© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die

scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen

von

H. Seeliger.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Vor mehreren Jahren hatte ich bei Gelegenheit einer Besprechung [1]) zweier Arbeiten über die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen Veranlassung, mich über die Erklärung dieses Phänomens auszusprechen. Eine detaillirte Untersuchung war damals nicht beabsichtigt, und ich beschränkte mich auf die Andeutung des Weges, auf welchem eine Berechnung der Lichtvertheilung, welche bei Mondfinsternissen auftritt, ausgeführt werden kann. Diese Rechnung hat neuerdings Herr v. Hepperger [2]) ausgeführt und damit eine dankenswerthe Untersuchung geliefert. Indessen sind seine Rechnungen auf sehr weitgehenden Vernachlässigungen gegründet, deren Tragweite nicht ohne weiteres zu übersehen ist, auch ist ein wesentlicher Umstand ausser Betracht geblieben, nämlich die Rücksichtnahme auf die durchaus nicht gleichförmige Helligkeitsvertheilung auf der Sonnenscheibe. Aus diesem Grunde sind die von ihm gewonnenen Zahlen nicht als der Wirklichkeit genügend nahe entsprechend zu bezeichnen und eine weitere Consequenz davon ist, dass die Schlussfolgerungen zur Erklärung der physiologischen Seite des Phänomens nicht als zutreffend angesehen werden können. In der folgenden Abhandlung habe ich versucht, die Helligkeitsvertheilung bei Mondfinsternissen in der Nähe der Grenze des geometrischen Kernschattens einwurfsfrei abzuleiten und durch Versuche mit rotirenden Scheiben den physiologischen Character des Phänomens klar zu legen, und ich hoffe, damit die in der V. J. S. begonnenen Untersuchungen zum Abschlusse gebracht zu haben. Der Inhalt der einzelnen Artikel ist kurz folgender:

Art. 1. Im engen Anschluss an das Referat der V. J. S. wird eine allgemeine Orientirung über die zu behandelnden Fragen gegeben und namentlich

1) Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 27, S. 186—206.

2) Ueber die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens. Sitzungsberichte der Akademie d. W. in Wien, März 1895.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

werden die neueren Arbeiten, welche eine Feststellung des numerischen Betrages der Vergrösserung des Erdschattens bezweckten, besprochen.

Art. 2 behandelt die physiologischen Fragen, welche bei dem vorliegenden und bei ähnlichen Phänomenen in den Vordergrund treten. In der Anwendung von rotirenden Scheiben wird ein Mittel angegeben, um die näheren Umstände zu studiren, welche die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bedingen und auf Grund der in den folgenden Artikeln ausgeführten Rechnungen wird die besprochene Erscheinung objectiv dargestellt und durch Messungen die nahe Uebereinstimmung zwischen Experiment und den thatsächlich bei Finsternissen gemachten Wahrnehmungen nachgewiesen.

Art. 3 und 4 sind der Lösung der Aufgabe gewidmet, die Lichtvertheilung bei Monfinsternissen anzugeben.

Art. 5 zeigt, wie man auf den Umstand Rücksicht nehmen kann, dass die Sonnenscheibe nach den Rändern zu sehr merkbar abschattirt ist.

Art. 6 ist den numerischen Ausrechnungen gewidmet, welche zu den in Art. 2 benützten Endresultaten geführt haben. Ich habe hiebei zu erwähnen, dass mich Herr Villiger bei den Rechnungen nachdrücklich unterstützt hat.

Art. 7 endlich enthält Schlussfolgerungen, welche aus den ausgeführten Rechnungen in Bezug auf die Vergrösserung des Erdschattens und auf verwandte Fragen gezogen werden können. So wird u. A. der Einfluss der Venusatmosphäre auf die aus den Venusvorübergängen vor der Sonnenscheibe hervorgehenden Resultate nach einigen Richtungen hin untersucht.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

1.

Es ist seit langer Zeit bekannt, dass der Schatten der Erde, welcher bei Mondfinsternissen über den Mond zieht, grösser erscheint, als die Rechnung für den Kernschatten ergiebt, und schon im vorigen Jahrhundert wurden Versuche zur Bestimmung dieser Vergrösserung gemacht. Man pflegte aus nicht recht ersichtlichen Gründen die scheinbare Vergrösserung des Radius des Erdschattens in der Entfernung des Mondes in Theilen desselben Radius (ungefähr 2500″) anzugeben und bezeichnete den so entstehenden Bruch als Vergrösserungscoefficienten. Die Werthe für diesen, die man in älteren und neueren Quellen angegeben findet, weichen indessen sehr beträchtlich von einander ab. Dies ist sehr erklärlich, weil eine eingehende Discussion von Mondfinsternissen in dieser Richtung niemals stattgefunden hat. Erst in neuester Zeit ist diese Lücke durch die verdienstvollen Arbeiten der Herren A. Brosinsky[1]) und J. Hartmann[2]) ausgefüllt worden. Namentlich die zweite Abhandlung ist eine sehr eingehende und gründliche Untersuchung eines umfangreichen Beobachtungsmateriales, welche über den Betrag der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens eine in der Hauptsache endgültige Feststellung gebracht hat.

Die früheste Angabe über den Vergrösserungscoefficienten rührt von Lahire her, der hierfür 1 : 41 giebt. Weitere Angaben haben gemacht:

J. Cassini	1 : 123
Lemonnier	1 : 82
Tob. Mayer	1 : 60.

Der letztere Werth wird noch in einigen Ephemeriden der Gegenwart verwendet.[3]) Er scheint aber ebenso wenig wie die übrigen Zahlen aus einer eingehenderen Discussion von Beobachtungen, vielmehr aus Abschätzungen hervorgegangen zu sein. Näheres über diesen Punkt ist nicht bekannt. Erst Legentil hat nachweisbar Finsternissbeobachtungen untersucht und aus sechs Finsternissen die Coefficienten $\frac{1}{61}$ und $\frac{1}{25}$ gefunden, den ersteren für totale, den letzteren für partielle Finsternisse. Lalande giebt als Resultat der

1) A. Brosinsky, Ueber die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Göttingen 1889 (?).

2) J. Hartmann, Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Band XVII, No. VI. Leipzig 1891.

3) Das Berliner Jahrbuch nimmt seit wenigen Jahren 1 : 50 an.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Beobachtung einer Finsterniss $\frac{1}{69}$ an, während Lambert ohne näheren Nachweis 1:40 und in seiner „Photometria“ 1:21 ansetzt. Aus neuerer Zeit liegen Rechnungen von Mädler (4 Finsternisse) und Jul. Schmidt (6 Finsternisse) vor. Sie ergaben im Mittel aus zum Theil stark divergirenden Einzelresultaten 1:49. v. Oppolzer verwendet in seinen Syzygientafeln ohne näheren Nachweis den Coefficienten 1:40.

Herr Brosinsky hat die neuesten totalen oder nahezu totalen Finsternisse verarbeitet, welche seit der Zeit Tob. Mayer's genügende Daten darboten zur Ableitung des Vergrösserungscoefficienten A aus der Dauer der Verfinsterung eines Mondgebildes. Durch diese Bedingung war natürlich die Anzahl der verwendbaren Beobachtungen sehr eingeschränkt. Immerhin blieben 20 Finsternisse übrig (zwischen den Jahren 1776 und 1888), deren Bearbeitung einen Erfolg versprachen. Die einzelnen Finsternisse gaben, wie kaum anders zu erwarten, sehr verschiedene Werthe für A, indem der reciproke Werth von A zwischen den Grenzen 41,5 und 72,1 schwankt. Als Mittelwerth nimmt Herr Brosinsky an:

$$A = \frac{1}{55}.$$

Herr Hartmann hat sich nicht darauf beschränkt, nur die Dauer der Verfinsterungen der einzelnen Mondgebilde zu benützen, sich vielmehr in ganz zutreffender Weise auf die Erwägung gestützt, dass man die Mondörter und die Libration gegenwärtig sicher genug kennt, um aus den Ein- bezw. Austritten die Lage der scheinbaren Schattengrenze ableiten zu können. Dagegen hat sich, was schon aus den Rechnungen des Herrn Brosinsky hervorging, gezeigt, dass die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Beobachtungen aus dem gegenwärtigen Jahrhundert diejenige der Angaben aus dem vorigen Jahrhundert so erheblich übertrifft, dass es zweckmässig ist, nur die neueren Beobachtungen zu benützen. Es verblieben auf diese Weise die folgenden 30 Finsternisse, welche eine Bearbeitung zu lohnen schienen.

1802 Sept. 11	[1823 Jan. 26]	1860 Febr. 6
[1804 Jan. 26]	1841* Febr. 5	1863* Juni 1
1805 Juli 11	1842 Jan. 26	1867 Sept. 13
1806 Jan. 4	1844* Mai 31	1876 Sept. 3
1809 April 29	1844* Nov. 24	1877* Febr. 27
1811 Sept. 2	1845 Nov. 13	1877* Aug. 23
1813 Aug. 11	1849 März 8	1878 Aug. 12
1816 Juni 9	1852 Jan. 6	1887 Aug. 3
1816 Dec. 4	1856 Oct. 13	1888* Jan. 28
1818 April 20	1858 Febr. 27	1889 Jan. 16

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zunächst mussten noch zwei Finsternisse (die in Klammern gesetzten), weil sie nur sehr mangelhafte Daten lieferten, ausgeschlossen werden, so dass sich die Resultate des Herrn Hartmann auf 28 Finsternisse mit 4021 Beobachtungen stützen. Sehr richtig handelt Herr Hartmann, wenn er den problematischen Coefficienten A nicht benützt, vielmehr für jede Beobachtung den Winkelwerth V angiebt, um welchen sich die beobachtete Schattengrenze nach aussen gegen die berechnete Grenze des Kernschattens verschiebt.

Um aus den einzelnen V Mittelwerthe zu erhalten, kann man folgende Erwägungen anstellen. Offenbar setzen sich die Fehler in den V zusammen aus den persönlichen Auffassungsunterschieden, die in sehr auffälliger Weise zwischen den einzelnen Beobachtern hervortreten und wohl von vornherein wahrscheinlich sind, und aus den rein zufälligen Notirungsfehlern. Wären die letzteren die grösseren, und kämen ihnen gegenüber die persönlichen Fehler nicht in Betracht, so würde man das Mittel aus allen einzelnen V, ohne Rücksicht darauf, ob diese von vielen oder wenigen Beobachtern herrühren, zu nehmen haben. Es soll dieser Mittelwerth mit V_2 bezeichnet werden. Tritt dagegen die Verschiedenheit der von den einzelnen Beobachtern herrührenden V in den Vordergrund, so wird man zunächst für jeden Beobachter (es bleibe hierbei unentschieden, ob man, wie Herr Hartmann, die verschiedenen Finsternisse als verschiedene Daten zu behandeln oder ob man alle Beobachtungen strenge nach den Personen zu ordnen habe) einen Mittelwerth bilden und aus allen diesen Mitteln wieder den Mittelwerth ohne Rücksicht auf die Zahl der Beobachtungen, welche die ersten Mittelwerthe ergeben haben. Dieser Werth soll V_3 genannt werden. Herr Hartmann giebt sowohl die Werthe V_2 als auch V_3, und diese sind in der That geeignet, in gewisser Weise die Sicherheit der Resultate übersehen zu lassen, denn es ist wahrscheinlich, dass der wahre Werth von V zwischen den von den beiden betrachteten Grenzfällen gelieferten Zahlen liegen wird. Die beiden Arten von Fehlern scheinen ungefähr von derselben Ordnung zu sein. Genauere Nachweise in dieser Richtung giebt Herr Hartmann nicht. Dass diesem Punkte näher getreten werden kann, unterliegt keinem Zweifel, und eine genauere Untersuchung hätte immerhin über einen Theil der Unsicherheit, welcher hierdurch in dem Endresultate stehen bleibt, hinweghelfen können. Diese für die einzelnen Finsternisse gewonnenen V_2 und V_3 sind in folgender Tabelle zusammengestellt, und zwar ohne Rücksicht auf Ein- und Austritte, welche Herr Hartmann zuerst mit Recht getrennt behandelt hatte.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Finsterniss	V_2	V_3	Finsterniss	V_2	V_3
1802	57.″35	44.″96	1849	46.″36	42.″12
1805	48.88	51.23	1852	51.59	53.53
1806	53.45	50.43	1856	44.75	46.45
1809	56.89	54.60	1858	49.53	51.76
1811	60.52	56.88	1860	50.11	50.46
1813	59.18	59.00	1863	44.56	42.87
1816 I	56.88	56.88	1867	52.75	53.28
1816 II	47.87	48.17	1876	52.70	54.11
1818	68.16	55.76	1877 I	46.76	46.67
1841	51.38	54.56	1877 II	44.42	43.23
1842	52.92	54.56	1878	50.86	51.74
1844 I	50.98	52.12	1887	52.04	53.26
1844 II	49.27	56.22	1888	51.86	49.83
1845	51.52	50.12	1889	52.85	51.63

Aus dieser Tabelle lässt sich erkennen, dass die V_2 und V_3 namentlich bei den neueren Finsternissen sehr nahe übereinstimmen. Ferner hat hieraus und noch überzeugender durch eine graphische Darstellung Herr Hartmann folgende Ergebnisse ableiten können:

Man kann das ganze Material in zwei deutlich getrennte Gruppen zerlegen (in der obigen Tafel durch einen Strich markirt), welche auch zeitlich, was wohl besonders wichtig ist, durch einen grossen Zwischenraum getrennt sind. Die erste Gruppe zeigt weit bedeutendere Schwankungen in den Einzelwerthen V, und ausserdem ergiebt sich im Mittel ein grösseres V_2 als aus der zweiten Gruppe. Diese Abtrennung erscheint auch desshalb sehr plausibel, weil während der Zeit 1818—41 zwei die Beobachtung möglicherweise beeinflussende Factoren an's Licht traten. Erstens haben sich gerade in jener Zeit die Folgen der grossartigen Wirksamheit Fraunhofer's (1787—1826) in Bezug auf die Herbeischaffung besserer Fernröhre Geltung zu verschaffen begonnen, ferner ist zu bemerken, dass in dieselbe Zeit das Erscheinen der ersten besseren topographischen Darstellungen des Mondes fällt, welches die Sicherheit in der Constatirung der beobachteten Mondgebilde wesentlich erhöhen musste. 1824 erschienen die ersten Blätter von Lohrmann's Mondkarte, 1838 dessen kleinere Karte und 1837 die grosse Mädler'sche Darstellung des Mondes.

Um in die Lage versetzt zu werden, aus den einzelnen Werthen V einen plausiblen Mittelwerth zu bilden, müsste zuerst die Frage entschieden werden, ob sich V, d. h. die von der Erde aus gesehene und in Bogenmass ausgedrückte

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Schattenvergrösserung, mit der Entfernung des Mondes ändert und welcher Art diese Veränderung ist. Findet eine solche statt, so müssten schliesslich die Einzelwerthe erst auf eine mittlere Mondparallaxe (etwa 57′2″) reducirt werden. Zur Entscheidung dieser Frage müsste man aber eine bestimmte und detaillirte Erklärung für das ganze Phänomen besitzen. Entstände es aus einem thatsächlichen Schattenwurfe der Erdatmosphäre, wie meistens angenommen zu werden scheint, so müsste das aus einer bei einer Parallaxe π stattfindenden Finsterniss hervorgehende V auf die mittlere Parallaxe π_0 dadurch reducirt werden, dass man es mit $\frac{\pi_0}{\pi}$ multiplicirt. Herr Hartmann hält dieses Verfahren in der That für das richtige. Das Folgende wird in diesem Punkte begründete Zweifel zu Tage fördern.

Die Endresultate leitet Herr Hartmann auf folgende Weise ab. Entsprechend dem Verfahren, welches V_2 und V_3 ergab, wurden für die beiden Perioden die Mittelwerthe V_4 und V_5 gebildet und zwar einmal ohne weitere Correctur, das zweite Mal durch Anbringung des Factors $\frac{\pi_0}{\pi}$ auf mittlere Parallaxe reducirt. Die letzteren Werthe sollen V_4^0 und V_5^0 heissen. Es entspricht also V_4 der Annahme, dass die zufälligen Beobachtungsfehler, V_5, dass die jedem Beobachter eigenthümlichen oder persönlichen Fehler in den Vordergrund zu stellen sind. Es ergab sich so:

I. Periode	$V_4 = 55''.42$;	$V_5 = 52''.15$:	$V_4^0 = 53''.07$;	$V_5^0 = 49''.85$
II. „	„ 49.50;	„ 50.53;	„ 48.62;	„ 49.67

Die relativen Gewichte der beiden Perioden sind bei V_4: 457 bezw. 2920 und bei V_5: 89 bezw. 291. Als plausibelstes Endresultat nimmt Herr Hartmann den Werth V_4^0 für die zweite Periode, und es wäre demnach die Vergrösserung V des Erdschattens bei einer Finsterniss, welche bei der Mondparallaxe π stattfindet

$$V = 48''.62 \cdot \frac{\pi}{\pi_0}.$$

Gegen dieses Schlussresultat lassen sich aber verschiedene Einwendungen erheben. Zunächst ist die Reduction auf mittlere Parallaxe in der Weise, wie sie Herr Hartmann in Anwendung bringt, zum mindesten höchst zweifelhaft, und vorderhand der Werth 49″.50 wenigstens ebenso plausibel als der angegebene. Dann aber ist durchaus nicht ohne weiteres zuzugeben, dass die Werthe V_4 vor den V_5 einen Vorzug besitzen. Jedenfalls müsste dieser Punkt durch eingehendere Discussion näher betrachtet werden, und es ist unzweifelhaft, dass man denselben doch dem Bereiche bloss subjectiver Meinung entrücken kann,

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wenn auch vielleicht vollständige Sicherheit nicht zu erzielen sein wird. Auch das völlige Ausschliessen der Resultate der ersten Periode wird wohl kaum ganz zu rechtfertigen sein. Es steht ja gar nichts im Wege, die relative Unsicherheit derselben durch ein passend gewähltes kleineres Gewicht auszudrücken. In jedem Falle ist es immerhin bedenklich, dass V_4^0 der kleinste aller berechneten Mittelwerthe ist und so also jede andere Combination, die man treffen mag, zu einer Vergrösserung des Endwerthes V führen muss. Das dürfte sich schwerlich mit dem Charakter eines Endwerthes vertragen. Nimmt man mit Rücksicht auf die Gewichte aus beiden Perioden das Mittel, so erhält man

$$V_4 = 50''.27, \quad V_5 = 50''.91$$

während die reducirten Werthe

$$V_4^0 = 49''.22, \quad V_5^0 = 49''.72$$

werden. Da ich vorderhand die Reduction auf die mittlere Parallaxe für keine Verbesserung halten kann, so kommen nur die Werthe V_4 und V_5 in Betracht. Eine Mittelbildung ist hier nicht ohne weiteres erlaubt, denn es ist nur so viel einigermassen wahrscheinlich, dass der wahre Werth V zwischen V_4 und V_5 liegt. Man wird aber sagen können, dass ungefähr

$$V = 50''.6 \qquad (*)$$

anzusetzen wäre.

Herr Hartmann hebt noch einige Eigenthümlichkeiten hervor, die eine Gruppirung nach anderen Gesichtspunkten darbietet. Es ist nur zu bedauern, dass er hierbei nicht näher in's Detail gegangen ist. So geben Ein- und Austritte für sich behandelt nicht unmerklich verschiedene V_0:

	Periode I	Periode II
Eintritte	59''.19	50''.93
Austritte	49.30	47.46

Ferner zeigen schon einzelne bessere Reihen durchschnittlich „ein scheinbares Kleinerwerden des Schattens mit zunehmender Verfinsterung des Mondes und ein Wiederanwachsen desselben bei abnehmender Verfinsterung". Es ist danach zu vermuthen, dass man aus dem Ein- und Austritte des Mondrandes wiederum andere Werthe für V erhalten wird. In der That habe ich dies bestätigt gefunden, indem

Rand I $V = 47''.0$, Gewicht 154
Rand II $V = 45.4$, „ 189

ergab, also im Mittel 46''.1. Diese Zahl ist ganz wesentlich von (*) verschieden,

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

mit der sie zu vergleichen wäre, da hier die Gruppirungen, welche zu den Zahlen V_4 und V_5 geführt haben, zusammenfallen. Noch wichtiger wäre es gewesen, die Grössen V zu ordnen nach den scheinbaren Abständen der einzelnen Krater von der Mondscheibenmitte. Denn es ist durchaus nicht ausgeschlossen, vielleicht sogar wahrscheinlich, dass sich auf solche Weise eine sehr merkliche Abhängigkeit des V von dieser Coordinate der Krater ergeben wird. Wenigstens bietet sich, wenn man die Vergrösserung des Mondschattens als ein, wie im Folgenden näher dargelegt wird, gewissermassen physiologisches Phänomen betrachtet, diese Aufgabe von selbst dar, ohne dass man etwas Bestimmtes in dieser Richtung voraussagen könnte.

