Nachtrag zu der Abhandlung:

Theorie der Dämmerungsfarben.

Von

E. von Lommel.

In der Abhandlung: „Theorie der Dämmerungsfarben“ (Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XIX. Bd. 1897, p. 449—508) wurden zur Berechnung der Lichtstärken im Beugungsbilde zwei unendliche Reihen benutzt, die sich derart ergänzen, dass die eine für kleinere, die andere für grössere Werte des Arguments bequemere Anwendung zulässt. Dabei wurde bemerkt (l. c. p. 497), dass beide Reihen konvergent sind, jedoch der Beweis für diese Behauptung nicht mitgeteilt, um den Text nicht zu sehr mit mathematischen Entwickelungen zu belasten. Da jedoch das Fehlen der Konvergenzbeweise als Lücke in der Beweisführung empfunden werden könnte, so möchte ich diese Beweise hiemit noch nachträglich beifügen.

Die zwei Reihen, von denen hier die Rede ist, ergeben sich, indem man das in dem Intensitätsausdruck

$$M^2 = \frac{2}{r_1^2}\int_0^{2\pi}\left(1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)\right)\frac{1 - \nu\cos\vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

vorkommende bestimmte Integral auf zwei verschiedene Weisen entwickelt.

I.

Eine erste Entwickelung erhält man, indem man $1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)$ in eine nach Potenzen von

$$z = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2\,r\,r_1\cos\vartheta} = r_1\sqrt{1 + \nu^2 - 2\,\nu\cos\vartheta}$$

fortlaufende Reihe verwandelt und sodann noch ϑ von 0 bis 2π integriert. Man erhält unter Weglassung des Faktors $\pi^2 R^4$:

$$M^2 = \sum(-1)^{\mathfrak{c}} A_{\mathfrak{c}} B_{\mathfrak{c}} r_1^{2\mathfrak{c}},$$

wo die Koeffizienten

$$A_{\mathfrak{c}} = \left(\frac{1}{(\mathfrak{c}+1)!}\right)^2\cdot\left[1 + \sum_{2\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}}\left((\mathfrak{c} - 2\,\mathfrak{a})\frac{(\mathfrak{c}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{a}+1)!}\right)^2\right]$$

und

$$B_{\mathfrak{c}} = \frac{1}{2^{2\mathfrak{c}}} \sum \frac{\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}|-1}(\mathfrak{c}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{a}\,!)^2}\, r^{2\mathfrak{a}}$$

selbst wieder endliche Reihen mit wachsender Gliederzahl vorstellen.

Um nachzuweisen, dass die unendliche Reihe

$$\sum (-1)^{\mathfrak{c}} A_{\mathfrak{c}} B_{\mathfrak{c}} r_1^{2\mathfrak{c}}$$

konvergent ist, betrachten wir den Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder:

$$\frac{A_{\mathfrak{c}+1}}{A_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{B_{\mathfrak{c}+1}}{B_{\mathfrak{c}}} \cdot r_1^2$$

und bestimmen seinen Grenzwert für ein unbegrenzt wachsendes $\mathfrak{c}$. Bezeichnen wir in dem Ausdruck

$$A_{\mathfrak{c}} = \left(\frac{1}{(\mathfrak{c}+1)!}\right)^2 \left[1 + \sum_{(2\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c})} \left((\mathfrak{c} - 2\,\mathfrak{a}) \frac{(\mathfrak{c}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{a}+1)!}\right)^2\right]$$

die eckig eingeklammerte Summe der Kürze wegen mit $a_{\mathfrak{c}}$, und unterscheiden $\mathfrak{c}$ gerade $= 2\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ungerade $= 2\,\mathfrak{b} + 1$, so ergibt sich

$$a_{2\mathfrak{b}} = 1 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} \left((2\,\mathfrak{b} - 2\,\mathfrak{a}) \frac{(2\,\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{a}+1)!}\right)^2,$$

oder, wenn man die Glieder der Reihe $\sum$ in umgekehrter Reihenfolge ordnet, indem man $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{a}$ setzt:

$$a_{2\mathfrak{b}} = 1 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} \left(2\,\mathfrak{a} \cdot \frac{(2\,\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}+1)!}\right)^2 = 1 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}-1} \left((2\,\mathfrak{a}+2) \frac{(2\,\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}-1|-1}}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})!}\right)^2,$$

wo die letztere Form hervorgeht, wenn man von der Summe $\sum$ das erste Glied, welches Null ist, absondert, indem man zuerst $\mathfrak{a} = 0$, dann $\mathfrak{a} + 1$ statt $\mathfrak{a}$ setzt. Durch dieselbe Behandlung ergibt sich

$$a_{2\mathfrak{b}+1} = 1 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} \left((2\,\mathfrak{a}+1) \frac{(2\,\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}+1)!}\right)^2.$$

