitteln persönlicher Beziehungen und an einer Zentralstelle wie der deutschen Seewarte gesammelt und an der Hand reicher Erfahrung bearbeitet worden — zur Verfügung stellte. Herr Neumayer erklärte sich

1) Ueber dieses giebt der Text zum „Atlas des Erdmagnetismus" (Abt. IV des Physikalischen Atlas von Berghaus) genaue Auskunft. — Einen guten Ueberblick gewährt ferner Dr. Neumayers Vortrag auf dem VIII. deutschen Geographentage zu Berlin (1889): „Ueber das gegenwärtig vorliegende Material für erd- und weltmagnetische Forschung". (Verh. d. VIII. d. Geogr.-T. zu Berlin, p. 33 ff.)

seinerseits bereitwillig damit einverstanden. dass ich die Neuberechnung nach der vervollständigten Theorie ausführte, wobei sich eine ausreichende indirekte Prüfung der früheren Rechnung als Nebenresultat gewinnen liess.

Herr Neumayer hat sich nicht darauf beschränkt, mir die Grundlage meiner Untersuchung zu liefern; ich verdanke ihm — und ich freue mich, meinem Danke hier öffentlich Ausdruck geben zu können — auch in anderen Beziehungen rege Förderung meiner Arbeit. Sein lebhaftes Interesse an ihrem Fortschreiten führte zu einer fast ununterbrochenen wissenschaftlichen Korrespondenz, die mir reiche Anregung und die Freude kritisch begründeter Zustimmung und Ermunterung brachte. Durch seine wiederholte Unterstützung wurde es mir ferner möglich gemacht, einen recht beträchtlichen Teil der Zahlenrechnung von einem Hülfsrechner ausführen zu lassen. Von den komplizierteren, nicht wohl jedem Rechner anzuvertrauenden Rechenarbeiten übernahm mein Vater, der mir schon bei früheren Gelegenheiten in dieser Weise wertvolle und zuverlässige Hülfe geleistet hatte, und dem ich auch an dieser Stelle dafür danken möchte, grosse Abschnitte, so dass schliesslich auf mich selbst kaum die Hälfte der rechnerischen Arbeit gekommen ist. Ohne diese Beihülfen würde sich der Abschluss der Arbeit noch wesentlich mehr gegen meine Erwartung verspätet haben, als es zu meinem Bedauern schon an und für sich der Fall gewesen ist.

Nachdem ich im Sommer 1892 die Rechnungsgrundlagen, über die weiterhin (S. 21, 22) berichtet werden soll, erhalten hatte, führte ich zunächst eine provisorische Entwickelung durch, die gleich allen bisher publizierten auf die Glieder der 4 ersten Ordnungen beschränkt war. Ueber die Ergebnisse dieser im Frühjahr 1893 abgeschlossenen Arbeit ist bereits an verschiedenen Stellen kurz berichtet worden. Auf der Herbstversammlung der „Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik“ zu Münster (1893) hat Herr Neumayer einige Mitteilungen darüber gemacht, nachdem ich dies selbst kurz vorher vor der physikalischen Sektion der Naturforscherversammlung zu Nürnberg auf den von ihm angeregten Wunsch der Sektion gethan hatte. Einen ausführlicheren Bericht hatte er noch früher in eine von ihm an den Meteorologischen Kongress zu Chicago gesandte Abhandlung aufgenommen. Diese Abhandlung ist indessen auf unaufgeklärte Weise verloren gegangen.

Die folgenden Seiten enthalten den Bericht über eine seitdem ausgeführte erweiterte, bis zu den Gliedern 6. Ordnung gehende Darstellung. Dem Umstande entsprechend, dass es sich dabei um einen ersten Versuch auf einem neuen Wege handelt, ist bei der Diskussion der Resultate ein Hauptgewicht auf die Frage gelegt worden, welche Aufgaben sich daraus für die weitere

Forschung ergeben, und welche Bedingungen zu ihrer Förderung zu erfüllen sind. Wenn sich dabei gewisse praktische Forderungen, die von anderen Gesichtspunkten aus längst mit Nachdruck erhoben worden sind, von neuem als unabweisbar herausgestellt haben, so mag es gestattet sein, hier der Hoffnung Ausdruck zu geben, dass dieses Ergebnis an seinem Teile dazu beitragen möge, die endliche Erfüllung jener Forderungen zu beschleunigen.

Bei der Anlage der numerischen Rechnung, zu deren Darstellung ich mich nun wende, war vor allem der Gesichtspunkt leitend, spätere Wiederholungen mit geänderter empirischer Grundlage nach Möglichkeit zu erleichtern. Zu diesem Zwecke wurden alle Operationen, so weit es sich thun liess, allgemein durchgeführt und die Beobachtungsdaten erst möglichst spät eingesetzt. (Es ergiebt sich dadurch der weitere Vorteil, dass die so abgeleiteten allgemeinen Lösungen auch zur Behandlung anderer geophysikalischer Probleme herangezogen werden können.) Zu demselben Zwecke wurde ferner die Berechnung der aus den analytischen Entwickelungen folgenden Werte der Kraftkomponenten für eine grosse Zahl von Punkten in Angriff genommen, eine Arbeit, die allerdings bisher nur zum kleinsten Teile vollendet werden konnte. Nach ihrer Beendigung wird es bei Wiederholungen und Verbesserungen der Arbeit auf Grund neuen Materials genügen, die Differenzen der beobachteten Werte gegen die bereits analytisch dargestellten und berechneten in die Rechnung einzuführen. Wie man dabei am zweckmässigsten zu verfahren habe, hat schon E. Schering in ausführlicher Darlegung gezeigt.[1])

Meine anfängliche Absicht, sämtliche Resultate und zur Erleichterung einer detaillierten Nachprüfung oder etwaiger Abänderungen auch den Gang der Rechnung in voller Ausführlichkeit zu veröffentlichen, habe ich aus äusseren Gründen vorläufig aufgeben müssen. Ich muss mich darauf beschränken, zunächst die Rechnungsgrundlagen und die wichtigsten Ergebnisse mitzuteilen; indessen hoffe ich, später noch die Möglichkeit einer ausführlicheren Publikation zu finden.

Die empirische Grundlage der in Nachstehendem mitgeteilten Entwickelungen ist, wie schon bemerkt wurde, dieselbe, auf der die Potentialberechnung von Neumayer und Petersen beruht. Sie besteht aus den bis zu den Gliedern 4. Ordnung fortgeführten trigonometrischen Reihendarstellungen der Kraftkomponenten X, Y, Z für die 25 äquidistanten Parallelkreise von 0^0, 5^0, $10^0 \ldots 60^0$ nördlicher und südlicher geographischer Breite. Die Koeffizienten einer jeden

1) Vgl. darüber: K. Schering, Die Fortschritte unserer Kenntnisse vom Magnetismus der Erde. Geogr. Jahrbuch XV, 1891, p. 143 ff.

dieser 75 Reihen beruhen auf den 72 Funktionswerten, die nach den Originalkarten Dr. Neumayers in den Schnittpunkten des betreffenden Parallels mit den Meridianen von 0^0, 5^0, $10^0 \ldots\ldots 355^0$ östl. Länge von Greenwich stattfinden. Die analytische Darstellung einer jeden Komponente ist daher schliesslich auf ihre als beobachtet anzusehenden Werte in 1800 Punkten gegründet, die recht gleichmässig über die Erdoberfläche, allerdings mit Ausschluss der polaren Gebiete, verteilt sind. Um eine Anschauung von diesen Werten zu vermitteln, stelle ich in Tabelle V einige derselben zusammen.

Die Reihen sind nach der Bezeichnungsweise von Gauss in der Form

$$X = k_0 + k_1 \cos\lambda + K_1 \sin\lambda + \ldots\ldots + K_4 \sin 4\lambda$$
$$Y = l_0 + l_1 \cos\lambda + L_1 \sin\lambda + \ldots\ldots + L_4 \sin 4\lambda$$
$$Z = m_0 + m_1 \cos\lambda + M_1 \sin\lambda + \ldots\ldots + M_4 \sin 4\lambda$$

angesetzt; ihre Koeffizienten habe ich in den Tabellen VIa, b, c zusammengestellt. Als Einheit ist hier wie bei allen weiteren Angaben

$$0{,}1^5\, cm^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, s^{-1}$$

d. i. der 10000. Teil der Gaussischen Einheit benützt worden.

Nun handelt es sich darum, diese Koeffizienten oder vielmehr (S. 9) die Produkte

$$\alpha k_m^n \sin v,\ \ \alpha K_m^n \sin v;\ \ \beta l_m^n \sin v,\ \ \beta L_m^n \sin v;\ \ \gamma m_m^n,\ \ \gamma M_m^n$$

nach Kugelfunktionen zu entwickeln. Die Verteilung der gegebenen Werte auf willkürlich gewählte Parallelkreise macht, zumal da deren Reihe in weitem Abstande von den Polen endigt, die Anwendung der Neumann'schen Methode[1]) zur Entwickelung nach diesen Funktionen zwar nicht unmöglich, aber doch unvorteilhaft. Ich hätte, um dies zu vermeiden und jene Methode in ihrer einfachsten Gestalt anwenden zu können, auf die kartographische Darstellung der Elemente zurückgehen und ihre Werte auf einer Anzahl von neuen, dementsprechend gewählten Breitenkreisen bestimmen müssen. In der That glaube ich auch eine nachträgliche Durchführung dieser Untersuchung für zweckmässig halten zu sollen. Im vorliegenden Falle wäre indessen auf diesem Wege ein wesentlicher Vorteil verloren gegangen. Dadurch, dass die von

---

1) Astronomische Nachrichten, Band 15, p. 313 und Mathematische Annalen, Band 14, p. 567 (Wiederabdruck). — Eine kurze Formelzusammenstellung (ohne Begründung) habe ich in meiner ersten Abhandlung (Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, 1889, Nr. 3) gegeben. — Eine ausführlichere Darstellung mit Hülfstafeln gab Seeliger in den Sitz.-Berichten d. math.-phys. Klasse der Akad. d. Wiss. zu München, 1890, p. 499.

Neumayer und Petersen nach der vereinfachten Theorie durchgeführte Rechnung auf genau denselben empirischen Zahlenwerten beruht, wie die hier nach der vervollständigten Theorie vorgenommene, wird die Möglichkeit gewonnen, den Einfluss der veränderten Behandlungsweise in aller Schärfe zu beobachten. Bei den nicht unbeträchtlichen Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung hätte dagegen die Vergleichbarkeit der in beiden Fällen erhaltenen Ergebnisse bei der Verwendung verschiedener Parallelkreise in dem einen und dem andern Falle selbst dann in gar nicht zu übersehender Weise leiden müssen, wenn, wie hier, die zugrunde liegende kartographische Darstellung dieselbe blieb.

Ich habe deshalb in der üblichen Weise die Methode der kleinsten Quadrate zur Ableitung der Entwickelung benützt. Es sei $f_{m,i}$ irgend einer der Koeffizienten

$$\alpha_i\, k_{m,i} \sin v_i, \quad \alpha_i\, K_{m,i} \sin v_i, \quad \beta_i\, l_{m,i} \sin v_i, \quad \beta_i\, L_{m,i} \sin v_i, \quad \gamma_i\, m_{m,i}, \quad \gamma_i\, M_{m,i}$$

wobei der die Werte 1, 2 . . . 25 durchlaufende Index i die zu den verschiedenen Parallelkreisen

$$u_1 = 30^0, \; u_2 = 35^0, \; \ldots \ldots \; u_{25} = 150^0$$

gehörigen Werte unterscheidet, und es bezeichne F_m^n den entsprechenden unter den Koeffizienten B_m^n, C_m^n, D_m^n, E_m^n, j_m^n, k_m^n. Das System der Fehlergleichungen lautet dann

$$f_{m,i} = \sum_{n=m}^{n=m+\nu} F_m^n \cdot R_m^n (\cos v_i) \qquad i = 1, 2 \ldots 25$$

Die Auflösung dieses Systems hängt noch von der Gewichtsfestsetzung ab. Man könnte daran denken, diejenigen Gleichungen, die sich auf verhältnismässig schlecht bekannte Gegenden, z. B. auf höhere südliche Breiten, beziehen, mit geringerem Gewichte einzuführen als die andern. Es ist aber leicht einzusehen, dass man Gefahr laufen würde, auf diesem Wege den Gewinn einer Herabsetzung der zufälligen Fehler mit einer systematischen Verfälschung der Resultate zu erkaufen. Die Frage muss indessen noch von einem andern Gesichtspunkt aus betrachtet werden. Die Grössen, deren Reihenentwickelung gesucht wird, sind, wenn der Einfachheit halber die Abplattung der Erde unberücksichtigt bleibt, $X \sin u$, $Y \sin u$ und Z — die beobachteten Werte sind dagegen diejenigen von X, Y, Z. Die Ausgleichung wäre demnach eigentlich so vorzunehmen, dass diese letzteren möglichst genau dargestellt werden, während dies bei der Annahme gleichen Gewichts der Fehlergleichungen in Bezug auf die erstgenannten geschieht. Hiernach dürfte das Gewicht nur bei der Entwickelung von Z als konstant eingeführt werden, während es bei der von $X \sin u$ und $Y \sin u$ dem Quadrate des Sinus der Breite umgekehrt proportional zu setzen wäre. Nun kommt aber andrerseits in Betracht, dass infolge der mit wachsender Breite abnehmenden Länge der Parallelkreise die äquatorealen Gegenden thatsächlich nicht so dicht angeordnete, beobachtete Werte in die Rechnung einführen, wie die weiter polwärts gelegenen Gebiete — von den ganz ausfallenden Polargebieten natürlich abgesehen. Um diese verschiedene Dichtigkeit auszugleichen, mit andern Worten, um den einzelnen Zonen einen ihrer Fläche entsprechenden Einfluss auf das Resultat zu gewähren, hätte man offenbar, und zwar bei allen drei Komponenten, das Gewicht jeder Gleichung noch mit $\sin u$ zu multiplizieren. Die Kombination dieser verschiedenen Rücksichten würde also dahin führen, bei der Entwickelung von $X \sin u$ und $Y \sin u$ das Gewicht mit $(1 : \sin u)$ anzusetzen, bei der von Z dagegen umgekehrt $\sin u$ dafür zu wählen.

Bedenkt man nun aber, dass bei der verhältnismässig sehr grossen Zahl von überschüssigen Gleichungen die Wahl der Gewichte nur geringen Einfluss auf das Resultat, soweit dies von den zufälligen Fehlern berührt wird, haben kann, zumal da das Verhältnis der extremen Gewichtswerte nur das von 1 : 2 ist, so erscheint es durchaus gerechtfertigt, die Frage nach praktischen Rücksichten zu entscheiden. Diese aber sprechen dafür, allen Gleichungen dasselbe Gewicht zu geben. Es wird dadurch nicht nur die Herstellung der Normalgleichungen etwas bequemer gemacht, sondern vor allem wird dabei die Auflösung für alle drei Komponenten dieselbe, während sonst zwei Systeme von Normalgleichungen — das eine für $X \sin u$ und $Y \sin u$, das andere für Z — aufgestellt und gelöst werden müssen. Für dieses Verfahren lässt sich schliesslich noch ein sachlicher Rechtfertigungsgrund anführen. Es handelt sich bei der vorliegenden Aufgabe in letzter Linie gar nicht darum, den beobachteten und als fehlerhaft betrachteten Zustand nach einer theoretisch vorgezeichneten, geschlossenen Formel auszugleichen, sondern darum, den Zustand so, wie er beobachtet worden ist, in einer willkürlich abgebrochenen Entwickelung und daher nur angenähert analytisch darzustellen. So lange daher die verbleibenden Differenzen nicht unter den Betrag der vermutlichen Unsicherheit der Beobachtungen herabgehen, hat man sie durch Weiterführung der Entwickelung zu verkleinern. Die Aufgabe wird dadurch wenigstens näherungsweise zu einer bestimmten, bei der die Gewichtsfestsetzung überhaupt gleichgültig ist. Am deutlichsten tritt dieser Sachverhalt hervor, wenn man sich die Beobachtungen in genügender Dichte über die ganze Erdoberfläche verteilt denkt. In diesem Falle, wo die einzelnen Koeffizienten unabhängig von einander durch die bekannten Integrale dargestellt werden, tritt die Aufgabe der Ausgleichung ganz in den Hintergrund. Dem alsdann anzuwendenden Verfahren entspricht es nun offenbar hier, wenn Z in derselben Weise behandelt wird wie $X \sin u$ und $Y \sin u$ oder, um wieder zu der genaueren Darstellung zurückzukehren, γZ so wie $\alpha X \sin v$ und $\beta Y \sin v$. Diesen Ueberlegungen gemäss habe ich bei der Bildung der Normalgleichungen alle Gleichungen mit demselben Gewicht eingeführt.

Was die Begrenzung der Entwickelung betrifft, so hängt die endgültige Entscheidung darüber natürlich davon ab, wie grosse Abweichungen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten man noch als zulässig betrachten will. Vorläufig schien es am zweckmässigsten, einen Versuch mit einer bis zu den Gliedern 6. Ordnung ausgedehnten Entwickelung zu machen, da einerseits nach den bisherigen Erfahrungen die Glieder der ersten 4 Ordnungen unzweifelhaft nicht genügen, andrerseits der mit der wachsenden Gliederzahl schnell steigende Umfang der Rechnung zu möglichster Beschränkung mahnt. (Nur eine Ordnung weiter zu gehen, wäre eine halbe Massregel gewesen, weil infolge der symmetrischen Verteilung der 25 benützten Parallelkreise die Glieder gerader und diejenigen ungerader Ordnung unabhängig von einander gefunden werden.)

In formaler Hinsicht wäre von der Begrenzung der Entwickelung zu verlangen, dass sie durch eine blosse Koordinatentransformation nicht geändert werde. Daraus würde nun, wie der entwickelte Ausdruck für die Kugelfunktion $P^n\left(\cos v_1 \cos v_2 + \sin v_1 \sin v_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\right)$ erkennen lässt, folgen, dass man die Reihe mit denjenigen Gliedern, deren Indices m und n übereinstimmen, abschliessen müsse. Da indessen bei der, wie bisher so auch hier befolgten Methode, welche zuerst zur Entwickelung auf den einzelnen Parallelkreisen führt, die von den verschiedenen Vielfachen der geographischen Länge λ abhängigen Teile der darzustellenden Funktion unabhängig von einander erhalten werden, so unterliegt es keinem Bedenken, den Maximalwert von m ohne Rücksicht auf den von n festzusetzen, abgesehen von der selbstverständlichen Bedingung, dass in jedem einzelnen Gliede m nicht grösser als n sein darf.

Ich habe die Entwickelung bis zu den Werten $m = 4$, $n = 6$ (bei $\alpha X \sin v$ also $n = 7$) ausgedehnt. Die dann noch übrig bleibenden Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten entfallen, wie sich später zeigen wird, zu ungefähr gleichen Teilen auf die für $m > 4$ und die für $n > 6$ anzusetzenden Glieder, so dass die beiden Grenzen in praktischer Hinsicht als gleichwertig gelten dürfen.

Da, wie bemerkt, eine vollständige Wiedergabe der Rechnung gegenwärtig unterbleiben muss, so verzichte ich in der Hoffnung, das Versäumte später nachholen zu können, auch auf eine auszugsweise Mitteilung und wende mich sofort zu den Ergebnissen.