Man hat das Phänomen der Vergrösserung des Erdschattens auf verschiedene Weise zu erklären versucht. Am verbreitetsten scheint die Ansicht gewesen zu sein — auch in den neueren Publicationen findet sie Vertretung — die unteren Theile der Atmosphäre wirken wie ein wenig durchsichtiger Schirm. Ich habe bei früherer Gelegenheit[1]) schon darauf hingewiesen, dass diese Erklärung unter allen Umständen zurückzuweisen sei, indem eine einfache Betrachtung ergab, dass infolge der Brechung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre selbst dann, wenn man die letztere bis zu einer Höhe von 36 ½ km als völlig undurchsichtig annimmt, der unerleuchtete Raum in der Entfernung des Mondes sich nicht weiter ausdehnt, wie der berechnete Kernschatten der Erde. Zugleich habe ich die wahre Ursache des Phänomens erörtert und konnte dabei mit Genugthuung constatiren, dass meine Ansicht in der Hauptsache sich mit der Meinung Lambert's[2]) deckt, worauf ich während des Druckes der erwähnten Arbeit durch Herrn Dr. Anding aufmerksam gemacht worden bin. Lambert hat freilich die Sachlage nur berührt und nicht eingehender besprochen, wodurch es erklärlicher erscheint, warum seine kurze Aeusserung der Vergessenheit, wie es scheint, anheimgefallen ist. Danach hat man es bei der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens mit einem Phänomen aus dem Gebiete der physiologischen Optik zu thun. Um die Verhältnisse leichter zu übersehen, wird man zunächst Alles, was bei dieser Erklärung als Nebensache aufzufassen ist, bei Seite lassen können, und man wird sich dann die Frage zu stellen haben, ob denn auch, wenn die Erde gar keine Atmosphäre besässe und die Sonne sich als eine überall gleich helle Scheibe darstellte, die Schattengrenze bei Mondfinsternissen nach aussen verschoben erschiene. Wenn diese

1) Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 27, S. 186 ff.

2) Photometria § 1243. Vgl. Lambert's Photometrie, deutsch herausgegeben von E. Anding. Leipzig 1892.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Frage, sei es durch allgemeine Ueberlegungen, sei es durch Versuche, bejaht werden sollte, so wird man in der That berechtigt sein, alles, was die thatsächliche Lichtvertheilung bei wirklich stattfindenden Mondfinsternissen beeinflusst und anders gestaltet, wie in jenem einfachen, idealen Falle, als secundäre Einwirkungen zu bezeichnen. Die Einwirkungen der Erdatmosphäre, der Helligkeitsabnahme der Sonnenscheibe von der Mitte zum Rande zu und die Farbenzerstreuung werden also in diesem Sinne als secundäre Einflüsse zu bezeichnen sein und es kommt hierbei gar nicht in Frage, ob die thatsächliche Lichtvertheilung quantitativ durch sie sehr stark oder wenig verändert wird. Ich habe desshalb a. a. O. allein den erwähnten idealen Fall betrachtet, einige Rechnungen über ihn angestellt und auch einige Versuche über das „Halbschattenphänomen" mitgetheilt, die mich davon überzeugten, dass die Vergrösserung des Erdschattens in der That eine optisch-physiologische Erscheinung ist, die in ähnlichen Fällen auch sonst schon beobachtet worden ist. Ob die mitgetheilten Versuche, deren zahlenmässiges Resultat keine sehr befriedigende Sicherheit darbot, geeignet sind, auch auf Andere überzeugend zu wirken, will ich nicht untersuchen. Jedenfalls waren sie recht unvollkommen und auch die an sich gewiss instructiven photographischen Aufnahmen, die ich damals anfertigen liess, konnten keine Beweiskraft ausüben, weil ihre Reproduction aus äusseren Gründen unterbleiben musste.

Zudem kann die ganze Frage nur endgiltig beantwortet werden, wenn man die oben als Nebenumstände bezeichneten Einwirkungen mitberücksichtigt und darin stimme ich Herrn v. Hepperger vollkommen bei. Man wird dann aber soweit gehen müssen, als sich bewerkstelligen lässt, ohne ein erträgliches Mass von Unsicherheit und Rechenarbeit zu überschreiten. Die Wirkung der Erdatmosphäre und die ungleiche Vertheilung der Helligkeit auf der Sonnenscheibe lassen sich, wie weiter unten sich herausstellen wird, berücksichtigen. Die Farbenzerstreuung lässt sich aber gegenwärtig wohl kaum in Rechnung ziehen; die nöthigen Grundlagen zu einer solchen Untersuchung sind viel zu unsicher und die Weitläufigkeit der Rechnungen, die auszuführen wären, scheint mir ausserdem in keinem Verhältnisse zu dem zu erwartenden Erfolge zu stehen. Ich hoffe aber, dass auch so das Folgende alle Zweifel an der Richtigkeit meiner Ansicht über die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens zerstreuen wird.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

2.

Denkt man sich etwa, um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, ein beleuchtetes ebenes Rechteck, welches nach den Coordinatenaxen x und y orientirt ist. Die scheinbare Helligkeit sei nur von einer Coordinate z. B. x abhängig und wachse zugleich mit dieser fortwährend. Man kann dann die Frage aufwerfen: unter welchen Umständen entsteht scheinbar eine Trennungslinie, die in mehr oder weniger auffallender Weise unzweifelhaft hellere von dunkleren Partien trennt, die sich also — in diesem Sinne — als Schattengrenze darstellt?

Das einfachste und zugleich sicherste Mittel, dieser Frage, die eine eingehendere Behandlung, so viel ich weiss, bisher nicht gefunden hat, näherzutreten, ist ein in der physiologischen Optik auch sonst viel benütztes, auf welches ich indessen erst aufmerksam wurde, nachdem mich vielfache Versuche, mit ausgedehnten Lichtquellen und vorgehaltenen undurchsichtigen Schirmen Kern- und Halbschatten zu erzeugen, davon überzeugten, dass es schwierig ist, auf diesem Wege zu sicheren Resultaten zu gelangen und dass es kaum ausführbar ist, ein Phänomen darzustellen, welches dem bei Mondfinsternissen stattfindenden ähnlich ist. Dieses Mittel besteht in der Anwendung schnell rotirender Scheiben. Man kann auf diesem Wege jede vorgegebene Helligkeitsvertheilung wirklich herstellen und zwar mit derselben Genauigkeit, mit der man bestimmte Curven wirklich zeichnen kann, also mit einer für die Versuche mehr als hinlänglichen Genauigkeit. Man wird nur darauf zu achten haben, dass die Rotation solcher Scheiben so schnell und gleichförmig vor sich geht, dass jedes Flackern der Lichteindrücke vermieden wird. Dazu ist erforderlich, dass die einzelnen Lichteindrücke 20 bis 30 mal in der Secunde erfolgen und die dazu nöthige mässige Rotationsgeschwindigkeit lässt sich durch die einfachsten Hülfsmittel (kleiner Elektromotor, eine kleine Drehbank u. s. f.) leicht erreichen. Eine solch genügend schnell rotirende Scheibe gewährt nun einen durchaus ruhigen und zu Beobachtungen geeigneten Anblick. Der einzige, aber wohl selten nur in Frage kommende Nachtheil besteht vielleicht in der concentrischen Anordnung der Helligkeiten. Es ist selbstverständlich, dass sich diese Scheiben auch beim Studium des Einflusses der Farbe verwenden lassen. Gerade farbige Scheiben sind ja eines der nützlichsten und meist angewendeten Hülfsmittel der physiologischen Optik. Wenn ich hier auf einige wenige Versuche mit rotirenden Scheiben eingehe, so geschieht dies nur insoweit, als es die Bestätigung meiner Ansicht über das Phänomen der Vergrösserung des Erdschattens erfordert. Die oben gestellte Frage kann dabei keineswegs in

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

endgültiger Weise beantwortet werden, vielmehr möchte ich nur wünschen, dass dieselbe von anderer Seite behandelt werden möge, was sie in Anbetracht des mit ihr verbundenen Interesses gewiss verdient.

Ich wandte Scheiben aus Holz oder festem Pappendeckel an, deren Durchmesser 30 cm betrug. Dieselben wurden auf einer kleinen Drehbank befestigt und konnten leicht 20 bis 30 mal in der Secunde herumrotirt werden. Die Scheiben selbst wurden, um einen etwaigen störenden Einfluss der nächsten Umgebung auf ihr Aussehen zu beseitigen, so aufgestellt, dass sie gerade eine Oeffnung in einem möglichst nahe vor ihnen stehenden Schirm ausfüllten. Dieser Schirm war weiss oder schwarz angestrichen, da sich aber ein bemerkbarer Einfluss seiner Farbe nicht ergab, wurde fast stets der schwarze Schirm gebraucht. Die Beleuchtung geschah unter nahezu senkrechter Incidenz durch eine Petroleumlampe mit Verstärkungsspiegeln. Beobachtet wurde fast immer mit freiem Auge, nur zur Vergleichung wurde manchmal ein Opernglas benützt ebensowohl zur Vergrösserung als zur Verkleinerung — durch Hineinsehen in das Objectiv — des Bildes.

Auf der Scheibe, welche um ihr Centrum O (s. Fig. 1) rotirt werde, sei die Fläche Oba mit weisser, der übrige Theil mit intensiv schwarzer und matter Farbe angestrichen. In der Entfernung $r = Om$ vom Centrum ist dann die Helligkeit der rotirenden Scheibe proportional dem Winkel $\alpha = mOa$. Das ist aber nur richtig, wenn die Helligkeit der schwarzen Theile im Vergleich zu der der weissen verschwindend klein ist, was ich bei den Versuchen thatsächlich annehmen konnte. Verhält sich dagegen die letztere Helligkeit zu der ersteren wie $1 : \varepsilon$, wo ε ein kleiner Bruch ist, und hat man die weisse Fläche n-mal, in beliebigen Abständen von einander auf der schwarzen Scheibe aufgetragen, so ist

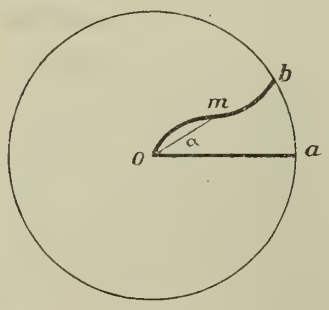


Fig. 1.

$$h = \gamma \cdot \left(\frac{2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon} + n\alpha\right),$$

wo γ ein Proportionalitätsfactor ist. Für jede als Function von r gegebene Helligkeitsvertheilung lässt sich nun leicht die Curve berechnen, welche die Grenze zwischen weissen und schwarzen Partien auf der Scheibe angiebt.

Mit solchen Scheiben lässt sich nun zuerst sofort verificiren, dass in der That längs des Kreises vom Radius $r = Om$ eine scharfe Trennungslinie auftritt, wenn die ursprüngliche Helligkeitscurve $h = f(r)$ und demzufolge auch

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die gezeichnete Curve bei m eine Unstetigkeit hat. Es ist dies ein eigentlich selbstverständliches Kriterium, aber, soweit ich weiss, das einzige, welches bisher als nothwendig für das Auftreten einer Trennungslinie betrachtet worden ist.

Leicht ergeben nun weiter die Versuche den Satz, dass man ebenfalls eine scharfe Trennungslinie erhält, wenn die Curve zwar allenthalben stetig verläuft, wenn aber der Differentialquotient $\frac{dh}{dr}$ bei m eine Unstetigkeit aufweist. Den einfachsten Versuch in dieser Richtung erhält man, wenn die Curve Omb aus zwei unter einem Winkel $Omb = \mu$ zusammenstossenden geraden Linien gebildet wird. Dass hierbei eine völlig scharfe Trennungslinie entsteht, davon überzeugt man sich leicht, wenn man die rotirende Scheibe aus grossen und kleinen Entfernungen betrachtet, oder mit Hülfe eines Fernrohres. Ebenso wie aber die Unstetigkeit der Helligkeit eine gewisse Grösse (etwa 1 %) betragen muss, um bemerkbar zu bleiben, wird auch der Winkel μ um mehr als eine bestimmte Grösse von 180° abweichen müssen, wenn eine bemerkbare Trennungslinie entstehen soll. Einfache Versuche würden zur Klarstellung dieser Verhältnisse führen. Hat die Curve bei m keinen wirklichen Knick, zeigt sie vielmehr nur eine starke Umbiegung, so hört die Trennungslinie auf, scharf zu sein, sie bleibt aber zunächst sehr bemerkbar und verliert sich erst, wenn die jähe Umbiegung mehr und mehr ausgeglichen wird. Jedenfalls ergiebt sich daraus, dass der zweite Differentialquotient $\frac{d^2h}{dr^2}$ oder innerhalb gewisser Grenzen vielleicht besser $\frac{d^2 \log h}{dr^2}$ unter Umständen eine sehr bedeutende Rolle bei den in Frage kommenden Phänomenen spielen kann, was wohl von vornherein wahrscheinlich ist. Jedenfalls trifft das von anderer Seite ohne weiteren Nachweis aufgestellte Kriterium im Allgemeinen nicht zu, dass dort eine Trennungslinie mit bemerkbarer Deutlichkeit auftritt, wo $\frac{d \log h}{dr}$ ein Maximum wird, und gewiss ist es, dass diese Bedingung weder eine nothwendige, noch eine hinreichende ist.

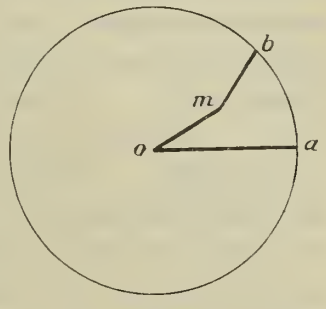


Fig. 2.

Ich habe nun eine grössere Reihe von Helligkeitsabstufungen untersucht und die dazu gehörenden Scheiben construirt, die eine sehr auffallende Trennungslinie ergaben, sobald der zweite Differentialquotient von h innerhalb kleinerer Bezirke relativ gross war, um schnell zu kleineren Beträgen herabzusinken. Ob der erste Differentialquotient gross oder klein blieb, war hierbei

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ganz gleichgültig. Man erhält z. B. solche Curven, wenn man $h = f(r)$ oder auch $\log h = f(r)$ als eine hyperbolische Curve von angemessener Krümmung annimmt. Auf diese Weise ergeben sich verhältnissmässig leicht gewisse Bedingungen, unter denen Trennungslinien mit grösserer oder geringerer Deutlichkeit auftreten. Diese Bedingungen sind wohl hinreichende, aber keineswegs nothwendige, denn thatsächlich ergeben sich unter Umständen auch, allerdings wenig scharfe, Trennungslinien an Stellen, wo die Differentialquotienten gar keine hervorstechende Eigenschaften zeigen. An sich ist dies übrigens nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass noch andere Einwirkungen das Phänomen offenbar beeinflussen müssen. Zu diesen gehören u. A. die Contrastwirkungen. Diese bewirken, dass hellere Partien in der Nähe von weniger hellen heller erscheinen und umgekehrt. Die Gegensätze werden also durch den Contrast verschärft und ich habe schon früher auf diesen Umstand hingewiesen.[1]) Bei der photographischen Aufnahme einiger Halbschattenphänomene ergab sich, dass der Schatten an seiner Grenze merklich dunkler erschien, als seine weiter von der Grenze entfernten Partien. Dieselbe Erscheinung — ein dunkleres Band in der Nähe der scheinbaren Trennungslinie — tritt auch sehr oft bei den rotirenden Scheiben auf und ist mitunter sehr auffällig. Aehnliches bemerkt man bei wirklich naturgetreuen zeichnerischen Darstellungen — z. B. liegt mir eine solche des Herrn Weinek vor — des Anblickes des theilweise verfinsterten Mondes. Hier handelt es sich aber nur um subjective Erscheinungen, wie sich sofort ergiebt, wenn man die hellere Partie an der Trennungslinie verdeckt. Eine verwandte Erscheinung tritt an der äussersten Grenze des Halbschattens ein, wo derselbe in unmerklicher Abstufung in die volle Helligkeit übergeht. Im Allgemeinen wird diese Grenze nicht bemerkt, wie man sich durch theilweises Verdecken einer ausgedehnten Lichtquelle durch einen Schirm überzeugen kann. Macht man aber das Auge empfindlicher für feine Lichtabstufungen, indem man den Schirm schnell kleine Strecken hin und her bewegt, so sieht man diese Grenze durch eine feine Lichtlinie angedeutet.

Es ergiebt sich aus diesen Bemerkungen, dass die Verhältnisse, welche das Zustandekommen einer scheinbaren Trennungslinie bedingen, durch verschiedene Umstände complicirt werden, auch wenn man von etwa auftretenden Färbungen absieht. Eine nähere Untersuchung des Gegenstandes ist gewiss lohnend. Ich habe davon umsomehr absehen können, als die Erklärung der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens als ein physiologisch-optisches Phänomen für

---

1) a. a. O. in der Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

den Astronomen als erwiesen angesehen werden dürfte, wenn die bei Mondfinsternissen thatsächlich vorkommende Lichtvertheilung wirklich durch eine rotirende Scheibe objectiv dargestellt wird und an dieser zur Anschauung bringt, dass dann eine Trennungslinie, die einer Schattengrenze ähnelt, zu Stande kommt und zwar an einer Stelle, welche ungefähr übereinstimmt mit derjenigen, welche aus den Beobachtungen an Mondfinsternissen hervorgegangen ist. Man wird dabei an die Schärfe dieser Trennungslinie keine übertriebene Ansprüche stellen dürfen; denn auch bei Mondfinsternissen ist die Schattengrenze stets sehr verwaschen, wie jeder Beobachter weiss und wie schon aus der Unsicherheit hervorgeht, mit der diese Grenze durch die einzelnen Beobachtungen bestimmt erscheint. Im Folgenden wird die Helligkeitsvertheilung bei Mondfinsternissen in der Nähe der geometrischen Kernschattengrenze berechnet werden. Das Resultat dieser Rechnung wird für den Helligkeitslogarithmus $\log H$ ergeben:

γ		$\log H$
2460″	. . .	7.180 − 10
70	. . .	7.214
80	. . .	7.250
90	. . .	7.290
2500	. . .	7.338
10	. . .	7.399
20	. . .	7.478
30	. . .	7.569
40	. . .	7.667
50	. . .	7.763
2560	. . .	7.855

γ ist die vom Mittelpunkt der Erde gesehene Winkelentfernung vom Centrum des Kernschattens und es ist, wie ausführlich nachgewiesen werden wird, Rücksicht auf die Atmosphäre der Erde und die Abschattirung der Sonnenscheibe genommen worden. Die Grenze des geometrischen Kernschattens der Erde befindet sich bei $\gamma = 2471''.2$. Nimmt man nach den von Herrn Hartmann (s. o.) gewonnenen Zahlen die Vergrösserung des Erdschattens zu $50''.6$ an, so würde also etwa bei $\gamma = 2521''.8$ eine mehr oder weniger auffallende Trennungslinie erscheinen. Um die angegebenen Helligkeiten auf die rotirende Scheibe zu übertragen, wurde ihr Mittelpunkt als dem Werthe $\gamma = 2460''$ entsprechend angenommen; ihr Rand, welcher um 15 cm vom Centrum abstand, entsprechend $\gamma = 2560''$. Die Trennungslinie (scheinbare Schattengrenze) müsste also in der Entfernung von 9.3 cm vom Mittelpunkt erscheinen.

Auf der schwarzen Scheibe wurden nun zwei weisse Flächenstücke *Oba*, die durch eine Drehung um 180^0 zur Deckung gebracht werden können,

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

gezeichnet. Die den oben angegebenen H entsprechenden Winkel $\alpha = m O a$, sowie $s = 2 r \sin \frac{1}{2} \alpha$, welches zur Zeichnung direct verwendet worden ist, sind dann:

r cm	γ	α	s cm
0	= 2460″	12°68	0
1.5	70	13.70	0.36
3.0	80	14.90	0.78
4.5	90	16.34	1.28
6.0	2500	18.24	1.90
7.5	10	21.00	2.73
9.0	20	25.18	3.92
10.5	30	31.04	5.62
12.0	40	38.90	7.99
13.5	50	48.52	11.09
15.0	2560	60.00	15.00

Die ruhende Scheibe ist als Fig. 3 auf beiliegender Tafel abgebildet.

