Syngonielehre.

Von

E. von Fedorow.

(Mit einer Tafel.)

Das vorige Jahrhundert hat durch die berühmten Werke einer Reihe genialer Mathematiker, wie Steiner, Chasles, Plücker, von Staudt, Schrötter, Reye und anderer, eine wunderschöne mathematische Disziplin geschaffen, welche von verschiedenen Gesichtspunkten aus bearbeitet und sogar mit verschiedenen Namen belegt wurde, wie z. B. Geometrie der Lage, projektive Geometrie, Lehre von den Büscheln überhaupt und harmonischen Büscheln im besonderen, noch abstrakter: Strahlenlehre. Man pflegt besonders diese Disziplin durch den Namen Neuere oder Höhere Geometrie zu bezeichnen.

Als charakteristisches Merkmal für diese Disziplin kann das Studium der unendlichen Gesamtheiten bedingter geometrischer Gebilde gelten im Gegensatz zu früherer Geometrie, welche sich fast ausschließlich mit vereinzelten Gebilden betätigte.

Die Sätze dieser neuen Lehre erhalten dadurch einen sehr abstrakten Charakter und viel weiter greifende Bedeutung. Von solchen Sätzen, wie Chasles' Dualismussatz, kann man mit Recht sagen, daß derselbe uns eine unbestimmt große Reihe neuer Sätze kund macht: bei jedem wesentlichen Schritte bestimmter Art wird derselbe auch in künftiger Zeit die Anzahl der Sätze verdoppeln.

Da aber aus ganz natürlichen Gründen die reinen Mathematiker stets zu höchster Allgemeinheit bestrebt waren, so erwies sich, daß die beschränkteren Verzweigungen dieser Disziplin, welchen aber, wegen zahlreichen Anwendungen, besonders auf Kristallographie, spezielle Bedeutung zukommt, geringeres Interesse in dem Geiste dieser genialen Männer erregten; aber nur geringeres, da auch zahlreiche Anwendungen von denselben nicht übersehen wurden. Durch die Werke und vereinzelte Sätze von Gauß, Möbius und den oben erwähnten Autoren erhielt auch die Kristallographie manchen wichtigen Beitrag.

Als solche beschränktere Disziplin der Neueren Geometrie kann auch die Lehre von den rationalen Strahlensystemen, kürzer Syngonielehre, abgesondert werden. Der Grundstein für diese abgesonderte Teildisziplin wurde von Möbius' Baryzentrischem Kalkül, Hessels Kristallonomie (Elementen der Gestaltenlehre) und J. Graßmans Werkchen „Zur physischen Kristallonomie“ gelegt. In diesen grundlegenden Werken sind jedoch manche Fragen ersten Ranges unberührt geblieben, sogar das zu Grunde dieser Lehre liegende Syngonieellipsoidgesetz nicht erwähnt. Aber die Kenntnis dieser Werke orientiert einen Kristallographen in den Fragen dieser Lehre gut und regt zu weiteren Schritten an und bereitet dieselben vor.

Jedenfalls war es den neuesten Kristallographen vorbehalten, diese spezielle Disziplin als eine der zu Grunde stehenden Hilfslehren zur Kristallographie weiter zu entwickeln. Und die vorliegende Arbeit bietet einen Versuch dar, nicht nur die schon errungenen

Resultate in einheitlichem Bilde zu kombinieren, sondern, und dabei in erster Linie, neue Gesichtspunkte hervortreten zu lassen.

Der Verfasser hegt die Überzeugung, daß eine im Vergleich mit dem blühenden Zustande anderer exakter Wissenschaften unermeßliche Zurückgebliebenheit der Kristallographie, welche sich in einer Reihe anomaler und beispielloser Tatsachen kund gab (wie vollständige Jahrzehnte hindurch dauerndes Ignorieren der grundlegenden Werke Hessels, so langes Vorherrschen von so irrtümlichen Auffassungen, wie die von Naumann, welche bis heutzutage Anklang haben u. s. f.), gerade davon herrührt, daß die für die Kristallographie im Grunde stehenden Disziplinen nicht hinreichend von Spezialisten berücksichtigt waren; teilweise aber, weil diese Disziplinen selbst bis zu letzter Zeit nicht vollkommen genug in ihren Teilen bearbeitet und zu Einheitlichem verbunden waren.