Aus den Normalgleichungen, die in der zuvor angegebenen Weise gebildet worden sind, ergeben sich die Koeffizienten der Reihen für $\alpha X \sin v$, $\beta Y \sin v$ und γZ, die (der Kürze halber unter der gemeinsamen Bezeichnung p_m^n, q_m^n) in den beiden mit IV bezeichneten und in der letzten Spalte der Tabelle VII zusammengestellt sind. (Die Bedeutung der Zahlen in den Reihen I, II, III wird weiterhin, S. 38, erläutert werden.) Dieselben Zahlen finden sich, auf Ganze der hier benutzten Einheit abgerundet und in etwas geänderter, leicht verständlicher Anordnung in Tabelle VIII nochmals vor. Dass einige der darin auftretenden Zahlen noch Dezimalstellen enthalten, ist eine Folge der Bedingungsgleichungen (6). Die in VIII zusammengestellten Werte sind als endgültig angenommen und allen weiteren Rechnungen zugrunde gelegt worden.

Dass die durch die Abrundung eingeführte kleine Abweichung von den zufolge der Ausgleichung besten Werten die Fehlerquadratsumme nur ganz unmerklich vergrössert, und dass daher die Abrundung durchaus zulässig ist, braucht nicht begründet zu werden; dagegen könnte man sie für zwecklos halten, da der weiteren Rechnung daraus kein nennenswerter Vorteil erwächst. Von diesem Standpunkte aus wären die in Tabelle VII angegebenen, unveränderten Werte mit Recht vorzuziehen. Die von mir gewählte Abänderung hat indessen einen andern Sinn. Es sollen die in VIII zu findenden Zahlen ohne Dezimalstellen nicht als Näherungswerte gelten, die eben nur um eine Stelle mehr als diejenigen in VII abgerundet sind, sie sollen vielmehr scharfe Werte vorstellen, die einen bestimmten möglichen, dem wirklichen allerdings nur näherungsweise entsprechenden Zustand des erdmagnetischen Feldes exakt definieren. Die mit zwei Dezimalstellen versehenen Zahlen tragen zur Definition dieses Zustandes nichts bei, denn sie folgen vermöge der Bedingungsgleichungen (6) aus den andern Koeffizienten. Ihre hier angegebenen Werte sind daher als abgerundete anzusehen, die jederzeit mit Hülfe jener Gleichungen noch genauer berechnet werden können. (Bei der numerischen Berechnung von X aus der Reihe für $\alpha X \sin v$ ist es in der Nähe der Pole unzweckmässig, an den Polen selbst unmöglich, die Summe

$$\frac{1}{\alpha \sin v}\left(B_0^0 R_0^0 + B_0^1 R_0^1 + B_0^2 R_0^2 + B_0^3 R_0^3 \ldots\right) \text{ oder } B_0^0 \frac{R_0^0}{\alpha \sin v} + B_0^1 \frac{R_0^1}{\alpha \sin v} + \ldots .$$

zu bilden, da sie für $v = 0^0$ und für $v = 180^0$ in einen unbestimmten Ausdruck übergeht. Ebenso verhält es sich bei der Berechnung von Y. Zur

Vermeidung dieses Uebelstandes hat man die Reihe mit Rücksicht auf die zwischen den Koeffizienten bestehenden Bedingungsgleichungen (die eben die Existenz einer eindeutig bestimmten Horizontalkraft an jedem Pole ausdrücken) umzuformen, was in verschiedener Weise geschehen kann. Am bequemsten, weil dann, gleichgültig wie weit die Entwickelung geführt wird, stets dieselben Funktionentafeln benutzt werden können, ist es, die Form

$$B_0^2 \frac{R_0^2 - \beta_0^2 R_0^0}{\alpha \sin v} + B_0^3 \frac{R_0^3 - \beta_0^3 R_0^1}{\alpha \sin v} + B_0^4 \frac{R_0^4 - \beta_0^4 R_0^0}{\alpha \sin v} + B_0^5 \frac{R_0^5 - \beta_0^5 R_0^1}{\alpha \sin v} + \ldots$$

$$\text{mit } \beta_0^{2n} = \alpha_0^{2n} : \alpha_0^0 = \alpha_0^{2n}, \ \beta_0^{2n+1} = \alpha_0^{2n+1} : \alpha_0^1 = \alpha_0^{2n+1} : \sqrt{3}$$

zu wählen. Mit Rücksicht hierauf habe ich bei $m = 0$ und dann der Gleichförmigkeit halber auch bei den übrigen Werten von m die beiden ersten Koeffizienten (mit $n = m$ und $n = m + 1$) als Funktionen der folgenden angesetzt. Von andern Gesichtspunkten aus könnte man es vorziehen, umgekehrt die letzten Koeffizienten jeder Reihe durch die vorhergehenden auszudrücken; indessen ist es natürlich eine Frage von untergeordneter Bedeutung, wie man verfahren will.)

Dieselben Erwägungen, die (S. 22, 23) zur Festsetzung der Gewichte der Gleichungen führten, lassen die Ableitung mittlerer oder wahrscheinlicher Fehler der berechneten Koeffizienten (in VIII) aus den noch zwischen Beobachtung und Rechnung vorhandenen Differenzen bedeutungslos erscheinen, so lange diese Differenzen durch eine etwas weitere Ausdehnung der Reihenentwickelung noch wesentlich erniedrigt werden können. Ich ziehe es vor, die Differenzen selbst einzeln anzugeben, um ein klares Urteil über die Brauchbarkeit der gewonnenen analytischen Darstellung möglich zu machen, dann aber eine blosse Schätzung der mittleren Fehler der Koeffizienten auf Grund der für die beobachteten Werte etwa anzusetzenden durchschnittlichen Unsicherheit vorzunehmen. Beide Angaben vereint werden erkennen lassen, ob und welche Erweiterungen der Reihenentwickelung bei dem gegenwärtigen Stande unserer empirischen Kenntnisse nötig sind, wenn eine diesen angepasste Schärfe der Darstellung erzielt werden soll, und welche weiteren Verbesserungen nur durch neue, sichere Beobachtungen gewonnen werden können.

In den Tabellen XI a, b, c finden sich die aus den Zahlen der Tabelle VIII folgenden Werte der Koeffizienten k, K, l, L, m, M von 5 zu 5 Grad für das ganze Bereich von $v = 0^0$ bis $v = 180^0$. Die Zahlen sind, damit spätere Neuberechnungen auf scharfe Differenzwerte gestützt werden können, bis auf Zehntel der hier angewandten Einheit angegeben. Die Abweichungen dieser berechneten Werte von den in VIa, b, c verzeichneten beobachteten finden sich, der leichteren Uebersichtlichkeit halber auf Ganze abgerundet, in den folgenden Tabellen XIIa, b, c. Alle diese, wie die weiterhin auftretenden Differenzen sind so gebildet, dass sie den Ueberschuss der beobachteten über die berechneten Werte darstellen. Sie bezeichnen also den noch nicht durch den analytischen Ausdruck wiedergegebenen Teil der Beobachtungsresultate und sind mit diesen gleichartig. Irgend welche Verbesserungen der letzteren dürfen ohne weiteres als Korrektionen der Differenzen angesehen werden, und wenn diese ganz oder teilweise analytisch dargestellt werden, so sind die dabei erhaltenen Resultate unverändert dem bereits ermittelten Ausdrucke hinzuzufügen.

Die als beobachtet bezeichneten Werte der Koeffizienten k, K u. s. w. sind dies nur mittelbar, im Gegensatz zu den aus der Kugelfunktionenreihe abgeleiteten. Beobachtet im eigentlichen Sinne sind hier diejenigen Zahlen zu nennen, die den zugrunde gelegten empirischen Thatbestand definieren, also die Werte von X, Y, Z in den zu Anfang bezeichneten 1800 Punkten der Erdoberfläche. (Dass auch diese bereits mehr oder weniger das Resultat einer Bearbeitung der unmittelbaren Messungsergebnisse sind, kommt für die vorliegende Arbeit nicht in Betracht.) Ein abschliessendes Urteil kann daher nur auf die Vergleichung der an diesen 1800 Punkten nach Dr. Neumayers Karten ermittelten Werte mit den aus der Darstellung in VIII folgenden gegründet werden. Dieser Vergleichung dienen die Tabellen in XIVa, b, c, in denen jedoch nur die schon in Tafel V auftretenden 156 Punkte — von 10^0 zu 10^0 in Breite, von 30^0 zu 30^0 in Länge — berücksichtigt worden sind, was zur Gewinnung eines Ueberblickes ausreicht. Jede dieser Differenzentafeln zerfällt in drei Abschnitte. Der erste, mit Δ' überschriebene, enthält diejenigen Differenzen, welche durch die Beschränkung der trigonometrischen Reihenentwickelungen auf die Glieder der ersten vier Ordnungen entstehen, mit andern Worten den Ueberschuss der beobachteten Werte (in V) über die nach den Tabellen VIa, b, c berechneten. Unter der Bezeichnung Δ'' finden sich die durch die Begrenzung der Entwickelung nach Kugelfunktionen herbeigeführten Differenzen, die sich ohne weiteres aus den Zahlen der Tafeln XIIa, b, c ergeben. Die Summe beider Differenzen, also der Gesammtunterschied von Beobachtung und Rechnung, bildet endlich den dritten Abschnitt, Δ, der Tabellen.

Um die hier mitgeteilten Zahlen würdigen zu können, muss man sich erinnern, dass, in derselben Einheit gemessen, die durchschnittliche Intensität der erdmagnetischen Totalkraft etwa gleich 50 000 (mit den Extremwerten

26 000 und 70 000) ist, während die Durchschnittswerte von X, Y, Z, vom Vorzeichen abgesehen, zu ungefähr 30 000, 6000, 40 000 angesetzt werden können. Ein unmittelbarer Vergleich mit den bei früheren Potentialberechnungen erhaltenen Abweichungen ist nicht möglich, weil diese (wenigstens soweit sie veröffentlicht worden sind) immer nur bis zu den Kugelfunktionen 4. Ordnung ausgedehnt wurden. Mittelbar lässt sich indessen ein Vergleich mit Hülfe meiner zu Anfang erwähnten provisorischen Rechnung, die ebenfalls bis zur 4. Ordnung ging, gewinnen. Bei dieser waren die Differenzen Δ durchschnittlich fast 1,8 mal so gross, wie die hier mitgeteilten bei der definitiven Berechnung, obgleich bei diesen nur der Bestandteil Δ'' eine Verminderung erfahren hat. Es betragen nämlich die mit Hülfe der Fechner'schen Formel aus dem Durchschnitte ihrer 156 absoluten Werte näherungsweise berechneten mittleren Differenzen

bei	X	Y	Z
nach der 1. Rechnung	± 762	610	1331
nach der 2. Rechnung	± 336	434	819.

Die Einführung der Kugelfunktionen 5. und 6. (bei $\alpha X \sin v$ derjenigen 6. und 7.) Ordnung hat also eine wesentliche Verbesserung der Resultate zur Folge gehabt. Von den früher ausgeführten Berechnungen ist die Erman-Petersen'sche am besten geeignet, zum Vergleiche herbeigezogen zu werden, weil sich nur bei dieser die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung in Bezug auf die Kraftkomponenten angegeben finden.[1]) Allerdings beziehen sich diese Differenzen auf andere Punkte, als die hier gewählten, und ihre Anzahl ist überdies geringer (90 gegen 156); indessen dürfte dieser Umstand an sich die Vergleichbarkeit der beiderseitigen Ergebnisse nur wenig beeinträchtigen. Wichtiger ist es, dass bei Erman und Petersen die 9 benutzten Koeffizienten jeder trigonometrischen Reihe nur aus den Elementen an den nachher bei der Prüfung berücksichtigten 9 Punkten des betreffenden Parallelkreises abgeleitet worden sind, so dass die hier mit Δ' bezeichneten Differenzen dort verschwinden, weshalb die Gesamtdifferenzen bei E.-P. verhältnismässig zu klein erscheinen. Nun beträgt nach der Angabe auf S. 24 der genannten Publikation der wahrscheinliche Fehler eines berechneten Wertes in konventionellen Einheiten

1) A. Erman und H. Petersen: Die Grundlagen der Gaussischen Theorie und die Erscheinungen des Erdmagnetismus im Jahre 1829. Berlin 1874. S. 24.

bei		X	Y	Z
		$\pm$ 21,41	15,98	29,10,

woraus sich der mittlere Fehler in der hier benutzten Einheit durch Multiplikation mit 34,941 : 0,6745

bei	X	Y	Z	
zu	$\pm$ 1109	828	1507	ergiebt.

Diese Differenzen sind durchschnittlich 1,3 mal so gross wie die vorher angegebenen, entsprechenden meiner provisorischen Rechnung und 1,9 mal so gross wie die eigentlich mit ihnen zu vergleichenden Differenzen Δ''. Wie weit dieses für die letztere Berechnung günstige Ergebnis davon herrührt, dass das neue Beobachtungsmaterial besser als das alte ist, liesse sich selbst durch eine eingehende Untersuchung kaum mit Sicherheit feststellen. Zum Teil beruht die Ueberlegenheit der neuen Berechnung unzweifelhaft darauf, dass bei ihr jede Komponente selbständig dargestellt worden ist (natürlich unter Berücksichtigung der X und Y verknüpfenden, rein analytischen, nicht physikalischen Bedingungsgleichungen), während nach der alten Methode alle drei Komponenten auf Grund gewisser physikalischer Hypothesen (S. 3) durch eine gemeinsame Ausgleichung gefunden werden. Dort ist daher auch die Zahl der zu bestimmenden Konstanten, auf denen die Darstellung beruht, 3 mal so gross wie hier. Die neue Rechnung muss also schon dann geringere Differenzen ergeben, wenn diese nur auf den Beobachtungsfehlern beruhen; in höherem Grade muss dies der Fall sein, wenn die theoretischen Voraussetzungen der früheren Rechnung (die Hypothese der Existenz eines Potentials ausschliesslich innerer Kräfte) nicht erfüllt sind. Die daraus entspringenden Widersprüche zwischen den nicht in die angenommene Form passenden Werten der drei Komponenten müssen in die Schlussdifferenzen eingehen, so dass diese durch keine noch so weite Ausdehnung der Reihen unter einen gewissen Betrag herabgedrückt werden können. Im Gegensatze hierzu können die Differenzen bei selbständiger Berechnung der einzelnen Komponenten, so wie sie in XIV a, b, c erscheinen, beliebig klein gemacht werden. Die Ueberlegenheit der neuen Methode über die alte muss daher um so stärker hervortreten, je mehr Glieder in der Entwickelung berücksichtigt werden. Die bisherigen Erfahrungen entsprechen dieser Erwartung und liefern so bereits einen indirekten Beweis dafür, dass die physikalischen Voraussetzungen der alten Theorie nicht streng erfüllt sein können. Während nämlich, wie kurz zuvor (S. 28) schon bemerkt wurde, die Hinzunahme der Kugelfunktionen 5. und 6. Ordnung bei der vorliegenden Berechnung eine wesentliche Herabminderung der Differenzen bewirkte, war die gleiche Erweiterung der Entwickelung bei Dr. Neumayers Potentialberechnung (der einzigen, die bisher über die 4. Ordnung hinausgeführt worden ist) ohne wesentlichen Nutzen[1]), obgleich dabei obendrein die von 5λ und 6λ abhängigen Glieder berücksichtigt und so, im Gegensatze zur vorliegenden Rechnung, die Differenzen Δ' herabgesetzt wurden.

Ist hiernach das Ergebnis der neuen Rechnung relativ als günstig zu bezeichnen, so ist es doch für sich betrachtet noch keineswegs befriedigend. Die in den Tabellen XIV a, b, c zusammengestellten Differenzen sind offenbar noch wesentlich grösser als die möglichen Fehler der beobachteten (d. h. den Karten entnommenen) Werte, für die es freilich kaum möglich ist, eine auch nur einigermassen sichere Schätzung zu gewinnen. Es liegt daher der Gedanke nahe, die Entwickelung noch fortzusetzen. Indessen sprechen auch manche Erwägungen wenigstens gegen eine beträchtliche Erweiterung der Reihen und lassen es nützlich erscheinen, schrittweise vorzugehen und so auf Grund der successiven Resultate die zweckmässigste Grenze der Entwickelung empirisch festzustellen. Je grösser man die Anzahl der berücksichtigten Reihenglieder und damit die der zu bestimmenden Unbekannten wählt, desto stärker wird im allgemeinen der Einfluss der Beobachtungsfehler auf die gesuchten Koeffizienten. Die Fortsetzung der Entwickelung wird daher zwar eine immer bessere Anschmiegung an die in endlicher Zahl vorhandenen Beobachtungswerte bewirken, schliesslich aber zu einer weniger sicheren, in Zwischenpunkten immer schlechteren Gesamtdarstellung führen. Dies ist in besonders hohem Grade bei der hier benutzten Rechnungsgrundlage zu befürchten, die zwei grosse, von Beobachtungen ganz freie Gebiete, die beiden Polarkalotten von 30^0 sphärischem Radius, enthält. Eine zu weitgehende Schärfe in der Darstellung der für die Zone von 60^0 nördl. bis 60^0 südl. Breite gegebenen Werte würde eine für die Polargebiete gänzlich unbrauchbare Entwickelung liefern können. Hierzu kommt nun die Erwägung, dass eine nahezu vollkommene Darstellung der beobachteten Werte durch einen analytischen Ausdruck nicht einmal die wichtigste Aufgabe ist. Gerade weil diese Aufgabe so, wie sie hier gefasst ist, theoretisch mit beliebiger Annäherung gelöst werden kann, während die Regellosigkeit der Erscheinung im Einzelnen eine schnelle Konvergenz der Reihen oder einen gesetzmässigen Zusammenhang ihrer Koeffizienten ausschliesst, so ist die wirkliche Ausführung der Reihen-

1) Neumayer, Ueber erdmagnetische Landesvermessung. Vortrag, gehalten vor der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Bremen. 1890.

entwickelung bis zu Gliedern sehr hoher Ordnung theoretisch ohne Interesse und praktisch wertlos. Die Hauptbedeutung der analytischen Darstellung liegt darin, dass sie allein eine zuverlässige Grundlage für die physikalische Theorie des Phänomens abgeben kann, dass z. B. ohne sie schon die erste Frage, die nach dem räumlichen Ursprunge der Kraft, unbeantwortet bleiben muss. Die analytische Darstellung leistet dies, indem sie das regellose Gesamtbild der Erscheinung in eine (unendliche) Summe von regelmässig gebildeten Bestandteilen zerlegt, die im allgemeinen als partikuläre Lösungen der fundamentalen Differentialgleichungen des Problems einzeln betrachtet werden können. Es ergiebt sich daraus, dass die aus der Reihenentwickelung zu ziehenden Schlüsse von der Ausdehnung der Reihen unabhängig sind. Daher kommt es nicht sowohl auf die Anzahl als vielmehr auf die möglichst genaue Bestimmung der zu berechnenden Reihenglieder an, und als wichtigste Aufgabe muss gegenwärtig eine wesentlich verschärfte Ermittelung der ersten Koeffizienten der Reihen bezeichnet werden. Freilich ist hier, wo infolge der Verteilung der beobachteten Werte jede Normalgleichung mehrere unbekannte Koeffizienten enthält, so dass diese nicht unabhängig von einander erhalten werden, beides nicht vollkommen zu trennen. Bis zu einer gewissen, nicht von vornherein ersichtlichen Grenze wird daher nur die Erweiterung der Reihenentwickelung zu einer schärferen Bestimmung der einzelnen, insbesondere der ersten und wichtigsten Koeffizienten führen. Eine durchaus selbständige Berechnung jedes Koeffizienten und damit die Möglichkeit, seinen Wert frei von jeder nicht auf Beobachtungsfehler allein zurückgehenden Unsicherheit zu erhalten, setzt die Kenntnis der darzustellenden Funktionen (der Kraftkomponenten) auf der ganzen Erdoberfläche voraus, die daher hier von neuem als wichtiges Desiderat erscheint.