Wird diese Scheibe in Rotation versetzt, so entsteht in der That eine Trennungslinie. Diese ist, wie zu erwarten, keineswegs scharf, aber doch so deutlich, dass sie jedem Beobachter auffällt und dieser über ihren Ort nur innerhalb enger Grenzen zweifelhaft ist. Diese Wahrnehmung habe ich durch eine grosse Anzahl von Personen constatiren lassen, die ganz unbefangen an das Phänomen herantraten, andererseits aber durch ihre Vertrautheit mit der Beobachtung optischer Erscheinungen ihren Wahrnehmungen ein nicht geringes Gewicht zu verleihen geeignet waren. Ich habe mich indessen nicht hiermit begnügt, sondern in Gemeinschaft mit mehreren Herren, die auf der Münchener Sternwarte verkehren, Messungen ausgeführt nach folgender einfachen, aber für die vorliegenden Zwecke vollkommen ausreichend genauen Methode.

An dem oben erwähnten, unmittelbar vor der Scheibe stehenden Schirm war unterhalb der Scheibe ein in Millimeter getheilter Massstab möglichst horizontal angebracht. Ein durch ein Loth beschwerter dünner Faden wurde nun durch Hin- und Herbewegen vor dem Schirm so eingestellt, dass er die scheinbare Trennungslinie rechts und links berührte und seine Lage beide Mal abgelesen. Die halbe Entfernung der beiden Lagen ist dann offenbar gleich der Entfernung der Trennungslinie vom Rotationscentrum. Die durch eine Petroleumlampe erzeugte Helligkeit wird wohl bei allen Messungen von einer Intensität gewesen sein, die vergleichbar war mit derjenigen bei Mondfinsternissen. Dieser Eindruck, den wir alle hatten, ist natürlich nur ein ganz unbestimmter und beiläufiger und kaum zu controliren.

Zur Gewinnung eines Urtheiles über die Deutlichkeit, mit der sich das Phänomen darstellte, wird es nicht undienlich sein, die Resultate der einzelnen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Einstellungen anzuführen. Die Beobachter waren die Herren Idman, List, Myers, Oertel, Schwarzschild, Seeliger, Villiger, deren Namen mit den Anfangsbuchstaben bezeichnet werde. Die Entfernung der Beobachter von der Scheibe war immer nahezu 5 m, die Entfernung der Lampe L von der Scheibe wurde etwas variirt.

A. Beobachtungen am 12. December 1895.

1. $L = 1.40$ m.

	S	*V*	*L*	*Oe*
	10.20 cm	9.35 cm	9.65 cm	— cm
	8.65	9.20	9.35	10.25
	9.05	8.90	9.75	8.90
Mittel	9.30	9.15	9.58	9.58

Gesammtmittel: 9.40.

2. $L = 4.0$ m.

	8.75	8.70	9.10	—
	8.60	8.95	9.35	8.90
	8.88	8.65	9.65	8.50
Mittel	8.72	8.77	9.37	8.70

Gesammtmittel: 8.89.

3. $L = 5.5$ m.

	9.35	8.95	8.93	9.15
	8.75	8.90	8.93	9.35
Mittel	9.05	8.93	8.93	9.25

Gesammtmittel: 9.04.

4. $L = 1.4$ m. Farbiges Glas vor dem Auge.

	blau	roth
S	8.90	8.70
V	9.20	8.95
L	10.15	8.70
Oe	9.05	9.95
Mittel	9.33	9.08

B. Beobachtungen am 18. December 1895.

	$L = 4.0$ m	$L = 5.0$ m (1)	$L = 5.0$ m (2)
S	9.4	9.85	8.95
Sch	9.9	10.25	9.10
I	10.0	9.60	9.50
M	9.9	9.80	9.30
Oe	9.6	9.90	8.85
V	9.7	9.25	9.10
L	9.5	9.75	9.90
Mittel	9.71	9.77	9.24

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Lampe brannte zuerst weniger hell und wurde bei (2) in die Höhe geschraubt. Die angestellten Messungen reichen offenbar nicht aus, um einen etwaigen Einfluss der Intensität der Beleuchtung festzustellen. Jedenfalls wird ein solcher durch die zufälligen und persönlichen Einstellungsfehler vollkommen überdeckt. Natürlich kann dies nur innerhalb der engen Grenzen als erwiesen angesehen werden, innerhalb welcher sich die Beleuchtung bewegt. Einen Mittelwerth aus allen Messungen zu ziehen, kann ohne grosse Willkür nicht geschehen. Man sieht aber auch, dass man unter jeder Annahme sehr nahe auf dieselbe Zahl — 9.3 — kommt, welche die Beobachtungen an den Mondfinsternissen ergeben. Es wird so das letztere Resultat durch die angestellten Experimente in geradezu überraschender Weise dargestellt, und wenn auch eine solche nahe Uebereinstimmung wohl einem Zufalle zuzuschreiben sein wird, so wird man doch zugeben müssen, dass der Zweck, der mit der Beobachtung rotirender Scheiben angestrebt worden ist, vollkommen erreicht wurde.

Ich habe ausserdem noch zwei Phänomene etwas näher untersucht, die für die vorliegende Untersuchung einiges Interesse darbieten dürften. Um auch den oben angestellten Betrachtungen über das „ideale Halbschattenphänomen" einen experimentellen Rückhalt zu geben, habe ich dieses dargestellt, also die Lichtvertheilung durch eine rotirende Scheibe zur Anschauung gebracht, welche bei Mondfinsternissen stattfände, wenn die Sonne eine überall gleich helle Scheibe wäre und die Erde keine Atmosphäre hätte. Hier tritt also eine thatsächliche Kernschattengrenze ein. In der vom Erdmittelpunkt gesehenen Winkelentfernung λ von dieser Grenze ist die Helligkeit h sehr nahe, wie weiter unten gezeigt werden wird, durch die Formel gegeben

$$h = \gamma \cdot \lambda^{\frac{3}{2}},$$

wo γ eine Constante ist. Demzufolge habe ich den weissen Theil so begrenzt: Den Kernschatten stellte der innerste Theil der Scheibe bis zu $r = 5$ cm dar. Von da ab wird die Helligkeit nach der Formel

$$h = \gamma\,(\lambda - 5)^{\frac{3}{2}}$$

zu wachsen haben. Der Winkel α, welcher die Helligkeit in der Entfernung r vom Centrum angibt und die zugehörige Sehne $s = 2\,r \sin \frac{1}{2}\alpha$ wurden folgendermassen gewählt:

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

r	a	s
0 cm bis 5 cm	0	0 cm
6.0	0°774	0.08
7.0	2.191	0.27
8.0	4.024	0.57
9.0	6.198	0.99
10.0	8.662	1.55
11.0	11.388	2.18
12.0	14.345	3.00
13.0	17.527	3.96
14.0	20.914	5.08
15.0	24.490	6.36

Die ruhende Scheibe ist in Fig. 4 abgebildet. Die rotirende Scheibe ergab wieder eine recht deutliche Trennungslinie, eher noch deutlicher als in dem zuerst behandelten Falle. Wenigstens haben sich viele Personen dahin geäussert, während für mich beide Phänomene einen graduell nicht wesentlich verschiedenen Anblick boten. Die Uebereinstimmung der am 12. December 1895 angestellten Messungen lieferten ein sehr zufriedenstellendes Resultat, wie die folgenden Zahlen ergeben:

	S	V	L	Oe
1. $L = 1.4$ m.				
	7.45	8.70	9.00	—
	7.35	8.30	8.65	8.20
Mittel	7.40	8.50	8.83	8.20
Gesammtmittel:	8.23.			
2. $L = 4.0$ m.				
	7.60	8.60	9.25	—
	8.60	8.90	9.10	8.75
Mittel	8.10	8.75	9.18	8.75
Gesammtmittel:	8.69			
3. $L = 5.5$ m.				
	7.35	8.30	8.65	8.20
Mittel:	8.13.			

Mit unzweifelhafter Sicherheit zeigen jedenfalls die Beobachtungen, dass man eine Trennungslinie sehr weit von der Grenze des Kernschattens entfernt, welche bei 5.0 cm liegt, bemerkt. Der Fall hat deshalb Interesse, weil die Helligkeit und ihre Differentialquotienten an der kritischen Stelle gar keine besonderen Kennzeichen aufweisen.

Schliesslich schien es mir nicht unnöthig, zu zeigen, wie man durch Experimente mit rotirenden Scheiben auch anderen Fragen, die in der praktischen Astronomie von Wichtigkeit sind und deren quantitative Aufklärung noch nicht gelungen ist, näher treten kann. Ich habe schon in der V. J. S. darauf auf-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

merksam gemacht, dass eine in gewissem Sinne verwandte Erscheinung, wie bei der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens, eintritt, wenn eine helle Planetenscheibe im Fernrohre beobachtet wird. Die theoretischen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Beugung der Lichtstrahlen am Objectivrand kein wirklich begrenztes Scheibenbild im Brennpunkte des Fernrohres zu Stande kommen lässt. Infolge der Diffraction nimmt die Helligkeit des Bildes einer gleichförmig hellen Planetenscheibe vom Mittelpunkte nach dem Rande ab. Zunächst bis ganz nahe an den geometrischen Rand so langsam, dass diese Abnahme als unmerklich kaum in Betracht kommt. In unmittelbarer Nähe des Randes wird aber diese Abnahme sehr merklich, die Helligkeit ist an der dem geometrischen Rande entsprechenden Stelle nur noch nahezu halb so gross wie in der Mitte und nähert sich asymptotisch der Null, welchen Werth sie also theoretisch erst im Unendlichen erreicht. Nun kommt praktisch freilich die Helligkeit als unmerklich schon in geringen Entfernungen vom geometrischen Rande nicht in Betracht, aber ein sehr wesentlicher Theil der sogenannten persönlichen Fehler — mit welchem Ausdrucke leider oftmals Alles bezeichnet wird, was zu Missstimmungen in nicht sofort zu erklärender Weise Veranlassung giebt — hat erst durch die Rücksichtnahme auf die genannten Verhältnisse eine physiologische Bedeutung gewonnen. Denn es ist klar, dass die Fixirung eines Scheibenrandes, der thatsächlich nicht existirt, von allerlei Nebenumständen, wie absolute Helligkeit, Farbe, specielle Eigenschaften des Instrumentes und des beobachtenden Auges abhängen muss. Die nähere Untersuchung dieser Einflüsse wird durch Anwendung rotirender Scheiben nach mancher Richtung sehr erleichtert und die physiologische Seite des Phänomens tritt hierdurch viel deutlicher hervor schon aus dem Grunde, weil man die Helligkeitsabnahme in einem ganz beliebigen und sehr vergrössertem Massstabe herstellen kann.

Ich habe, um in einem ganz speciellen Beispiele Einblick in diese Verhältnisse zu gewinnen, die Lichtvertheilung auf der Scheibe dargestellt, welche Herr Hermann Struve in seinen verdienstvollen Untersuchungen über den Einfluss der Diffraction [1]) für $r = 50$ angiebt. Es wurde $e = +50.0$ in den Mittelpunkt, $e = o$ (geometrischer Rand) in 7.2 cm und $e = +50.0$ in 14.4 cm Entfernung vom Centrum verlegt. Die ganze Lichtabnahme, welche sich also im Fernrohre innerhalb einiger Bogensecunden abspielt, ist hier auf einem grossen Raume ausgebreitet. Die Ansicht der ruhenden Scheibe giebt Fig. 5

1) Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. Mémoires de l'académie des sciences de St. Petersburg. Tome XXX, No. 8. Petersburg 1882. Seite 54.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ein Nachweis über die Zahlen, welche bei der Construction der Curve gedient haben, wird wohl kaum nöthig sein.

Die rotirende Scheibe bietet nun einen überaus instructiven Anblick dar. Es erscheint im Inneren der Scheibe eine nahezu gleichförmig helle Kreisfläche, welche in der Entfernung von etwa 8 cm einen ganz schmalen und aus genügend grosser Entfernung betrachtet fast unmerklich schmalen, verwaschenen Streifen zeigt, der zu fast vollkommener und nahezu gleichmässiger Dunkelheit überführt. Der Anblick ist also der einer sehr wohl begrenzten hellen Kreisfläche und die Trennungslinie (Begrenzung) ist hier überaus deutlich. Es wurden an dieser Scheibe nur wenige Einstellungen am 12. December 1895 gemacht. Diese ergaben:

	1. $L = 1.4$ m.	2. $L = 4.0$ m.
S	8.15	7.70
V	7.25	7.55
L	8.40	8.55
Mittel	7.93	7.93

Da der geometrische Rand der Ablesung 7.20 entspricht, so bedeuten die erhaltenen Zahlen ein Hinausschieben des scheinbaren Randes, also eine scheinbare Vergrösserung des zugehörigen Planetendurchmessers. Diese Vergrösserung erscheint schon durch diese wenigen Einstellungen vollkommen verbürgt, doch sind weitere Schlüsse nur auf Grund ausgedehnter Experimente zulässig, bei welchen die Nebenumstände, unter denen beobachtet wird, genügend stark variirt werden. Es lag nicht in meiner Absicht, auf diesen wichtigen Gegenstand in dieser Abhandlung näher einzugehen.

Den Anblick der rotirenden Scheiben mit ihren feinen Lichtabstufungen vollkommen getreu durch die Photographie wiederzugeben ist kaum möglich. Indessen habe ich dies auf der dieser Abhandlung beigefügten Tafel versucht. Die Figur 1 bildet die rotirende Scheibe ab, welche die Lichtvertheilung in der Nähe des geometrischen Randes der Beugungsfigur einer Planetenscheibe darstellt; die Figur 2 jene, welche dem Phänomen an der geometrischen Grenze des Kernschattens der Erde bei Mondfinsternissen entspricht. Die Möglichkeit dieser Beigabe verdanke ich der Bereitwilligkeit des Herrn Dr. Fomm, Assistenten am physikalischen Institut der Münchener Universität, mit welcher er seine grosse Erfahrung in allen photographischen Dingen zur Verfügung stellte. Er fertigte eine grössere Anzahl von Glasnegativen mit sehr verschiedener Expositionszeit an und von diesen wurden diejenigen, welche dem directen Anblick der rotirenden Scheiben am nächsten kamen, ausgewählt. Die Reproduction bietet nun doch wieder eine etwas veränderte

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ansicht dar, aber auch die bei weitem schwieriger auszuführende Abbildung 2 dürfte das Charakteristische der Erscheinung, nämlich das Auftreten einer Trennungslinie, im Grossen und Ganzen zur Anschauung bringen. Man muss nur die Bilder aus angemessener Entfernung und unter passend gewählter Beleuchtung betrachten. Die einzelnen Abzüge sind leider recht verschieden ausgefallen und sie sind zur quantitativen Darstellung der Erscheinung gewiss ganz unbrauchbar.

3.

Ich gehe nun dazu über, die Lichtvertheilung, welche sich auf dem Monde bei Mondfinsternissen zeigt, zu berechnen. Diese Aufgabe tritt auch bei der Verfolgung anderer Erscheinungen, z. B. Planetenvorübergängen, Lichtvariationen von Fixsternen, die nach Art des Algolsystems beschaffen sind etc., auf, sobald es sich um Himmelskörper mit Atmosphären handelt. Ich werde deshalb ganz strenge Formeln aufstellen und dieselben erst später durch angemessene Vernachlässigungen vereinfachen.

Die Lichtmenge dQ, welche ein Flächenelement $d\varphi$ von einem leuchtenden Flächenelemente df erhält, ist offenbar — und zwar nicht blos bei ungehinderter Ausbreitung des Lichtes ohne Brechung — proportional mit der Oeffnung $d\omega$ eines unendlich schmalen Kegels, dessen Spitze in df liegt und dessen Mantel, nach den vorgekommenen Brechungen, das Element $d\varphi$ gerade umfasst. Bezeichnet J die Leuchtkraft von df, ε und i die (Emanations- bezw. Incidenz-) Winkel, welche die Kegelaxe mit der Normalen von df und $d\varphi$ bildet, so hat man:

$$dQ = A \,.\, J \,.\, df \,.\, \Phi(\cos\varepsilon) \,.\, d\omega.$$

Hierin ist A die Absorption, welche auf dem Wege zwischen df und $d\varphi$ stattfindet und $\Phi(\cos\varepsilon)$ drückt das Emanationsgesetz aus, also die Abhängigkeit der Stärke des ausgesandten Lichtes vom Emanationswinkel. Nimmt man das Cosinusgesetz, also $\Phi(\cos\varepsilon) = \cos\varepsilon$ an und setzt voraus, dass sich zwischen den Flächenelementen keine brechenden Medien befinden, bezeichnet weiter mit ϱ die Entfernung der beiden Elemente, so ist

$$d\varphi \cos i = \varrho^2 \, d\omega,$$

und es wird

$$dQ = J \,.\, df \,.\, d\varphi \,.\, \frac{\cos i \cos\varepsilon}{\varrho^2},$$

welche Formel das sogenannte Lambert'sche Beleuchtungsgesetz angiebt.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Im allgemeinen Falle hat man nach der obigen Formel:

$$dQ = A \cdot J \cdot df \cdot d\varphi \cdot \Phi(\cos\varepsilon) \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}. \tag{1}$$

Man wird, ganz ähnlich wie bei ungehemmter Ausbreitung des Lichtes, als scheinbare Helligkeit h des Elementes df bezeichnen können, gesehen etwa durch einen Apparat, der alle von df ausgehenden und auf $d\varphi$ fallenden Strahlen sammelt, als die Grösse:

$$h = \frac{dQ}{d\omega_1},$$

wo $d\omega_1$ die Oeffnung eines unendlich schmalen Kegels ist, dessen Spitze in $d\varphi$ liegt und der df allenthalben umfasst. Es ist also:

$$h = A \cdot J \cdot \Phi(\cos\varepsilon) \cdot \frac{df}{d\omega_1} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot d\varphi.$$

Das von df ausgehende Strahlenbündel soll nun, ehe es $d\varphi$ erreicht, die concentrisch geschichtete Atmosphäre eines Weltkörpers (Erde) durchsetzen. Man nenne ϱ den Radius der Erde, Δ und Δ' die Entfernung ihres Mittelpunktes von $d\varphi$ bezw. df, σ und σ' die Winkel, welche Δ und Δ' mit dem Strahlenbündel in $d\varphi$ und df bilden, μ den Brechungsindex in der Höhe h und r die zugehörige Horizontalrefraction. Wird noch

$$\mu(\varrho + h) = x$$

gesetzt, so gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \sin\sigma = \Delta' \sin\sigma' &= x \\ \alpha' &= \sigma + \sigma' - 2r \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wenn $180^0 - \alpha'$ den Winkel bedeutet, welchen Δ und Δ' mit einander bilden. Es werde angenommen, dass das Element $d\varphi$ senkrecht auf Δ steht. Setzt man noch für den Augenblick

$$\sin\sigma' = \xi'; \qquad \Delta \sin\alpha' = \xi$$

und bezeichnet man mit ψ den Winkel, den die Ebene $\Delta\Delta'$, in welcher ein Lichtstrahl verläuft, mit einer festen, durch Δ' gehenden Ebene bildet, so ist

$$d\omega = \xi' d\xi' \cos\sigma' \cdot d\psi,$$

und, wie leicht zu sehen,

$$d\varphi = \xi d\xi \cdot \frac{\cos(\alpha' - \sigma)}{\cos\sigma} \cdot d\psi.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Differentiale $d\xi$ und $d\xi'$ sind so zu verstehen, dass bei der Differentiation nach ξ und ξ', $m' = \cos\sigma'$ und $m = \Delta \cos\alpha'$ constant gehalten werden. Man hat also anzusetzen

$$\xi' = m' \operatorname{tg}\sigma'; \qquad \xi = m \operatorname{tg}\alpha'$$

und dann

$$\xi' d\xi' = \operatorname{tg}\sigma' \cdot d\sigma'; \qquad \xi\, d\xi = \Delta^2 \operatorname{tg}\alpha' \, d\alpha'$$

und demzufolge

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\cos\sigma \sin\sigma' \cos\alpha' \cdot d\sigma'}{\Delta^2 \sin\alpha' \cos(\alpha' - \sigma) \cdot d\alpha'}.$$

Man kann auch $d\Delta$ einführen; das Stück, welches die beiden das Element $d\varphi$ in der Ebene $\Delta\Delta'$ umschliessenden Strahlen aus Δ herausschneiden. Aus einer einfachen Zeichnung kann man dann ablesen

$$d\xi \cdot \cos(\alpha' - \sigma) = d\Delta \cdot \sin\sigma$$
$$d\xi \cos\alpha' = \Delta\, d\alpha'$$

und erhält so den einfacheren Ausdruck

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\cos\sigma\, d\sigma'}{\Delta' \sin\alpha' \cdot d\Delta}. \tag{3}$$

Differentiirt man (2) in demselben Sinne, wie die zuletzt eingeführten Differentiale gemeint sind, so ergiebt sich

$$\Delta' \cos\sigma' \, d\sigma' - \Delta \cos\sigma \, d\sigma = d\Delta \sin\sigma$$
$$d\sigma' + \qquad d\sigma = 2\, dr$$

denn um $d\Delta$ zu erhalten, muss α' constant gelassen werden. So ergiebt sich

$$(\Delta \cos\sigma + \Delta' \cos\sigma')\, d\sigma' = d\Delta \sin\sigma + 2\, dr \cdot \Delta \cos\sigma,$$

und da ausserdem

$$\Delta' \cos\sigma' \, d\sigma' = dx$$

ist, wird

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\cos\sigma \cdot x}{\Delta\Delta' \sin\alpha' \left[\Delta \cos\sigma + \Delta' \cos\sigma' - 2\Delta\Delta' \cos\sigma \cos\sigma' \cdot \frac{dr}{dx}\right]} \tag{4}$$

Man kann noch bemerken, dass $d\varphi_0 = d\varphi \cos\sigma$ das Flächenelement ist, welches senkrecht auf dem Strahlenbündel steht.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Aus (4) folgt, dass $\frac{d\omega}{d\varphi_0}$ sich nicht ändert, wenn die gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben vertauscht werden. Es wird also sein

$$\frac{d\omega}{d\varphi_0} = \frac{d\omega_1}{\cos\varepsilon\, df}$$

und demzufolge

$$h = A \cdot J \cdot \frac{\Phi(\cos\varepsilon)}{\cos\varepsilon} \cdot d\varphi_0.$$

4.