Setzt man hier das erste Glied ($\mathfrak{a} = 0$) der Summe $\sum$, nämlich

$$\left(\frac{(2\,\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\right)^2,$$

als Faktor heraus, so kommt

$$a_{2\mathfrak{b}+1} = \left(\frac{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\right)^2 \left[\left(\frac{(\mathfrak{b}+1)!}{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}\right)^2 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} \left((2\,\mathfrak{a}+1) \frac{(\mathfrak{b}+1)!}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}+1)!} \cdot \frac{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|-1}}{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}\right)^2\right],$$

oder, da

$$\frac{(\mathfrak{b}+1)!}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}+1)!} = (\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{a}|-1}$$

und

$$\frac{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}|-1}}{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}} = \frac{1}{(\mathfrak{b}+2+\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}$$

ist:

$$a_{2\mathfrak{b}+1} = \left(\frac{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\right)^2 \left[\left(\frac{(\mathfrak{b}+1)!}{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}\right)^2 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} \left((2\mathfrak{a}+1)\,\frac{(\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{b}+2+\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}\right)^2\right].$$

Auf demselben Wege findet man

$$a_{2\mathfrak{b}} = \left(\frac{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}}{\mathfrak{b}!}\right)^2 \left[\left(\frac{\mathfrak{b}!}{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}}\right)^2 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}-1} \left((2\mathfrak{a}+2)\,\frac{\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{b}+2+\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}\right)^2\right]$$

und

$$a_{2\mathfrak{b}+2} = \left(\frac{(2\mathfrak{b}+3)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\right)^2 \left[\left(\frac{(\mathfrak{b}+1)!}{(2\mathfrak{b}+3)^{\mathfrak{b}|-1}}\right)^2 + \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} \left((2\mathfrak{a}+2)\,\frac{(\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{b}+3+\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}}\right)^2\right].$$

Bilden wir nun die Quotienten $a_{2\mathfrak{b}+1} : a_{2\mathfrak{b}}$ und $a_{2\mathfrak{b}+2} : a_{2\mathfrak{b}+1}$, so bemerken wir zunächst, dass für den ersteren Fall

$$\frac{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!} : \frac{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}}{\mathfrak{b}!} = \frac{\mathfrak{b}!}{(\mathfrak{b}+1)!} \cdot \frac{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}}{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}} = \frac{2\mathfrak{b}+2}{\mathfrak{b}+1} \cdot \frac{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}}{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}} = 2$$

ist, und dass im zweiten Fall

$$\frac{(2\mathfrak{b}+3)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!} \cdot \frac{(\mathfrak{b}+1)!}{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}|-1}} = \frac{(2\mathfrak{b}+3)\,(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}-1|-1}}{(2\mathfrak{b}+2)^{\mathfrak{b}-1|-1}\,(\mathfrak{b}+3)} = \frac{2\mathfrak{b}+3}{\mathfrak{b}+3}$$

ist, folglich für $\mathfrak{b} = \infty$ ebenfalls $= 2$ wird. Wir bemerken ferner, dass in den Ausdrücken für a das erste Glied in der eckigen Klammer für $\mathfrak{b} = \infty$ verschwindet. Denn es ist beispielsweise

$$\frac{\mathfrak{b}!}{(2\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}-1|-1}} = \frac{2^{\mathfrak{b}-1|1}}{(\mathfrak{b}+3)^{\mathfrak{b}-1|1}} = \frac{2}{\mathfrak{b}+3} \cdot \frac{3}{\mathfrak{b}+4} \cdot \frac{4}{\mathfrak{b}+5} \cdots \frac{\mathfrak{b}}{2\mathfrak{b}+1} \left(< \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathfrak{b}-1},\ = 0 \text{ für } \mathfrak{b} = \infty\right)$$