In den vorausgehenden Betrachtungen ist ausschliesslich die rein analytische, durch die Zahlen der Tabelle VIII eindeutig definierte Darstellung der empirisch gegebenen Kraftverteilung behandelt worden. Mit Hülfe der im ersten Abschnitte zusammengestellten Formeln ist nun daraus eine zweite, damit äquivalente Darstellung abzuleiten, die, in ihrer Form nach physikalischen Gesichtspunkten bestimmt, der Untersuchung der Ursachen dieser Kraftverteilung zur Grundlage dienen kann. Zu diesem Zwecke sind zunächst aus $\alpha X \sin v$ und $\beta Y \sin v$ die Funktionen U und W zu entwickeln. Man findet ihre Koeffizienten in Tabelle IX, die ausserdem diejenigen von $(V:b)$, d. i. dem arithmetischen Mittel von U_0 und W_0, enthält. Der Umstand, dass U und W nicht übereinstimmen, drückt nach dem früher Gesagten aus, dass die horizontalen Kräfte in der Erdoberfläche nicht vollständig auf ein Potential zurückgeführt werden können. Nimmt man als Ursache davon eine elektrische Strömung an, welche die Erdoberfläche (senkrecht) durchdringt, so lässt sich deren auf die Flächeneinheit bezogene Intensität, mit andern Worten ihre Stromdichte i mit Hülfe der Formel (14) aus der Differenz $(W - U)$ berechnen. Für die damit nahezu proportionale Grösse $\alpha \beta b i$ ergiebt sich eine geschlossene Entwickelung, deren Koeffizienten in Tabelle X zu finden sind. Der mittlere Betrag von bi auf der ganzen Erdoberfläche folgt daraus zu etwa 110, d. h. 0,0011 $cm^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, s^{-1}$. Da b, der Polarradius der Erde, $6{,}356.10^{8}$ cm beträgt, so ergiebt sich für i der Mittelwert $1{,}7.10^{-12}$ $cm^{-\frac{3}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, s^{-1}$ oder ungefähr $1{,}7.10^{-11}$ *Ampère*: cm^2. (Natürlich sind hier quadratische Mittel gemeint, da die algebraische Summe der Strömung und damit das einfache Mittel ihrer Intensitätswerte verschwindet.) Auf eine Fläche von einem Quadratkilometer kommt daher durchschnittlich ein Strom von $^1/_6$ *Ampère*. Die physikalische Möglichkeit einer so schwachen Strömung, die sich sogar bereits durch mechanische Konvektion elektrischer Ladungen erklären liesse, ist wohl nicht zu bestreiten; von dieser Seite liegt kein Grund vor, die Thatsächlichkeit der Differenz von W und U zu bezweifeln. Eine andere Frage, die weiterhin noch untersucht werden muss, ist es, ob nicht die Unsicherheit der Koeffizienten von U und W so gross ist, dass der Unterschied beider Funktionen illusorisch wird.

Aus dem Potential V des möglichst gross gewählten Hauptteils der horizontalen Kräfte und aus der vertikalen Komponente Z ergeben sich nun weiter nach den Formeln 15/18 die Potentiale V_i und V_a der innern und der äussern Agentien. Die Koeffizienten beider oder vielmehr der damit proportionalen Grössen $(V_i : b)$ und $(V_a : b)$ sind in Tabelle X angegeben. Man sieht, dass V_a in der That, wie sich nach den früheren Potentialberechnungen voraussehen liess, sehr klein ist; sein Mittelwert beträgt nur ungefähr $^1/_{40}$ desjenigen von V_i. Auch hier bleibt natürlich die Sicherheit der Resultate noch zu untersuchen. Sehe ich davon zunächst ab, so kann ich das rechnungsmässige Ergebnis in folgender Weise aussprechen.

Die empirisch festgestellte Verteilung der erdmagnetischen Kräfte in der Erdoberfläche, wie sie durch Dr. Neumayers Karten für den Augenblick 1885,0 dargestellt wird, beruht zwar vorwiegend auf Ursachen, deren Sitz im Erdinnern liegt, kann aber nicht ausschliesslich auf solche zurückgeführt werden. Ein kleiner Teil der Kraft (etwa $^1/_{40}$ des ganzen Betrages) ist Ursachen ausserhalb der Erdoberfläche zuzuschreiben; ein weiterer, noch etwas grösserer Teil (und zwar speziell der horizontalen Komponente) deutet auf elektrische Strömungen hin, welche diese Fläche durchdringen.

Die beiden durch die Zahlen in VIII einerseits, durch die in X andererseits definierten Darstellungen des magnetischen Zustandes der Erde sind, wie schon bemerkt wurde, gleichwertig; unter Beachtung der früher erwähnten Nebenbedingungen (S. 10) kann aus jeder von ihnen die andere abgeleitet werden. Es ist danach selbstverständlich, verdient aber trotzdem hervorgehoben zu werden, dass die in X gegebene Darstellung von den beobachteten Werten nur um die bereits früher (bei VIII) vorhandenen Differenzen, die in XII und XIV zum Ausdruck kommen, abweicht. Es ist daher prinzipiell möglich, die Darstellung durch V_i, V_a und i dem wirklichen, empirisch festgestellten Zustande beliebig nahe zu bringen.

Aus den für V_i und V_a gefundenen Werten liessen sich leicht (vgl. die Formeln 22) die zur Erdoberfläche parallelen Strömungen berechnen, welche die darin ausgedrückten Kräfte hervorrufen würden. Ich verzichte indessen darauf, die Koeffizienten der entsprechenden Entwickelungen mitzuteilen, da sie als verhältnismässig unsicher anzusehen sind. Bei V_i ist die Möglichkeit, dass wenigstens ein merklicher Teil auf eine direkte Magnetisierung der Erdrinde zurückgeführt werden muss, nicht abzuweisen; bei V_a andererseits ist die wenn auch nicht absolut, so doch relativ grössere Unsicherheit der gefundenen Werte zu beträchtlich, als dass die Ableitung detaillierter Folgerungen einen hinreichenden Wert besitzen könnte. Ich beschränke mich deshalb auf eine summarische Angabe, die nur die Grössenordnung der zur Erklärung der Erscheinungen nötigen Ströme charakterisieren soll. Dabei denke ich mir in der früher bezeichneten Weise (S. 14) die ganze Strömung durch vertikale Verschiebung in zwei unendlich dünne, der Erdoberfläche beiderseits unendlich benachbarte Schichten zusammengedrängt und gebe die Strömung an, die einen zu ihrer Richtung senkrechten Querschnitt von 1 *cm* Breite durchsetzt. Die in dieser Weise ausgedrückte mittlere Intensität ist, wenn die bei V_i verhältnismässig geringe, bei V_a wenig sichere meridionale Komponente ausser acht bleibt, ziemlich genau $^1/_2$ *Amp* : *cm* bei der inneren und ungefähr $^1/_{700}$ *Amp* : *cm* bei der äusseren Strömung. Die Richtung der einen wie der anderen geht von Osten nach Westen.

Es ist hier der Ort, einige weitere Resultate von ähnlicher allgemeiner Bedeutung anzuführen, das Moment und die Axenrichtung des Erdmagneten, die für dessen Wirkung in die Ferne massgebend sind. Diese beiden Begriffe müssen auf den im Innern der Erde entspringenden Teil der Kraft beschränkt werden. Die in V_a zum Ausdruck kommenden äusseren Agentien könnte man sich nur unter ganz speziellen Annahmen über ihre Verteilung durch ein Moment von bestimmter Richtung und Grösse veranschaulichen, wenn man diesen Begriff im gewöhnlichen Sinne fasst. Dagegen könnte man allerdings in einem anderen Sinne einen dem Moment entsprechenden Vektor bei V_a angeben, der für die Richtung und Stärke der magnetischen Kraft im Erdmittelpunkte bestimmend wäre. Indessen wäre diese Angabe wohl ohne besonderes Interesse; ich teile deshalb die betreffenden Resultate nicht mit.

Unter der angegebenen Beschränkung ergiebt sich für das magnetische Moment (man könnte es dasjenige des festen Erdkörpers nennen) der Wert

$$M = 8{,}3481 \cdot 10^{25}\, cm^{\frac{5}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, s^{-1} \qquad (\log M = 25{,}92159)$$

und als Axenrichtung diejenige nach dem Punkte

$$v = 168^0\, 32', 1 \qquad \lambda = 111^0\, 29', 4$$
$$\text{oder } u = 168^0\, 34', 3 \qquad \lambda = 111^0\, 29', 4.$$

Die Axe verbindet also den Punkt von $78^0\, 34', 3$ nördl. geogr. Breite und $68^0\, 30', 6$ westl. Länge v. Grw. mit demjenigen, der unter $78^0\, 34', 3$ südl. geogr. Breite und $111^0\, 29', 4$ östl. Länge liegt.

Zum Vergleiche führe ich an, dass nach der Berechnung von Neumayer und Petersen das Moment $0{,}32237\, R^3$, d. i. (mit $R = 6{,}370 \cdot 10^8\, cm$) $8{,}3324 \cdot 10^{25}\, cm^{\frac{5}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, s^{-1}$ beträgt, und dass die Achse nach dem Punkte $\varphi = -78^0\, 20'$, $\lambda = 112^0\, 43'$ gerichtet ist. Die geringe Abweichung dieser Zahlen von den zuvor angegebenen zeigt in eindrucksvoller Weise, wie sehr unter den Ursachen der erdmagnetischen Kraft die im Erdinnern gelegenen überwiegen.

Es bleibt nun noch die Frage zu untersuchen, welche Sicherheit allen diesen Resultaten zukommt, und welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um ihre Sicherheit zu erhöhen.

Wenn die gegebenen, als beobachtet anzusehenden Werte vollkommen fehlerfrei wären, d. h. wenn sie in voller Schärfe dem thatsächlichen Zustande des Erdmagnetismus in einem bestimmten Augenblicke (sei es auch unter Elimination exakt definierter lokaler und zeitlicher Störungen) entsprächen, so würden die (auszugsweise in den Tabellen XIV mitgeteilten) Differenzen der berechneten und der beobachteten Werte eine Folge des zu frühen Abbrechens der Reihen sein, und sie würden durch Fortsetzung der Entwickelung beliebig verkleinert werden können. Indessen würde es auch in diesem günstigsten Falle unzweckmässig sein, die Entwickelung so weit zu treiben, dass die Differenzen verschwinden; es wäre dies nur dann von Vorteil, wenn man a priori wüsste, dass in der exakten (nur durch Integration über die ganze Erdoberfläche zu erhaltenden) Darstellung alle Glieder höherer Ordnung, die man bei einer Berechnung aus Einzelwerten nicht bestimmen kann, thatsächlich verschwindend klein sind. Weiss man dies nicht — und im vorliegenden Falle ist aus dem blossen Anblicke der ganz unregelmässig und langsam abnehmenden Koeffizienten sogar zu schliessen, dass das Gegenteil der Fall ist, — so würde man, wie schon früher bemerkt wurde, zwar die Darstellung der gerade gegebenen Werte verbessern, diejenige des Gesamtzustandes aber verschlechtern. In noch höherem Grade ist dies der Fall, wenn die gegebenen Zahlen selbst als fehlerhaft gelten müssen, so dass die Aufgabe den Charakter einer Ausgleichungsrechnung annimmt.

So lange daher die Beobachtungsgrundlagen nicht erweitert werden können, wird sich ein gewissermassen tastendes Verfahren empfehlen, das durch successive Erweiterung der Reihenentwickelungen ein Urteil darüber gewinnen lässt, welche Veränderungen die ersten, wichtigsten Koeffizienten dabei erfahren, und wie weit ihre schliesslich angenommenen Werte etwa noch von der Grenze entfernt sein mögen, gegen die sie bei weiterer Entwickelung konvergieren. Ich habe nun, wie an früherer Stelle bemerkt wurde, eine provisorische, nur bis zur 4. Ordnung gehende Darstellung vorgenommen; ausserdem habe ich eine noch stärker abgekürzte, nämlich nur bis zur 2. (bei $\alpha X \sin v$ natürlich bis zur 3.) Ordnung ausgedehnte Entwickelung durchgeführt. (Da die Glieder gerader und ungerader Ordnung unabhängig von einander berechnet werden, so sind damit zugleich die beiden dazwischen liegenden Fälle erledigt, bei denen die Entwickelung bis zur 3. und bis zur 5. Ordnung geht.) Ich will die Ergebnisse, von einigen Beispielen abgesehen, nicht mitteilen, sondern nur als zusammenfassendes Resultat angeben, dass diejenigen Teile der Entwickelungen, die von höheren Vielfachen als dem Doppelten der geographischen Länge λ abhängen, durchgehends nur als rohe, erste Näherungen gelten dürfen, dass andererseits für $m = 0$ und $m = 1$, in geringerem Grade auch für $m = 2$ die ersten Koeffizienten so genau bestimmt sind, dass eine Weiterführung nicht mehr viel an ihnen ändern würde. Eine aufmerksame Betrachtung der in den Tabellen XII angegebenen Differenzen führt zu demselben Schlusse. Von Wichtigkeit für die Beurteilung der Ergebnisse ist noch ein weiterer Umstand. Die beiden für $\alpha X \sin v$ und $\beta Y \sin v$ geltenden Entwickelungen sind früheren Erörterungen (S. 11) zufolge durch eine Anzahl von rein analytischen, nicht etwa aus physikalischen Gründen fliessenden Bedingungsgleichungen verknüpft. Es zeigt sich nun, dass diese Gleichungen im allgemeinen einen überraschend starken Zwang einführen. Ich habe die Koeffizienten beider Entwickelungen stets zuerst selbstständig bestimmt und die Aenderungen, die durch die Einführung der Bedingungsgleichungen verursacht werden, nachträglich berechnet und hinzugefügt. Diese Aenderungen ergaben sich, wie schon angedeutet wurde, fast in allen Fällen als sehr beträchtlich; sie nehmen mit der fortschreitenden Ausdehnung der Reihenentwickelung ab und sind am kleinsten bei den ersten Gliedern der Reihen. Der Hauptgrund für den in diesen Differenzen zu Tage tretenden Widerspruch liegt in der unregelmässigen Verteilung der erdmagnetischen Kraft, die sich nur durch sehr langsam konvergierende Reihen zur Darstellung bringen lässt; recht störend wirkt auch gerade hier das Fehlen beobachteter Werte aus den Polarregionen, was leicht verständlich ist, wenn man sich erinnert, dass sich jene Bedingungsgleichungen auf die Anordnung der Kräfte an den Polen beziehen. Die den gegebenen Werten anhaftenden Fehler sind nur mittelbar von Einfluss, insofern sie nämlich bei ihrer ganz regellosen Verteilung besonders zu den Gliedern von hoher Ordnungszahl relativ beträchtliche Beiträge liefern.

Als Beispiel führe ich den mit $\cos \lambda$ multiplizierten Teil der Reihe für $\alpha X \sin v$ und den damit zusammenhängenden Faktor von $\sin \lambda$ in der Reihe für $\beta Y \sin v$ an.

Wird die Entwickelung bis zu R_1^3 bei X, also bis R_1^2 bei Y ausgedehnt, so sind die ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen bestimmten Koeffizienten

— 1943,9	198,9	732,9
— 1341,3	1273,8,	

während die thatsächlich zu wählenden, den Bedingungsgleichungen genügenden folgendermassen lauten:

— 1872,1	— 455,5	1128,5
— 1018,6	1051,2.	

Geht die Entwickelung zwei Stufen weiter, so ergeben sich als selbständig berechnet die Zahlen:

— 1930,5	205,7	757,6	— 997,5	178,9
— 1290,8	1272,5	— 525,9	189,7	

und als ausgeglichen:

— 1913,2	270,8	817,1	— 790,2	308,7
— 1312,3	1249,6	— 644,1	116,8.	

Werden endlich in jeder Reihe noch zwei weitere Glieder berücksichtigt, so sind die entsprechenden Koeffizienten

— 1932,3	270,4	752,1	— 899,9	172,0	313,4	— 13,9
— 1279,8	1272,1	— 505,5	189,1	147,9	— 1,7	

und

— 1920,9	258,4	788,5	— 924,4	226,9	273,9	54,6
— 1276,9	1260,9	— 495,5	166,1	169,7	— 38,7.	

Die Betrachtung dieser Zahlen lässt deutlich erkennen, dass nur die ersten Koeffizienten einigermassen sicher gestellt sind, und dass eine getrennte Berechnung der einzelnen durchaus zu erstreben ist. Eine solche erfordert aber (auch wenn sie nicht durch Auswertung von Oberflächen - Integralen, sondern nach der Neumann'schen Methode vorgenommen wird) die Kenntnis der magnetischen Elemente in den Polargebieten.

Berechnet man aus den vorstehend mitgetheilten Partialentwicklungen von X und Y die entsprechenden Teile der Reihen für $(V:b)$ und $\alpha\beta b i$, so müssen sich natürlich ähnliche Verschiedenheiten bei fortschreitender Erweiterung der Reihen ergeben. Die Koeffizienten von $R_1^1 \cos\lambda$, $R_1^2 \cos\lambda \ldots$ in $(V:b)$ sind in den drei betrachteten Fällen

— 1019,7	1115,3				
— 1506,6	1252,4	— 591,8	137,0		
— 1220,4	1231,6	— 451,3	156,9	140,4	— 9,8

und diejenigen von $R_1^1 \sin\lambda$, $R_1^2 \sin\lambda \ldots$ in $\alpha\beta b i$

— 45,8				
— 30,4	— 52,1	— 26,0		
— 33,3	3,3	— 39,7	47,9	— 54,5.

Die durch keine Bedingungsgleichung (ausser der einen $j_0^0 = 0$) beschränkten Koeffizienten der Reihe für γZ zeigen bei fortgesetzter Entwickelung im allgemeinen geringere Aenderungen. Auch hier sollen die zu $R_1^1 \cos\lambda$, $R_1^2 \cos\lambda \ldots$ gehörigen Koeffizienten als illustrierendes Beispiel angeführt werden. Sie lauten in den drei Fällen folgendermassen:

3083	— 3819				
2893	— 3813	1984	— 868		
2847	— 3841	1900	— 909	— 607	— 132.

Was die soeben erwähnte Bedingungsgleichung $j_0^0 = 0$ betrifft, so zeigt sich diese im Gegensatze zu den anderen, vorher erwähnten fast ohne jeden Zwang erfüllt. Bestimmt man die Koeffizienten j_0^0, j_0^2, j_0^4, j_0^6 ohne Rücksicht auf jene Gleichung, so findet man 5,9 708,5 — 1265,2 — 34,7, während unter Berücksichtigung der Bedingung 0 701,4 — 1272,6 — 40,0 folgt.