Bei der strengen Berechnung der Lichtmenge Q, welche ein Mondelement $d\varphi$, das senkrecht auf der Graden EM (E ist der Erdmittelpunkt, M der Ort des Elementes $d\varphi$) stehen soll, erhält, soll zunächst $\Phi(\cos\varepsilon) = \cos\varepsilon$ gesetzt werden. Dies trifft bekanntlich, wie auch durch Versuche nachgewiesen ist, bei glühenden Metallflächen zu. Weiter werde das anzuwendende Coordinatensystem folgendermassen gelegt: die X-Axe liege in der Graden EM, die Z-Axe gehe durch den Mittelpunkt der Sonnenkugel. Ferner sei r die Entfernung eines Punktes N der Sonnenoberfläche vom Coordinatenanfang O, ν der Winkel, den r mit der X-Axe bildet, ν' der Winkel, den die äussere Normale in N mit dem von hier ausgehenden Strahle bildet, welche nach M gebrochen wird, und ψ der Winkel zwischen der Ebene NOM und der ZX-Ebene. Dann ist

$$df = \frac{r^2 \sin\nu\, d\nu\, d\psi}{\cos(r, n)}$$

und nach (1) des vorigen Artikels

$$dQ = A\, J\, d\varphi \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{r^2 \sin\nu \cos\nu'\, d\nu\, d\psi}{\cos(r, n)}.$$

Die Gleichung der Sonnenkugel in Bezug auf das zu Grunde liegende Coordinatensystem sei

$$f = x^2 + y^2 + (z - A)^2 - R^2 = o$$

und die Coordinaten von N

$$x = r\cos\nu$$
$$y = r\sin\nu\sin\psi$$
$$z = r\sin\nu\cos\psi$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Sind dann α, β, γ die Richtungswinkel des von N ausgehenden Strahles, so hat man

$$\begin{array}{l|l}
\cos\alpha = \cos(\sigma' - \alpha') & M\cos(n,x) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\
\cos\beta = \sin(\sigma' - \alpha')\sin\psi & M\cos(n,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \qquad M^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \\
\cos\gamma = \sin(\sigma' - \alpha')\cos\psi & M\cos(n,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}
\end{array}$$

und hieraus

$$\cos\nu' = \frac{1}{M}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\sigma' - \alpha') + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\sigma' - \alpha')\sin\psi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\sin(\sigma' - \alpha')\cos\psi\right\}$$

$$\cos(n,r) = \frac{1}{M}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{z}{r}\right\}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe ergiebt sich nach leichter Reduction

$$dQ = A\cdot J\cdot d\varphi\,\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot r^2\sin\nu\,d\nu\cdot d\psi\cdot\frac{r\cos(\sigma' - \alpha' - \nu) - A\sin(\sigma' - \alpha')\cos\psi}{r - A\sin\nu\cos\psi}.$$

Schreitet man auf der Sonnenkugel längs eines grössten Kreises $\psi =$ Const. vorwärts, so ergiebt sich durch Differentiation von $f = o$

$$dr\,(r - A\sin\nu\cos\psi) = A\cdot r\cos\nu\cos\psi\,d\nu \tag{a}$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\varDelta$ unverändert zu bleiben hat, aus Formel (2) des vorigen Artikels

$$d\sigma = \frac{dx}{\varDelta\cos\sigma};\quad d\sigma' = \frac{dx}{\varDelta'\cos\sigma'} - \frac{d\varDelta'}{\varDelta'}\operatorname{tg}\sigma';\quad d\alpha' = d\sigma + d\sigma' - 2\,dr$$

$$d\alpha' = \frac{dx}{\varDelta\varDelta'\cos\sigma\cos\sigma'}\left[\varDelta\cos\sigma + \varDelta'\cos\sigma' - 2\,\varDelta\varDelta'\cos\sigma\cos\sigma'\frac{dr}{dx}\right] - \frac{d\varDelta'}{\varDelta'}\operatorname{tg}\sigma' \tag{b}$$

Da man weiter hat:

$$r\sin(\nu + \alpha') = \varDelta_0'\sin\alpha';\quad \begin{array}{l}\varDelta_0'\cos\alpha' - r\cos(\nu + \alpha') = \varDelta' \\ \varDelta_0'\cos\nu - \varDelta'\cos(\nu + \alpha') = r\end{array};\quad \varDelta'^2 = r^2 + \varDelta_0'^2 - 2\,r\,\varDelta_0'\cos\nu,$$

wobei $\varDelta_0'$ gleich der Entfernung OE gesetzt worden ist, ergiebt sich sofort

$$d\varDelta' = -\cos(\nu + \alpha')\,dr + \varDelta_0'\sin\alpha'\,d\nu$$
$$\varDelta'\,d\alpha' = \sin(\nu + \alpha')\,dr + r\cos(\nu + \alpha')\,d\nu.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$\theta = \varDelta\cos\sigma + \varDelta'\cos\sigma' - 2\,\varDelta\varDelta'\cos\sigma\cos\sigma'\frac{dr}{dx},$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so wird (b) durch Einsetzen der zuletzt angeführten Gleichungen:

$$\frac{\theta\, dx}{\Delta \cos\sigma \cos\sigma'} = \frac{dr}{\cos\sigma'} \sin(\nu + \alpha' - \sigma') + d\nu \cdot \frac{r \cos(\nu + \alpha' - \sigma')}{\cos\sigma'}$$

und mit Hülfe von (a)

$$\frac{\theta\, dx}{\Delta \cos\sigma} = r\, d\nu \cdot \frac{r \cos(\nu + \alpha' - \sigma') - A \cos\psi \sin(\sigma' - \alpha')}{r - A \sin\nu \cos\psi}.$$

Nach (4) des vorigen Artikels war ferner:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{x \cos\sigma}{\theta \cdot \Delta\Delta' \sin\alpha'}.$$

Mit Benützung all dieser Relationen findet man schliesslich

$$dQ = \frac{A \cdot J \cdot d\varphi}{\Delta^2} \cdot x\, dx\, d\psi.$$

Die Absorption A ist die Extinction eines Lichtstrahles, der in der Höhe h über der Erdoberfläche horizontal verläuft. Nach der Laplace'schen Extinctionstheorie, die zu verlassen augenblicklich gar keine Veranlassung ist, wird man zu setzen haben

$$A = e^{-2Hr}$$

wo H eine Constante und e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist.

Wenn man nun über alle Werthe von ψ und x integrirt, welche zu der Helligkeit in $d\varphi$ beitragen, ergiebt sich schliesslich die Formel:

$$Q = \frac{J\, d\varphi}{\Delta^2} \cdot \int\int e^{-2Hr} \cdot x\, dx\, d\psi. \tag{1}$$

Die gewöhnliche Refractionstheorie giebt r als Function von x, worüber weiter unten das Nöthige bemerkt werden wird. Die Integration in Bezug auf ψ kann dann ausgeführt werden und man hat

$$Q = \frac{2\, J\, d\varphi}{\Delta^2} \cdot \int \psi_0\, e^{-2Hr}\, x\, dx. \tag{2}$$

ψ_0 ist der grösste Werth von ψ, welcher einem bestimmten x entspricht. Gegeben ist zunächst durch die Gleichung

$$\sin\sigma = \frac{x}{\Delta}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

σ und $\eta = \sigma - 2r$. ψ_0 entspricht dem äussersten Strahle, welcher von der Erdatmosphäre dem Mondelemente noch zugebrochen wird. Man hat also für diesen $\nu' = 90^0$ zu setzen. Es ist also

$$r \cos(\sigma' - \alpha' - \nu) = A \sin(\sigma' - \alpha') \cos \psi_0.$$

Benützt man die Gleichungen

$$r \cos(\alpha' + \nu) = \Delta_0' \cos \alpha' - \Delta'$$
$$r \sin(\alpha' + \nu) = \Delta_0' \sin \alpha',$$

so kann man die letzte Bedingung schreiben:

$$-\Delta_0' \cos(\alpha' - \sigma') + \Delta' \cos \sigma' = A \sin(\alpha' - \sigma') \cos \psi_0.$$

Da aber $\alpha' - \sigma' = \eta$ ist

$$-\Delta_0' \cos \eta + \Delta' \cos \sigma' = A \sin \eta \cos \psi_0. \qquad \text{(c)}$$

Die Gleichung für die Sonnenkugel lässt sich auch so hinstellen:

$$\Delta_0'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta_0' \Delta' \cos \alpha' - 2A\Delta' \sin \alpha' \cos \psi_0 + A^2 - R^2 = o. \qquad \text{(d)}$$

Setzt man für den Augenblick

$$\Delta' \cos \sigma' = \xi; \qquad \Delta' \sin \sigma' = x,$$

so wird

$$\Delta' \cos \alpha' = \xi \cos \eta - x \sin \eta$$
$$\Delta' \sin \alpha' = \xi \sin \eta + x \cos \eta.$$

Dies in (d) eingesetzt ergiebt unter Berücksichtigung von (c)

$$A \cos \psi_0 \sin \eta = -(\Delta_0' \cos \eta + x \operatorname{cotg} \eta) + \sqrt{\left(\Delta_0' + \frac{x}{\sin \eta}\right)^2 + A^2 - R^2} \qquad (3)$$

wodurch $\cos \psi_0$ ganz streng berechnet erscheint.

Wenn der leuchtende Körper (Sonne) von dem mit einer Atmosphäre umgebenen (Erde) so weit entfernt ist, dass er als eine Scheibe von kleinen Dimensionen erscheint, wie dies thatsächlich für das System Sonne—Erde zutrifft, lassen sich diese strengen Formeln ganz wesentlich vereinfachen. Für den zur Anwendung kommenden Fall ist σ' ein äusserst kleiner Winkel, der vom Werth der Sonnenparallaxe $8''.80$ nur um minimale Grössen abweicht. Man wird dann für eine numerische Ausrechnung genügend genau haben

$$\cos \psi_0 = \frac{(A^2 - R^2) + \Delta_0'^2 \sin^2 \alpha'}{2A\Delta_0' \sin \alpha' \cos \alpha'}.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man $R = \delta_0' \sin P$; $A = \delta_0' \sin \gamma$; $\Delta_0' = \delta_0' \cos \gamma$, so wird P sehr nahe der scheinbare Sonnenradius sein und $180^0 - \gamma$ die Winkelentfernung: Sonnenmittelpunkt—Mondelement. Es ist also dann

$$\cos \psi_0 = \frac{\sin^2 \gamma - \sin^2 P + \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha'}{2 \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha' \cos \alpha'} \qquad (4)_a$$

und weiter für die Rechnung auch noch genügend genau

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} = \frac{P^2 - (\gamma - \alpha')^2}{-P^2 + (\gamma + \alpha')^2}. \qquad (4)$$

Die Formeln (3) und (4) sind anzuwenden, so lange für ψ_0 reelle Werthe hervorgehen, im anderen Falle ist $\psi_0 = \pi$ zu setzen.

Die Grenzen x_0 und x_1 von x in (2) sind so zu bestimmen, dass alle Schichten der Atmosphäre, welche Licht zu dem Mondelemente hinwerfen, innerhalb dieser Grenzen liegen und sind demnach in jedem Falle leicht zu bestimmen. Wenn z. B. die ganze Sonnenkugel an der Beleuchtung theilnimmt, sind x_0 und x_1 aus der Bedingung $\cos \psi_0 = 1$ zu bestimmen. Die Gleichung (3) giebt hierfür nach einfacher Reduction

$$-A \cos \eta + \Delta_0' \sin \eta + x = \pm R,$$

was für die folgende numerische Rechnung genügend genau geschrieben werden kann:

$$\alpha' - \gamma = \pm P.$$

Die Lichtmenge Q_0, welche das Flächenelement $d\varphi$ von der Sonne erhielte, wenn die Erde gar nicht vorhanden wäre, ist

$$Q_0 = J\pi \cdot d\varphi \cdot \frac{R^2}{\delta_0'^2 + \Delta^2 + 2\delta_0' \Delta \cos \gamma}$$

oder bei Mondfinsternissen genügend genau

$$Q_0 = J\pi \cdot d\varphi \cdot \frac{R^2}{(\delta_0 + \Delta)^2}.$$

Die Formel (2) wird so:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta_0' + \Delta}{R\Delta} \right)^2 \cdot \int_{x_0}^{x_1} \psi_0 \, e^{-2Hr} \, x \, dx.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Führt man statt x die Variable ξ ein:

$$x = \varrho\left(1 + \frac{\xi}{1000}\right)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{500\,\pi} \cdot \left(\frac{\varrho\,(\delta_0' + \Delta)}{R\,\Delta}\right)^2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi_0 \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) e^{-2Hr} \cdot d\xi. \tag{I}$$

Ich will gleich die im Folgenden zur Anwendung gebrachten Zahlenwerthe anführen, die bei Mondfinsternissen unter mittleren Verhältnissen auftreten. Es werde angenommen: $P = 15'\,59''.6$, Sonnenparallaxe $8''.80$, Mondparallaxe $57'\,2''.0$. Hiermit ergiebt sich

$$\frac{Q}{Q_0} = [7.91048_{-10}] \cdot \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi_0 \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) \cdot e^{-2Hr} \cdot d\xi. \tag{Ia}$$

Die Grenze des geometrischen Kernschattens liegt bei Zugrundelegung der genannten Zahlen bei

$$\gamma = 41'\,11''.2 = 2471''.2.$$

Hätte die Erde keine Atmosphäre, so würde die Grösse $\frac{Q}{Q_0}$ durch einen Ausdruck gegeben sein, den man aus den obigen sofort ableiten kann, wenn man Refraction und Extinction vernachlässigt. Für diesen speciellen Fall möge die Bedeutung der Bezeichnungen etwas abgeändert werden. Nennt man P und ϱ den vom Mondelemente gesehenen scheinbaren Sonnen- bezw. Erdhalbmesser, γ die scheinbare Winkelentfernung der Mittelpunkte beider Himmelskörper, so ist hinreichend genau:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2}{\pi P^2} \cdot \int_{\varrho}^{\gamma + P} r\,dr \arccos\left(\frac{r^2 + \gamma^2 - P^2}{2\,r\,\gamma}\right). \tag{5}$$

Die Integration lässt sich leicht ausführen und es ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0}\,\pi &= \frac{\gamma\,\varrho}{P^2} \sin\psi - \frac{\varrho^2}{P^2}\,\psi + \psi_1 \\ \text{wo} \qquad & \\ \cos\psi &= \frac{\varrho^2 + \gamma^2 - P^2}{2\,\gamma\,\varrho};\ \cos\psi_1 = \frac{\varrho^2 - \gamma^2 - P^2}{2\,\gamma\,P} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Man kann nun, wie ich schon bei früherer Gelegenheit [1]) bemerkte, für (5) einen einfachen Näherungswerth ableiten, falls das Mondelement sich in grosser Nähe der Grenze des Kernschattens befindet. Es ist dann

$$x = \gamma - \varrho + P$$

ein sehr kleiner Winkel und zwar sehr nahe die Winkelentfernung, in welcher das Mondelement einem Beobachter im Erdmittelpunkt von der Grenze des Kernschattens abzustehen scheint. Die Entwicklung nach der kleinen Grösse x gestaltet sich viel einfacher und sicherer, wenn man nicht (1), sondern den Ausdruck unter dem Integralzeichen in (5) entwickelt. Setzt man zur Abkürzung:

$$X = \frac{r^2 + \gamma^2 - P^2}{2 r \gamma}; \quad \xi_1 = 1 - X,$$

so wird das Integral in (5), welches für den Augenblick mit I bezeichnet werden möge

$$I = \int_{\varrho}^{\gamma + P} r\, dr \arcsin \sqrt{\xi_1}\, \sqrt{2 - \xi_1}.$$

ξ_1 ist aber eine sehr kleine Grösse und man hat deshalb

$$I = \sqrt{2} \cdot \int_{\varrho}^{\gamma + P} r\, dr \left(\xi_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} \xi_1^{\frac{3}{2}} + - \right).$$

Setzt man noch

$$r = \varrho + z, \; \xi = \frac{(2P + z - x)(x - z)}{2(\varrho + z)(\varrho - P + x)},$$

so wird

$$I = \sqrt{2} \cdot \int_{0}^{x} (\varrho + z)\, dz \left[\xi^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} \xi^{\frac{3}{2}} + - \right].$$

Da nun x sowohl, als auch z sehr klein sind, kann man nach Potenzen dieser Grössen entwickeln. Führt man diese Rechnung unter dem Integrale aus, integrirt darauf, so kommt man leicht zu dem Resultate: Man setze

$$\lambda = \frac{\varrho}{P},$$

dann wird [2])

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - 1}} \cdot \left(\frac{x}{P}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{20} \left(\frac{x}{P}\right) \cdot \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{\lambda(\lambda - 1)} + - \right\} \tag{7}$$

1) V. J. S. der Astron. Ges. a. a. O.

2) Danach ist die Formel (6) in meinem Aufsatze in der V. J. S. zu corrigiren, welche weniger genau ist wie (7). Die a. a. O. vorkommende Formel (7) erhält nunmehr einen etwas anderen, allerdings

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

5.

Bisher wurde, um bei dem speciellen Probleme, welches die Mondfinsternisse darbieten, zu bleiben, angenommen, dass sich die Sonne als überall gleich helle Scheibe darstellt. Dies ist nun keineswegs der Fall, und da die Rücksichtnahme auf diesen Umstand durchaus erforderlich ist, um der Wirklichkeit entsprechende Zahlenwerthe für die Helligkeitsvertheilung zu erhalten, soll nunmehr darauf eingegangen werden. Die Helligkeitsvertheilung auf der Sonnenscheibe ist spectralphotometrisch von Herrn H. C. Vogel [1]) beobachtet worden. Ich habe diese Beobachtungen näher untersucht und durch eine Formel dargestellt. [2]) Hier kann es sich nicht darum handeln, die Abnahme der Helligkeit auf der Sonnenscheibe von der Mitte zum Rande zu in möglichster Genauigkeit in Rechnung zu ziehen. Denn die Messungen des Herrn Vogel haben gezeigt, dass die verschiedenen Theile des Spectrums ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen. Man müsste also die Rechnung für die verschiedenen Spectralfarben gesondert durchführen — die Dispersion der Atmosphäre ist auch nicht unmerklich — und dann Mittelwerthe ziehen, was sich aber wohl kaum durchführen liesse, ganz abgesehen von der grossen Rechenarbeit und dem hieraus hervorgehenden voraussichtlich wenig bedeutenden Erfolge. Ich habe mich deshalb damit begnügt, die Vertheilung der Helligkeit auf der Sonnenscheibe so anzunehmen, wie sie die Beobachtung im gelben Theile des Spectrums ergab. Es wird dies gewiss ein ausreichend zuverlässiger Ausweg sein.