Dagegen nähern sich die unter den Summenzeichen $\sum$ vorkommenden Quotienten mit unbegrenzt wachsendem $\mathfrak{b}$ dem Werte 1. Denn man hat z. B.

$$\frac{\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{b}+2+\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}|-1}} = \frac{\mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}-1)\,(\mathfrak{b}-2)\cdots(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}+2)\,(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}+1)}{(\mathfrak{b}+2+\mathfrak{a})\,(\mathfrak{b}+1+\mathfrak{a})\,(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})\cdots(\mathfrak{b}+4)\,(\mathfrak{b}+3)} = 1 \text{ für } \mathfrak{b} = \infty.$$

Die eckigen Klammern reduzieren sich daher bei unbegrenzt wachsendem $\mathfrak{b}$ auf die Summen der Quadrate aller geraden oder aller ungeraden Zahlen, und zwar ist

$$\sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} (2\mathfrak{a}+2)^2 = 4(\mathfrak{b}+1) + 6\mathfrak{b}(\mathfrak{b}+1) + \tfrac{4}{3}\mathfrak{b}(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}-1)$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\mathfrak{b}} (2\mathfrak{a}+1)^2 = \mathfrak{b}+1 + 4\mathfrak{b}(\mathfrak{b}+1) + \tfrac{4}{3}\mathfrak{b}(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}-1)$$

und der Quotient der beiden Summen nähert sich für ein endlos wachsendes $\mathfrak{b}$ der Einheit. Man hat also schliesslich:

$$\lim \frac{a_{2\mathfrak{b}+1}}{a_{2\mathfrak{b}}} = 4 \qquad \text{und} \qquad \lim \frac{a_{2\mathfrak{b}+2}}{a_{2\mathfrak{b}+1}} = 4$$

und allgemein, gleichviel ob $\mathfrak{c}$ gerade oder ungerade ist,

$$\lim \frac{a_{\mathfrak{c}+1}}{a_{\mathfrak{c}}} = 4.$$

In dem Ausdruck

$$B_{\mathfrak{c}} = \frac{1}{2^{2\mathfrak{c}}} \sum \frac{\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}|-1}(\mathfrak{c}+1)^{\mathfrak{a}|-1}}{(\mathfrak{a}!)^2} \nu^{2\mathfrak{a}}$$

gewinnt, wenn $\nu > 1$ ist, das Glied mit der höchsten Potenz von ν $(\mathfrak{a} = \mathfrak{c})$

$$\frac{\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}|-1}(\mathfrak{c}+1)^{\mathfrak{c}|-1}}{(\mathfrak{c}!)^2} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{2\mathfrak{c}} = (\mathfrak{c}+1)\left(\frac{\nu}{2}\right)^{2\mathfrak{c}}$$

bei endlos wachsendem $\mathfrak{c}$ das Uebergewicht über die Summe aller übrigen Glieder. Es ist daher

$$\lim \frac{B_{\mathfrak{c}+1}}{B_{\mathfrak{c}}} = \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \lim \frac{\mathfrak{c}+2}{\mathfrak{c}+1} = \left(\frac{\nu}{2}\right)^2.$$

Wir erhalten also schliesslich, da

$$A_{\mathfrak{c}} = \frac{a_{\mathfrak{c}}}{((\mathfrak{c}+1)!)^2}$$

ist, für ein unbegrenzt wachsendes $\mathfrak{c}$

$$\lim \frac{A_{\mathfrak{c}+1}}{A_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{B_{\mathfrak{c}+1}}{B_{\mathfrak{c}}} \cdot r_1^2 = \left(\frac{\nu r_1}{2}\right)^2 \lim \frac{a_{\mathfrak{c}+1}}{a_{\mathfrak{c}}} \left(\frac{(\mathfrak{c}+1)!}{(\mathfrak{c}+2)!}\right)^2 = (\nu r_1)^2 \lim \left(\frac{1}{\mathfrak{c}+2}\right)^2 = 0.$$

Die unendliche Reihe

$$\sum (-1)^{\mathfrak{c}} A_{\mathfrak{c}} B_{\mathfrak{c}} r_1^{2\mathfrak{c}}$$

konvergiert also, da der Quotient des $(\mathfrak{c}+1)^{\text{ten}}$ Gliedes durch das $\mathfrak{c}^{\text{te}}$ für $\mathfrak{c} = \infty$ verschwindet, für jeden Wert von r_1, zunächst wenigstens für $\nu > 1$. Da aber die Koeffizienten $B_{\mathfrak{c}}$ für kleinere ν kleiner werden, so konvergiert sie auch für $\nu \overline{\gtrless} 1$. Die Reihe konvergiert also für alle endlichen Werte von r_1 und ν, oder von $r = \nu r_1$.