Die vorhergehenden Betrachtungen sind durchaus geeignet, den Eindruck zu erwecken, dass die verhältnismässig kleinen Differenzen, aus denen die Existenz einer die Erdoberfläche durchdringenden Strömung und eines Potentials äusserer Agentien erschlossen worden sind, als illusorisch bezeichnet werden müssen. Und dieser Eindruck wird durch weitere Betrachtungen noch verstärkt. Die Tabelle VII enthält bei X und Y je vier Kolumnen, von denen bisher nur die letzte erwähnt worden ist. Die in den drei vorhergehenden Spalten stehenden Zahlen bezeichnen nun die Koeffizienten der Reihen unter den folgenden Voraussetzungen:

I. Es ist $i = 0$, $V_a = 0$, d. h. die erdmagnetische Kraft beruht, wie es die Gaussische Theorie annahm, ausschliesslich auf der Wirkung von inneren Ursachen. Unter dieser Voraussetzung sind die Reihen für $\alpha X \sin v$ und $\beta Y \sin v$ aus derjenigen für γZ berechnet worden.

II. Die Reihen sind ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen entwickelt worden. (Einige der hier angeführten Zahlen haben bereits (S. 36) Erwähnung gefunden.)

III. Es ist $i = 0$, d. h. die Reihen sind unter der Annahme berechnet worden, dass die ganze Kraft ein Potential besitzt, welches indessen z. T. auf äusseren Ursachen beruhen kann.

Man sieht, dass das Ergebnis der ohne jede Hypothese durchgeführten Rechnung, das in Spalte IV verzeichnet ist, sich nicht viel besser an II anschliesst, als dies III thut, während I allerdings fast durchgängig etwas weiter abweicht. Dabei ist indessen zu bedenken, dass I sich auf die unverändert angenommenen Werte von γZ stützt; bei einer gemeinsamen Ausgleichung von X, Y, Z (wie sie die Gaussische Bearbeitung vornimmt) würde statt I ein zwischen I und III gelegenes Wertesystem erzielt worden sein.

Um die Sache noch von einer anderen Seite zu beleuchten, habe ich, allerdings nur für den von $\cos \lambda$ und $\sin \lambda$ abhängigen Teil, aus allen vier Koeffizientensystemen die Werte von k_1 K_1 l_1 L_1 berechnet und habe ihre Differenzen gegen die beobachteten gebildet. Sie stehen in den Tabellen XIII a und b. Bei der Vergleichung darf man nicht vergessen, dass die Fehlerquadratsumme nicht aus ihnen selbst, sondern aus ihrem Produkt mit $\sin u$ (oder streng mit $\alpha \sin v$ bei X, $\beta \sin v$ bei Y) zu bilden ist, so dass starke Differenzen in höheren Breiten weniger ins Gewicht fallen, als solche in der Nähe des Aequators. Man sieht nun in der That, dass die Differenzen bei IV denen bei II, die natürlich das Fehlerminimum darstellen, merklich näher kommen, als die beiden anderen. Es spricht dies dafür, dass trotz aller Unsicherheit der einzelnen Koeffizienten doch die durch ihre Gesamtheit gegebene Darstellung der thatsächlichen Kraftverteilung einen deutlichen Fortschritt aufweist, wenn man auf die Hypothesen, dass i und V_a verschwinden, verzichtet.

Ich habe bisher diejenige Unsicherheit, die aus der Fehlerhaftigkeit der beobachteten Werte entspringt, noch nicht berücksichtigt. Die vorausgehenden Betrachtungen werden dadurch kaum berührt, da beispielsweise der Einfluss auf die vier parallel laufenden Rechnungen nicht sehr verschieden sein kann. In welcher Stärke und in welchem Sinne sich dieser Einfluss in den Endergebnissen geltend macht, ist nun noch zu untersuchen. Eine scharfe Berechnung ist freilich gegenwärtig unmöglich und wird noch lange Zeit unausführbar sein; denn sie setzt die Kenntnis der den einzelnen verwertbaren Beobachtungen und Landesaufnahmen, sowie der den angenommenen Säkular-Variationen anhaftenden, ausserordentlich wechselnden Unsicherheit voraus, und wenn es noch immer für weite Gebiete schwierig ist, überhaupt brauchbare Werte der magnetischen Elemente zu gewinnen, so ist es natürlich noch viel schwieriger, sich ausserdem ein Urteil über ihre ungefähre Schärfe zu bilden. Selbst nur eine rohe Schätzung ist hier auf direktem Wege nicht möglich, da sie durchaus auf das in den Karten verarbeitete Originalmaterial zurückgehen müsste. Aus der Betrachtung der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten lässt sich indessen indirekt ein Schluss auf den möglichen Betrag des mittleren Fehlers der ersten ziehen. Die langsame Abnahme der Koeffizienten der Reihenentwickelung mit wachsender Ordnungszahl n macht es unzweifelhaft, dass die noch verbleibenden Differenzen zum grossen Teile auf Rechnung der unzureichenden Ausdehnung der Reihen zu setzen sind, und die von regelloser Anordnung noch weit entfernte Gruppierung dieser Differenzen führt zu demselben Schlusse. Beachtet man nun, wie wesentlich nach früheren Angaben (S. 28) die mittlere Abweichung durch die Hinzunahme der Glieder 5. und 6. Ordnung vermindert worden ist, so wird man unbedenklich annehmen können, dass der auf die Ungenauigkeit der beobachteten Werte zurückzuführende mittlere Betrag der Abweichungen höchstens halb so gross ist, wie der Gesamtbetrag derselben. Ich will demgemäss in runder Zahl annehmen, dass an jedem der benutzten 1800 Punkte die Werte der Kraftkomponenten mit einem mittleren Fehler von ± 200 bei X und Y, von ± 400 bei Z behaftet sind, welche Zahlen danach wohl als obere Grenzen angesehen werden dürfen. Als ungefähr gleichwertig hiermit können bei der Deklination und Horizontalintensität mittlere Fehler von $\pm 20'$ und $\pm 0{,}002\ cm^{-\frac{1}{2}}\ g^{\frac{1}{2}}\ s^{-1}$, bei der Inklination solche von der Grössenordnung von 1^0 gelten. Natürlich sind alle unbekannten Einflüsse zeitlicher oder örtlicher Störungen, die Ungenauigkeit der Beobachtung selbst und die Unsicherheit der Reduktion auf die Normalepoche, endlich auch diejenige bei der Zeichnung der isomagnetischen Linien und bei der interpolatorischen Entnahme der Werte für bestimmte Punkte aus den Karten in jenen Zahlen enthalten.

Da bei diesem Verfahren die ausserordentliche Verschiedenheit, welche zwischen den einzelnen Gegenden der Erdoberfläche in Bezug auf die Zuverlässigkeit unserer Kenntnis ihres magnetischen Zustandes besteht, vollkommen ausser acht gelassen wird, so kann es nur als eine summarische Schätzung bezeichnet werden; eine wesentliche Verfälschung der hier daraus abzuleitenden Folgerungen ist aber sicherlich nicht zu befürchten, da es sich nur darum handelt, die mittlere zu erwartende Unsicherheit ihrer Grössenordnung nach zu bestimmen.

Die Koeffizienten k_m, K_m .... der trigonometrischen Reihen sind aus je 36 Einzelwerten abgeleitet; ihr mittlerer Fehler ergiebt sich also aus den oben angesetzten Beträgen durch Hinzufügung des Faktors $1/6$ oder $1/6\sqrt{2}$, je nachdem der Index m gleich 0 ist oder nicht. Bezeichne ich den absoluten Betrag des Fehlers mit ε, so ist also

für $m = 0$ bei X und $Y : \varepsilon = 33$ bei $Z : \varepsilon = 67$

für $m = 1, 2, 3, 4$ bei X und $Y : \varepsilon = 47$ bei $Z : \varepsilon = 93$

zu setzen. (Eine weitere Abrundung dieser Zahlen, die an sich gerechtfertigt wäre, unterlasse ich, um die Verhältnisse der verschiedenen Werte nicht zu sehr zu verwischen.)

Die Normalgleichungen, durch welche die Koeffizienten B, C, D, E, j, k aus den Werten von k_m, K_m .... bestimmt werden, führen auch in bekannter Weise zur Berechnung der mittleren Fehler der ersteren. Ich gebe wiederum nur einige, zur Charakterisierung ausreichende Resultate an. Dabei muss ich bemerken, dass ich zur wesentlichen Abkürzung der Rechnung bei X und Y die für ε angegebenen Werte als mittlere Fehler der Grössen $\alpha k \sin v$, $\alpha K \sin v$ .. angenommen habe, während sie zu k, K .. gehören. Die Fehler von B, C, D, E, die sich so ergeben und von denen einige nun angeführt werden sollen, sind daher etwas zu gross, was kein Uebelstand ist, da es sich um die Berechnung einer oberen Grenze für sie handelt.

Für $m = 0$ ergeben sich die folgenden zu befürchtenden mittleren Fehler der Koeffizienten B_0^n, D_0^n, j_0^n:

$n =$		0	1	2	3	4	5	6	7
bei X	$\pm$	(90)	(44)	15	13	19	13	17	14
bei Y	$\pm$	(90)	(24)	15	11	19	9	17	
bei Z	$\pm$		52	51	60	45	55	36.	

Die auf B_0^0, B_0^1, D_0^0, D_0^1 bezüglichen Werte sind in Klammern eingeschlossen, weil diese Koeffizienten vollkommen durch die andern bestimmt sind (S. 25) und daher auf die Werte der dargestellten Funktion ohne selbständigen Einfluss sind.

Zur Kennzeichnung des Einflusses, den die grössere oder geringere Ausdehnung der Reihenentwickelung auf die mittleren Fehler der Koeffizienten hat, soweit diese von der Fehlerhaftigkeit des Beobachtungsmaterials herrühren, mag die Anführung eines typischen Beispiels genügen. Je nachdem man in der Berechnung der Koeffizienten j_0^2, j_0^4, j_0^6 mit dem ersten, dem zweiten oder, wie es in der vorliegenden Arbeit geschehen ist, mit dem dritten abbricht, sind die mittleren Fehler

$$0{,}24\,\varepsilon; \qquad 0{,}37\,\varepsilon, \quad 0{,}37\,\varepsilon; \qquad 0{,}77\,\varepsilon, \quad 0{,}67\,\varepsilon, \quad 0{,}54\,\varepsilon.$$

Diese Zahlen lassen deutlich erkennen, dass eine unkritische Weiterführung der Entwickelung ohne Ausdehnung der empirischen Grundlage schliesslich nicht mehr zur Verbesserung, sondern zur Verschlechterung der Resultate führen muss.

Für $m = 1$, welchen Fall ich nur noch anführen will, da die Resultate für $m = 2, 3, 4$ von derselben Grössenordnung sind, finden sich folgende Fehlerbeträge:

$n =$		1	2	3	4	5	6	7
bei X	$\pm$	8	8	14	10	19	13	21
bei Y	$\pm$	8	8	10	11	12	14	
bei Z	$\pm$	13	14	13	17	16	21.	

Diese Fehlerbeträge hängen natürlich von der Gestaltung der Normalgleichungen ab; sie würden noch verringert werden, wenn die Beobachtungen ganz gleichmässig über die Erdoberfläche verteilt wären.

Die in Vorstehendem angegebenen mittleren Fehler, die überdies obere Grenzwerte darstellen, sind geringfügig und kommen insbesondere bei den ersten Koeffizienten der Reihen kaum in Betracht. Es ist dieser Umstand eine Folge davon, dass die Entwickelung auf den Elementen einer ausserordentlich grossen Anzahl von Punkten beruht. Die analytische Darstellung der Kraftkomponenten selbst kann also, abgesehen von dem systematischen Fehler des Abbrechens der Reihen, als eine sehr scharfe und zuverlässige bezeichnet werden.

Viel weniger günstig verhält es sich mit den Reihen für V_i, V_a und i. Die zu befürchtenden mittleren Fehler werden hier nicht nur relativ grösser, sondern sie erreichen ihre stärksten Werte gerade bei den ersten und wichtigsten Koeffizienten. Ich will mich auch hier auf die Anführung eines Beispiels beschränken, und zwar wähle ich dazu diejenigen Koeffizienten der soeben genannten Funktionen, die sich aus den zuvor bei X, Y, Z beispielsweise angeführten Koeffizienten ergeben. Es sind dies die mit R_0^1, $R_0^2 \ldots$ und die mit R_1^1, $R_1^2 \ldots.$ verbundenen Faktoren. Ich stelle sie in ähnlicher Anordnung wie bei den vorhergehenden Beispielen zusammen:

$m = 0$	$n =$	1	2	3	4	5	6
m. F. bei $V_i : b$	$\pm$	31	15	12	7	6	3
m. F. bei $V_a : b$	$\pm$	41	16	14	7	7	3
m. F. bei $\alpha \beta b i$	$\pm$	14	7	18	7	16	

$m = 1$	$n =$	1	2	3	4	5	6
m. F. bei $V_i : b$	$\pm$	53	27	33	19	23	16
m. F. bei $V_a : b$	$\pm$	75	30	35	20	23	16
m. F. bei $\alpha \beta b i$	$\pm$	38	15	22	11	15	

Wenigstens bei $m = 1$ (und ähnlich ist es bei $m = 2, 3, 4$) überschreiten diese Fehlerbeträge, die allerdings obere Grenzwerte sind, vielfach die Werte der Koeffizienten von V_a und i. Gerade diese in physikalischer Hinsicht interessanten Funktionen werden daher so unsicher, dass es zweifelhaft erscheint, ob sie nicht überhaupt nur ein Produkt der Beobachtungsfehler sind. Dafür, dass dies nicht der Fall ist, sprechen allerdings einige frühere Erfahrungen (S. 29, 38) und es können in der That auch die einzelnen Entwickelungskoeffizienten sehr unsicher sein, während doch die dargestellte Funktion selbst an manchen Stellen Werte von viel geringerer Unsicherheit annimmt. Es liegt dies daran, dass die Koeffizienten von einander abhängig sind, da sie teilweise von denselben Variabeln (Koeffizienten der Reihen für X, Y, Z) abhängen.

Für die Realität von V_a und i spricht alsdann der Umstand, dass wenigstens ein Teil dieser Funktionen, nämlich derjenige, der zum Index $m = 0$ gehört und der somit von der geographischen Länge unabhängig ist, merklich über die Fehlergrenzen hinausreicht, so dass er nicht wohl als Ergebnis blosser innerer Widersprüche der gegebenen Daten angesehen werden kann. Die genauere Betrachtung verstärkt diesen Eindruck. Der von λ freie Bestandteil in $\alpha \beta b i$ folgt aus dem gleichfalls nur von v abhängigen Teile der Entwickelung von $\beta Y \sin v$, dessen Koeffizienten auf den einzelnen Parallelkreisen durch l_0 bezeichnet worden sind. Der Umstand, dass bei der Entwickelung nach λ volle Kreise mit gleichförmig verteilten Beobachtungswerten vorliegen, (im Gegensatze zu den Entwickelungen nach v, die hier immer nur auf den Bogen von $v = 30^0$ bis $v = 150^0$ gestützt werden können) bewirkt, dass die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen fast allein infolge der Fehler der empirischen Daten von ihren wahren Werten abweichen können. Der Einfluss dieser zufälligen Fehler auf l_0 wurde kurz zuvor (S. 40) schätzungsweise zu ± 33 gefunden. Vergleicht man nun damit die in Tabelle VI b gegebenen Werte von l_0, die selbst in den verhältnismässig gut erforschten mittleren Breiten der Nordhalbkugel bis zu 150, auf der Südhalbkugel sogar bis zum doppelten Betrage anwachsen, sieht man ferner, dass diese Zahlen einen sehr deutlich ausgeprägten Gang aufweisen, so scheint es durchaus unmöglich zu sein, dieselben auf Fehler des Beobachtungsmaterials zurückzuführen. Es wäre dies höchstens dann denkbar, wenn starke systematische Fehler über grosse Gebiete (ganze Kontinente oder Ozeane) verbreitet sein könnten, eine Annahme, die durchaus unwahrscheinlich ist.

Wenn nun aber einmal durch die beträchtlichen Werte von l_0 die Existenz vertikaler Strömungen i mit grösster Wahrscheinlichkeit nachgewiesen ist, so liegt kein Grund vor, anzunehmen, dass die in der Entwickelung von i gefundenen Koeffizienten mit den Indices $m = 1, 2, 3, 4$ thatsächlich Null sind, und dass die dafür gefundenen Werte nur von Beobachtungsfehlern herrühren. Aber freilich sind diese Koeffizienten dem zuvor Gesagten zufolge so unsicher ermittelt, dass eine Auswertung der für i gefundenen Reihe nur Werte von recht zweifelhafter Bedeutung liefern könnte. Deswegen verzichte ich darauf, über die von mir in dieser Richtung ausgeführten Rechnungen etwas mitzuteilen.

Giebt es Ströme, die den Raum innerhalb der Erdoberfläche mit demjenigen ausserhalb verbinden, so ist damit auch ein Potential äusserer Kräfte in der Erdoberfläche als notwendig nachgewiesen. Doch auch unabhängig hiervon spricht für die reale Existenz von V_a mindestens wieder der starke, nicht auf Beobachtungsmängel zurückzuführende Wert des Koeffizienten von R_0^1, wohl auch noch desjenigen von R_1^1.

Ueberblicken wir nun die wesentlichen Resultate noch einmal im Zusammenhange. Es kann zunächst behauptet werden, dass die erste Aufgabe, die der rein analytischen Darstellung der beobachteten Erscheinungen, bei der hier angewandten Ausdehnung der Reihen in nahezu hinreichender Weise gelöst ist. Die noch übrig bleibenden Differenzen zeigen, dass die Hinzunahme der Glieder, die vom 5 fachen, höchstens noch derjenigen, die vom 6 fachen der geographischen Länge λ abhängen und derjenigen 7. und 8. Ordnung in den

Kugelfunktionen der Poldistanz v sicherlich ausreichen würde, um die Darstellung der beobachteten Werte so genau zu machen, wie es im Hinblick auf den Grad ihrer eigenen Sicherheit überhaupt erstrebenswert ist. Andrerseits steht fest, dass bei einer solchen Erweiterung der Reihen die äusserste Grenze erreicht, vielleicht schon etwas überschritten ist, jenseits deren die wachsenden zufälligen Fehler der berechneten Koeffizienten den Gewinn schärferer Darstellung wieder aufheben und in sein Gegenteil verkehren. Dieser Uebelstand würde sich allerdings wohl noch etwas vermindern lassen, wenn man die freilich an sich schon sehr grosse Zahl von 1800 Punkten, von denen die Elemente benützt werden, noch vermehrte oder wenn man sich bei der Entwickelung überhaupt auf die graphische Darstellung der Elemente stützte; eine beträchtliche Verringerung der resultierenden mittleren Fehler ist indessen dabei nicht zu erwarten, weil der grösste Teil der Erdoberfläche nicht eingehend genug vermessen ist, damit die Fehler in benachbarten Punkten als gegenseitig unabhängig gelten und wie zufällige Fehler behandelt werden dürfen.