Der Verfasser hielt sich von den Schwierigkeiten nicht ab, diesem Mißzustand nach Kräften entgegen zu wirken.

Es möge auch diese Arbeit dazu beitragen.

I. Teil.

Syngonielehre in der Ebene.

Der Syngoniebegriff ist von der Kristallographie geschaffen.

Eine Annäherung an diesen Begriff kam schon im primitiven, rein empirischen Zustande dieser Wissenschaft in der Form eines kristallographischen „Systems". In dieser Form wurde der Begriff von dem berühmten deutschen Kristallographen Weiß hervorgehoben, und zwar in engem Zusammenhang mit dem von Demselben entwickelten Begriff der „kristallographischen Achsen".

Dieser letzte, echt mathematische Begriff entwickelte sich logisch auf Grund des zuerst von Hauy konstatierten Erfahrungsgesetzes, welches von dem letzteren zugleich theoretische Aufklärung erhielt, welche den heutigen kristall-struktur-theoretischen Vorstellungen sehr nahe kommt.

Der Begriff der kristallographischen Achse unterscheidet sich dadurch von dem der Koordinatenachsen der analytischen Geometrie, daß in demselben auf jeder Achse besonders eine bestimmte Strecke für eine Einheit angenommen wird, infolgedessen sämtliche Gebilde der Kristallographie in diesen Einheiten einen rationalen Ausdruck erhalten.

Vom Standpunkte der neueren mathematischen Philosophie kann man also sagen, daß dieser kristallographische Begriff ein arithmologischer ist, während der Begriff der Koordinatenachse der Analysis angehört, wo kontinuierlich veränderliche Größen zur Untersuchung kommen.

Auf diese Weise erhielt das Hauysche Gesetz in den kristallographischen Achsen einen anschaulichen Ausdruck.

Nun unterschied Weiß die kristallographischen Systeme gemäß der Lage und Streckeneinheiten der Achsen.

Da aber der Beweis leicht erbracht werden konnte, daß als kristallographische Achsen beliebige Geraden angenommen werden können, in welchen die Kristallflächen sich schneiden lasseu, so war somit klar geworden, daß solche Bestimmung der Systeme keine genügende, sondern eine willkürliche ist. Die Entdeckung der nahen Korrelation zwischen den auf diese Weise bestimmten Systemen und deu optischen (später auch anderen physikalischen) Eigenschaften der Kristalle hat aber diesem Begriffe große praktische Bedeutung verliehen, welche allen Kristallographen ganz klar wurde.

Diese wichtigen Schritte in der Kristallphysik habeu auf lange Zeit die Kritik dieses Begriffes paralisiert, aber zugleich verlor derselbe einen bestimmten geometrischen Sinn, da für denselben die physikalischen Eigenschaften eine noch wichtigere Rolle erhielten.

Später erwies sich, daß in Bezug auf verschiedene physikalische Eigenschaften verschiedene Verteilung der Kristalle in Gruppen Geltung hat, und dieser Umstand hat die Frage über den Inhalt des Begriffes „Kristallsystem“ noch mehr verdunkelt.

Die dadurch entstandene Verlegenheit wurde dadurch beseitigt, daß man diesen Begriff, welcher stets in der kristallographischen Praxis als ein Grundbegriff galt, in der Theorie für einen willkürlichen erklärt, dessen Inhalt nicht etwaigen strengen Definitionen, sondern lediglich praktischen Gesichtspunkten entsprechen mußte.

Besonders wurde dieser Standpunkt von mathematischer Seite hervorgehoben. Am schärfsten wurde dies durch Herrn Schönflies, Autor des ausführlichen Werkes „Kristallsysteme und Kristallstruktur“, ausgesprochen. Dort (S. 106) heißt es: „Als Einteilungsgrund kommt in erster Linie die Analyse des symmetrischen Verhaltens in Betracht; daneben sind Spekulationen über die Struktur der Kristalle, sowie spezielle physikalische und schließlich auch praktische Gesichtspunkte für die Ausgestaltung der üblichen Systematik maßgebend gewesen.“

In einem der letzten Lehrbücher wird dies sogar folgendermaßen ausgesprochen: „Daß die Verteilung der Kristalle in Systeme eine künstliche ist, wird dadurch bewiesen . . .“; „somit hat die Verteilung der Kristalle in Systeme ihren Grund in der Vereinfachung des Ausdrucks durch zweckmäßiges Koordinatensystem, insoferne dieselbe bei gegebener Symmetrie zulässig ist. Dieses Prinzip ist ein rein methodologisches, also kein für die Natur der Kristalle wesentliches“.[1])

Die echt wissenschaftliche, besonders mathematische Behandlung erfordert aber die Anwendung streng begrenzter Begriffe, welchen jede Zweideutigkeit fremd ist.