---

sehr wenig geänderten Zahlencoefficienten. Sie muss heissen, wenn die dort gebrauchten Zahlenwerthe zu Grunde gelegt werden:

$$\frac{J}{J_0} = [5.3805 - 10]\,(x'')^{\frac{3}{2}}$$

Auch die a. a. O. S. 206 vorkommende Formel ist durch die bessere und einfachere

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{1}{3(\lambda - 1)} \cdot \frac{dR}{R}$$

zu ersetzen. Da die weniger genaue Formel auch in meine Abhandlung: „Ueber den Schatten eines Planeten" (Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1894) übergegangen ist, muss die erste S. 437 vorkommende Formel ersetzt werden durch

$$\frac{J}{J_0} = \frac{4}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - 1}} \cdot \left(\frac{Dx}{R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und in der zweiten muss der Zahlencoefficient 6.672 in 6.697 verbessert werden. Practisch sind diese Aenderungen ganz belanglos.

1) Monatsberichte der Berliner Akademie 1877, S. 107 ff.

2) Ueber die Extinction des Lichtes etc. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1891.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Bezeichnet J_0 die Helligkeit der Mitte der Sonnenscheibe, J diejenige eines Theiles, an welchem der ausgehende Lichtstrahl den Winkel ν' mit der Normalen der Sonnenkugel bildet, so ergiebt die als erste Näherung von mir aufgestellte Formel für gelbe Strahlen

$$\frac{J}{J_0} = [0.1795]\, e^{-\frac{0.4134}{\cos \nu'}} = m \cdot e^{-\frac{n}{\cos \nu'}}$$

e ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems, die in Klammer gesetzte Zahl ist der Logarithmus, dessen zugehörige Zahl gemeint ist. Nach der Formel (1) des vorigen Artikels hat man jetzt:

$$Q = \frac{2 J_0 m\, d\varphi}{\Delta^2} \int_{x_0}^{x_1} K \cdot e^{-2Hr} x\, dx; \quad K = \int_0^{\psi_0} e^{-\frac{n}{\cos \nu'}}\, d\psi,$$

während die Lichtmenge Q_0 für den Fall, dass die Erde mit ihrer Atmosphäre nicht zwischen Sonne und Mond stände, genügend genau durch

$$Q_0 = \frac{2\pi R^2 J_0 m\, d\varphi}{(\delta_0' + \Delta)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta \cos \vartheta\, d\vartheta$$

dargestellt wird. Man hat also

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{(\delta_0' + \Delta)^2}{\pi \Delta^2 R^2} \cdot \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} K \cdot e^{-2Hr} \cdot x\, dx$$

worin

$$L = \int_0^1 e^{-\frac{n}{x}} \cdot x\, dx.$$

Führt man, wie früher

$$x = \varrho \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right)$$

ein, so ergiebt sich, wenn gleich die oben berechneten Zahlenwerthe benützt werden

$$\frac{Q}{Q_0} = [7.91048] \cdot \frac{1}{2L} \cdot \int_{\xi_0}^{\xi_1} K e^{-2Hr} \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) d\xi.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

L hat, wie weiter unten abgeleitet werden wird, den Werth 0.25212 und hieraus ergiebt sich

$$\frac{Q}{Q_0} = [8.2079-10] \cdot \int_{\xi_0}^{\xi_1} K \cdot e^{-2Hr} \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) \cdot d\xi. \qquad \text{(IIa)}$$

Wollte man hierin den ganz strengen Werth von K einsetzen, so würden, wegen der doppelten Integration, die numerischen Rechnungen nach dieser Formel sehr mühevoll werden. Für den Fall der Mondfinsternisse lassen sich aber einige an sich belanglose und schon deshalb zulässige Vernachlässigungen einführen, weil eine grosse Genauigkeit bei diesen Rechnungen gar nicht verlangt wird, welche die wirkliche Ausrechnung ausserordentlich vereinfachen und fast ebensoleicht durchführbar machen, wie bei einer überall gleich hellen Sonnenscheibe.

In den Entwicklungen des Art. 4 setzen wir an Stelle $\alpha' - \sigma'$, α', was eine gewiss erlaubte Vereinfachung ist; dann ergiebt sich

$$R \cos \nu' = r \cos(\alpha' + \nu) + A \sin \alpha' \cos \psi$$

und mit Hülfe der Gleichung:

$$r \cos(\nu + \alpha') = \Delta_0' \cos \alpha' - \Delta',$$

$$R \cos \nu' = \Delta_0' \cos \alpha' - \Delta' + A \sin \alpha' \cos \psi.$$

Die Gleichung der Sonnenkugel war:

$$r^2 - 2 A r \sin \nu \cos \psi + A^2 = R^2.$$

Andrerseits war:

$$r^2 = \Delta'^2 + \Delta_0'^2 - 2 \Delta_0' \Delta' \cos \alpha'; \; r \sin \nu = \Delta' \sin \alpha'.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$R^2 \cos^2 \nu' = (\Delta_0' \cos \alpha' - \Delta' + A \sin \alpha' \cos \psi)^2 = R^2 - A^2 - \Delta_0'^2 \sin^2 \alpha'$$
$$+ 2 A \Delta_0' \sin \alpha' \cos \alpha' \cos \psi + A^2 \sin^2 \alpha' \cos^2 \psi.$$

Setzt man hierin, wie früher:

$$\Delta_0' = \delta_0' \cos \gamma; \; A = \delta_0' \sin \gamma; \; R = \delta_0' \sin P$$

so wird

$$\sin^2 P \cos^2 \nu' = \sin^2 P - \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha' \cos^2 \gamma + 2 \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha' \cos \alpha' \cos \psi$$
$$+ \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha' \cos^2 \psi.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Das letzte Glied rechts wird man als sehr klein fortlassen können. Nach (4a) des Artikels 4 war aber

$$\sin^2 P - \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha' \cos^2 \gamma = -2 \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha' \cos \alpha' \cos \psi_0$$

wodurch man erhält:

$$\cos \nu' = \frac{1}{\sin P} \cdot \sqrt{2 \sin \gamma \cos \gamma \sin \alpha' \cos \alpha' (\cos \psi - \cos \psi_0)}$$

und für die numerische Rechnung genügend genau:

$$\cos \nu' = \frac{\sqrt{2 \gamma \alpha'}}{P} \cdot \sqrt{\cos \psi - \cos \psi_0}.$$

Setzt man also

$$p_1 = \frac{n P}{\sqrt{2 \gamma \alpha'}}$$

so wird

$$K = \int_0^{\psi_0} e^{-\frac{p_1}{\sqrt{\cos \psi - \cos \psi_0}}} d \psi.$$

Die Berechnung von K macht nun zwar keine Schwierigkeit, aber die Auswerthung von (IIa) wird doch wesentlich vereinfacht, wenn man voraussetzen darf, dass ψ ein nicht grosser Winkel ist. Man wird bei Beurtheilung der Zulässigkeit dieser Annahme nicht rigoros zu verfahren haben, denn es genügt für die zu verfolgenden Zwecke, wenn die ersten Decimalstellen von K verbürgt werden können. Im Folgenden wird sich nun die Berechnung hauptsächlich auf die Helligkeitsvertheilung in der Nähe der Grenze des geometrischen Kernschattens beziehen. Es wird sich herausstellen, dass stets $\psi_0 < 23^0$ ist. Da sich nun die scheinbare Lichtvertheilung auf der Sonnenscheibe ohnehin nicht genau berücksichtigen lässt, auch schon deshalb nicht, weil die Dispersion ausser Acht gelassen werden muss, so dürfte eine mehr als ausreichende Genauigkeit erzielt werden, wenn man ansetzt:

$$\cos \psi - \cos \psi_0 = \frac{1}{2} (\psi_0^2 - \psi^2).$$

Es wird dann

$$K = \int_0^{\psi_0} e^{-\frac{p_1 \sqrt{2}}{\sqrt{\psi_0^2 - \psi^2}}} d \psi$$

und wenn man $z = \frac{\psi}{\psi_0}$ einführt, so wird

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$K = \psi_0 \int_0^1 e^{-\frac{p_1\sqrt{2}}{\psi_0\sqrt{1-z^2}}} \cdot dz.$$

Jetzt kann man (IIa) so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= [8.2079 - 10] \int_{\xi_0}^{\xi_1} J \cdot e^{-2Hr} \cdot \psi_0 \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) d\xi \\ J &= \int_0^1 e^{-\frac{p}{\sqrt{1-z^2}}} \cdot dz \\ p &= \frac{nP}{\psi_0\sqrt{\gamma\alpha'}} = \frac{0.4134\,P}{\psi_0\sqrt{\gamma\alpha'}} \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

p ist natürlich von ξ abhängig. Der grosse practische Vortheil der eingeführten Vernachlässigung besteht darin, dass J nunmehr nur von dem einen Argument p abhängt und ein für alle Mal in eine Tafel gebracht werden kann. Eine solche Tafel befindet sich am Schlusse dieser Abhandlung. Sie ist in solcher Ausführlichkeit gegeben, als zu einer bequemen 4stelligen Rechnung erforderlich ist. J wurde nach der Gauss'schen Methode der mechanischen Quadratur berechnet. Im vorliegenden Falle erfordert indessen diese Methode einige Vorsicht, wenn man etwa die ersten 4 Stellen richtig erhalten will. Ich glaube dies dadurch erreicht zu haben, dass ich das Integrationsintervall in zwei, nämlich von 0.0 bis 0.9 und von 0.9 bis 1.0 zerlegte und jedes der beiden Integrale durch 5 Gauss'sche Ordinaten bestimmte. Eine gleiche Bemerkung gilt für das, oben eingeführte, Integral.

$$L = \int_0^1 e^{-\frac{n}{x}} \cdot x\,dx$$

Aber man kann auch zum Theil leicht Reihenentwicklungen benützen, welche die Genauigkeit der mechanischen Quadratur controliren. Ich habe dies auch gethan und der angegebene Werth von L wird wohl bis auf 4 Stellen richtig sein. Näher auf diesen Punkt einzugehen ist, glaube ich, nicht erforderlich.

Die Integrale in (I) und (II) sind nicht gut anders als durch mechanische Quadraturen zu berechnen, wenigstens ist dies bei den vorliegenden Unter-

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

suchungen noch der beste und sicherste Weg. Ehe über diese Berechnung berichtet wird, muss zuerst die Horizontalrefraction r als Function von ξ dargestellt werden.

6.

Die Grundlagen für eine numerische Berechnung der im vorigen entwickelten Formeln sind gegenwärtig nur mit einer nicht gar grossen Annäherung an die Wahrheit zu beschaffen. Die verschiedenen Theorien der Refraction genügen zwar beinahe bis an den Horizont den Beobachtungen, aber hier wird nicht nur die Horizontalrefraction in Meereshöhe, sondern in grossen und ganz beliebigen Höhen über der Erdoberfläche gebraucht und diese können nur jene Refractionstheorien annähernd richtig liefern, welche eine der Wirklichkeit nahe kommende Annahme über die Dichtigkeit der einzelnen Luftschichten machen. Desgleichen entspricht die Laplace'sche Formel für die Extinction des Sternlichtes den Beobachtungen. Letztere lassen sich aber nicht bis zum Horizonte ausdehnen und deshalb wird die im vorigen vorkommende Constante H nur durch eine ziemlich unsichere Extrapolation gewonnen werden können. Diese ist aber umso misslicher, wenn man auf die Dispersion, die im Horizonte sehr auffallend und bedeutend ist, keine Rücksicht nimmt. Jedenfalls werden alle diese Dinge erst dann mit grösserer Sicherheit übersehen werden können, wenn man auf hohen Bergstationen die Refraction und Extinction einem eingehenderen Studium unterworfen haben wird.

Für die folgenden Rechnungen, die ja nur eine Uebersicht über die Lichtvertheilung bei Mondfinsternissen geben wollen, wird indessen die Genauigkeit, mit welcher die einzelnen Daten geliefert werden können, weniger in's Gewicht fallen, als die Forderung, dass alle Rechnungen nach einer fest begründeten Theorie vorgenommen werden, welche den Beobachtungen über die Vertheilung des Druckes in der Atmosphäre nicht offenkundig widersprechen. Eine solche Refractionstheorie besitzen wir nun ohne Frage in der von Jvory begründeten und neuerdings insbesondere von Herrn Radau ausgebauten. Diese Theorie hat sich mit den Beobachtungen u. A. auch mit den neuesten umfangreichen Beobachtungen auf der Münchener Sternwarte stets so gut vereinigen lassen, als man in Rücksicht auf die äusserst oft vorkommende anormale Temperaturvertheilung in den einzelnen Atmosphärenschichten, auf die Zerlegung des Sternbildes in ein Spectrum etc. erwarten darf. Ich

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

lege desshalb den folgenden Rechnungen die genannte Theorie zu Grunde.[1]) Bezeichnen f und β zwei empirisch zu bestimmende Constanten, ist ferner λ die Dichtigkeit der Luft in der Höhe h, wenn man für die Erdoberfläche $\lambda = 1$ setzt, μ der Brechungsquotient der Luft in der Höhe h, μ_0 an der Erdoberfläche so hat man nach Jvory zu setzen

$$\frac{\varrho}{\varrho+h} = k = 1 - \frac{2f}{\beta} + \frac{2f}{\beta}\lambda + \frac{1-f}{\beta} \log \text{nat}\, \lambda.$$

Da man ferner annimmt

$$\mu = 1 + \frac{\lambda}{2}(\mu_0^2 - 1)$$

und nach den oben benützten Bezeichnungen

$$y = \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) = \mu\left(1 + \frac{h}{\varrho}\right)$$

ist, so wird

$$\frac{\xi}{1000} = \frac{1 + \frac{\lambda}{2}(\mu_0^2 - 1) - k}{k}$$

Was den Werth der Constanten f, β, μ_0 betrifft, so kann man augenblicklich wohl bessere Werthe annehmen, als früher. Indessen wird es völlig ausreichen (wie u. A. in Brünnow's Lehrbuche geschieht) anzusetzen:

$$f = \frac{2}{9};\ \log \beta = 2.888588;\ \mu_0 = \frac{3400}{3399}.$$

Hiermit ergiebt sich:

$$\xi = \frac{0.57442 - 0.28017\,\lambda - 2.31464 \log \lambda}{0.99943 + 0.00057\,\lambda + 0.002315 \log \lambda}$$

---

1) In den meisten Darstellungen, so z. B. auch in der in dem bekannten Lehrbuch von Brünnow gegebenen, tritt der einfache Charakter der von Ivory gemachten Annahmen nicht genug deutlich hervor. Mit Benützung der im Texte gebrauchten Bezeichnungen hat man nach Ivory, wenn m den Ausdehnungscoefficienten der Luft und t die Temperatur bedeutet, zu setzen $1 + mt = 1 - f(1 - \lambda)$. Daraus folgt:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{f}{m} = \varepsilon$$

Das ist eben, was merkwürdiger Weise nirgends erwähnt wird, genau die Grundlage der von v. Oppolzer behandelten Refractionstheorie. Denn die von ihm zugefügten interpolatorischen Correctionsglieder sind vor der Hand nur als Completirung zu betrachten, deren Nutzen in der Praxis noch keineswegs erwiesen ist. v. Oppolzer's Theorie setzt an:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \varepsilon + \sum_{\sigma} h' \lambda^{\sigma-1},$$

beschränkt sich aber in der ersten Näherung nur auf das erste Glied, welches der Ivory'sche Ansatz angiebt.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Genauigkeit erfordert zu erwähnen, dass die folgenden Rechnungen mit etwas andern Constanten ausgeführt worden sind, nämlich mit

$$\xi = \frac{0.57444 - 0.28024\,\lambda - 2.31484 \log \lambda}{0.99943 + 0.00057\,\lambda + 0.002315 \log \lambda} \tag{1}$$

was sicherlich so gut wie ganz gleichgiltig ist.

Die Horizontalrefraction in Bogensecunden r'' ist nach der Ivory'schen Theorie

$$r'' = \underset{1859.22}{[3.26933]}\,\lambda + \underset{178.57}{[2.25180]}\,\lambda^2 \tag{2}$$

Wenn auch dieser Werth nicht genau den Beobachtungen entspricht, so wird dies um so weniger von Belang sein, als sich r'' doch ziemlich bedeutend mit der Temperatur ändert, die ganz unberücksichtigt bleibt, auch vermischt sich diese Unsicherheit zum grössten Theile mit der Absorptions-Constanten H. Diese letztere habe ich bei früherer Gelegenheit [1]) bestimmt und rund

$$\log e^{-2Hr_0''} = 4.5 - 10$$

gefunden, wo r_0'' die Horizontalrefraction an der Erdoberfläche ist. Es ist begreiflich, dass dieser Werth höchstens nur eine ganz rohe Annäherung darstellen kann, denn er ist aus den vorhandenen Extinctionsbeobachtungen abgeleitet, was einer ganz unsicheren Extrapolation gleichkommt. Auch hier werden Beobachtungen auf Bergstationen in Zukunft Schlüsse von grösserer Sicherheit zulassen. Vorderhand bleibt nichts übrig, als sich mit ähnlichen ganz unsicheren Annahmen zu begnügen. Die folgenden Rechnungen sind (ziemlich willkürlich) mit

$$\log e^{-2Hr_0''} = 4.5984 - 10$$

ausgeführt worden.

---

1) Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1891, S. 247 ff. In dieser Abhandlung habe ich mir u. A. die Aufgabe gestellt, die Abweichungen zwischen der Laplace'schen Extinctionstheorie und den Beobachtungen zu studiren bezw. zu erklären. Es sind deshalb die Langley'schen Einwände eingehend erörtert worden. Es wurde gezeigt, dass in formeller Beziehung „die Extinctionstheorie in der That in merkbarer Weise durch den Einwand Herrn Langley's getroffen wird, dass aber diese Einflüsse nach allen vorhandenen Anzeichen nicht so bedeutend sein können, wie Herr Langley gemeint hat, vielmehr nur in sehr verkleinertem Massstabe eintreten können", dass schliesslich die physiologischen Einwirkungen bei der ganzen Frage nicht ohne Berücksichtigung bleiben dürfen, wenn man nicht zu völlig verkehrten oder wenigstens ganz unbegründeten Schlüssen gelangen will. Zunächst werden auch hier Beobachtungen auf Bergstationen von einschneidender Wichtigkeit werden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Zunächst ist durch Auflösung von (1) und Berechnung von (2) r'' als Function von ξ darzustellen. Dann kann man

$$\alpha' = \sigma + \sigma' - 2r''$$

aus ξ berechnen. Hierbei genügt es jedenfalls, σ' constant $= 8''.80$ anzunehmen, und wenn $\frac{\varrho}{\Delta} = 57'2''.0 = 3422''.0$ angenommen wird, hat man

$$\alpha' = -2r'' + 3430''.80 + 3''.4220 \cdot \xi. \tag{3}$$

In der folgenden Tabelle sind diese Grössen und ausserdem

$$X = e^{-2Hr} \cdot \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right)$$

gegeben.