Kann demnach die Gesamtdarstellung im wesentlichen als befriedigend bezeichnet werden, so sind doch von den Koeffizienten der Reihen nur die allerersten als zuverlässig bestimmt anzusehen. Infolge dessen sind die daraus abgeleiteten Reihen für V_i, V_a und i, in denen gerade die physikalisch interessantesten Ergebnisse zum Ausdrucke kommen, schon absolut betrachtet weniger sicher, denn jeder ihrer Koeffizienten beruht auf mehreren Koeffizienten der ursprünglichen Reihen. Da sich nun obendrein V_a und i als recht geringfügig ergeben, so sind bei ihnen die möglichen Fehler relativ betrachtet ausserordentlich gross, so gross, dass die thatsächliche Existenz der darin ausgesprochenen physikalischen Bedingungen beinahe in Frage gestellt wird. Und wenn trotzdem sowohl ein Potential äusserer Agentien als auch ein nicht auf ein Potential zurückführbarer Bestandteil der horizontalen Kraft als erwiesen gelten darf, so muss doch zugestanden werden, dass über die genaue Gestaltung beider auf der vorliegenden Grundlage nichts Zuverlässiges ermittelt werden kann. Gerade die Kenntnis dieser Gestaltung im Einzelnen, d. h. der Verteilung der Funktionswerte von V_a und i über die Erdoberfläche ist aber durchaus erforderlich, wenn man daran gehen will, die nunmehr auftretende Frage nach der Natur dieser Erscheinungen zu behandeln. Wie wichtig würde es beispielsweise sein, um nur auf eine Möglichkeit hinzuweisen, wenn sich in der Anordnung der positiven und negativen Werte von i eine Analogie mit der Konfiguration von Wasser und Land oder ein Zusammenhang mit klimatischen Gebieten zeigte. Es wird nach dem soeben Gesagten keiner Rechtfertigung bedürfen, dass ich auf Spekulationen über derartige mögliche Beziehungen, wie überhaupt auf jede physikalische Deutung der Erscheinungen verzichte, obgleich manche Veranlassung dazu gefunden werden könnte. Ich will nur auf die Folgerungen hinweisen, die sich einerseits aus der langsamen Konvergenz der Reihen, andrerseits aus dem Umstande ergeben, dass die ersten Glieder, aus denen das magnetische Moment entspringt, alle übrigen recht beträchtlich überragen, und ich will ferner die gegenseitige Einwirkung der innern und äusseren Agentien auf einander wenigstens erwähnen. Irgendwie näher auf alles dies und manches andere einzugehen, verbietet nicht nur die Rücksicht auf die oben geschilderten Umstände; es läge auch ausserhalb des Rahmens der vorliegenden Arbeit, die nur eine möglichst exakte analytische Darstellung des beobachteten Thatbestandes erstrebt.

Durch die Benutzung des aus den Gegenden nördlich vom 60. Grade n. Br. vorliegenden Materials und durch eine in bereits angedeuteter Weise (S. 21) modifizierte Koeffizientenbestimmung würden sich die Ergebnisse wohl etwas günstiger gestalten lassen. Ein wesentlicher Fortschritt aber in Bezug auf die Sicherheit der Resultate kann, wie aus den vorstehenden Betrachtungen hervorgeht, nur dann erzielt werden, wenn der Berechnung eine möglichst lückenlose, gleichmässige Kenntnis von der Verteilung der erdmagnetischen Kräfte in der Erdoberfläche zugrunde gelegt werden kann. Dies erfordert natürlich vor allem die Gewinnung neuen zuverlässigen Materials aus der Südpolarregion, dann aber auch die Anstellung neuer Beobachtungen in zahlreichen, weitgedehnten, zugänglicheren Gebieten mit besonderer Berücksichtigung der Bestimmung der Säkular-Variation. Eine sehr grosse Schärfe im Einzelnen und eine sehr detaillierte Kenntnis der Kraftverteilung in kleineren Gebieten, so wichtig sie auch für andere, spezielle Aufgaben sind, dürfen für den vorliegenden Zweck insofern weniger bedeutungsvoll genannt werden, als sie den Mangel von Beobachtungen an andern Stellen nicht aufzuwiegen vermögen.

Für die künftige Forschung ergiebt sich aus den vorhergehenden Ergebnissen und Erwägungen die Forderung, dass in höherem Masse, als es bisher meistens geschehen ist, die Betrachtung der erdmagnetischen Erscheinungen als eines einheitlichen Phänomens in den Vordergrund zu treten hat. Die zahlreichen Einzeluntersuchungen von speziellen Aufgaben, die sich der Forschung von den mannigfaltigsten Gesichtspunkten aus darbieten, dürfen darum natürlich nicht unterschätzt oder gar vernachlässigt werden; aber so wichtig sie auch sind, so erhalten sie ihren wahren Wert doch erst durch die Einordnung in den Zusammenhang der Erscheinungen, und dessen Erforschung darf noch viel weniger um jener willen zurücktreten. Als die dringendste Aufgabe der nächsten Zeit muss es daher bezeichnet werden, ein wenn auch zunächst nur in grossen Zügen gehaltenes, erst allmählich weiter auszuführendes, einheitliches Bild von dem Gesamtzustande des erdmagnetischen Systems in seinen verschiedenen Beziehungen auf dem Wege der Beobachtung zu gewinnen und seine stetige Aenderung zu verfolgen. Dazu bedarf es eines planmässigen, organisierten Vorgehens; es bedarf dessen um so mehr, je geringer die äusseren Mittel sind, die der Forschung zur Lösung ihrer Aufgaben zu Gebote stehen.

Ia. Tabelle der Koeffizienten ($\pi^n_m : p^n_m$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1,000000	1,000000	0,997765	0,997323	0,997133	0,997027	0,996960
1		0,993326	0,996663	0,996881	0,996896	0,996879	0,996859
2			0,993326	0,995551	0,996183	0,996436	0,996557
3				0,993326	0,994994	0,995697	0,996053
4					0,993326	0,994660	0,995347
5						0,993326	0,994438
6							0,993326

Ib. Tabelle der Koeffizienten ($\varkappa^n_m : q^n_m$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	0,995547	0,995991	0,996181	0,996286	0,996355	0,996400	0,996436
1		0,995325	0,995864	0,996103	0,996234	0,996316	0,996372
2			0,994913	0,995546	0,995870	0,996060	0,996181
3				0,994622	0,995264	0,995633	0,995864
4					0,994416	0,995035	0,995420
5						0,994266	0,994850
6							0,994151

Ic. Tabelle der Koeffizienten δ^n_m.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1,004473	0,334227	0,200639	0.143325	0,111479	0,091211	0,077179
1		0,335125	0,200766	0,143368	0,111498	0,091222	0,077186
2			0,201151	0,143496	0,111556	0,091254	0,077205
3				0,143710	0,111653	0,091305	0,077236
4					0,111789	0,091378	0,077280
5						0,091473	0,077336
6							0,077405

I d. Tabelle der Koeffizienten ε_m^n.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	0,000000	0,334227	0,400381	0,428825	0,444637	0,454701	0,461669
1		0,332885	0,400193	0,428763	0,444609	0,454686	0,461660
2			0,399617	0,428573	0,444522	0,454643	0,461632
3				0,428252	0,444378	0,454561	0,461586
4					0,444174	0,454452	0,461520
5						0,454311	0,461436
6							0,461332

II. Tabelle der Faktoren α, β, γ, $\alpha \sin v$, $\beta \sin v$.

u	v	α	γ	$\alpha \sin v$	$\beta \sin v$
0°	0° 0′ 0″	1,003354	1,000000	0,000000	0.000000
5°	5° 1′ 0″	1.003328	0,999974	0,087737	0,087739
10°	10° 1′ 58″	1,003252	0,999899	0,174778	0,174796
15°	15° 2′ 53″	1,003128	0,999775	0,260441	0,260500
20°	20° 3′ 42″	1,002960	0,999607	0,344047	0,344182
25°	25° 4′ 25″	1,002752	0,999401	0,424949	0,425204
30°	30° 4′ 59″	1,002512	0,999161	0,502514	0,502936
35°	35° 5′ 25″	1,002247	0,998897	0,576158	0,576794
40°	40° 5′ 40″	1,001964	0,998615	0,645314	0,646210
45°	45° 5′ 45″	1,001673	0,998324	0,709473	0,710664
50°	50° 5′ 40″	1,001382	0,998034	0,768163	0,769676
55°	55° 5′ 24″	1,001100	0,997753	0,820954	0,822802
60°	60° 4′ 59″	1,000835	0,997490	0.867473	0,869656
65°	65° 4′ 24″	1,000597	0,997252	0,907389	0,909890
70°	70° 3′ 42″	1,000391	0,997047	0,940427	0,943213
75°	75° 2′ 52″	1,000224	0,996880	0,966357	0,969382
80°	80° 1′ 58″	1,000101	0,996757	0,985006	0,988210
85°	85° 1′ 0″	1,000025	0,996682	0,996245	0,999561
90°	90° 0′ 0″	1,000000	0,996657	1,000000	1,003354

$\beta = 1{,}003354$

III. Tabelle der Faktoren r_m^n.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1,000000	1,732051	3,354102	6,614378	13,12500	26,11842	52,05515	103,8444
1		1,732051	3,872983	8,100926	16,60196	33,71874	68,15619	137,3732
2			1,936492	5,123475	11,73936	25,48897	53,88220	112,1647
3				2,091650	6,274950	15,60874	35,92146	79,31244
4					2,218530	7,358031	19,67500	47,82720
5						2,326814	8,389446	23,91360
6							2,421825	9,379686
7								2,506827

IV. Tabelle der Funktionen $R_m^n (\cos v)$.

$(\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u \sqrt{1 + \varepsilon^2} = 1{,}003354 \operatorname{tg} u.)$

u	R_0^1	R_1^1	R_0^2	R_1^2	R_2^2
0°	1,732051	0,000000	2,236068	0,000000	0,000000
5°	1,725416	0,151460	2,210420	0,337378	0,014808
10°	1,705565	0,301743	2,134272	0,664401	0,058772
15°	1,672656	0,449691	2,009977	0,971058	0,130534
20°	1,626957	0.594147	1,841390	1,247943	0,227868
25°	1,568830	0,734013	1,633700	1,486633	0.347777
30°	1,498743	0,868199	1,393329	1,679851	0,486556
35°	1,417246	0,995698	1,127634	1,821785	0,639955
40°	1,324991	1,115526	0,844788	1,908171	0,803256
45°	1,222695	1,226792	0,553407	1,936481	0,971485
50°	1,111152	1,328662	0,262357	1,905954	1,139523
55°	0,991234	1,420372	— 0,019517	1,817618	1,302262
60°	0,863850	1,501254	— 0,283716	1,674237	1,454798
65°	0,729987	1,570707	— 0,522256	1,480248	1.592519
70°	0,590644	1,628232	— 0,727996	1,241557	1,711303
75°	0,446893	1,673406	— 0,894749	0,965448	1,807578
80°	0,299792	1,705909	— 1,017551	0,660237	1,878478
85°	0,150456	1,725504	— 1,092725	0,335159	1,921880
90°	0,000000	1,732051	— 1,118034	0,000000	1,936492

u	R_0^3	R_1^3	R_2^3	R_3^3	R_0^4
0°	2,645751	0,000000	0,000000	0,000000	3,00000
5°	2,585232	0,561295	0,039028	0,001399	2,88607
10°	2,407619	1,086188	0,153118	0,011059	2,55684
15°	2,124456	1,540816	0,333517	0,036606	2,04853
20°	1,754126	1,896107	0,566301	0,084429	1,41668
25°	1,320482	2,129881	0,833423	0,159191	0,72945
30°	0,851320	2,228245	1,113906	0,263430	0,05973
35°	0,376303	2,186571	1,385426	0,397365	— 0,52367
40°	— 0,074886	2,009743	1,625756	0,558788	— 0,96372
45°	— 0,474734	1,711741	1,814440	0,743224	— 1,22185
50°	— 0.799634	1,314642	1,934127	0,944170	— 1,28191
55°	— 1,031448	0,847103	1,971800	1,153488	— 1,15168
60°	— 1,158747	0,342267	1,919682	1,361976	— 0,86129
65°	— 1,177442	— 0,164361	1,775775	1,559884	— 0,45919
70°	— 1,091044	— 0,637506	1.543979	1,737625	— 0,00574
75°	— 0,910349	— 1,044301	1,233924	1,886301	0,43424
80°	— 0,652611	— 1,356706	0,860229	1,998364	0,79975
85°	— 0,340493	— 1,553165	0,441697	2,068020	1,04086
90°	0,000000	— 1,620185	0,000000	2,091650	1,12500

u	R_1^4	R_2^4	R_3^4	R_4^4	R_0^5
0^0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	3,31663
5^0	0,81534	0,07626	0,00418	0,00013	3,12860
10^0	1,54101	0,29457	0,03267	0,00204	2,59577
15^0	2,09801	0,62493	0.10605	0,01008	1,80621
20^0	2.42735	1,02149	0.23792	0,03072	0,88896
25^0	2,49703	1,42847	0,43257	0,07155	— 0,00945
30^0	2,30552	1,78712	0,68384	0,14006	— 0,75090
35^0	1,88170	2,04323	0,97543	0,24229	— 1,23007
40^0	1,28116	2,15398	1,28239	0,38172	— 1,39198
45^0	0,57904	2,09348	1.57398	0,55835	— 1,24033
50^0	— 0,13904	1,85615	1,81712	0,76821	— 0,83460
55^0	— 0,78738	1,45779	1,98039	1,00330	— 0,27718
60^0	— 1.29057	0,93386	2,03783	1,25210	0,30724
65^0	— 1,59230	0,33567	1,97228	1,50039	0,79568
70^0	— 1,66200	— 0,27565	1,77764	1,73256	1,09026
75^0	— 1,49814	— 0,83593	1,46007	1,93298	1,13591
80^0	— 1,12815	— 1,28565	1,03766	2,08760	0,92994
85^0	— 0,60489	— 1,57648	0,53893	2,18518	0,52130
90^0	0,00000	— 1,67705	0,00000	2,21853	0,00000

u	R_1^5	R_2^5	R_3^5	R_4^5	R_5^5
0^0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5^0	1,09337	0,12796	0,00920	0,00043	0,00001
10^0	2,00549	0,48472	0,07085	0,00667	0,00037
15^0	2,58796	0,99431	0,22440	0,03229	0,00274
20^0	2,75174	1,54670	0,48590	0,09570	0,01105
25^0	2,48279	2,01952	0,84261	0,21496	0,03180
30^0	1,84353	2,30204	1,25347	0,40194	0,07363
35^0	0.96018	2,31720	1,65588	0,65753	0,14608
40^0	— 0,00120	2,03711	1,97691	0,96848	0,25784
45^0	— 0,86620	1,48936	2,14759	1,30725	0,41478
50^0	— 1,48401	0,75264	2,11685	1,63452	0,61806
55^0	— 1,75469	— 0,05708	1,86276	1,90433	0,86292
60^0	— 1,64649	— 0,80784	1,39887	2,07116	1,13823
65^0	— 1,20010	— 1,37557	0,77428	2,09727	1,42703
70^0	— 0,51930	— 1,66718	0,06711	1,95952	1,70821
75^0	0,24987	— 1,63757	— 0,62696	1,65412	1,95869
80^0	0,94795	— 1,29832	— 1,21020	1,19840	2,15644
85^0	1,43252	— 0,71589	— 1,59826	0,62955	2,28317
90^0	1,60565	0,00000	— 1,73431	0,00000	2,32681

u	R_0^6	R_1^6	R_2^6	R_3^6	R_4^6	R_5^6	R_6^6
0^0	3,6056	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5^0	3,3210	1,3901	0,1952	0,0172	0,0010	0,0000	0,0000
10^0	2,5336	2,4581	0,7222	0,1303	0,0159	0,0013	0,0001
15^0	1,4247	2,9637	1,4214	0,4006	0,0752	0,0096	0,0007
20^0	0,2454	2,8089	2,0767	0,8303	0,2156	0,0374	0,0040
25^0	— 0,7476	2,0605	2,4761	1,3562	0,4629	0,1039	0,0140
30^0	— 1,3548	0,9299	2,4709	1,8635	0,8171	0,2297	0,0384
35^0	— 1,4815	— 0,2847	2,0188	2,2157	1,2433	0,4310	0,0874
40^0	— 1,1571	— 1,2769	1,1971	2,2939	1,6733	0,7112	0,1729
45^0	— 0,5213	— 1,8123	0,1843	2,0327	2,0174	1,0557	0,3058
50^0	0,2168	1,7860	— 0,7865	1,4441	2,1845	1,4296	0,4935
55^0	0,8373	1,2462	— 1,4884	0,6211	2,1053	1,7806	0,7365
60^0	1,1680	— 0,3754	— 1,7609	— 0,2798	1,7527	2,0468	1,0268
65^0	1,1283	0,5623	— 1,5524	— 1,0737	1,1539	2,1685	1,3469
70^0	0,7467	1,2961	— 0,9335	— 1,5920	0,3899	2,1003	1,6714
75^0	0,1492	1,6213	— 0,0793	— 1,7231	— 0,4172	1,8221	1,9696
80^0	— 0,4802	1,4544	0,7767	— 1,4421	— 1,1284	1,3458	2,2106
85^0	— 0,9522	0,8535	1,4034	— 0,8181	— 1,6155	0,7151	2,3674
90^0	— 1,1267	0,0000	1,6328	0,0000	— 1,7886	0,0000	2,4218

u	R_0^7	R_1^7	R_2^7	R_3^7	R_4^7	R_5^7	R_6^7	R_7^7
0^0	3,8730	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5^0	3,4682	1,7009	0,2788	0,0291	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000
10^0	2,3787	2,8789	1,0031	0,2154	0,0321	0,0034	0,0003	0,0000
15^0	0,9368	3,1881	1,8783	0,6389	0,1473	0,0241	0,0028	0,0002
20^0	— 0,4300	2,5741	2,5376	1,2558	0,4053	0,0915	0,0144	0,0014
25^0	— 1,3415	1,2859	2,6799	1,9038	0,8239	0,2430	0,0492	0,0062
30^0	— 1,5870	— 0,2165	2,1839	2,3576	1,3533	0,5084	0,1287	0,0199
35^0	— 1,1871	— 1,4269	1,1568	2,4143	1,8752	0,8897	0,2770	0,0520
40^0	— 0,3725	— 1,9676	— 0,0997	1,9779	2,2312	1,3469	0,5121	0,1152
45^0	0,5073	— 1,7148	— 1,1958	1,1079	2,2735	1,7964	0,8360	0,2242
50^0	1,1128	— 0,8295	— 1,7914	0,0146	1,9207	2,1256	1,2261	0,3918
55^0	1,2333	0,3123	— 1,7169	— 1,0023	1,1975	2,2224	1,6325	0,6252
60^0	0,8546	1,2644	— 1,0327	— 1,6502	0,2420	2,0100	1,9835	0,9213
65^0	0,1522	1,6744	— 0,0074	— 1,7420	— 0,7245	1,4769	2,1986	1,2644
70^0	— 0,5833	1,4087	0,9791	— 1,2630	— 1,4582	0,6911	2,2074	1,6264
75^0	— 1,0606	0,5940	1,5700	— 0,3801	— 1,7654	— 0,2084	1,9682	1,9697
80^0	— 1,0966	— 0,4377	1,5583	0,6100	— 1,5642	— 1,0409	1,4819	2,2537
85^0	— 0,6868	— 1,2790	0,9587	1,3765	— 0,9135	— 1,6279	0,7965	2,4412
90^0	0,0000	— 1,6010	0,0000	1,6639	0,0000	— 1,8395	0,0000	2,5068