Dies war der Grund, warum der Verfasser einen solchen Begriff Syngonie vorgeschlagen und entwickelt hat.[2])

Wie die Symmetriearten eine ganz natürliche Einteilung der Kristalle sind, welcher streng mathematischer Grund zukommt, so besitzen die „Syngoniearten“ ebensolchen Grund in Bezug auf die kristallographischen Komplexe, und dieser Grund liegt in speziellen Symmetriearten dieser Komplexe selbst (also komplexiale Symmetriearten = Syngoniearten).

Der Begriff des kristallographischen Komplexes erhielt durch die logische Entwicklung des Hauyschen Gesetzes ganz streng abgegreuzte Bedeutung. In diesem Begriff eines Büschels möglicher Flächen und Kanten liegt keine Spur einer Unbestimmtheit vor.

---

[1]) G. Wulffs Lehrbuch der Kristallographie. Warschau 1904, 175 (russ.). Es bleibt aber unbegreiflich, warum der Begriff der Syngonie, in welchem keine Spur einer Willkür vorhanden ist, unerwähnt geblieben.

[2]) Das Fachwort selbst wurde zuerst in Ch. Sorets „Crystallographie physique“ zur Anwendung gebracht.

Das Objekt dieses Begriffes ist aber von mehr abstrakter Natur als die Kristallform. Der Komplex bleibt identisch, indem zugleich die Symmetriearten der betreffenden Kristallgestalten sich sehr verschieden erweisen. Insofern bei Veränderung der Symmetriearten der Komplex keine Veränderung erleidet, bleibt seine Syngonie dieselbe. Somit bürgt die Einteilung nach Syugonien iu sich eiue Gruppe verschiedener Symmetriearten.

Die Begriffe der Syngonie und des kristallographischen Komplexes scheinen untereinander so eng verbunden, daß man hätte sagen wollen, daß Syngonielehre eigentlich die Lehre von den Komplexen ist. Dies würde aber nicht ganz genau sein, da, wie wir es ersehen werden, es Komplexe gibt, welche durch keine bestimmte komplexiale Symmetrie ausgezeichnet sind, also keiner bestimmten Syngonieart zugerechnet werden können.

Wie die Figuren in der Ebene einen partikulären Fall der Figuren im Raume darstellen, so kann man auch als einen partikulären Komplex einen solchen betrachten, welcher in der Ebene liegt und eigentlich eiueu Strahlenbüschel bildet. Ein solcher Komplex wird eine Zone genannt, und kann ebenfalls nach Syngoniearten uuterschieden werden.

Deshalb besteht der erste Schritt in der mathematischen Syngonielehre in der Abgrenzung der Syngoniearten der Zonen, welche in dieser Beziehung in der Arbeit über orthogonale und isotrope Zone studiert wurden.[1])

Im Grunde steht der Ausdruck der Rationalität der Doppelverhältnisse, und zwar

$$\frac{\sin(r\,r'')}{\sin(r'r'')} : \frac{\sin(r\,r''')}{\sin(r'r''')} = k, \qquad 1)$$

wo r, r', r'', r''' vier Strahlen des ebenen Komplexes sind (welche zugleich als vier Kauten einer möglicheu Kristallfläche und vier Normale eines Flächenbüschels betrachtet werden können) und k ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gauze Zahlen sind.

Aus dieser Relation geht direkt hervor, daß ein ebener Komplex durch drei Strahlen, folglich zwei Winkel resp. zwei Konstante bestimmt wird. In der Tat schreibt man der Zahl k alle möglichen rationalen Bedeutungen zu, so erhält man für r''' alle möglichen Lagen im Komplexe, d. h. die vollständigen Büschel.