II.

Eine zweite Entwickelung des Intensitätsausdruckes

$$M^2 = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{2\pi} \left(1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)\right) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \, d\vartheta$$

ergab sich[1]) durch teilweise Integration, indem in vorstehendem Integral der Quotient

$$\frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta}$$

als integrierter Faktor angesehen wurde. Setzt man zur Abkürzung

$$1 - J_0^2(z) - J_1^2(z) = \Phi_0, \qquad \int \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \, d\vartheta = \varphi_0,$$

so erhält man, da wegen $z^2 = r_1^2(1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta)$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = r_1^2 \cdot \frac{\nu}{z} \sin \vartheta$$

ist:

$$\int \left(1 - J_0^2(z) - J_1^2(z)\right) \frac{1 - \nu \cos \vartheta}{1 + \nu^2 - 2\nu \cos \vartheta} \, d\vartheta = \Phi_0 \varphi_0 - \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} \varphi_0 \, d\vartheta$$

$$= \Phi_0 \varphi_0 - \int \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \varphi_0 \, d\vartheta = \Phi_0 \varphi_0 - r_1^2 \nu \int \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \varphi_0 \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Nimmt man nun in letzterem Integral bei Fortsetzung der teilweisen Integration $\varphi_0 \sin \vartheta$ als integrierten Faktor, u. s. f. bei den folgenden Integrationen, indem man

$$\int \varphi_0 \sin \vartheta \, d\vartheta = \varphi_1, \quad \int \varphi_1 \sin \vartheta \, d\vartheta = \varphi_2, \ldots \int \varphi_\mathfrak{a} \sin \vartheta \, d\vartheta = \varphi_{\mathfrak{a}+1},$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad \Phi_3 = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \ldots \Phi_{\mathfrak{a}+1} = \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_\mathfrak{a}}{\partial z}$$

setzt, so erhält man für das obige unbestimmte Integral die Entwickelung

$$\sum (-1)^\mathfrak{a} r_1^{2\mathfrak{a}} \nu^\mathfrak{a} \Phi_\mathfrak{a} \varphi_\mathfrak{a},$$

und nach Einsetzung der Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, da $[\varphi_\mathfrak{a}]_0 = 0$ und

$$[\varphi_\mathfrak{a}]_\pi = \frac{\pi}{2^{\mathfrak{a}|2}} \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=\mathfrak{a}} \frac{(2\mathfrak{a})^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} \nu^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}$$

---

[1]) l. c. p. 492.

die Lichtstärke

$$M^2 = \sum \Phi_a \psi_a,$$

wo

$$\psi_a = 4(-1)^a \frac{r_1^{2(a-1)}}{2^{a|2}} \sum_{b=0}^{b=a} \frac{(2a)^{b|-1}}{b!} \nu^{2a-b}$$

ist. Um zu zeigen, dass auch diese Reihe M^2 konvergiert, betrachten wir wiederum den Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder $\Phi_{a+1}\psi_{a+1} : \Phi_a \psi_a$. Wenden wir uns zunächst zu dem Quotienten $\psi_{a+1} : \psi_a$, so ist erstlich

$$\frac{r_1^{2a}}{2^{a+1|2}} : \frac{r_1^{2a-2}}{2^{a|2}} = \frac{r_1^2}{2a+4},$$

ferner, wenn man in den Summen die Reihenfolge der Glieder umkehrt,

$$\frac{\sum_{b=0}^{b=a+1} \frac{(2a+2)^{b|-1}}{b!} \nu^{2a+2-b}}{\sum_{b=0}^{b=a} \frac{(2a)^{b|-1}}{b!} \nu^{2a-b}} = \frac{\frac{(2a+2)^{a+1|-1}}{(a+1)!} \cdot \nu^{a+1} + \frac{(2a+2)^{a|-1}}{a!} \cdot \nu^a + \frac{(2a+2)^{a-1|-1}}{(a-1)!} \cdot \nu^{a-1} + \ldots}{\frac{(2a)^{a|-1}}{a!} \nu^a + \frac{(2a)^{a-1|-1}}{(a-1)!} \nu^{a-1} + \frac{(2a)^{a-2|-1}}{(a-2)!} \nu^{a-2} + \ldots}$$