V. Beobachtete Werte der Komponenten der erdmagnetischen Kraft.[1])

X.

u \ λ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
30^0	14031	16498	16367	15199	15866	17268	17314	14143	8909	4384	5639	9401
40^0	17808	20605	21590	21601	22142	23378	22455	20155	16180	12227	11209	13092
50^0	21992	25477	27628	28369	28324	27886	25078	24060	22879	20394	17322	17281
60^0	25943	29808	33290	34362	33284	30799	28075	27594	28704	28069	24036	21642
70^0	28462	32538	36080	37810	36100	33352	31167	30963	32962	32964	29129	25703
80^0	29857	32901	35288	38347	37887	35713	34174	33820	35521	35557	30780	28447
90^0	28143	30051	32950	36590	38573	37283	36414	35091	35306	34677	30482	28281
100^0	24412	25548	28857	33558	36832	36714	36192	34798	33657	32702	29035	26297
110^0	20900	21409	24251	28571	32996	34601	34220	32992	31559	29921	27395	24432
120^0	19054	18126	19825	22852	26774	28866	29914	29916	28890	27553	26497	23361
130^0	18429	15881	16252	17906	20322	22095	24561	26169	26174	26688	26697	23510
140^0	18730	14685	13219	13014	14186	15610	19071	21646	22941	24851	27071	24443
150^0	18966	14275	10831	7735	7143	8867	12950	16558	19002	21945	25822	24340

Y.

u \ λ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
30^0	— 5129	— 240	3794	3037	— 656	— 1056	3865	7000	6140	— 636	— 7218	— 8539
40^0	— 5643	— 1008	3227	2940	— 1600	— 1566	4739	7906	7176	748	— 6780	— 8665
50^0	— 6133	— 1931	2255	2940	— 1773	— 893	5041	6975	7250	2084	— 5517	— 8366
60^0	— 6725	— 2914	823	2604	— 1017	— 197	5187	5815	6583	2917	— 3771	— 8525
70^0	— 7680	— 3803	— 210	1937	105	1378	5216	4581	5270	3503	— 1714	— 8901
80^0	— 8920	— 4663	— 924	1585	992	2497	5413	3674	3943	4156	134	— 8879
90^0	— 9800	— 5497	— 1804	905	1459	3426	5659	3117	3193	5306	1064	— 8601
100^0	— 10362	— 6370	— 2880	— 312	1157	3988	5840	3760	3884	6386	1945	— 7873
110^0	— 10634	— 7546	— 4131	— 2123	480	4402	5931	4735	4857	7091	2815	— 6760
120^0	— 10217	— 9051	— 6093	— 4442	— 584	4400	6249	5293	5615	8031	3881	— 5501
130^0	— 9492	— 9873	— 8281	— 6647	— 1778	3976	6314	5642	6380	9713	5310	— 4301
140^0	— 8814	— 10019	— 9604	— 8291	— 3145	3221	6025	5841	7321	11107	6917	— 2857
150^0	— 7375	— 9720	— 10159	— 9240	— 3255	2047	5320	5907	8460	12349	8224	— 992

Z.

u \ λ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
30^0	46564	47470	52326	55143	55994	51210	50096	56265	63181	57355	58943	51254
40^0	42791	41376	45359	50137	52300	45169	44086	50595	58197	63022	58287	47611
50^0	37500	34740	38037	42549	43701	36470	35100	41417	50698	57624	53404	43124
60^0	29764	25355	28025	32512	32819	26461	27156	33508	40909	48390	47750	37833
70^0	17432	12249	13670	17254	19874	16643	18614	24823	29793	35548	37572	31382
80^0	5355	— 696	— 154	1564	5777	5670	9056	13630	16037	21228	25448	21651
90^0	— 4056	— 13283	— 13613	— 12602	— 9029	— 7731	— 2093	1025	2479	7297	13315	11446
100^0	— 11257	— 22887	— 25732	— 25596	— 23552	— 21898	— 14812	— 11372	— 8815	— 4337	3187	2201
110^0	— 17039	— 28453	— 34809	— 36891	— 38752	— 36330	— 28714	— 23410	— 20472	— 13584	— 5228	— 4813
120^0	— 21558	— 32048	— 40126	— 43907	— 49840	— 48918	— 39947	— 35361	— 31285	— 22585	— 12063	— 11064
130^0	— 25829	— 34730	— 43498	— 49757	— 56560	— 56510	— 50131	— 44261	— 40447	— 32384	— 19476	— 18010
140^0	— 31275	— 38362	— 46356	— 54530	— 65722	— 65348	— 57005	— 51563	— 49300	— 41915	— 28681	— 25783
150^0	— 37016	— 42745	— 49083	— 57514	— 64712	— 62761	— 63853	— 63033	— 60636	— 52203	— 38040	— 34363

[1]) Den Zahlen dieser wie aller folgenden Tabellen liegt die Einheit $0{,}1^{5}\,cm^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}\,s^{-1}$ zu Grunde.

VI a. Beobachtete Werte der Koeffizienten k und K in der Entwickelung von X.

u	k_0	k_1	K_1	k_2	K_2	k_3	K_3	k_4	K_4
30°	12930	— 1590	5180	2820	1110	— 50	— 70	— 130	— 10
35°	15690	— 2290	4970	2470	1240	— 100	140	— 90	— 50
40°	18530	— 2650	4820	1590	1250	120	230	— 50	— 60
45°	21300	— 2640	4720	590	1280	360	440	20	— 70
50°	23930	— 2360	4570	— 440	1330	510	690	110	— 100
55°	26520	— 2010	4410	— 1420	1320	560	790	270	10
60°	28830	— 1710	3970	— 2210	1350	360	830	340	70
65°	30770	— 1550	3500	— 2660	1320	190	770	350	40
70°	32290	— 1620	3030	— 2820	1190	140	710	330	60
75°	33400	— 1960	2470	— 2650	960	70	820	350	70
80°	34070	— 2470	1930	— 2400	640	440	620	400	90
85°	34160	— 3240	1630	— 1980	150	460	480	370	110
90°	33700	— 4220	1380	— 1720	— 280	310	380	200	160
95°	32730	— 5110	1100	— 1500	— 610	140	170	230	160
100°	31540	— 5830	660	— 1380	— 890	110	40	120	160
105°	30110	— 6380	70	— 1140	— 1320	50	30	70	40
110°	28600	— 6430	— 570	— 780	— 1340	— 40	— 10	— 190	— 20
115°	26850	— 5900	— 1530	— 530	— 1350	— 140	— 130	— 260	— 10
120°	25160	— 5080	— 2600	— 420	— 1290	— 250	— 230	— 270	60
125°	23580	— 3970	— 3760	— 470	— 1260	— 360	— 320	— 210	170
130°	22090	— 2620	— 4800	— 440	— 1220	— 420	— 460	— 170	180
135°	20600	— 1070	— 5730	— 340	— 1260	— 500	— 580	— 140	200
140°	19140	490	— 6580	— 130	— 1270	— 630	— 610	— 170	200
145°	17480	2210	— 7350	150	— 1130	— 740	— 600	— 230	160
150°	15720	3760	— 7710	420	— 800	— 720	— 600	— 230	140

VI b. Beobachtete Werte der Koeffizienten l und L in der Entwickelung von Y.

u	l_0	l_1	L_1	l_2	L_2	l_3	L_3	l_4	L_4
30°	40	— 4350	1190	— 1070	4910	— 90	— 510	300	— 210
35°	60	— 4620	770	— 1090	5190	— 180	— 630	440	— 210
40°	110	— 4780	350	— 1230	5220	— 220	— 650	590	— 300
45°	150	— 4850	20	— 1420	4960	— 300	— 550	700	— 380
50°	150	— 4920	— 230	— 1580	4500	— 400	— 360	780	— 380
55°	120	— 5050	— 410	— 1710	3980	— 480	— 150	850	— 300
60°	100	— 5180	— 520	— 1850	3390	— 560	90	870	— 150
65°	50	— 5300	— 570	— 1980	2740	— 710	310	780	20
70°	0	— 5400	— 630	— 2160	2110	— 930	500	700	170
75°	— 50	— 5530	— 670	— 2320	1500	— 1190	680	620	310
80°	— 110	— 5670	— 750	— 2500	1000	— 1420	820	570	450
85°	— 150	— 5850	— 870	— 2600	580	— 1600	1030	520	530
90°	— 130	— 6010	— 1130	— 2650	240	— 1700	1170	510	570

u	l_0	l_1	L_1	l_2	L_2	l_3	L_3	l_4	L_4
95°	— 110	— 6170	— 1500	— 2650	— 10	— 1750	1270	490	570
100°	— 80	— 6370	— 2040	— 2610	— 130	— 1720	1320	390	530
105°	— 60	— 6520	— 2650	— 2460	— 260	— 1670	1340	270	440
110°	— 80	— 6670	— 3300	— 2310	— 450	— 1630	1320	170	330
115°	— 150	— 6770	— 4030	— 2110	— 690	— 1580	1310	130	250
120°	— 210	— 6820	— 4810	— 1910	— 940	— 1530	1330	160	200
125°	— 250	— 6780	— 5650	— 1710	— 1170	— 1460	1390	190	190
130°	— 280	— 6690	— 6490	— 1540	— 1340	— 1390	1510	210	220
135°	— 290	— 6520	— 7270	— 1400	— 1450	— 1350	1600	190	210
140°	— 200	— 6230	— 7940	— 1360	— 1530	— 1330	1630	190	180
145°	— 60	— 5830	— 8520	— 1390	— 1620	— 1190	1600	170	200
150°	140	— 5390	— 8980	— 1360	— 1700	— 950	1470	150	260

VI c. Beobachtete Werte der Koeffizienten m und M in der Entwickelung von Z.

u	m_0	m_1	M_1	m_2	M_2	m_3	M_3	m_4	M_4
30°	53950	— 2530	— 3250	— 4910	220	900	— 720	— 990	— 110
35°	52470	— 2380	— 4540	— 5770	— 500	850	— 280	— 510	320
40°	50010	— 1750	— 5800	— 6820	— 1120	970	170	— 60	750
45°	46810	— 830	— 6590	— 7300	— 1290	1130	500	180	590
50°	42940	170	— 6950	— 7210	— 1670	1280	— 20	400	700
55°	38850	740	— 7510	— 6840	— 2110	520	— 60	540	920
60°	34270	1160	— 8430	— 6320	— 2580	0	— 640	250	810
65°	28750	800	— 9450	— 5350	— 3190	— 280	— 1270	— 250	540
70°	22920	240	— 10230	— 4200	— 3600	— 460	— 1530	— 720	400
75°	16760	— 160	— 10810	— 3200	— 4060	— 860	— 1690	— 850	270
80°	10430	— 10	— 11040	— 2040	— 4360	— 1220	— 1850	— 1040	170
85°	4050	340	— 11280	— 1110	— 4670	— 1440	— 1980	— 990	10
90°	— 2250	860	— 11660	— 340	— 4530	— 1460	— 2260	— 710	— 70
95°	— 8220	1820	— 12280	170	— 4280	— 1250	— 2480	— 490	— 140
100°	— 13770	3180	— 12810	700	— 4200	— 1090	— 2440	— 350	— 150
105°	— 19050	5060	— 13450	1220	— 3780	— 1000	— 2360	— 60	20
110°	— 24030	7380	— 13850	1400	— 3200	— 1230	— 2220	140	20
115°	— 28430	9560	— 13590	1390	— 2840	— 1630	— 2170	450	60
120°	— 32450	11520	— 13180	1310	— 2450	— 1690	— 2240	380	290
125°	— 35980	12820	— 12130	1360	— 2100	— 1560	— 2240	150	510
130°	— 39380	13870	— 11150	1590	— 1680	— 1650	— 2030	— 180	410
135°	— 43030	14800	— 10680	2100	— 350	— 2360	— 2200	240	90
140°	— 46370	15220	— 9140	2260	60	— 2360	— 2370	70	280
145°	— 49030	14830	— 6330	2020	— 950	— 2000	— 1730	— 320	200
150°	— 52210	14780	— 3710	2120	— 2160	— 1920	— 700	— 390	— 170

VII. Koeffizienten der zur Darstellung der Kraftkomponenten dienenden Reihen.

	$\alpha X \sin v$				$\beta Y \sin v$				γZ
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
p_0^0	21093,3	21255,0	21278,8	21278,8	0	— 19,7	0	— 50,0	0
p_0^1	363,6	323,0	361,1	361,1	0	139,4	0	66,7	36388,2
p_0^2	—10152,0	—10281,4	—10234,7	—10234,7	0	93,4	0	34,1	701,4
p_0^3	— 881,7	— 980,1	— 932,8	— 932,8	0	39,7	0	— 37,5	— 1412,1
p_0^4	682,7	649,4	695,3	695,3	0	49,2	0	— 9,1	— 1272,6
p_0^5	493,4	494,7	534,8	534,8	0	118,1	0	— 4,8	291,4
p_0^6	— 122,3	— 167,6	— 132,9	— 132,9	0	44,2	0	0,2	— 40,0
p_0^7	17,3	— 7,9	17,7	17,7					
p_1^1	—1724,7	—1932,3	—1831,9	—1920,9	—3456,5	—3417,2	3414,4	—3421,2	2847,4
q_1^1	433,8	436,1	431,1	438,4	—1430,4	—1279,8	—1294,3	—1276,9	— 6880,6
p_1^2	272,1	270,4	268,6	258,4	323,3	327,2	321,3	329,5	— 3840,6
q_1^2	1759,1	1752,0	1737,9	1735,5	1285,5	1272,1	1365,4	1260,9	965,9
p_1^3	784,1	752,1	814,7	788,5	111,6	145,3	110,3	131,6	1899,7
q_1^3	— 545,9	— 449,5	— 457,4	— 442,0	— 476,8	— 505,5	— 443,1	— 495,5	444,5
p_1^4	— 997,7	— 899,9	— 956,1	— 924,4	— 97,0	— 125,6	— 61,7	— 120,8	— 908,8
q_1^4	91,0	162,5	112,7	128,7	182,5	189,1	201,2	166,1	— 483,4
p_1^5	293,8	172,0	274,7	226,9	86,1	91,2	92,8	61,3	— 606,7
q_1^5	90,9	— 1,3	16,2	10,1	101,5	147,9	104,1	169,7	514,6
p_1^6	251,1	313,4	257,5	273,9	— 28,9	— 14,5	— 30,4	— 6,8	— 132,0
q_1^6	— 212,9	— 167,0	— 229,6	— 221,3	18,9	— 1,7	35,1	— 38,7	— 201,7
p_1^7	56,3	— 13,9	104,5	54,6					
q_1^7	86,1	81,4	90,5	95,6					

	$\alpha X \sin v$				$\beta Y \sin v$				γZ
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
p_2^2	−831,8	−784,3	−792,1	782,7	−1333,1	−1246,5	−1257,4	−1246,8	−959,3
q_2^2	−20,5	−54,2	−11,3	−54,1	642,8	481,8	494,6	482,8	−1989,5
p_2^3	−106,1	−174,9	−203,1	−179,3	−27,2	22,5	−15,0	22,7	−2190,9
q_2^3	662,6	607,0	582,6	605,7	1100,4	1054,9	1047,8	1051,5	−54,1
p_2^4	531,0	387,0	393,1	395,5	145,4	96,2	8,4	94,6	−796,6
q_2^4	61,5	49,1	33,6	49,5	320,0	366,9	9357,4	372,4	362,1
p_2^5	374,7	385,5	361,3	372,4	31,6	−2,1	17,2	−1,3	−409,6
q_2^5	−170,4	−109,9	−136,7	−113,8	137,1	233,3	212,0	215,6	94,5
p_2^6	162,1	221,4	250,7	252,1	−22,0	−57,8	−27,8	−63,7	168,4
q_2^6	−37,4	20,0	−20,3	−18,6	−48,3	−21,7	−19,4	−2,0	−76,7
p_2^7	−69,6	13,9	−28,0	−20,7					
q_2^7	31,7	62,4	40,1	52,0					
p_3^3	173,0	72,6	158,9	70,7	−821,7	−749,3	−740,5	−749,2	−582,5
q_3^3	144,4	166,3	119,0	165,6	439,2	516,0	506,3	517,6	−1089,4
p_3^4	134,4	129,9	150,8	125,2	260,0	204,5	214,2	202,3	516,5
q_3^4	240,7	226,1	246,1	226,4	−311,4	−317,5	−286,0	−311,6	431,2
p_3^5	17,8	−70,4	−50,3	−84,6	−41,2	11,1	−0,9	12,2	−29,6
q_3^5	−59,9	−51,6	−65,2	−57,0	14,9	−13,2	22,4	5,5	−82,0
p_3^6	10,8	48,6	16,2	14,3	78,3	32,8	49,0	16,7	423,3
q_3^6	29,8	−2,9	0,7	−0,9	−182,2	−123,5	−101,6	−80,9	182,0
p_3^7	−165,0	5,8	92,0	−68,6					
q_3^7	−70,9	−0,4	−44,4	−28,5					
p_4^4	−26,9	83,9	44,6	84,3	91,7	273,9	239,3	275,0	−189,5
q_4^4	35,1	45,8	48,1	42,5	152,5	160,9	181,9	160,0	114,0
p_4^5	99,0	104,2	42,4	107,1	77,6	129,5	106,3	108,0	−88,9
q_4^5	47,9	−17,4	−100,3	−13,9	59,6	−81,0	−98,7	−83,8	115,8
p_4^6	27,8	−51,2	−46,1	−44,9	115,5	−107,3	−42,9	−91,1	141,2
q_4^6	−36,3	−1,0	−49,7	−49,7	−81,1	67,8	19,1	54,4	201,2
p_4^7	−50,0	−11,6	11,8	14,7					
q_4^7	−71,3	−1,2	26,5	30,5					

XIII a. Differenzen der nach den 4 Hypothesen I, II, III, IV der Tabelle VII berechneten Werte von k_1 und K_1 mit den beobachteten.[1])

	k_1				K_1			
u	I	II	III	IV	I	II	III	IV
30⁰	59	418	9	291	650	165	540	403
35⁰	— 94	112	— 15	131	388	— 29	180	91
40⁰	—266	— 87	— 88	— 5	228	—121	— 43	— 96
45⁰	—341	—139	—144	— 62	185	— 97	—107	—137
50⁰	—361	— 92	—182	— 60	178	— 37	— 91	—108
55⁰	—406	— 85	—254	— 78	253	108	47	37
60⁰	—459	— 40	—320	—100	129	59	17	11
65⁰	—487	— 39	—335	— 95	34	42	30	30
70⁰	—491	— 27	—298	— 67	— 37	53	69	76
75⁰	—475	— 27	—224	— 23	—206	— 38	— 6	10
80⁰	—335	68	— 46	114	—381	—147	—117	— 93
85⁰	—291	109	53	179	—345	— 66	— 55	— 25
90⁰	—342	48	0	109	—262	30	13	43
95⁰	—337	52	— 35	74	—167	99	54	77
100⁰	—325	55	— 98	25	—132	65	5	14
105⁰	—417	— 67	—281	—144	— 88	— 2	— 54	— 65
110⁰	—367	— 81	—313	—175	99	44	26	— 7
115⁰	—139	37	—137	— 21	161	— 48	— 9	— 63
120⁰	— 30	37	— 34	38	264	— 86	20	— 50
125⁰	— 11	— 75	26	46	346	—107	56	— 21
130⁰	— 80	—144	38	21	498	9	194	121
135⁰	—198	—164	15	9	578	140	292	232
140⁰	—471	—161	—174	— 91	440	151	196	159
145⁰	—659	134	—317	— 44	2	— 37	—181	—189
150⁰	—996	480	—665	— 99	—428	—133	—542	—517

XIII b. Differenzen der nach den 4 Hypothesen I, II, III, IV der Tabelle VII berechneten Werte von l_1 und L_1 mit den beobachteten.

	l_1				L^{I}			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
30⁰	224	93	— 20	213	234	— 16	—543	66
35⁰	59	— 43	—129	33	234	16	—439	29
40⁰	17	— 68	—118	— 33	185	1	336	— 30
45⁰	73	— 6	— 15	— 7	161	6	—344	— 42
50⁰	133	50	84	22	146	11	—299	— 31
55⁰	131	40	111	— 6	132	5	—267	— 17
60⁰	125	23	121	— 29	134	0	—229	4
65⁰	122	15	124	— 34	163	6	—171	32
70⁰	132	28	129	— 10	175	— 21	—130	18
75⁰	111	20	95	— 2	228	— 17	— 49	21
80⁰	84	14	47	10	287	— 11	— 41	13
85⁰	25	— 15	— 36	— 5	405	29	159	30
90⁰	0	— 8	— 86	11	406	25	221	1
95⁰	— 11	12	—118	31	390	22	263	— 20
100⁰	— 48	3	—172	7	356	— 35	301	— 83
105⁰	— 31	22	—166	16	311	— 51	189	— 88
110⁰	— 24	24	—160	— 4	301	— 11	185	— 22
115⁰	9	33	—122	— 16	272	22	155	47
120⁰	45	31	— 70	— 33	235	48	111	109
125⁰	107	43	14	— 25	163	27	33	112
130⁰	138	17	73	— 37	95	— 12	— 35	70
135⁰	158	— 20	124	— 40	75	— 38	— 46	5
140⁰	210	— 23	209	14	133	— 23	34	— 65
145⁰	290	11	321	125	236	— 4	174	—175
150⁰	348	32	409	242	397	— 42	387	—299

1) Um für alle folgenden Tabellen eine zweckmässige Anordnung zu gewinnen, habe ich Tabelle XIII an dieser Stelle, an der sie übrigens auch ihrem Inhalte nach allenfalls stehen kann, eingeschoben. Eine Aenderung der Numerierung war leider nicht mehr möglich, da der Druck des Textes abgeschlossen war.