ξ	log r''	r''	log X	$\sigma + \sigma'$	α'
0.3	3.3071	2027''.9	4.6236 — 10	3431''.8	— 624''.0
0.4	3.2701	1862.5	5.0627	32.1	— 292.9
0.6	3.1950	1566.9	5.8471	32.8	+ 299.0
0.8	3.1185	1313.8	6.5176	33.5	805.9
1.0	3.0408	1098.4	7.0883	34.2	1237.4
1.2	2.9618	915.8	7.5728	34.9	1603.3
1.4	2.8818	761.8	7.9813	35.6	1912.0
1.6	2.8010	632.4	8.3242	36.3	2171.5
1.8	2.7193	524.0	8.6118	37.0	2389.0
2.0	2.6369	433.5	8.8519	37.6	2570.6
2.2	2.5541	358.1	9.0514	38.3	2722.1
2.4	2.4707	295.6	9.2174	39.0	2847.8
2.6	2.3869	243.7	9.3550	39.7	2952.3
2.8	2.3027	200.8	9.4690	40.4	3038.8
3.0	2.2183	165.3	9.5631	41.1	3110.5
3.2	2.1337	136.1	9.6407	41.8	3169.6
3.4	2.0489	111.9	9.7048	42.5	3218.7
3.6	1.9639	92.0	9.7575	43.2	3259.2
3.8	1.8788	75.7	9.8010	43.9	3292.5
4.0	1.7937	62.2	9.8368	44.5	3320.1
4.2	1.7085	51.1	9.8663	45.2	3343.0
4.4	1.6232	42.0	9.8906	45.9	3361.9
4.6	1.5380	34.5	9.9105	46.6	3377.5
4.8	1.4527	28.4	9.9269	47.3	3390.7
5.0	1.3674	23.3	9.9404	47.9	3401.3

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ξ	log r''	r''	log X	$\sigma + \sigma'$	α'
5.2	1.2820	19.1	9.9516	3448.6	3410.3
5.4	1.1967	15.7	9.9607	49.3	3417.9
5.6	1.1113	12.9	9.9681	50.0	3424.2
5.8	1.0260	10.6	9.9744	50.7	3429.5
6.0	0.9407	8.7	9.9795	51.3	3433.9
6.2	0.8555	7.2	9.9837	52.0	3437.7
6.4	0.7704	5.9	9.9872	52.7	3440.9
6.6	0.6851	4.8	9.9900	53.4	3443.7
6.8	0.5998	4.0	9.9924	54.1	3446.1
7.0	0.5146	3.3	9.9943	54.8	3448.2
7.2	0.4293	2.7	9.9960	55.4	3450.1
7.4	0.3442	2.2	9.9973	56.1	3451.7
7.6	0.2590	1.8	9.9985	56.8	3453.1
7.8	0.1739	1.5	9.9994	57.5	3454.5
8.0	0.0889	1.2	0.0002	58.2	3455.7
8.2	0.0039	1.0	0.0009	58.9	3456.8
8.4	9.9189	0.8	0.0014	59.5	3457.9
8.6	9.8339	0.7	0.0019	60.2	3458.9
8.8	9.7490	0.6	0.0023	61.0	3459.8
9.0	9.6641	0.5	0.0027	61.6	3460.6
9.2	9.5792	0.4	0.0030	62.3	3461.5
9.4	9.4943	0.3	0.0033	63.0	3462.4
9.6	9.4095	0.3	0.0035	63.6	3463.2
9.8	9.3248	0.2	0.0036	64.3	3464.0
10.0	9.245	0.2	0.0038	65.0	3464.7
10.2	9.158	0.1	0.0040	65.7	3465.3
10.4	9.073	0.1	0.0041	66.4	3466.1
10.6	8.988	0.1	0.0043	67.1	3466.9
10.8	8.903	0.1	0.0044	67.7	3467.5
11.0	8.818	0.1	0.0046	68.4	3468.3
11.2	8.732	0.1	0.0048	69.1	3469.0
11.4	8.646	0	0.0049	69.8	3469.7
11.6	8.561	0	0.0051	70.5	3470.4
11.8	8.484	0	0.0052	71.2	3471.1
12.0	8.390	0	0.0053	3471.9	3471.9

Für mehrere Zwecke sind, wenn man die ersten 3 bis 4 Decimalen der folgenden Rechnung, wie erwünscht, verbürgen will, die in der vorstehenden Tabelle gegebenen Werthe für α' nicht genau genug. Dann hat man direct nach Formel 3) jene Werthe zu completiren, die mit grösserer Genauigkeit erforderlich sind. Es ist darauf bei den folgenden Rechnungen stets mit Sorgfalt Rücksicht genommen worden.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Das Vorige enthält die Grundlagen, nach welchen man nun die Lichtvertheilung am Monde bei Mondfinsternissen berechnen kann. Von besonderem Interesse ist es, denn es handelt sich in dieser Abhandlung um die Erklärung des Phänomens der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens, die Lichtvertheilung in der Nähe der geometrischen Grenze des Kernschattens zu studiren und es wird dabei ausreichen, die Helligkeitslogarithmen auf etwa 3 Stellen genau zu erhalten (1% ist nahezu 4 Einheiten in der 3. Stelle des Logarithmus). Ich habe zu diesem Zwecke für die 11 Werthe von γ

$$2460'', \; 2470'' \text{ etc. bis } 2560''$$

die Helligkeitsverhältnisse $\frac{Q}{Q_0}$ berechnet und zwar für die beiden Annahmen, dass die Sonnenscheibe überall gleich hell oder den Beobachtungen gemäss abschattirt erscheint. Die letztere Annahme ist die allein richtige, da sich aber die erste mit sehr wenig Mühe verfolgen lässt, wurde die kleine Mehrarbeit nicht gescheut, weil daraus hervorgeht, dass ich in meinem früheren Aufsatz mit Recht behauptete, die nicht homogene Helligkeit der Sonnenscheibe übe einen grossen Einfluss auf das Phänomen aus.

Zunächst waren die Grenzen der Integrale ξ_0 und ξ_1 festzustellen. Dieselben ergeben sich als die den beiden Werthen von α'

$$\alpha' = \gamma \mp P \, (P = 959''.6)$$

entsprechenden Werthe von ξ. Die ungefähren Werthe ergiebt eine Interpolation aus der vorstehenden Tabelle. Eine etwas genauere, directe Rechnung führt zu folgenden Werthen:

		Grenzwerthe		
γ	α'	α'	ξ_0	ξ_1
2460''	1500''.4	3419''.6	1.1403	5.454
2470	1510.4	3429.6	1.1460	5.804
2480	1520.4	3439.6	1.1517	6.318
2490	1530.4	3449.6	1.1574	7.148
2500	1540.4	3459.6	1.1632	8.758
2510	1550.4	3469.6	1.1690	11.365
2520	1560.4	3479.6	1.1748	14.261
2530	1570.4	3489.6	1.1806	17.183
2540	1580.4	3499.6	1.1865	20.105
2550	1590.4	3509.6	1.1924	23.027
2560	1600.4	3519.6	1.1983	25.949

[1]) V. J. S. a. a. O. S. 204.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Grösse ψ_0 wurde nach der obigen Formel

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} = \frac{P^2 - (\gamma - \alpha')^2}{-P^2 + (\gamma + \alpha')^2}$$

berechnet, welche Rechnung durch eine kleine Hülfstafel für den Nenner angenehmer zu gestalten möglich war. Für grössere Werthe von ξ, und zwar in der Nähe der oberen Integralgrenzen, ist aber ψ_0 klein und um genügend genaue Werthe, namentlich einen zuverlässigen Verlauf der Differenzen zu erhalten, muss man α' viel genauer haben, als die obige Tabelle (S. 424) angiebt, und es wurde dann nöthigenfalls so gerechnet:

In der Nähe der oberen Grenze ist

$$\delta = -\alpha' + \gamma + P$$

eine kleine Winkelgrösse. Entwickelt man nach ihr, so wird

$$\psi_0 = \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\frac{2P}{\gamma(\gamma + P)}}$$

worin also

$$\delta = \gamma + P - 3430''.8 - \xi \cdot 3''.4220 + 2r''$$

ist.

In den Atmosphärenschichten, die höher liegen, als $\xi = 12.0$ entsprechend, ist die Refraction und auch die Extinction bei vierstelliger Rechnung zu vernachlässigen. Für die letzten fünf Werthe von γ wurden deshalb die Integrale nur bis $\xi = 12.0$ numerisch und die hinzuzufügenden von $\xi = 12.0$ bis $\xi = \xi_1$ reichenden Integrale strenge berechnet, wie gleich erwähnt werden soll. Um nun die Werthe von $\log \psi_0$ auf einige wenige Einheiten der 4. Stelle sicher zu bekommen für Werthe von ξ, die zwischen 10 und 12 liegen, wurde eine etwas genauere Formel, als die zuletzt erwähnte Näherungsformel angewandt. Man kann nämlich schreiben:

$$\psi_0 = \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\frac{2P - \delta}{\left(\frac{2\gamma - \delta}{2}\right) P + \left(\frac{2\gamma - \delta}{2}\right)^2}}.$$

Nennt man nun das $\xi = 11.0$ entsprechende $\delta : \delta_0$ und setzt

$$\gamma' = \gamma - \frac{\delta_0}{2},$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so wird genauer wie früher

$$\psi_0 = \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\frac{2P - \delta_0}{\gamma'(P + \gamma')}}.$$

Die solchergestalt berechneten log ψ_0 werden auf wenige Einheiten der 4. Stelle genau sein. Sie sind in der nun folgenden Tabelle angeführt.

log ψ_0

$\xi \backslash \gamma$	2460″	2470″	2480″	2490″	2500″	2510″	2520″	2530″	2540″	2550″	2560″
1.2	9.3385	9.3167	9.2920	9.2647	9.2334	9.1951	9.1493	9.0924	9.0141	8.8895	8.5662
1.4	9.5626	9.5578	9.5529	9.5477	9.5424	9.5379	9.5313	9.5256	9.5195	9.5079	9.5069
1.6	9.6006	9.5983	9.5957	9.5930	9.5907	9.5878	9.5851	9.5822	9.5793	9.5733	9.5731
1.8	9.5981	9.6000	9.5967	9.5953	9.5938	9.5915	9.5910	9.5895	9.5880	9.5856	9.5846
2.0	9.5814	9.5810	9.5806	9.5802	9.5796	9 5790	9.5784	9.5777	9.5771	9.5764	9.5755
2.2	9.5548	9.5551	9.5555	9.5559	9.5559	9.5562	9.5566	9.5566	9.5567	9.5566	9.5566
2.4	9.5227	9.5240	9.5252	9.5263	9.5274	9.5284	9.5295	9.5301	9.5309	9.5316	9.5324
2.6	9.4870	9.4892	9.4915	9.4934	9.4953	9.4971	9.4989	9.5006	9.5022	9.5038	9 5050
2.8	9.4485	9.4519	9.4552	9.4583	9.4611	9.4639	9.4665	9.4691	9.4716	9.4740	9.4762
3.0	9.4078	9.4125	9.4170	9.4212	9.4255	9.4293	9.4332	9.4366	9.4400	9.4433	9.4463
3.2	9.3653	9.37 16	9.3777	9.3835	9.3888	9.3940	9.3990	9.4037	9.4077	9.4125	9.4167
3.4	9.3205	9.3290	9.3371	9.3444	9.3515	9.3583	9.3647	9.3708	9.3761	9.3817	9.3869
3.6	9.2738	9.2849	9.2951	9.3048	9.3139	9.3224	9.3303	9.3377	9.3450	9.3517	9.3580
3.8	9.2243	9.2388	9.2522	9.2642	9.2764	9.2863	9.2966	9.3054	9.3141	9.3221	9.3300
4.0	9.1733	9.1920	9.2090	9.2244	9.2386	9 2515	9.2636	9.2747	9.2850	9.2947	9.3038
4.2	9.1176	9.1423	9.1639	9.1833	9.2007	9.2167	9.2310	9.2443	9.2566	9.2679	9.2786
4.4	9.0570	9.0898	9.1175	9.1419	9.1632	9.1824	9.1998	9.2154	9.2297	9.2428	9.2551
4.6	8.9878	9.0336	9.0691	9.0996	9.1255	9.1486	9.1692	9.1876	9.2041	9.2195	9.2330
4.8	8.9083	8.9719	9.0178	9.0569	9.0888	9.1160	9.1402	9.1613	9.1803	9.1974	9.2129
5.0	8.8071	8.9021	8.9649	9.0134	9.0521	9.0847	9.1122	9.1366	9.1580	9.1771	9.1945
5.2	8.6606	8.8194	8.9074	8.9695	9.0166	9.0549	9.0868	9.1135	9.1379	9.1590	9.1778
5.4	8.2943	8 7126	8.8434	8.9238	8.9815	9.0255	9.0620	9.0926	9.1187	9.1421	9.1628
5.6		8.5459	8.7692	8.8759	8.9455	8.9976	9.0390	9.0731	9.1020	9.1270	9.1490
5.8		7.8041	8.6775	8.8252	8.9110	8.9710	9.0175	9.0553	9.0864	9.1133	9.1371
6.0			8.5538	8.7720	8.8769	8.9456	8.9975	9.0386	9.0727	9.1014	9.1263
6.2			8.3183	8.7137	8.8437	8.9232	8.9790	9.0237	9.0600	9.0905	9.1166
6.4				8.6439	8.8081	8.8992	8.9618	9.0098	9.0483	9.0807	9.1079
6.6				8.5598	8.7718	8.8764	8.9447	8.9965	9.0374	9.0715	9.1001
6.8				8.4447	8.7375	8.8562	8.9312	8.9853	9.0283	9.0638	9.0935
7.0				8.2502	8.7030	8.8368	8.9179	8.9749	9.0202	9.0567	9.0875
7.2					8.6638	8.8169	8.9040	8.9651	9.0125	9.0504	9.0822
7.4					8.6214	8.7972	8.8917	8.9553	9.0044	9.0438	9.0765
7.6					8.5758	8.7783	8.8797	8.9466	8.9976	9.0382	9.0717
7.8					8.5266	8.7604	8.8688	8.9394	8.9918	9.0335	9.0677
8.0					8.4689	8.7424	8.8581	8.9316	8.9859	9.0235	9.0638
8.2					8.3934	8.7229	8.8470	8.9245	8.9795	9.0287	9.0594
8.4					8.2903	8.7034	8.8364	8.9171	8.9740	9.0190	9.0558
8.6					8.1063	8.6860	8.8272	8.9108	8.9697	9.0154	9.0526
8.8						8.6667	8.8175	8.9045	8.9650	9.0119	9.0495
9.0						8.6483	8.8086	8.8985	8.9604	9.0082	9.0466

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

ξ \ γ	2460″	2470″	2480″	2490″	2500″	2510″	2520″	2530″	2540″	2550″	2560″
9.2						8.6254	8.7980	8.8917	8.9550	9.0039	9.0431
9.4						8.5998	8.7870	8.8848	8.9497	8.9998	9.0396
9.6						8.5743	8.7768	8.8782	8.9450	8.9961	9.0367
9.8						8.5455	8.7662	8.8718	8.9406	8.9926	9.0337
10.0						8.5220	8.7566	8.8660	8.9365	8.9895	9.0311
10.2						8.4864	8.7454	8.8596	8.9325	8.9866	9.0284
10.4						8.4444	8.7340	8.8529	8.9281	8.9830	9.0254
10.6						8.3943	8.7220	8.8460	8.9233	8.9793	9.0224
10.8						8.3268	8.7097	8.8391	8.9185	8.9757	9.0194
11.0						8.2315	8.6965	8.8319	8.9136	8.9719	9.0164
11.2						8.0589	8.6824	8.8246	8.9086	8.9682	9.0134
11.4							8.6674	8.8170	8.9036	8.9644	9.0103
11.6							8.6515	8.8092	8.8984	8.9605	9.0073
11.8							8.6342	8.8012	8.8932	8.9566	9.0041
12.0							8.6157	8.7928	8.8878	8.9527	9.0009

Die Integrale (bis $\xi < 12.0$) wurden nun auf die bekannte Weise durch Summation äquidistanter Werthe gewonnen. Da aber ψ_0 nur innerhalb der Grenzen reell bleibt, verfügt man nur an der oberen Grenze über aufsteigende, an der unteren Grenze über absteigende Differenzen. Die gewöhnlichen Formeln lassen sich aber sehr leicht für diesen Fall umschreiben. In der bekannten Gauss'schen Bezeichnung findet man aber

$$\frac{1}{\omega}\int_a^{a+n\omega} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(a) + f(a+\omega) + \ldots + f(a+(n-1)\omega) + \frac{1}{2}f(a+n\omega)$$

$$-\left\{\frac{1}{12}f'(a+\overline{n-\tfrac{1}{2}}\,\omega) + \frac{1}{24}f''(a+\overline{n-1}\,\omega) + \frac{19}{720}f'''(a+\overline{n-\tfrac{3}{2}}\,\omega)\ldots\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{12}f'(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \frac{1}{24}f''(a+\omega) + \frac{19}{720}f'''(a+\tfrac{3}{2}\omega)\ldots\right\}$$

Noch kommt der Umstand in Frage, dass die Grenzen ξ_1 und ξ_2 nicht mit den Argumentenwerthen übereinstimmen. Die Zusatzintegrale C sind immer sehr klein, die Ungenauigkeit der unteren Grenze ist stets zu vernachlässigen, für die obere macht C einige Einheiten der 4. Stelle aus. C ergab sich durch ein einfaches Interpolationsverfahren und die Rechnung mit drei Cotes'schen Factoren.

In der folgenden Zusammenstellung sind unter I und II die Functionswerthe unter den Integralzeichen also $X\psi_0$ und $X\psi_0 J$ angeführt. Σ ist die Summe aller Werthe, Σ_1 das Integral $\int_a^{a+n\omega}$, C die Correction wegen des Nichtzusammenfallens der Integrationsgrenzen mit dem ersten und letzten Argumente,

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$\int$ der Werth der in den Formeln I und II vorkommenden Integrale, schliesslich sind die $\log \frac{Q}{Q_0}$, also die gesuchten Helligkeitslogarithmen, gegeben. Von $\gamma = 2520''$ an ist $\xi_1 > 12.0$. Deshalb ist von hier ab extra angeführt log (1) und log (2). (1) ist hier der Antheil von $\frac{Q}{Q_0}$, wenn das Integral bis $\xi = 12.0$ ausgedehnt wird, und (2) der Antheil des Integrals von $\xi = 12.0$ bis $\xi = \xi_1$. Ueber die Berechnung von (2) wird weiter unten das Nöthige bemerkt werden.

	$\gamma = 2460''$	
ξ	I	II
1.2	0.0008	0.0003
1.4	35	18
1.6	84	47
1.8	162	92
2.0	271	153
2.2	404	224
2.4	550	297
2.6	695	361
2.8	827	410
3.0	935	439
3.2	1014	446
3.4	1060	432
3.6	1075	400
3.8	1060	356
4.0	1023	304
4.2	964	247
4.4	887	189
4.6	793	134
4.8	687	84
5.0	562	42
5.2	412	12
5.4	184	0
Σ	1.369	0.4690
Σ_1	0.2724	0.09380
C	+ 5	0
$\int$	0.2729	
$\log \frac{Q}{Q_0}$	7.3465	7.1801

	$\gamma = 2470''$	
ξ	I	II
1.2	0.0008	0.0002
1.4	35	17
1.6	84	46
1.8	162	92
2.0	271	154
2.2	404	225
2.4	551	299
2.6	699	365
2.8	833	416
3.0	945	447
3.2	1029	458
3.4	1081	448
3.6	1102	421
3.8	1096	381
4.0	1068	334
4.2	1020	281
4.4	955	227
4.6	879	174
4.8	792	126
5.0	696	82
5.2	590	47
5.4	471	20
5.6	327	4
5.8	60	0
Σ	1.5158	0.5066
Σ_1	0.3031.2	0.1013.2
C	+ 1.2	0
$\int$	0.3032	
$\log \frac{Q}{Q_0}$	7.3922	7.2136

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$\gamma = 2480''$

ξ	I	II
1.2	0.0007	0.0002
1.4	34	17
1.6	83	46
1.8	162	92
2.0	271	153
2.2	405	226
2.4	553	300
2.6	702	368
2.8	840	422
3.0	955	456
3.2	1043	470
3.4	1101	464
3.6	1129	441
3.8	1130	405
4.0	1111	363
4.2	1072	314
4.4	1019	263
4.6	954	214
4.8	881	166
5.0	804	125
5.2	723	88
5.4	637	57
5.6	546	33
5.8	449	15
6.0	341	4
6.2	201	0
Σ	1.7153	0.5504
Σ_1	0.3412,8	0.11008
C	+ 11,9	0
$\int$	0.34247	
$\log \frac{Q}{Q_0}$	7.4451	7.2496

$\gamma = 2490''$

ξ	I	II
1.2	0.0007	0.0002
1.4	34	17
1.6	83	46
1.8	161	91
2.0	271	154
2.2	405	226
2.4	554	302
2.6	705	371
2.8	846	427
3.0	964	464
3.2	1052	481
3.4	1120	479
3.6	1154	461
3.8	1162	429
4.0	1151	390
4.2	1121	346
4.4	1078	299
4.6	1024	252
4.8	963	208
5.0	899	168
5.2	834	132
5.4	766	101
5.6	698	74
5.8	630	52
6.0	564	35
6.2	498	21
6.4	429	11
6.6	354	4
6.8	274	1
7.0	176	0
Σ	1.9977	0.6044
Σ_1	0.3979	0.12088
C	13	0
$\int$	0.3992	
$\log \frac{Q}{Q_0}$	7.5117	7.2903

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$\gamma = 2500''$

ξ	I	II
1.2	0.0006	0.0002
1.4	33	17
1.6	83	46
1.8	161	91
2.0	271	153
2.2	405	226
2.4	556	303
2.6	708	374
2.8	851	432
3.0	974	472
3.2	1070	493
3.4	1138	494
3.6	1179	480
3.8	1195	453
4.0	1190	417
4.2	1167	376
4.4	1132	333
4.6	1086	290
4.8	1037	249
5.0	983	210
5.2	929	176
5.4	874	146
5.6	820	119
5.8	768	96
6.0	718	77
6.2	671	61
6.4	624	47
6.6	579	36
6.8	537	27
7.0	497	20
7.2	457	14
7.4	416	9
7.6	376	6
7.8	336	3
8.0	295	2
8.2	249	1
8.4	196	0
8.6	128	0
Σ	2.4694	0.6751
Σ_1	0.4927	0.1350
C	10	
$\int$	0.4937	
$\log \frac{Q}{Q_0}$	7.6040	7 3383