In dem allgemeinen Fall gibt es keine Symmetrieelemente in diesem Komplex (abgesehen vom Inversionszentrum, welches notwendigerweise da ist,)[2]) welche zwei verschiedene Strahlen zur Deckung bringen könneu.

In diesem Falle sind also sämtliche Strahlen singuläre Richtungen. Dadurch wird die monokline Syugonie dieser schiefen Zonen bestimmt.[3])

Dabei wird vorausgesetzt, daß rechte Winkel vollständig abwesend sind, weil bei der Annahme ihrer Anwesenheit die Eigeuschaften des Komplexes wesentlich andere werden.

Nehmen wir z. B. für einen rechten den Winkel $r\,r'$. Nun nimmt die Formel 1) die Form eines einfachen Verhältnisses:

$$\operatorname{tang}(r\,r'') : \operatorname{tang}(r\,r''') = k \qquad 2)$$

und dann kommt komplexiale Symmetrie zum Vorschein.

---

[1]) Verhandlungen der K. Mineralog. Ges. zu St. Petersburg **25**, 53.

[2]) Da aber die Ebene des Büschels als eine Symmetrieebene desselben betrachtet werden kann, so folgt, daß auch die zweizählige, zur Büschelebene senkrechte Achse als stets vorhandene anerkannt werden muß.

[3]) Reguläre Plan- und Raumteilung. Abhandl., d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Kl. 20, II. Abt., 1900.

In der Tat, unter Annahme $k = -1$, erhält man:

$$\operatorname{tang}(r\,r'') := -\operatorname{tang}(r\,r''') \text{ oder } r\,r'' = -r\,r'''.$$

In diesem Fall ist also jedem beliebigen Strahl r'' ein anderer r''' zugeordnet, welcher in anderer Richtung mit r denselben Winkel bildet wie r''. Somit kann den Strahl r als die Trace einer Symmetrieebene[1]) des Komplexes betrachtet werden; dasselbe gilt für den zu ihm senkrechten Strahl r'.

Alle Strahlen sind also paarweise einander als symmetrisch gleiche zugeordnet. Allein die besonderen Strahlen r und r' verbleiben als die singularen, das heißt sind keinen anderen Strahlen des Komplexes symmetrisch gleich, da allein für diese Strahlen die Winkel $r\,r''$ und $r\,r'''$ gleich Null sind.

In diesem Fall gibt es also zwei zueinander senkrechte singuläre Richtungen. Diese Syngonieart ist als eine rhombische bezeichnet worden, und die Zonen selbst als die orthogonalen.[2]) Die Anzahl der Konstanten reduziert sich zu einer einzigen, z. B. dem Winkel $r\,r''$. Die Entwicklung des Komplexes geschieht, indem der Zahl k alle rationalen Bedeutungen beigelegt werden.

In der Aufstellung der Formel 2) wurde das Vorhandensein wenigstens eines rechten Winkels vorausgesetzt; in der Tat kann für diese Syngonieart allein ein solcher Winkel zugelassen werden; unter Annahme eines zweiten wird leicht der Beweis geliefert, daß dann sämtliche Strahlen paarweise untereinander senkrecht stehen, und die Eigenschaften des Komplexes werden vom Grunde aus verschieden.

In der Tat, unter Annahme des rechten Winkels $r\,r'$ und zugleich etwa $r''\,r'''$, erhält man:

$$\operatorname{tang}(r\,r'')\operatorname{tang}(r\,r''') = -1$$

und dann nach der Multiplikation von 2):

$$\operatorname{tang}^2(r\,r'') = -k = k'. \qquad 3)$$

Diese Gleichheit zeigt schon, daß jetzt keine einzige Konstante da ist, sondern sämtliche Winkel des Komplexes von vornherein durch die Bedingung der Rationalität der Tangentenquadrate bestimmt werden; k muß dabei natürlich negativ angenommen werden, da ein Quadrat nur positiv sein kann. Dem Werte $k' = \infty$ entspricht jedesmal der rechte Winkel $r\,r''$, unabhängig davon, welcher Strahl als Ausgangsstrahl angenommen wird.

Solche Zonen wurden als isotrope bezeichnet.