VIII. Endgültig gewählte Koeffizienten der Reihen zur Darstellung von $\alpha X \sin v$, $\beta Y \sin v$, γZ.

$\alpha X \sin v$

$m;n$:	0	1	2	3	4	5	6	7
0	21280,69	360,49	−10235	−933	695	535	−133	18
1		−1920,01	259	789	−924	227	274	55
		437,63	1736	−442	128	10	−221	96
2			−781,26	−180	396	373	252	−21
			−55,56	606	50	−113	−19	52
3				71,12	125	−85	14	−68
				166,22	227	−57	−1	−28
4					84,21	107	−45	15
					41,60	−14	−50	31

$\beta Y \sin v$

$m;n$:	0	1	2	3	4	5	6
0	−49,03	66,10	34	−37	−9	−5	0
1		−3420,98	329	132	−121	61	−7
		−1276,66	1261	−495	166	170	−38
2			−1247,79	23	94	−1	−64
			482,55	1051	372	216	−2
3				−748,11	202	12	16
				516,70	−312	5	−80
4					274,08	109	−92
					160,20	−84	55

γZ

$m;n$:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	36388	701	−1412	−1273	291	−40
1		2847	−3841	1900	−909	−607	−132
		−6881	966	445	−483	515	−202
2			−959	−2191	−797	−410	168
			−1990	−54	362	95	−77
3				−583	517	−30	423
				−1089	431	−82	182
4					−190	−89	141
					114	116	201

IX. Koeffizienten der Reihen zur Darstellung von *U*, *W* und *V*: *b*.

($b = 6{,}356 \cdot 10^8\ cm$)

U_0

m ; n:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	—18429,6	— 232,7	354,0	276,6	— 53,0	6,0
1		— 1164,1	1202,1	—407,7	147,8	110,8	18,5
		3484,7	— 304,6	— 92,9	61,8	— 89,3	32,3
2			308,6	527,3	189,4	106,5	— 7,3
			718,2	21,2	— 28,9	— 8,0	18,0
3				140,5	—100,2	6,4	—25,0
				225,9	— 54,9	— 0,5	—10,3
4					101,9	— 24,1	6,1
					15,7	— 26,7	12,6

$$U = U_0 + \Pi_1 \cdot (-532{,}0 \cos\lambda + 50{,}1 \sin\lambda) + \Pi_2 \cdot (30{,}9 \cos 2\lambda - 45{,}4 \sin 2\lambda) + \Pi_3 \cdot (-200{,}5 \cos 3\lambda + 156{,}2 \sin 3\lambda) + \Pi_4 \cdot (90{,}2 \cos 4\lambda - 15{,}0 \sin 4\lambda).$$

W_0

m ; n:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	—18429,6	— 232,7	354,0	276,6	— 53,0	6,0
1		— 1276,7	1261,0	—495,0	166,0	170,0	—38,0
		3421,0	— 329,0	—132,0	121,0	— 61,0	7,0
2			241,3	525,5	186,0	108,0	— 1,0
			623,9	— 11,5	— 47,0	0,5	32,0
3				172,2	—104,0	1,7	—26,7
				249,4	— 67,3	— 4,0	— 5,3
4					40,1	— 21,0	13,8
					— 68,5	— 27,3	23,0

$$W = W_0 - \lambda \left(-49{,}03 + 66{,}10\, R_0^1 + 34\, R_0^2 - 37\, R_0^3 - 9\, R_0^4 - 5\, R_0^5\right)$$

$V : b$

m ; n:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	—18429,6	— 232,7	354,0	276,6	— 53,0	6,0
1		— 1220,4	1231,6	—451,3	156,9	140,4	— 9,8
		3452,9	— 316,8	—112,4	91,4	— 75,2	19,6
2			274,9	526,4	187,7	107,3	— 4,1
			671,1	4,9	— 38,0	— 3,8	25,0
3				156,4	—102,1	4,1	—25,8
				237,6	— 61,1	— 2,2	— 7,8
4					71,0	— 22,5	9,9
					— 26,4	— 27,0	17,8

X. Koeffizienten der Reihen zur Darstellung von $V_i : b$, $V_a : b$ und $\alpha \beta b i$.

($b = 6{,}356 \ 10^8 \ cm$)

$V_i : b$

m; n:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	—18321,5	— 233,8	354,2	264,9	— 50,6	5,9
1		— 1360,4 3455,4	1264,0 — 320,7	—465,9 —112,0	171,1 94,5	119,2 — 81,2	5,7 24,6
2			302,8 668,5	540,0 9,9	172,4 — 57,3	86,2 — 10,4	—14,9 17,5
3				150,8 258,3	—103,1 — 75,2	4,6 6,5	—44,6 —17,7
4					52,8 — 24,5	— 2,1 — 22,9	— 6,3 — 7,3

$V_a : b$

m; n:	0	1	2	3	4	5	6
0	0	— 108,1	1,1	— 0,2	11,7	— 2,4	0,1
1		140,0 — 2,5	— 32,4 3,9	14,6 — 0,4	— 14,2 — 3,1	21,2 6,0	—15,5 — 5,0
2			— 27,9 2,6	— 13,6 — 5,0	15,1 19,3	21,1 6,6	10,8 7,5
3				5,6 — 20,7	1,0 14,1	— 0,5 — 8,7	18,8 9.9
4					18,2 — 1,9	— 20.4 — 4,1	16,2 25.1

$\alpha \beta b i$

m; n:	0	1	2	3	4	5
0	0	6,8	— 20,4	— 5,7	— 4,0	0,0
1		— 3,8 — 33,3	— 2,9 3,3	— 15,6 — 39,7	— 22,9 47,9	24,4 — 54,5
2			12,3 2,9	— 16,1 14,2	— 14,7 2,5	— 28,2 12,7
3				— 5,7 — 9,5	3,5 — 4,7	5,5 — 1,8
4					— 0,7 4,1	— 13,3 9,8

XI a. Berechnete Werte der Koeffizienten k und K in der Entwickelung von X.

u	k_0	k_1	K_1	k_2	K_2	k_3	K_3	k_4	K_4
0°	0,0	2579,5	4257,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5°	1907,5	2371,6	4273,5	1170,3	260,8	− 21,7	− 2,2	0,5	0,1
10°	3870,8	1783,7	4322,1	2202,2	501,1	− 80,2	− 6,1	3,6	1,0
15°	5939,3	915,3	4403,6	2975,8	705,4	−158,1	− 4,9	11,7	2,8
20°	8149,4	− 89,2	4515,1	3404,3	866,9	−231,2	10,6	26,2	4,7
25°	10520,1	−1070,0	4646,4	3446,0	988,1	−275,3	49,0	47,4	5,0
30°	13049,1	−1881,4	4777,4	3107,5	1079,2	−272,2	115,8	74,9	1,9
35°	15712,4	−2420,5	4878,9	2442,3	1153,8	−214,8	210,9	107,6	− 6,2
40°	18463,1	−2645,2	4916,4	1541,5	1223,0	−108,7	328,2	143,8	− 19,3
45°	21235,5	−2577,7	4856,9	519,8	1291,2	29,2	456,1	181,9	− 35,9
50°	23947,8	−2299,6	4677,6	− 500,8	1352,8	174,9	579,7	220,0	− 52,1
55°	26508,5	−1931,9	4373,0	−1408,6	1392,2	303,2	683,5	256,7	− 63,1
60°	28822,6	−1609,6	3958,7	−2116,6	1387,2	393,8	754,2	289,9	− 63,4
65°	30799,8	−1454,8	3470,1	−2573,2	1314,8	435,6	783,6	317,4	− 48,9
70°	32359,8	−1552,7	2954,5	−2766,0	1157,4	428,7	769,4	336,6	− 17,8
75°	33444,6	−1937,0	2460,2	−2720,4	909,0	383,5	714,9	344,1	27,9
80°	34019,9	−2584,2	2023,1	−2490,7	578,7	316,3	628,2	336,7	82,7
85°	34081,1	−3419,2	1655,0	−2148,5	190,6	244,6	519,4	311,5	138,2
90°	33655,5	−4329,3	1337,5	−1768,7	− 219,6	181,8	398,5	266,8	184,4
95°	32799,6	−5184,0	1023,3	−1415,4	− 611,0	133,4	273,7	202,9	211,8
100°	31594,0	−5855,2	645,7	−1132,0	− 945,3	95,8	150,0	122,4	213,5
105°	30135,1	−6236,2	134,9	− 935,3	−1194,4	58,0	29,6	30,8	187,1
110°	28524,0	−6254,6	− 562,6	− 816,3	−1345,3	5,7	− 87,3	− 64,4	135,0
115°	26853,6	−5878,8	−1466,5	− 745,0	−1401,9	− 73,2	−200,5	−154,0	64,5
120°	25199,7	−5117,9	−2550,2	− 680,7	−1383,1	−184,1	−308,1	−229,1	− 13,6
125°	23600,7	−4015,5	−3739,4	− 583,4	−1316,6	−322,0	−405,9	−282,1	− 87,0
130°	22072,9	−2641,2	−4920,8	− 424,8	−1232,2	−471,5	−486,9	−307,8	−144,9
135°	20589,2	−1079,1	−5962,4	− 196,1	−1154,0	−609,3	−542,7	−305,4	−179,6
140°	19095,0	581,4	−6739,3	88,4	−1094,6	−709,6	−565,2	−277,7	−187,9
145°	17516,2	2253,6	−7161,0	393,8	−1053,1	−750,6	−549,1	−231,0	−172,5
150°	15772,7	3858,8	−7192,8	672,4	−1016,2	−721,0	−494,2	−174,4	−139,8
155°	13794,3	5328,6	−6867,4	872,9	− 963,1	−623,2	−406,7	−117,1	− 98,9
160°	11534,1	6606,4	−6281,0	953,7	− 872,3	−474,7	−298,7	− 67,5	− 59,3
165°	8980,1	7646,5	−5577,3	891,8	− 728,3	−304,9	−186,9	− 31,2	− 28,2
170°	6158,6	8414,2	−4918,7	689,6	− 526,9	−148,8	− 89,6	− 9,9	− 9,1
175°	3134,1	8884,6	−4453,9	375,8	− 277,2	− 39,3	− 23,4	− 1,3	− 1,2
180°	0,0	9043,1	−4286,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

XI b. Berechnete Werte der Koeffizienten l und L in der Entwickelung von Y.

u	l_0	l_1	L_1	l_2	L_2	l_3	L_3	l_4	L_4
0°	0,0	−4257,5	2579,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5°	33,0	−4267,4	2530,4	− 261,5	1182,9	2,3	− 21,9	− 0,1	0,5
10°	64,0	−4296,2	2386,0	− 506,2	2300,7	7,9	− 83,5	− 1,0	3,6
15°	91,3	−4342,8	2155,9	− 720,5	3293,6	13,5	−173,6	− 2,3	11,4
20°	113,3	−4404,6	1855,0	− 896,5	4111,7	13,8	−275,5	− 2,4	24,8
25°	129,0	−4478,9	1503,2	−1033,1	4719,1	3,1	−369,9	1,8	43,3
30°	137,4	−4562,5	1123,7	−1136,9	5095,7	− 24,8	−438,1	15,1	65,2
35°	138,6	−4652,6	741,4	−1219,8	5238,9	− 74,7	−464,7	42,5	87,9
40°	132,6	−4746,7	380,4	−1297,2	5161,7	− 149,7	−440,4	88,7	108,5
45°	120,1	−4843,5	61,9	−1384,8	4891,7	− 251,0	−362,8	156,4	124,5
50°	102,2	−4942,4	− 198,6	−1494,9	4466,5	− 377,0	−236,7	245,6	134,6
55°	79,9	−5044,4	− 393,3	−1634,4	3930,8	− 523,9	− 72,3	352,5	138,9
60°	54,6	−5151,2	− 523,8	−1802,7	3330,8	− 685,8	115,9	469,8	139,2
65°	27,7	−5265,6	− 601,6	−1991,9	2710,6	− 856,1	312,4	587,0	138,7
70°	0,2	−5390,4	− 647,7	−2187,5	2108,2	−1027,0	503,4	691,9	141,7
75°	− 26,6	−5528,1	− 690,6	−2371,0	1552,9	−1191,2	678,2	771,8	152,6
80°	− 52,1	−5679,9	− 763,4	−2523,0	1063,7	−1342,0	830,8	815,8	174,5
85°	− 75,7	−5845,8	− 900,2	−2626,4	648,9	−1473,8	960,2	816,3	209,6
90°	− 96,8	−6021,1	−1131,5	−2669,7	307,2	−1582,2	1069,5	770,3	257,5

Y.

u	l_0	l_1	L_1	l_2	L_2	l_3	L_3	l_4	L_4
95°	—115,5	—6201,1	—1480,0	—2648,2	29,4	—1663,8	1164,0	680,3	315,4
100°	—131,7	—6376,6	—1957,5	—2565,6	— 198,5	—1716,6	1249,6	553,9	378,2
105°	—145,3	—6536,0	—2562,1	—2432,9	— 392,9	—1739,3	1330,1	403,3	439,1
110°	—156,6	—6666,3	—3277,9	—2266,3	— 569,0	—1731,0	1406,0	243,2	490,7
115°	—165,4	—6754,1	—4076,5	—2084,7	— 738,6	—1691,7	1473,8	89,1	525,9
120°	—171,7	—6787,0	—4919,2	—1906,1	— 907,8	—1621,6	1525,9	— 44,7	539,8
125°	—175,5	—6755,1	—5762,0	—1744,8	—1076,5	—1521,9	1551,9	—147,5	527,7
130°	—176,4	—6653,0	—6560,3	—1608,5	—1238,1	—1394,6	1540,5	—213,1	491,4
135°	—174,2	—6480,4	—7274,6	—1498,0	—1380,5	—1243,1	1482,6	—240,9	433,5
140°	—168,6	—6243,5	—7875,1	—1406,7	—1488,4	—1072,2	1373,0	—235,1	360,2
145°	—159,3	—5954,6	—8344,9	—1322,3	—1545,5	— 888,5	1212,9	—203,7	279,4
150°	—146,1	—5631,7	—8681,4	—1229,6	—1537,1	— 700,1	1010,6	—157,6	199,4
155°	—129,2	—5297,4	—8895,8	—1113,8	—1452,8	— 516,4	781,6	—107,4	128,2
160°	—108,5	—4976,7	—9010,5	— 963,2	—1288,2	— 347,4	546,6	— 62,5	71,5
165°	— 84,6	—4694,8	—9054,5	— 771,8	—1046,5	— 203,3	329,6	— 29,0	32,2
170°	— 58,0	—4474,6	—9058,3	— 541,0	— 738,6	— 93,0	153,9	— 9,2	10,0
175°	— 29,5	—4334,6	—9048,5	— 279,1	— 382,1	— 23,6	39,7	— 1,2	1,3
180°	0,0	—4286,5	—9043,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

XI c. Berechnete Werte der Koeffizienten m und M in der Entwickelung von

Z.

u	m_0	m_1	M_1	m_2	M_2	m_3	M_3	m_4	M_4
0°	57859,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5°	57788,7	— 1386,6	— 578,1	— 180,2	— 6,8	8,4	2,7	0,1	0,3
10°	57563,7	— 2572,0	— 1159,3	— 704,1	— 28,2	63,5	19,9	1,3	4,2
15°	57147,6	— 3391,9	— 1750,3	—1523,2	— 66,5	196,3	60,4	5,8	20,0
20°	56483,3	— 3748,3	— 2362,6	—2559,7	— 127,3	410,6	121,9	16,1	58,0
25°	55499,1	— 3624,7	— 3012,3	— 3712,3	— 218,9	679,6	190,9	32,6	126,2
30°	54116,0	— 3086,9	— 3714,9	—4864,3	— 353,3	951,4	244,4	52,9	227,0
35°	52255,5	— 2266,5	— 4480,3	—5895,0	— 544,6	1161,5	255,4	70,8	354,2
40°	49848,8	— 1332,0	— 5307,2	—6692,4	— 806,3	1249,9	199,9	77,3	492,9
45°	46843,5	— 455,2	— 6179,2	—7167,2	—1148,0	1177,9	63,0	62,1	621,8
50°	43210,9	223,1	— 7066,6	—7264,8	—1571,2	938,2	— 156,1	16,6	717,7
55°	38951,2	618,6	— 7930,3	—6973,3	—2065,7	559,5	— 443,3	— 63,4	760,1
60°	34095,7	717,5	— 8731,2	—6326,0	—2608,4	99,5	— 772,4	—175,6	737,1
65°	28709,1	577,1	— 9439,8	—5397,1	—3163,3	— 368,2	—1110,6	—309,9	648,1
70°	22884,9	311,3	—10044,4	—4290,3	—3686,0	— 771,7	—1425,6	—449,9	504,7
75°	16743,8	68,1	—10555,0	—3122,4	—4128,7	—1058,2	—1692,4	—575,1	329,4
80°	10422,6	1,1	—11001,0	—2005,3	—4447,6	—1206,2	—1898,4	—664,6	150,7
85°	4067,7	242,6	—11421,0	—1028,5	—4610,5	—1229,2	—2044,4	—701,3	— 2,6
90°	— 2178,1	881,1	—11851,9	— 247,0	—4601,8	—1171,3	—2142,8	—676,0	—107,0
95°	— 8187,3	1948,6	—12311,0	324,5	—4426,1	—1093,9	—2211,7	—588,9	—149,1
100°	—13858,1	3417,1	—12784,0	708,4	—4106,9	—1058,7	—2269,1	—450,6	—128,3
105°	—19123,1	5205,1	—13220,7	954,5	—3682,9	—1110,4	2325,7	—279,8	— 55,6
110°	—23953,8	7189,9	—13535,3	1124,4	—3201,1	—1264,4	—2381,3	—100,1	48,7
115°	—28361,5	9225,8	—13622,1	1274,7	—2708,9	—1502,3	—2423,5	64,5	160,1
120°	—32389,8	11159,9	—13375,9	1443,2	—2246,6	—1775,7	—2431,4	194,0	255,4
125°	—36107,0	12848,5	—12716,7	1639,7	—1841,4	—2019,5	—2380,9	276,3	317,3
130°	—39589,5	14167,8	—11613,7	1845,6	—1505,2	—2168,5	—2252,2	308,1	337,7
135°	—42908,5	15021,1	—10099,9	2020,3	—1235,2	—2175,0	—2037,2	295,2	318,0
140°	—46113,0	15341,7	— 8276,1	2114,3	—1018,1	—2021,2	—1743,2	249,9	267,9
145°	—49219,4	15093,4	— 6299,3	2084,8	— 835,6	—1724,8	—1393,7	188,0	201,5
150°	—52204,6	14269,2	— 4358,1	1910,2	— 670,7	—1334,1	—1024,4	124,5	133,7
155°	—55005,8	12889,1	— 2639,7	1599,0	— 512,8	— 915,9	— 676,1	70,9	76,3
160°	—57528,6	10998,7	— 1293,6	1191,6	— 360,1	— 538,2	— 385,6	33,1	35,7
165°	—59659,7	8667,0	— 402,0	754,1	— 219,5	— 252,4	— 176,9	11,6	12,5
170°	—61284,2	5983,3	38,9	364,5	— 103,7	— 80,6	— 55,7	2,5	2,7
175°	—62303,4	3054,6	119,4	95,8	— 26,9	— 10,6	— 7,2	0,2	0,2
180°	—62651,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

XII a. Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten der Koeffizienten k und K.