Setzt man hier sowohl im Zähler als im Nenner das erste Glied als Faktor heraus und beachtet, dass

$$\frac{(2a+2)^{a+1|-1}}{(a+1)!} \nu^{a+1} : \frac{(2a)^{a|-1}}{a!} \nu^a = \frac{(2a+2)(2a+1)(2a)^{a-1|-1}}{(2a)^{a-1|-1}(a+1)(a+2)} \nu = 2\frac{2a+1}{a+2} \nu$$

und dass beispielsweise

$$\frac{(2a+2)^{a|-1}}{a!} : \frac{(2a+2)^{a+1|-1}}{(a+1)!} = (a+1)\frac{(2a+2)^{a|-1}}{(2a+2)^{a|-1}(a+2)} = \frac{a+1}{a+2},$$

sodann

$$\frac{(2a+2)^{a-1|-1}}{(a-1)!} : \frac{(2a+2)^{a+1|-1}}{(a+1)!} = a(a+1)\frac{(2a+2)^{a-1|-1}}{(2a+2)^{a-1|-1}(a+3)(a+4)} = \frac{a(a+1)}{(a+3)(a+4)}$$

u. s. w. ist, so ergibt sich der Quotient der beiden Summen

$$\frac{\sum_0^{a+1}}{\sum_0^{a}} = 2\nu \cdot \frac{2a+1}{a+2} \cdot \frac{1 + \frac{a+1}{a+2} \cdot \frac{1}{\nu} + \frac{a(a+1)}{(a+3)(a+4)} \cdot \frac{1}{\nu^2} + \ldots}{1 + \frac{a}{a+1} \cdot \frac{1}{\nu} + \frac{a(a-1)}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{1}{\nu^2} + \ldots}.$$

Zähler und Nenner des letzten Quotienten nähern sich mit wachsendem a der Gleichheit, der Quotient selbst also der Einheit, und man hat

$$\lim \frac{\sum_0^{a+1}}{\sum_0^{a}} = 2\nu \lim \frac{2a+1}{a+2} = 4\nu,$$

folglich mit Rücksicht auf den oben bereits ermittelten Faktor mit r_1^2:

$$\lim \frac{\psi_{\mathfrak{a}+1}}{\psi_{\mathfrak{a}}} = 4\,\nu\, r_1^2 \lim \frac{1}{2\,\mathfrak{a}+4}.$$

Um den Grenzwert von $\Phi_{\mathfrak{a}+1} : \Phi_{\mathfrak{a}}$ zu bestimmen, machen wir von einer anderen Entwickelung der Funktion $\Phi_{\mathfrak{a}+1}$ Gebrauch, die nach den Differentialquotienten der Funktion $\Phi = \Phi_0 = 1 - J_0^2 - J_1^2$ fortschreitet und durch fortgesetzte Anwendung des Bildungsgesetzes $\Phi_{\mathfrak{a}+1} = \frac{1}{z}\frac{\partial \Phi_{\mathfrak{a}}}{\partial z}$ erhalten wird. Es ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathfrak{a}+1} = (-1)^{\mathfrak{a}} \Big(& 1^{\mathfrak{a}|2} z^{-(2\mathfrak{a}+1)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 1^{\mathfrak{a}|2} z^{-2\mathfrak{a}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + (\mathfrak{a}-1)\, 1^{\mathfrak{a}-1|2} z^{-(2\mathfrak{a}-1)} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \\ & - \frac{1}{3}(\mathfrak{a}-2)\, 1^{\mathfrak{a}-1|2} z^{-(2\mathfrak{a}-2)} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + \frac{1}{6}(\mathfrak{a}-2)(\mathfrak{a}-3)\, 1^{\mathfrak{a}-2|2} z^{-(2\mathfrak{a}-3)} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial z^5} \\ & - \frac{1}{30}(\mathfrak{a}-3)(\mathfrak{a}-4)\, 1^{\mathfrak{a}-2|2} z^{-(2\mathfrak{a}-4)} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial z^6} + \ldots \Big),\end{aligned}$$

wo der Natur der Sache nach die Exponenten von z weder Null noch positiv, die Exponenten der Faktoriellen niemals negativ sein können, und daher Glieder, bei welchen dies eintreten würde, einfach wegzulassen sind (so ergibt sich z. B. für $\mathfrak{a} = 0 : \Phi_1 = z^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, wie es sein muss).