$\gamma = 2510''$

ξ	I	II
1.2	0.0006	0.0001
1.4	33	16
1.6	82	45
1.8	160	90
2.0	270	153
2.2	405	227
2.4	557	305
2.6	711	377
2.8	857	437
3.0	983	480
3.2	1083	503
3.4	1156	509
3.6	1202	498
3.8	1223	474
4.0	1225	443
4.2	1211	406
4.4	1183	366
4.6	1146	326
4.8	1104	288
5.0	1060	252
5.2	1015	220
5.4	969	191
5.6	924	165
5.8	882	143
6.0	842	123
6.2	805	107
6.4	770	93
6.6	736	80
6.8	706	69
7.0	678	60
7.2	650	52
7.4	623	45
7.6	598	39
7.8	575	34
8 0	553	29
8.2	530	24
8.4	507	21
8.6	487	18
8.8	467	15
9.0	448	12
9.2	426	10
9.4	402	7
9.6	378	6
9.8	354	4
10.0	331	3
10.2	306	2
10.4	278	1
10.6	248	0
10.8	212	0
11.0	170	0
11.2	115	0
Σ	3.2642	0.7769
Σ_1	0.6517.7	0.15538
C	11.1	
$\int$	0.6528.8	
$\log \frac{Q}{Q_0}$	7.7253	7.3993

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

	$\gamma = 2520''$		$\gamma = 2530''$		$\gamma = 2540''$		$\gamma = 2550''$		$\gamma = 2560''$	
ξ	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
1.2	0.0005	0.0001	0.0005	0.0001	0.0004	0.0000	0.0003	0.0000	0.0001	0.0000
1.4	33	16	32	16	32	16	31	15	31	15
1.6	81	44	81	44	80	43	79	43	79	43
1.8	160	90	159	90	158	89	158	89	157	89
2.0	270	153	269	153	269	153	269	152	268	152
2.2	406	227	406	228	406	228	406	228	406	228
2.4	558	306	559	307	560	309	560	309	562	311
2.6	714	380	717	383	720	386	721	388	724	391
2.8	862	443	867	447	872	452	877	457	881	461
3.0	992	488	999	495	1007	502	1015	509	1022	516
3.2	1096	514	1108	524	1118	534	1130	544	1141	554
3.4	1174	523	1190	536	1205	549	1220	562	1235	575
3.6	1224	515	1245	532	1266	550	1286	562	1305	581
3.8	1252	496	1278	516	1303	538	1328	555	1352	575
4.0	1260	468	1292	493	1323	516	1353	539	1382	561
4.2	1251	435	1290	463	1327	489	1362	515	1396	541
4.4	1231	399	1276	430	1319	460	1360	489	1399	517
4.6	1201	362	1252	395	1302	429	1349	462	1392	492
4.8	1167	327	1225	363	1280	399	1331	434	1380	467
5.0	1130	294	1194	332	1254	370	1311	407	1364	443
5.2	1092	263	1162	303	1228	344	1290	383	1347	420
5.4	1054	235	1131	278	1201	320	1267	360	1329	400
5.6	1017	210	1100	255	1175	298	1245	340	1310	380
5.8	981	189	1071	235	1150	279	1224	321	1293	364
6.0	949	170	1043	217	1128	262	1204	306	1276	349
6.2	918	154	1017	201	1106	247	1186	292	1260	336
6.4	889	140	993	187	1085	234	1169	281	1245	324
6.6	863	127	970	175	1065	222	1152	269	1231	313
6.8	839	116	950	164	1049	212	1138	259	1219	304
7.0	817	107	932	155	1034	203	1125	250	1207	296
7.2	795	98	914	146	1019	195	1112	243	1196	289
7.4	774	90	897	138	1004	187	1099	235	1185	282
7.6	756	84	881	131	991	180	1088	228	1175	275
7.8	738	78	867	125	980	174	1079	223	1167	270
8.0	722	72	855	120	968	169	1069	217	1159	265
8.2	705	67	842	114	956	163	1058	211	1149	260
8.4	688	62	829	109	945	157	1048	206	1141	255
8.6	673	58	818	105	936	153	1041	202	1134	250
8.8	660	54	807	101	928	149	1033	198	1127	246
9.0	648	50	797	96	919	145	1025	194	1120	242
9.2	633	46	785	92	908	140	1016	190	1112	238
9.4	617	42	773	88	897	136	1007	185	1104	234
9.6	603	39	762	84	888	132	998	181	1097	230
9.8	588	36	750	80	879	129	991	177	1090	226
10.0	575	33	740	77	872	125	984	175	1084	223
10.2	562	30	730	74	864	122	978	172	1077	220
10.4	547	27	720	71	855	119	971	168	1070	216
10.6	533	24	709	67	846	115	962	164	1063	213
10.8	518	22	698	64	838	112	955	161	1056	209
11.0	503	20	686	61	829	108	948	157	1050	206
11.2	487	17	675	57	820	105	939	153	1043	202
11.4	470	15	664	54	811	102	932	150	1036	199
11.6	454	13	652	51	801	98	925	147	1029	195
11.8	436	11	640	48	791	94	917	144	1022	192
12.0	417	9	628	45	782	91	909	140	1014	188
Σ	4.0588	0.9289	4.5932	1.1116	5.0353	1.3033	5.4233	1.4941	5.7694	1.6823
$\int_{\xi_0}^{12}$	0.80761	0.18570	0.91237	0.22188	0.99925	0.25978	1.07559	0.29746	1.14379	0.33460
log (1)	7.8177	7.4767	7.8707	7.5540	7.9105	7.6225	7.9421	7.6813	7.9688	7.7324
log (2)	6.7095	4.96	7.2481	6.111	7.5380	6.6510	7.7372	6.9948	7.8890	7.2461
log $\frac{Q}{Q_0}$	7.8503	7.4780	7.9635	7.5693	8.0638	7.6666	8.1527	7.7626	8.2318	7.8551

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es ist nun noch zu erläutern, wie die Integration (also von $\xi = 12.0$ an) über jene Theile der Atmosphäre ausgeführt worden ist, in welchen Refraction und Extinction zu vernachlässigen sind. Für den Fall einer gleichmässig hellen Sonnenscheibe ist also zu berechnen

$$J = [7.91048] \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) \psi_0 \, d\xi,$$

worin

$$\sin^2 \frac{\psi_0}{2} = \frac{P^2 - (\alpha' - \gamma)^2}{4 \gamma \alpha'}$$

$$\alpha' = 3422''.0 \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) + 8''.8.$$

J kann leicht strenge berechnet werden. Die Rechnung ist aber sehr viel angenehmer, wenn man eine passende Reihenentwicklung einführt.

Setzt man

$$\alpha' = \gamma + P - x,$$

so ist x im vorliegenden Falle eine kleine Grösse, nach der man entwickeln kann. Setzt man nun

$$m = \sqrt{\frac{P}{2\gamma(\gamma + P)}}; \quad B = \frac{3\gamma(\gamma - P) - P^2}{12 P \gamma (\gamma + P)}; \quad A = 1 + \frac{\gamma + P - 3430''.8}{3422.0},$$

so findet man leicht

$$\psi_0 = 2m \sqrt{x} \cdot \{1 - Bx \; . \; .\}$$

$$1 + \frac{\xi}{1000} = \left(A - \frac{x}{3422.0}\right).$$

Die obere Grenze für x wird $x = 0$, die untere ($\xi = 12.0$) wird

$$x = \gamma + P - 3471''.86.$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke für ψ_0 und ξ in J ein und führt die Integration aus, so ergiebt sich leicht

$$J = [7.50114] \cdot m A \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{1 - \frac{3}{5} x \left[\frac{1}{3422 \cdot A} + B\right]\right\}.$$

Wegen Kleinheit des in der eckigen Klammer stehenden Gliedes wird es ausreichen, seinen Coefficienten für einen mittleren Werth von γ zu berechnen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

und auch für die übrigen Werthe von γ beizubehalten. Setzt man in diesem Gliede constant $\gamma = 2530''$, so findet sich

$$J = [7.50114]\, m A \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{1 - x\,[6.3674 - 10]\right\}.$$

Die nach dieser sehr bequemen Formel berechneten Werthe von log J stimmen mit den nach der strengen Formel berechneten auf vier Decimalstellen überein. Sie sind in den vorstehenden Tabellen bereits aufgeführt.

Mehr Arbeit verursachen die Integrale

$$\int_{12.0}^{\xi_1} \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) \psi_0 \cdot J \cdot d\xi = \int_{12.0}^{\xi_1} f \cdot d\xi.$$

Es bleibt wohl nichts anderes übrig, als diese auf numerischem Wege durch Summation zu berechnen. Man wird aber hier in etwas grösseren Intervallen vorwärts gehen können. Auch die Berechnung von ψ_0 wird jetzt etwas summarischer geschehen können, als früher, weil bei sehr kleinen ψ, J sehr klein ist. Es wird aus diesen Gründen genügen, wenn ich gleich die einzelnen f angebe und die Zwischenrechnungen unterdrücke.

$\gamma = 2520''$	
ξ	f
12.0	0.0009
12.5	5
13.0	2
13.5	0
14.0	0
Σ	0.0016

$\gamma = 2530''$	
ξ	f
12.0	0.0045
12.5	38
13.0	31
13.5	24
14.0	18
14.5	13
15.0	8
15.5	4
16.0	2
16.5	0
17.0	0
Σ	0.0183

$\gamma = 2540''$	
ξ	f
12.0	0.0091
12.5	83
13.0	75
13.5	67
14.0	59
14.5	51
15.0	44
15.5	37
16.0	30
16.5	23
17.0	17
17.5	12
18.0	7
18.5	4
19.0	1
19.5	0
20.0	0
Σ	0.0601

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$\gamma = 2550''$

ξ	f
12.0	0.0140
12.5	131
13.0	123
13.5	114
14.0	106
14.5	98
15.0	90
15.5	81
16.0	73
16.5	65
17.0	58
17.5	50
18.0	42
18.5	35
19.0	29
19.5	22
20.0	16
20.5	11
21.0	7
21.5	3
22.0	1
22.5	0
23.0	0
Σ	0.1295

$\gamma = 2560''$

ξ	f
12.0	0.0189
12.5	181
13.0	172
13.5	164
14.0	155
14.5	147
15.0	138
15.5	130
16.0	121
16.5	113
17.0	105
17.5	96
18.0	88
18.5	80
19.0	72
19.5	64
20.0	56
20.5	49
21.0	41
21.5	34
22.0	28
22.5	21
23.0	15
23.5	10
24.0	6
24.5	3
25.0	1
25.5	0
Σ	0.2279

Die Integrale $\int_{12.0}^{\xi_1}$ ergeben sich hieraus:

γ	
2520″	0.00056
2530	0.00800
2540	0.02774
2550	0.06122
2560	0.10919

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Stellen wir die gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich also für die Helligkeitslogarithmen, welche auf drei Stellen richtig sein dürften, für eine gleichförmig helle Sonnenscheibe (I) und für die den Beobachtungen gemäss abschattirte II:

	I	II
2460″	7.347	7.180
2470	7.392^{45}	7.214^{34}
2480	7.445^{53}	7.250^{36}
2490	7.512^{67}	7.290^{40}
2500	7.604^{92}	7.338^{48}
2510	7.725^{121}	7.399^{61}
2520	7.850^{125}	7.478^{79}
2530	7.964^{114}	7.569^{91}
2540	8.064^{100}	7.667^{98}
2550	8.153^{89}	7.763^{96}
2560	8.232^{79}	7.855^{82}

Die mitgetheilten Entwicklungen gestatten natürlich auch die Berechnung der Helligkeit in einem Mondelemente, welches in beliebiger Entfernung von der Grenze des geometrischen Kernschattens liegt. Die Kenntniss der Helligkeit innerhalb des Kernschattens hat im Allgemeinen nur den Werth einer Orientirung. Je mehr man sich seinem Mittelpunkte nähert, eine desto grössere Rolle werden die untersten Schichten der Atmosphäre und ihr augenblicklicher Zustand, der sehr grossen Veränderungen unterworfen ist, spielen. Aber auch die Veränderlichkeit der Mondparallaxe wird dann wachsenden Einfluss gewinnen. Ich beschränke mich darauf, die Helligkeit $\frac{Q}{Q_0}$ im Centrum des Erdschattens zu berechnen. In der Nähe dieser Stelle ist es vortheilhafter, in den Integralen I und II des vorigen Artikels die Dichtigkeit λ der Luftschicht als Integrationsvariable einzuführen. Die Formel I, welche für eine gleichmässig helle Sonnenscheibe gilt, giebt für das Schattencentrum:

$$\frac{Q}{Q_0} = [8.4076] \int_{\lambda_1}^{1} \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) e^{-2Hr} \cdot \frac{d\xi}{d\lambda} \cdot d\lambda = [8.3076] \int_{\lambda_1}^{1} \mathrm{I} \cdot d\lambda$$

und die Formel II, für eine abschattirte Sonnenscheibe:

$$\frac{Q}{Q_0} = [8.7050] \int_{\lambda_1}^{1} \left(1 + \frac{\xi}{1000}\right) e^{-2Hr} \cdot \frac{d\xi}{d\lambda} d\lambda \cdot K = [8.7050] \int_{\lambda_1}^{1} \mathrm{II} \cdot d\lambda,$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

hierin ist λ_1 die Dichtigkeit der äussersten Luftschicht, die noch Licht in das Schattencentrum wirft; ferner wird

$$K = e^{-\frac{n}{\cos\varphi}}; \qquad n = 0.4134$$

und φ kann man genügend genau durch den Ausdruck

$$\sin\varphi = \frac{\alpha'}{P}$$

definiren. Der Ausdruck für $\frac{d\xi}{d\lambda}$ ist leicht aus (1) Art. 6 zu finden. Setzt man dort

$$\xi = \frac{Z}{N}$$

$$P = -0.28024 - \frac{1.00532}{\lambda}$$

$$Q = +0.00057 + \frac{0.001005}{\lambda}$$

so wird

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \xi\left(\frac{P}{Z} - \frac{N}{Q}\right).$$

Die folgende Tabelle giebt die verschiedenen eben erwähnten Grössen.

Die Grenze λ_1 ergiebt sich aus der Gleichung

$$\alpha' = P = 959''.6$$

und man findet durch Interpolation der zusammengehörigen Werthe:

λ	α'
0.58	1157.3
0.60	1074.36
0.62	991.02
0.64	907.49
0.66	823.76
0.68	739.84
0.70	655.50

$$\lambda_1 = 0.62753.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

λ	$\log r''$	$\log^{-2Hr}$	$\log\left(1+\frac{\xi}{1000}\right)$	$\log\frac{d\xi}{d\lambda}$	$\log K$	I f	II f
0.58	3.0563	−3.0178	0.0004	0.3038		0.001934	
0.60	3.0718	1273	4	0.2926		1463	
0.62	3.0868	2374	4	0.2799		1104	
0.64	3.1014	3479	4	0.2681	9.4477	833	0.000234
0.66	3.1156	4588	3	0.2568	9.6500	628	281
0.68	3.1293	5701	3	0.2458	9.7181	474	248
0.70	3.1427	6817	3	0.2352	9.7542	358	203
0.72	3.1557	7937	3	0.2250	9.7767	270	162
0.74	3.1684	9060	3	0.2151	9.7918	204	126
0.76	3.1807	−4.0188	3	0.2055	9.8024	154	98
0.78	3.1928	1319	3	0.1961	9.8099	116	75
0.80	3.2046	2455	2	0.1871	9.8151	88	57
0.82	3.2161	3593	2	0.1783	9.8184	66	43
0.84	3.2273	4736	2	0.1698	9.8201	50	33
0.86	3.2383	5884	2	0.1615	9.8204	37	25
0.88	3.2490	7031	2	0.1534	9.8191	28	19
0.90	3.2596	8186	2	0.1456	9.8163	21	14
0.92	3.2699	9346	2	0.1379	9.8116	16	10
0.94	3.2800	−5.0508	2	0.1305	9.8046	12	8
0.96	3.2899	1673	2	0.1232	9.7945	9	6
0.98	3.2996	2844	1	0.1162	9.7799	7	4
1.00	3.3092	−5.4016	1	0.1093	9.7579	5	3

Wegen des mangelhaften Verlaufes der Differenzen lässt sich namentlich bei II das Integral zwischen λ_1 und $\lambda = 0.64$ nicht genau ermitteln, wenn man nicht etwas umständlicher verfahren will. Doch ist ja hier eine Unsicherheit von 1—2 % ganz bedeutungslos und bis auf solche Grössen genügt eine einfache Ueberschlagsrechnung. Es ergab sich schliesslich:

$$\text{I } \log\frac{Q}{Q_0} = 4.185 - 10$$

$$\text{II } \log\frac{Q}{Q_0} = 4.212 - 10.$$

Wie schon oben erwähnt wurde und worauf auch Herr v. Hepperger a. a. O. aufmerksam macht, ist die Helligkeit in der Nähe des Centrums des Erdschattens in hohem Grade von der Mondparallaxe abhängig. Zur Gewinnung eines Ueberblickes über diesen Einfluss genügt es, die Veränderung der unteren Grenze λ_1 des Integrales in Rechnung zu ziehen. Für diese Grenze ist

$$\alpha' = P = \sigma + \sigma' - 2r''.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Mondbahnexcentricität ist rund 0.055, der mittlere Werth von $\sigma = 3400''$, es ändert sich demnach σ zwischen Apo- und Perigäum um rund $380''$. Im ersteren Falle ist also für $\lambda_1 = 0.58$, $\alpha' = 967''$, im letzteren Falle wird für $\lambda_1 = 0.68$, $\alpha' = 929''$. Man wird deshalb in rohem Ueberschlag im Apogäum bezw. im Perigäum die Grenze λ_1 rund zu 0.58 bezw. 0.68 anzusetzen haben. Dann findet man im ersten Falle

$$\log \frac{Q}{Q_0} = 4.545 - 10$$

und im zweiten Falle

$$\log \frac{Q}{Q_0} = 3.930 - 10.$$

Beide Helligkeiten verhalten sich nahe wie 4:1. Es kann also die Mitte des Kernschattens, ganz abgesehen von den variablen Trübungen der unteren Schichten der Atmosphäre, welche grossen Einfluss ausüben, zu Zeiten (Apogäum) etwa viermal so hell sein, wie zu anderen Zeiten (Perigäum). In der Nähe der Grenze des Kernschattens dagegen ist der parallactische Einfluss, wie man sich leicht überzeugt, nur ein geringer, wenn man die Helligkeiten den betreffenden scheinbaren Winkelabständen von dieser Grenze zuordnet. Eine genauere Untersuchung ist wohl kaum lohnend, da die Einwirkung auf das physiologische Phänomen der Vergrösserung des Erdschattens sich nicht ohne weitläufige neue Untersuchungen übersehen lässt. Es unterliegt aber kaum einem Zweifel, dass dieser Einfluss nicht sehr bemerkbar sein wird und es wird jedenfalls gerechtfertigt sein, auf die Einwirkung der Veränderung der Mondparallaxe zunächst keine Rücksicht zu nehmen (vergl. V. J. S. a. a. O. S. 206).

7.