Als Folge davon, daß jedem Strahl ein ihm senkrechter Strahl zugeordnet ist, kann man sagen, daß jeder Strahl zugleich die Trace einer Symmetrieebene ist: also sämtliche Flächen einer isotropen Zone sind Symmetrieebenen. Auf dem Satze fußend, nach welchem zwei Symmetrieebenen unter dem Winkel α sich in Symmetrieachsen schneiden,

[1]) Resp. als zweizählige Symmetrieachse, was für die ebenen Figuren ganz gleichbedeutend ist.

[2]) Für die ebenen Systeme gilt diese Bezeichnung mit wörtlicher Genauigkeit, da diese Symmetrieart wirklich die Symmetrieart eines Rhombus ist. In der Tat aber ist die Bezeichnung den Raumfiguren entnommen, wo solche Bezeichnungen wie „Symmetrie des Rhombus", „Symmetrie des Quadrates" befremdend klingen.

deren Zähligkeit $\frac{\pi}{a}$ ist, kann man sagen, daß die Achse jeder isotropen Zone eine Symmetrieaxe von unendlicher Zähligkeit ist.

Zusammen genommen erweist sich die komplexiale Symmetrie einer isotropen Zone als die Symmetrie des Kreises.

Wenn aber die Strahlen eines isotropen Komplexes durch die Bedingung der Rationalität der Tangentenquadrate verbunden sind, so folgt daraus noch nicht, daß überhaupt nur ein einziger isotroper Komplex möglich ist; auch daraus, daß die Achsen der isotropen Zonen Symmetrieaxen sind von unendlicher Zähligkeit, folgt noch nicht, daß dieselben zugleich Symmetrieaxen sind von beliebiger Zähligkeit (abgesehen davon, daß dieselben, wie erwähnt, notwendigerweise zweizählige Axen sind).

Wegen besserer Aufklärung in den Fragen dieser Art wollen wir umständlicher die Grundformel 1) diskutieren.

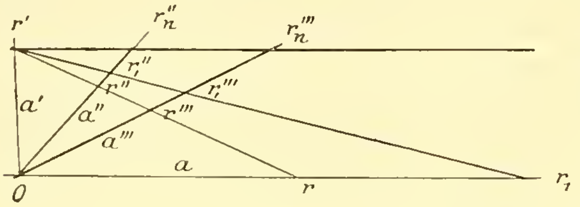


Fig. 1.

Ziehen wir durch den Stralenkomplex eine Schnittgerade $r\,r'$ (Fig. 1), und bezeichnen die dadurch auf den Strahlen r, r', r'', r''' bedingten Strecken respektive durch a, a', a'', a'''.

Nun ist die Gleichung 1) in der Form

$$\frac{a\,a'' \sin(r\,r'')}{a'\,a'' \sin(r'\,r r'')} : \frac{a\,a''' \sin(r\,r''')}{a'\,a''' \sin r'\,r''')} = k \qquad \text{1 a)}$$

darstellbar, da dadurch gleiche Größen als Faktoren und als Divisoren eingeführt sind.

In dieser Form sind aber die Glieder dieses Doppelverhältnisses die Hälften der Dreiecksflächen, welche eine gemeinschaftliche Gerade zur Basis und den gemeinschaftlichen Eckpunkt O besitzen; da also alle Dreiecke gleiche Höhe besitzen, so siud ihre Flächen den Basisseiten proportional. Also kann dieselbe Gleichung auch in der Form

$$\frac{\Delta\, r\,O\,r''}{\Delta\, r'\,O\,r''} : \frac{\Delta\, r\,O\,r'''}{\Delta\, r'\,O\,r'''} = \frac{r\,r''}{r'\,r''} : \frac{r\,r'''}{r'\,r'''} = k \qquad \text{1 b)}$$

geschrieben werden, und hat diese Form für beliebige Schnittgerade Geltung.

Nun wollen wir diese Schnittgerade aus dem Punkt r' drehen, bis sie endlich dem Strahle r parallel sein wird. Alle Strahlenstrecken ändern sich dabei in ihrer Größe, aber diejenige des Strahles r nähert sich der Größe ∞, und erreicht diese Grenzgröße, sobald die Schnittgerade dem Strahle r genau parallel kommt.