(Beob.-Ber.)

u	k_0	k_1	K_1	k_2	K_2	k_3	K_3	k_4	K_4
30°	—119	291	403	—288	31	222	—186	—205	— 12
35°	— 22	131	91	28	86	145	— 71	—198	— 44
40°	67	— 5	— 96	49	27	229	— 98	—194	— 41
45°	65	— 62	—137	70	— 11	331	— 16	—162	— 34
50°	— 18	— 60	—108	61	— 23	335	110	—110	— 48
55°	12	— 78	37	— 11	— 72	257	107	13	73
60°	7	—100	11	— 93	— 37	— 34	76	50	133
65°	— 29	— 95	30	— 87	5	—246	— 14	33	89
70°	— 70	— 67	76	— 54	33	—289	— 59	— 7	78
75°	— 45	— 23	10	70	51	—313	105	6	42
80°	50	114	— 93	91	61	124	— 8	63	7
85°	79	179	— 25	169	— 41	215	— 39	58	— 28
90°	44	109	43	49	— 60	128	— 19	— 67	— 24
95°	— 70	74	77	— 85	1	7	—104	27	— 52
100°	— 54	25	14	—248	55	14	—110	— 2	— 54
105°	— 25	—144	— 65	—205	—126	— 8	0	39	—147
110°	76	—175	— 7	36	5	— 46	77	—126	—155
115°	— 4	— 21	— 63	215	52	— 67	70	—106	— 74
120°	— 38	38	— 50	261	93	— 66	78	— 41	74
125°	— 21	46	— 21	113	57	— 38	86	72	257
130°	17	21	121	— 15	12	51	27	138	325
135°	11	9	232	—144	—106	109	— 37	165	379
140°	45	— 91	159	—218	—175	80	— 45	108	388
145°	— 36	— 44	—189	—244	— 77	11	— 51	1	332
150°	— 53	— 99	—517	—252	216	1	—106	— 56	280

XII b. Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten der Koeffizienten l und L.

(Beob.-Ber.)

u	l_0	l_1	L_1	l_2	L_2	l_3	L_3	l_4	L_4
30°	—97	213	66	67	—186	— 65	— 72	285	—275
35°	—79	33	29	130	— 49	—105	—165	398	—298
40°	—23	— 33	—30	67	58	— 70	—210	501	—408
45°	30	— 7	—42	— 35	68	— 49	—187	544	—504
50°	48	22	—31	— 85	33	— 23	—123	534	—515
55°	40	— 6	—17	— 76	49	44	— 78	497	—439
60°	45	— 29	4	— 47	59	126	— 26	400	—289
65°	22	— 34	32	12	29	146	— 2	193	—119
70°	0	— 10	18	27	2	97	— 3	8	28
75°	—23	— 2	21	51	— 53	1	2	—152	158
80°	—58	10	13	23	— 64	— 78	— 11	—246	276
85°	—74	— 5	30	26	— 69	—126	70	—296	320
90°	—33	11	1	20	— 67	—118	100	—260	312

u	l_0	l_1	L_1	l_2	L_2	l_3	L_3	l_4	L_4
95°	6	31	−20	−2	−39	−86	106	−190	255
100°	52	7	−83	−44	69	−3	70	−164	152
105°	85	16	−88	−27	133	69	10	−133	1
110°	77	−4	−22	−44	119	101	−86	−73	−161
115°	15	−16	47	−25	49	112	−164	41	−276
120°	−38	−33	109	−4	−32	92	−196	205	−339
125°	−75	−25	112	35	−93	62	−162	337	−338
130°	−104	−37	70	69	−102	5	−31	423	−271
135°	−116	−40	5	98	−70	−107	117	431	−224
140°	−31	14	−65	47	−42	−258	257	425	−180
145°	99	125	−175	−68	−74	−302	387	374	−79
150°	286	242	−299	−130	−163	−250	459	308	61

XII c. Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten der Koeffizienten m und M.

(Beob.-Ber.)

u	m_0	m_1	M_1	m_2	M_2	m_3	M_3	m_4	M_4
30°	−166	557	465	−46	573	−51	−964	−1043	−337
35°	214	−114	−60	125	45	−311	−535	−581	−34
40°	161	−418	−493	−128	−314	−280	−30	−137	257
45°	−34	−375	−411	−133	−142	−48	437	118	−32
50°	−271	−53	117	55	−99	342	136	383	−18
55°	−101	121	420	133	−44	−39	383	603	160
60°	174	442	301	6	28	−99	132	426	73
65°	41	223	−10	47	−27	88	−159	60	−108
70°	35	−71	−186	90	86	312	−104	−270	−105
75°	16	−228	−255	−78	69	198	2	−275	−59
80°	7	−11	−39	−35	88	−14	48	−375	19
85°	−18	97	141	−81	−60	−211	64	−289	13
90°	−72	−21	192	−93	72	−289	−117	−34	37
95°	−33	−129	31	−154	146	−156	−268	99	9
100°	88	−237	−26	−8	−93	−31	−171	101	−22
105°	73	−145	−229	265	−97	110	−34	220	76
110°	−76	190	−315	276	1	34	161	240	−29
115°	−69	334	32	115	−131	−128	254	386	−100
120°	−60	360	196	−133	−203	86	191	186	35
125°	127	−29	587	−280	−259	460	141	−126	193
130°	210	−298	464	−256	−175	519	222	−488	72
135°	−122	−221	−580	80	885	−185	−163	−55	−228
140°	−257	−122	−864	146	1078	−339	−627	−180	12
145°	189	−263	−31	−65	−114	−275	−336	−508	−1
150°	−5	511	648	210	−1489	−586	324	−514	−304

XIV a. Abweichungen der berechneten Werte der Komponenten X von den beobachteten.[1])

$\Delta' X$

u λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
30°	51	— 3	71	— 31	20	— 81	54	— 72	95	—346	255	—155
40°	268	—121	— 34	121	—103	123	—145	119	15	— 73	203	—293
50°	512	59	162	9	—315	43	—642	37	—322	—206	248	— 56
60°	333	—311	193	—158	— 26	178	—235	143	54	—171	33	—387
70°	142	— 82	—108	50	— 31	92	—113	— 12	123	—156	147	—302
80°	—183	153	—255	167	— 53	— 49	74	— 36	— 29	— 3	—467	133
90°	—127	— 1	96	— 30	117	—286	324	—130	2	57	—744	162
100°	—148	69	50	—102	156	—127	192	— 39	— 57	282	—448	294
110°	—260	145	— 22	—249	164	— 43	120	1	— 52	— 19	— 74	335
120°	— 86	35	31	— 88	62	—154	114	— 33	12	—127	—139	80
130°	— 11	— 44	116	—284	222	—241	41	— 14	— 56	—182	64	— 8
140°	30	— 73	25	—116	196	—152	91	— 63	100	—219	— 66	32
150°	16	0	97	—225	— 19	— 38	80	—114	114	—235	106	12

$\Delta'' X$

u λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
30°	— 99	123	437	553	516	—413	—1125	—412	—108	—625	—335	60
40°	146	26	—116	—174	229	342	— 302	327	513	—178	— 68	59
50°	208	10	—430	—407	256	237	— 342	2	487	29	—287	21
60°	—170	14	—125	85	201	20	98	24	—112	215	150	—316
70°	—487	— 76	243	112	—190	—153	225	82	—400	—158	189	—227
80°	442	167	—128	— 63	— 60	—148	— 34	79	167	107	— 87	158
90°	263	126	— 15	— 10	195	83	— 211	— 68	58	—134	— 27	267
100°	—265	—258	176	316	— 10	— 53	— 343	— 95	155	68	— 37	—303
110°	—235	105	212	—170	18	512	207	— 51	307	— 2	— 53	62
120°	154	344	— 90	—468	—293	— 12	210	172	—173	—212	— 36	— 52
130°	212	338	—251	264	372	—246	68	127	—380	76	81	—457
140°	— 76	22	—375	575	851	—189	— 54	111	—400	167	324	—416
150°	—459	—172	—453	—268	—241	—859	— 263	729	544	554	554	—302

ΔX

u λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
30°	— 48	120	508	522	536	—494	—1071	—484	— 13	—971	— 80	— 95
40°	414	— 95	—150	— 53	126	465	— 447	446	528	—251	135	—234
50°	720	69	—268	—398	— 59	280	— 984	39	165	—177	— 39	— 35
60°	163	—297	68	— 73	175	198	— 137	167	— 58	44	183	—703
70°	—345	—158	135	162	—221	— 61	112	70	—277	—314	336	—529
80°	259	320	—383	104	—113	—197	40	43	138	104	—554	291
90°	136	125	81	— 40	312	—203	113	—198	60	— 77	—771	429
100°	—413	—189	226	214	146	—180	— 151	—134	98	350	—485	— 9
110°	—495	250	190	—419	182	469	327	— 50	255	— 21	—127	397
120°	68	379	— 59	—556	—231	—166	324	139	—161	—339	—175	28
130°	201	294	—135	— 20	594	—487	109	113	—436	—106	145	—465
140°	— 46	— 51	—350	459	1047	—341	37	48	—300	— 52	258	—384
150°	—443	—172	—356	—493	—260	—897	— 183	615	658	319	660	—290

[1]) Diese Abweichungen sind ebenso wie diejenigen in den vorhergehenden Tabellen im Sinne von (Beobachtung—Rechnung) gebildet.

Tabelle XIII steht zwischen VII und VIII, S. 56.

XIV b. Abweichungen der berechneten Werte der Komponente Y von den beobachteten.

$\Delta' Y$

u \ λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
30°	41	17	— 11	— 73	238	—193	155	—108	226	—346	— 93	29
40°	—113	146	—117	10	277	—170	269	—169	99	—182	44	60
50°	—163	267	—262	300	42	— 81	371	—299	215	—296	20	18
60°	— 97	196	—352	394	—121	—447	319	—387	447	—513	284	—143
70°	110	144	—305	207	—169	— 79	346	—455	544	—487	461	—635
80°	210	192	—191	195	—152	42	363	—402	547	—374	521	—623
90°	180	112	—175	175	— 93	27	219	—474	255	— 24	165	—380
100°	28	80	—107	128	—143	98	50	—223	194	106	42	—130
110°	—114	— 16	117	97	— 33	172	—149	52	— 20	71	— 3	— 97
120°	93	—184	275	—162	49	173	—141	197	—108	31	— 57	— 65
130°	198	—219	260	—117	152	102	—156	238	—230	243	— 91	— 57
140°	116	—139	153	— 71	80	— 29	—165	250	—244	187	— 40	4
150°	35	—170	315	—440	335	—233	50	81	—110	249	—250	24

$\Delta'' Y$

u \ λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
30°	403	—460	33	259	—464	— 30	107	—751	—425	— 17	—236	417
40°	442	—797	124	591	—790	—133	648	—290	69	231	—631	260
50°	496	—798	305	759	—712	— 2	498	—560	291	575	—590	314
60°	495	—427	33	522	—289	22	301	—329	307	462	—577	20
70°	122	33	—126	2	123	— 2	— 52	38	46	— 40	—113	— 31
80°	—349	264	—147	—303	276	—120	—213	256	—335	—351	420	— 94
90°	—380	429	—117	—412	293	— 14	—166	209	—366	—214	538	—196
100°	—152	338	19	—221	149	— 57	—160	269	150	85	306	—102
110°	57	— 45	256	112	— 23	34	—137	156	500	— 16	—191	221
120°	222	—634	113	476	—202	66	104	—294	142	—134	—607	292
130°	356	—632	—167	351	—412	78	420	—576	—241	149	—581	6
140°	197	—176	61	25	—708	185	685	—649	—356	669	— 65	—240
150°	456	498	115	— 34	—239	255	472	—541	—109	1482	1021	56

ΔY

u \ λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
30°	444	—443	22	186	—226	—223	262	—859	—199	—363	—329	446
40°	329	—651	7	601	—513	—303	917	—459	168	49	—587	320
50°	333	—531	43	1059	—670	— 83	869	—859	506	279	—570	332
60°	398	—231	—319	916	—410	—425	620	—716	754	— 51	—293	—123
70°	232	177	—431	209	— 46	— 81	294	—417	590	—527	348	—666
80°	—139	456	—338	—108	124	— 78	150	—146	212	—725	941	—717
90°	—200	541	—292	—237	200	13	53	—265	—111	—238	703	—576
100°	—124	418	— 88	— 93	6	41	—110	46	344	191	348	—232
110°	— 57	— 61	373	209	— 56	206	—286	208	480	55	—194	124
120°	315	—818	388	314	—153	239	— 37	— 97	34	—103	—664	227
130°	554	—851	93	234	—260	180	264	—338	—471	392	—672	— 51
140°	313	—315	214	— 46	—628	156	520	—399	—600	856	—105	—236
150°	491	328	430	—474	96	22	522	—460	—219	1731	771	80

Schneller, als ich hoffen konnte, hat sich mir kurz vor dem Abschlusse des Druckes der vorliegenden Arbeit die Gelegenheit zur ausführlichen Veröffentlichung der Rechnung und der Resultate geboten. Herr Geh. R. Neumayer hat mich zu erneutem Danke verpflichtet, indem er den Abdruck

XIV c. Abweichungen der berechneten Werte der Komponente Z von den beobachteten.

$\Delta' Z$

u \ λ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
30^0	144	—79	120	—197	29	—531	416	—356	1016	—3045	1679	—795
40^0	441	—688	396	—663	408	—567	176	40	—501	282	40	—554
50^0	—80	—207	958	—1071	127	137	420	—226	—809	144	183	—493
60^0	404	—247	376	—538	459	—197	116	205	—181	—240	—372	—545
70^0	—348	277	34	—446	469	—456	394	—23	—402	448	—712	578
80^0	—765	382	144	—676	660	—528	476	—49	—356	608	—1220	730
90^0	—156	111	182	—582	821	—815	607	—272	—141	517	—810	693
100^0	73	216	134	—406	660	—821	698	—451	224	113	—149	80
110^0	—699	456	—146	29	174	—147	—74	—11	42	76	—131	296
120^0	—628	661	—494	413	—54	3	643	—359	419	—145	—5	244
130^0	—79	458	—532	513	—44	502	59	—259	377	—354	558	—232
140^0	—95	378	685	800	—492	342	—105	—342	480	—125	778	—334
150^0	604	—18	—380	216	—838	1532	—513	184	259	—493	788	—780

$\Delta'' Z$

u \ λ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
30^0	—749	288	1899	266	—336	—1086	—1761	786	434	—2592	—483	1342
40^0	—802	—522	—557	—311	290	300	594	755	155	615	1286	129
50^0	456	—388	—827	38	50	—93	—122	—685	—293	76	—890	—574
60^0	949	717	500	763	—62	—224	263	—614	—662	425	56	—23
70^0	96	—60	—218	—407	146	96	—386	457	799	—243	—227	367
80^0	—428	289	246	—420	110	122	—378	251	297	—246	195	46
90^0	—509	—46	467	296	—151	—199	111	32	—423	—322	73	—193
100^0	—87	—455	—130	342	168	154	449	323	90	52	38	112
110^0	664	86	—520	—588	—694	—195	216	—250	—96	364	—26	127
120^0	439	236	—29	264	195	—97	—453	—966	—556	254	44	—51
130^0	—313	433	102	220	1866	1127	—755	41	634	—264	—274	—297
140^0	—752	—315	213	—820	—2189	—1991	170	2015	1153	—346	—137	—85
150^0	—384	—105	524	—405	893	2115	—234	—2286	—2282	—1053	1454	1704

ΔZ

u \ λ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0
30^0	—605	209	2019	69	—307	—1617	—1345	430	1450	—5637	1196	547
40^0	—361	—1210	—161	—974	698	—267	770	795	—346	897	1326	—425
50^0	376	—595	131	—1033	177	44	298	—911	—1102	220	—707	—1067
60^0	1353	470	876	225	397	—421	379	—409	—843	185	—316	—568
70^0	—252	217	—184	—853	615	—360	8	434	397	205	—939	945
80^0	—1193	671	390	—1096	770	—406	98	202	—59	362	—1025	776
90^0	—665	65	649	—286	670	—1014	718	—240	—564	195	—737	500
100^0	—14	—239	4	—64	828	—667	1147	—128	314	165	—111	192
110^0	—35	542	—666	—559	—520	—342	142	—261	—54	440	—157	423
120^0	—189	897	—523	677	141	—94	190	—1325	—137	109	39	193
130^0	—392	891	—430	733	1822	1629	—696	—218	1011	—618	284	—529
140^0	—847	63	—472	—20	—2681	—1649	65	1673	1633	—471	641	—419
150^0	220	—123	144	—189	55	3647	—747	—2102	—2023	—1546	2242	924

derselben in dem nächstens erscheinenden XVIII. Bande von „Aus dem Archiv der deutschen Seewarte“ zugesagt und ausserdem durch eine nochmalige Unterstützung die dazu nötige Beschleunigung der noch durchzuführenden Berechnungen ermöglicht hat.