Die vorstehenden Rechnungen geben zu einigen Bemerkungen Anlass. Es ergiebt sich, dass die Lichtvertheilung in der Nähe der Mitte des Erdschattens nicht nur von den näheren geometrischen Verhältnissen (Parallaxe) abhängig ist, unter denen die Finsterniss stattfindet, sondern auch von dem überaus variablen Zustande der tieferen Schichten der Erdatmosphäre. Ganz anders aber verhält es sich mit dem Phänomen der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens. Da hierbei nur Partien in Frage kommen, die ganz in der Nähe der Grenze des geometrischen Kernschattens liegen, so hat nicht nur die Veränderlichkeit der Mondparallaxe einen sehr geringen Einfluss, sondern

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

auch der Zustand der Atmosphäre, insoferne er von dem mittleren abweicht, kann eine wesentliche Rolle nicht spielen. Berechnet man die den ξ entsprechenden Werthe von λ und h, d. i. der Höhe der betreffenden Luftschicht über dem Erdboden in Kilometern, so ergiebt sich:

ξ	λ	h
0.4 . .	0.9204	0.99
0.8 . .	0.6643	3.84
1.2 . .	0.4713	6.76
1.6 . .	0.3297	9.57
2.0 . .	0.2282	12.31
2.4 . .	0.1566	14.98
2.8 . .	0.1069	17.63
3.2 . .	0.0727	20.23
3.6 . .	0.0493	22.82

Eine Betrachtung der mitgetheilten Zahlen ergiebt nun, dass die Atmosphäreschichten bis 6.8 km Höhe ($\xi = 1.2$) überhaupt gar nichts zu der Helligkeit beitragen. Es ist also ganz gleichgültig, ob diese Schichten völlig durchsichtig sind oder gar kein Licht durchlassen. Aber auch Atmosphärenschichten bis zu sehr beträchtlichen Höhen, über die hinaus wesentliche Trübungen über grosse Strecken der Erde wohl nicht mehr vorkommen können, üben nur einen fast verschwindenden Einfluss aus. Nimmt man z. B. an, dass die Atmosphäre bis zu 12.3 km Höhe ($\xi = 2.0$) vollkommen undurchsichtig wäre, so ergiebt eine Rechnung, die mit Hülfe der in Art. 6 gegebenen Tabellen fast ohne alle Mühe und Zeitaufwand ausgeführt werden kann — für diese und ähnliche Zwecke erschien die ausführliche Mittheilung der angeführten Zahlen erwünscht — folgende Werthe für die Helligkeitslogarithmen, wenn auf die Abschattirung der Sonnenscheibe Rücksicht genommen wird:

γ	$\log h$	I	a	b
2460″ . .	7.158	7.180	— 22	— 10
2470 . .	7.194	7.214	— 20	— 8
2480 . .	7.231	7.250	— 19	— 7
2490 . .	7.274	7.290	— 16	— 4
2500 . .	7.324	7.338	— 14	— 2
2510 . .	7.387	7.399	— 12	0
2520 . .	7.468	7.478	— 10	+ 2
2530 . .	7.562	7.569	— 7	+ 5
2540 . .	7.661	7.667	— 6	+ 6
2550 . .	7.759	7.763	— 4	+ 8
2560 . .	7.853	7.855	— 2	+ 10

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Hierbei sind unter I die früher gefundenen Helligkeitslogarithmen und unter a die Differenzen beider, unter b dieselben nach Abzug einer constanten Correction von 10 Einheiten der letzten Stelle angeführt. Es ist wohl nicht anzunehmen, dass diese neue Lichtvertheilung eine bemerkbare Verschiebung der scheinbaren Schattengrenze gegen die frühere ergeben wird. Dabei ist nicht ausser Acht zu lassen, dass die ganze Atmosphäre bis zu der angenommenen Höhe, in welcher ausgedehntere Trübungen gewiss nur ausnahmsweise vorkommen, als völlig undurchsichtig betrachtet worden ist. Man wird deshalb wohl berechtigt sein, den Satz aufzustellen, dass die veränderliche Beschaffenheit der Atmosphäre nur einen ganz verschwindenden Einfluss auf das Phänomen der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens ausüben kann.

In so grossen Höhen, wie oben betrachtet, und in noch viel grösseren kommen indessen partielle Trübungen nachweisbar vor, wie die leuchtenden Nachtwolken mit Sicherheit ergeben haben. Diese Gebilde scheinen aber ziemlich durchsichtig zu sein, auch wird man ihnen keine gar zu grosse Dicke und Ausdehnung zuerkennen können, schliesslich bilden sie doch immerhin eine anormale Erscheinung, anf die eine theoretische Betrachtung der bei Mondfinsternissen stattfindenden Helligkeitsvertheilung keine Rücksicht zu nehmen braucht. Indessen können auch diese Erscheinungen auf das in Rede stehende Phänomen kaum einen nennenswerthen Einfluss ausüben. Um dies zu erkennen, werde beispielsweise angenommen, dass die leuchtenden Wolken alle Strahlen, welche den Schichten $\xi = 10.0$ bis $\xi = 10.2$ entsprechen, absorbiren. Dies würde einer Schicht von 1.3 km Dicke in einer Höhe von 64 km entsprechen. Es ist das natürlich nur eine rechnerische Annahme, die sich etwa dahin interpretiren liesse, dass ein sehr schmaler Ring undurchsichtiger Materie von 1000 m Dicke in jenen Atmosphärenschichten lagere. Die Correctionen, welche an die früheren Helligkeitslogarithmen anzubringen sind, ergaben dann die mitgetheilten Zahlentabellen. Es findet sich:

γ	Correction
2460″	genau = 0·
2470	
2480	
2500	
2510	— 0.000
2520	— 0.002
2530	— 0.003
2540	— 0.004
2550	— 0.004
2560	— 0.004

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dass diese Correctionen auch nur den mindesten Einfluss ausüben könnten, wird wohl kaum behauptet werden.

Die früheren Rechnungen zeigten, dass die tiefsten Schichten der Erdatmosphäre (bis etwa $\xi = 1.2$) überhaupt kein Licht zu einem in der Nähe der scheinbaren Schattengrenze befindlichen Mondelemente zuwerfen. Ein ähnlicher Fall kann natürlich bei jedem vor der Sonne vorbeiziehenden Körper, der von der Erde aus beobachtet wird, eintreten und die Folge davon wird sein, dass die absolut dunkle Scheibe, als welche sich der Körper auf der Sonne darstellt, grösser erscheinen muss, als wenn er keine Atmosphäre besässe. Eine solche Vergrösserung ihres Durchmessers wird z. B. die Venusscheibe aufweisen müssen während eines Venusdurchganges. Um die hier möglichen Verhältnisse zu übersehen, werde ein der Erde in Bezug auf Grösse und Atmosphäre gleicher Körper an die Stelle von Venus gesetzt.

Es seien V, E, M die Mittelpunkte von Venus, Erde und Sonne (SS'), P der scheinbare Sonnenhalbmesser von V aus gesehen, γ und $180^0 - \alpha'$ die Winkel VEM und EVS', δ_0' und Δ die Entfernungen VM und VE, dann ergeben die früheren Formeln (die Bezeichnung ist den früheren Entwicklungen genau entsprechend gewählt und die nicht besonders erwähnten Buchstaben haben die frühere Bedeutung):

$$-\alpha' = \varrho(1+\xi)\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\delta_0'}\right) - 2r,$$

während eine etwa gezeichnete Figur ergiebt:

$$\alpha' = P - \frac{\gamma}{\delta_0'}(\Delta + \delta_0').$$

Man hat also aus der Gleichung

$$2r - \frac{\varrho(\delta_0' + \Delta)}{\delta_0'\Delta} = P \mp \frac{\gamma}{\delta_0'}(\Delta + \delta_0')$$

ξ zu bestimmen, welcher Werth die tiefste Schicht der Venusatmosphäre bestimmt, die Licht nach E sendet. Das obere Zeichen gilt für den Theil des Venusrandes, welcher am weitesten, das untere Zeichen für den, der am nächsten zum Sonnenmittelpunkt liegt. Bei Venusdurchgängen hat man in ungefähren Zahlen:

$$\frac{\varrho}{\Delta} = 31''.8; \quad \delta_0' = 0.7233; \quad \Delta = 0.2767; \quad P = 1330'';$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

also

$$r = 687'' \mp 0.695 \cdot \gamma.$$

Mit Hülfe der Tabelle auf S. 424 ergiebt sich für:

	ξ_1	ξ_2	$2d\left(\frac{\varrho}{\Delta}\right)$	$d(\delta)$
$\gamma =$ 0″	1.52	1.52	+ 0.″10	— 0.″00
200	1.75	1.32	+ 0.10	— 0.01
400	2.06	1.14	+ 0.10	— 0.01
600	2.50	0.99	+ 0.11	— 0.02
800	3.24	0.86	+ 0.13	— 0.04
900	4.02	0.80	+ 0.15	— 0.05

$2d\left(\frac{\varrho}{\Delta}\right)$ bedeutet die Vergrösserung des Durchmessers der scheinbaren Venusscheibe und $d(\delta)$ die Correction der scheinbaren Entfernung des Venusmittelpunktes vom Sonnencentrum, wenn man sie aus der Einstellung beider Ränder der Venus ableitet. Beide Correctionen geben wahrscheinlich nur untere Grenzen an, weil mancherlei Anzeichen vorhanden sind, die dafür sprechen, dass die Venusatmosphäre dichter als die Erdatmosphäre ist und auch eine stärkere Brechung besitzt, als letztere. Auch ist ja nur jene Vergrösserung angegeben worden, welche der absolut dunkle Theil der Scheibe erfährt. Hierzu kommt noch die Zone, welche infolge der Absorption die allmähliche Aufhellung bis zum unmerklich geschwächten Sonnenlicht umfasst, sowie der Einfluss auf diese Helligkeit, welche von der Abschattirung der Sonnenscheibe herrührt.

Der Venusdurchmesser erscheint also vergrössert und die vollkommene Kreisform der Planetenscheibe geht, wenn auch nur in sehr kleinem Betrage, immer mehr verloren, je mehr sie sich dem Sonnenrande nähert. Indessen handelt es sich hierbei um Quantitäten, die in den Beobachtungen der letzten Venusdurchgänge wohl kaum zum Ausdruck kommen werden. Nur die Contactbeobachtungen werden, wie bekannt, durch die Venusatmosphäre merklich beeinflusst, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden soll. Im Uebrigen kann die constatirte Vergrösserung des Venusdurchmessers nur ein theoretisches Interesse beanspruchen, denn andere Ursachen bewirken, dass im Gegentheil die Venus vor der Sonnenscheibe um sehr merkliche Beträge zu klein gemessen wird. Die Diffraction an dem Objectivrande des Fernrohres bewirkt bekanntlich, dass im Fernrohre ein scharfer Rand einer Scheibe überhaupt nicht zu Stande kommt. Bei einer hellen Scheibe verlegt das

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Auge den Scheibenrand, der sich aus physiologischen Gründen (s. o. Art. 2) immerhin mit einiger Schärfe darstellt, gewöhnlich ausserhalb des geometrischen Randes. Es wird also die helle Sonnenscheibe zu gross und ebenso die schwarze Venusscheibe zu klein erscheinen. Aus den heliometrischen Messungen des Venusdurchmessers, welche die deutschen Expeditionen zur Beobachtung der letzten beiden Venusdurchgänge ergaben, geht in der That ein viel kleinerer Werth hervor, als aus den mit anderen Instrumenten ausgeführten Messungen an der hellen Venussichel. Erstere ergaben 16.″82, letztere etwa 17.″3 für den Venusdurchmesser in der Entfernung 1.[1]) Eine etwas andere Gegenüberstellung ergiebt sich, wenn man die von Herrn Hartwig ausgeführten Messungen an der erleuchteten Venus heranzieht, welche mit einigen der kleinen Heliometern ausgeführt sind, die bei den Venusdurchgängen in Anwendung kamen. Lässt man die constante Correction, die Herr Hartwig angebracht hat, fort, so folgt aus seinen Messungen für den Venusdurchmesser 17.″16. Ob nun die verbleibende Differenz allein durch die Diffraction und durch dieselbe ausgelöste persönliche Messungsfehler zu erklären ist, lässt sich zur Zeit nicht entscheiden; jedenfalls liegt sehr wahrscheinlich dieser Einfluss in gleicher Richtung und auch die Grösse der Differenz macht die Hoffnung, dass sie durch die Beugung allein erklärbar ist, durchaus nicht von vornherein ganz hinfällig. Ist doch der Effect der Beugung an den Rändern des Heliometerobjectives bei ausgedehnten Objecten weder theoretisch noch practisch hinlänglich untersucht worden. Auch das letztere ist mit Schwierigkeiten verknüpft, weil hier Versuche keineswegs ausreichend sind, die nicht auf die verschiedenen Nebenumstände Rücksicht nehmen, unter denen die Messung zu Stande kommt, wie Helligkeit der Bilder, etwaige Färbungen infolge angewandter Blendgläser etc. Bekanntlich geben die kleinen Heliometer auch den Sonnendurchmesser kleiner, wie andere Instrumente und, wie es scheint, auch grössere Heliometer, welche Thatsache vielleicht auf den ersten Blick merkwürdig erscheinen mag. Man darf aber nicht vergessen, dass die Abhängigkeit des Effectes der Beugung von der Grösse der Objective keineswegs feststeht. Auch wird die sehr merkliche Abschattirung der Sonnenscheibe hierbei ganz gewiss nicht ohne Einfluss bleiben können.

---

1) Die Venusdurchgänge 1874 und 1882 von A. Auwers. Bd. V, S. 723/4.

2) Hartwig, „Untersuchungen über die Durchmesser von Venus und Mars". Publicationen der A. G. XV.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

In grosser Nähe an der Conjunction wird, wie aus den früheren Rechnungen leicht hervorgeht, die Venus von einem Lichtband umgeben sein, das auch von höheren sehr durchsichtigen Schichten der Atmosphäre geliefert werden kann. Es ist nicht undenkbar, dass hier dieses Band zu einer Vergrösserung des scheinbaren Radius beitragen kann. Dass dies aber in einiger Entfernung von der Conjunction noch stattfindet, ist wohl nicht gerade wahrscheinlich. Infolge der Brechung des Lichtes in der Atmosphäre wird ferner im reflectirten Licht die Venusoberfläche, wie ich vor mehreren Jahren zeigte, im Verhältnisse des Brechungsexponenten an der Oberfläche zur Einheit vergrössert. Um aber auf diesem Wege bemerkenswerthe Vergrösserungen des Venusdurchmessers zu erhalten, müsste man doch der Venusatmosphäre Eigenschaften zuschreiben, die man nicht ohne weiteres acceptiren kann. Auch würde dann andererseits hierdurch wiederum eine stärkere Vergrösserung des schwarzen Venusbildes vor der Sonnenscheibe bedingt sein.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Tafel für: $J = \int_0^1 e^{-\frac{p}{\sqrt{1-z^2}}} \cdot dz.$

p	J	p	J	p	J	p	J
0.25	0.7014	0.57	0.4635	0.89	0.3124	2.05	0.0808
	94		58		37		45
0.26	0.6920	0.58	0.4577	0.90	0.3087	2.10	0.0763
	91		57		38		42
0.27	0.6829	0.59	0.4520	0.91	0.3049	2.15	0.0721
	91		56		36		39
0.28	0.6738	0.60	0.4464	0.92	0.3013	2.20	0.0682
	89		56		36		38
0.29	0.6649	0.61	0.4408	0.93	0.2977	2.25	0.0644
	88		54		36		35
0.30	0.6561	0.62	0.4354	0.94	0.2941	2.30	0.0609
	86		54		35		33
0.31	0.6475	0.63	0.4300	0.95	0.2906	2.35	0.0576
	85		54		35		32
0.32	0.6390	0.64	0.4246	0.96	0.2871	2.40	0.0544
	83		52		34		29
0.33	0.6307	0.65	0.4194	0.97	0.2837	2.45	0.0515
	82		52		34		28
0.34	0.6225	0.66	0.4142	0.98	0.2803	2.50	0.0487
	81		51		34		27
0.35	0.6144	0.67	0.4091	0.99	0.2769	2.55	0.0460
	80		50		33		25
0.36	0.6064	0.68	0.4041	1.00	0.2736	2.60	0.0435
	79		50		159		23
0.37	0.5985	0.69	0.3991	1.05	0.2577	2.65	0.0412
	77		49		149		23
0.38	0.5908	0.70	0.3942	1.10	0.2428	2.70	0.0389
	76		49		140		21
0.39	0.5832	0.71	0.3893	1.15	0.2288	2.75	0.0368
	75		47		132		19
0.40	0.5757	0.72	0.3846	1.20	0.2156	2.80	0.0349
	74		48		123		19
0.41	0.5683	0.73	0.3798	1.25	0.2033	2.85	0.0330
	73		46		116		18
0.42	0.5610	0.74	0.3752	1.30	0.1917	2.90	0.0312
	72		46		109		17
0.43	0.5538	0.75	0.3706	1.35	0.1808	2.95	0.0295
	71		45		103		16
0.44	0.5467	0.76	0.3661	1.40	0.1705	3.00	0.0279
	69		45		97		15
0.45	0.5398	0.77	0.3616	1.45	0.1608	3.05	0.0264
	69		44		90		14
0.46	0.5329	0.78	0.3572	1.50	0.1518	3.10	0.0250
	68		43		86		13
0.47	0.5261	0.79	0.3529	1.55	0.1432	3.15	0.0237
	66		43		80		13
0.48	0.5195	0.80	0.3486	1.60	0.1352	3.20	0.0224
	66		42		76		12
0.49	0.5129	0.81	0.3444	1.65	0.1276	3.25	0.0212
	65		42		72		11
0.50	0.5064	0.82	0.3402	1.70	0.1204	3.30	0.0201
	64		41		67		11
0.51	0.5000	0.83	0.3361	1.75	0.1137	3.35	0.0190
	63		41		63		10
0.52	0.4937	0.84	0.3320	1.80	0.1074	3.40	0.0180
	62		40		60		10
0.53	0.4875	0.85	0.3280	1.85	0.1014	3.45	0.0170
	61		40		56		9
0.54	0.4814	0.86	0.3240	1.90	0.0958	3.50	0.0161
	61		39		53		8
0.55	0.4753	0.87	0.3201	1.95	0.0905	3.55	0.0153
	59		39		50		9
0.56	0.4694	0.88	0.3162	2.00	0.0855	3.60	0.0144
	59		38		47		7
0.57	0.4635	0.89	0.3124	2.05	0.0808	3.65	0.0137

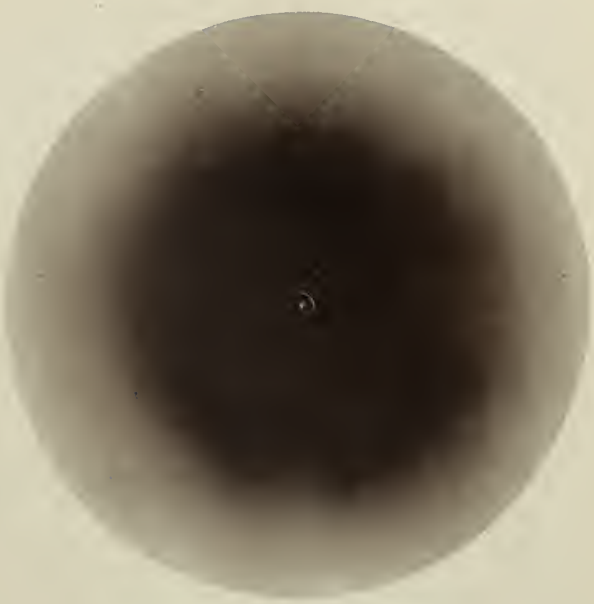
© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

p	J	p	J	p	J	p	J
3.65	0.0137_{8}	4.50	0.0054_{2}	5.35	0.0022_{1}	6.20	0.0009_{1}
3.70	0.0129_{6}	4.55	0.0052_{3}	5.40	0.0021_{1}	6.25	0.0008_{0}
3.75	0.0123_{7}	4.60	0.0049_{3}	5.45	0.0020_{1}	6.30	0.0008_{1}
3.80	0.0116_{6}	4.65	0.0046_{2}	5.50	0.0019_{1}	6.35	0.0007_{0}
3.85	0.0110_{6}	4.70	0.0044_{2}	5.55	0.0018_{1}	6.40	0.0007_{0}
3.90	0.0104_{5}	4.75	0.0042_{3}	5.60	0.0017_{1}	6.45	0.0007_{1}
3.95	0.0099_{6}	4.80	0.0039_{2}	5.65	0.0016_{1}	6.50	0.0006_{0}
4.00	0.0093_{5}	4.85	0.0037_{2}	5.70	0.0015_{1}	6.55	0.0006_{0}
4.05	0.0088_{4}	4.90	0.0035_{2}	5.75	0.0014_{1}	6.60	0.0006_{0}
4.10	0.0084_{5}	4.95	0.0033_{1}	5.80	0.0013_{0}	6.65	0.0006_{1}
4.15	0.0079_{4}	5.00	0.0032_{2}	5.85	0.0013_{1}	6.70	0.0005_{0}
4.20	0.0075_{4}	5.05	0.0030_{2}	5.90	0.0012_{0}	6.75	0.0005_{0}
4.25	0.0071_{4}	5.10	0.0028_{1}	5.95	0.0012_{1}	6.80	0.0005_{1}
4.30	0.0067_{3}	5.15	0.0027_{1}	6.00	0.0011_{1}	6.85	0.0004_{0}
4.35	0.0064_{3}	5.20	0.0026_{2}	6.05	0.0010_{0}	6.90	0.0004_{0}
4.40	0.0061_{4}	5.25	0.0024_{1}	6.10	0.0010_{1}	6.95	0.0004_{0}
4.45	0.0057_{3}	5.30	0.0023_{1}	6.15	0.0009_{0}	7.00	0.0004
4.50	0.0054	5.35	0.0022	6.20	0.0009		

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

1

2



3

5

4

Lichtdruck von J. B. Obernetter, München.