Setzt man in dieser Entwickelung zur Rechten $1^{\mathfrak{a}|2} z^{-(2\mathfrak{a}+1)}$ heraus, und berücksichtigt, dass

$$\frac{1^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|2}}{1^{\mathfrak{a}|2}} = \frac{1^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|2}}{1^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}|2}(2\,\mathfrak{a}-2\,\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}|2}} = \frac{1}{(2\,\mathfrak{a}-2\,\mathfrak{b}+1)^{\mathfrak{b}|2}}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathfrak{a}+1} &= (-1)^{\mathfrak{a}} \frac{1^{\mathfrak{a}|2}}{z^{2\mathfrak{a}+1}} \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\mathfrak{a}-1}{2\,\mathfrak{a}-1} z^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{a}-2}{2\,\mathfrak{a}-1} z^3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \\ &\qquad + \frac{1}{6}\frac{(\mathfrak{a}-2)(\mathfrak{a}-3)}{(2\,\mathfrak{a}-3)(2\,\mathfrak{a}-1)} z^4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial z^5} - \ldots \Big) \\ &= (-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{1^{\mathfrak{a}|2}}{z^{2\mathfrak{a}+1}} \cdot F_{\mathfrak{a}+1}.\end{aligned}$$

Da

$$\frac{1^{\mathfrak{a}|2}}{1^{\mathfrak{a}-1|2}} = 2\,\mathfrak{a} - 1$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\Phi_{\mathfrak{a}+1}}{\Phi_{\mathfrak{a}}} = -\frac{2\,\mathfrak{a}-1}{z^2} \cdot \frac{F_{\mathfrak{a}+1}}{F_{\mathfrak{a}}}.$$

Der Quotient

$$\frac{F_{\mathfrak{a}+1}}{F_{\mathfrak{a}}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\mathfrak{a}-1}{2\mathfrak{a}-1} z^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{a}-2}{2\mathfrak{a}-1} z^3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + \dots}{\frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\mathfrak{a}-2}{2\mathfrak{a}-3} z^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{a}-3}{2\mathfrak{a}-3} z^3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + \dots}$$

nähert sich aber mit wachsendem $\mathfrak{a}$ dem Werte 1, da Zähler und Nenner desselben der Gleichheit zustreben. Man hat daher, da $z = r_1(1 + \nu)$ ist,

$$\lim \frac{\Phi_{\mathfrak{a}+1}}{\Phi_{\mathfrak{a}}} = -\frac{1}{z^2} \lim (2\mathfrak{a} - 1) = -\frac{1}{r_1^2 (1+\nu)^2} \lim (2\mathfrak{a} - 1).$$

Da andererseits

$$\lim \frac{\psi_{\mathfrak{a}+1}}{\psi_{\mathfrak{a}}} = 4\nu r_1^2 \lim \frac{1}{2\mathfrak{a}+4}$$

oben bereits gefunden ist, so haben wir endlich

$$\lim \frac{\Phi_{\mathfrak{a}+1}\psi_{\mathfrak{a}+1}}{\Phi_{\mathfrak{a}}\psi_{\mathfrak{a}}} = \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} \lim \frac{2\mathfrak{a}-1}{2\mathfrak{a}+4}$$

oder, da

$$\lim \frac{2\mathfrak{a}-1}{2\mathfrak{a}+4} = 1$$

ist:

$$\lim \frac{\Phi_{\mathfrak{a}+1}\psi_{\mathfrak{a}+1}}{\Phi_{\mathfrak{a}}\psi_{\mathfrak{a}}} = \frac{4\nu}{(1+\nu)^2}.$$

Der Quotient $4\nu | (1+\nu)^2$ ist aber stets kleiner als 1. Die Reihe

$$M^2 = \sum \Phi_{\mathfrak{a}} \psi_{\mathfrak{a}}$$

ist also, da der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder sich mit unbegrenzt wachsendem $\mathfrak{a}$ einer Grenze < 1 nähert, konvergent, und zwar konvergiert sie um so rascher, je grösser ν, also auch z ist.