In dieser Grenzgröße nähern sich in der Formel 1 b) die Strecken $r\,r''$ und $r\,r'''$; aber $r\,r'' = r\,r''' + r'''\,r''$; das Verhältnis dieser Strecken ändert sich also in der Reihenfolge:

$$\frac{r\,r''}{r\,r'''} = \frac{r\,r''' + r'''\,r''}{r\,r'''} = 1 + \frac{r'''\,r''}{r\,r'''} : \; 1 + \frac{r_1'''\,r_1''}{r_1\,r_1'''}; \; 1 + \frac{r_2'''\,r_2''}{r_2\,r_2'''} \dots \; 1 + \frac{r_n'''\,r_n''}{\infty},$$

also besitzt es zu seinem Grenzwert die Einheit; für diesen Grenzfall besteht als die Relation:

$$r'\,r''' : r'\,r'' = k, \qquad \text{1 c)}$$

das heißt: die Verhältnisse der Strecken auf der dem Strahle r parallellen Schnittgerade werden rational.

Die rationale Zahl ist also der Bruch $\frac{p_1}{p_2}$, wo p_1 und p_2 ganze Zahlen sind. In der Form dieses Bruches können wir auch ganze Zahlen schreiben, wie $1 = 1:1$, $2 = 2:1$ u. s. f.

Jede solche Zahl bezieht sich auf einen ganz bestimmten Strahl, wenn wir nur wissen, welche Strecke dem Verhältnis 1 : 1 entspricht.

Zur vollständigen Charakteristik des Komplexes ist (außer dem Winkel zwischen den Strahlen r und r') noch die Strecke $O\,r'$ auf dem Strahle r' nötig, welche ebenfalls als eine Einheit in dieser Richtung angenommen werden kann.

Da das Verhältnis $\frac{r'\,r_n'''}{O\,r'}$ für jeden gegebenen Strahl r''' konstant bleibt, so ist dasselbe die echte Charakteristik des Strahles selbst. Ist $r'\,r_n''' = p_1/p_2$, so erhalten wir bei angezeigter Annahme $\frac{r'\,r_n'''}{O\,r'} = \frac{p_1/p_2}{1} = \frac{p_1}{p_2}$, wo p_1 und p_2 ganze Zahlen sind, positive oder negative.

Daraus ersehen wir, daß derselbe Strahl durch zwei ganze Zahlen charakterisiert werden kann, und diese Zahlen sind Strecken auf den Strahlen r und r', welche in bedingten Einheiten ausgedrückt sind. Das ist das einfachste Verfahren der Reproduktion des vollständigen Komplexes durch alle möglichen Kombinationen zweier ganzen Zahlen. Dabei aber dürfen behufs vollständiger Eindeutigkeit diese Zahlen keine gemeinschaftlichen Faktoren besitzen, und nun erhält das Symbol $(p_1\,p_2)$ die Bezeichnung des Symboles des gegebenen Strahles und die Zahlen selbst die seiner Indizes.

Auf Grund dieser einfachen Relationen ist es sehr leicht, den Komplex einer natürlichen Entwicklung nach Perioden zu unterziehen (Fig. 2).

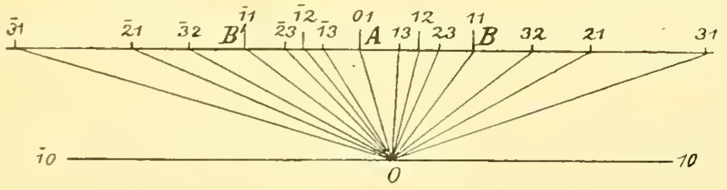


Fig. 2.

In der Tat dienen als Grundstrahlen die Strahlen $r = (10)$ und $r' = (01)$; zugleich sind für dieselben die Einheitsstrecken OA resp. AB gegeben; dem Strahl OB würde dann das Symbol (11) eigen sein; dem Strahl OB', für welchen $AB' = AB$, gehört das Symbol $(\bar{1}1)$ (und diese vier Strahlen bilden bekannterweise das harmonische Büschel).

Nun bemerken wir, daß das Symbol (11) aus den Symbolen (10) und (01) durch Summierung der respektiven Indizes entsteht $(1+0;\ 0+1)$; dasselbe hat in Bezug auf $(\bar{1}1)$ statt: $(\bar{1}1) \equiv (01) + (\bar{1}0) \equiv (0 + \bar{1};\ 1 + 0)$.

Diese vier Strahlen bilden die I. Periode in der Entwicklung des Komplexes.

Nach den nunmehr erkannten Verhältnissen sind wir jetzt in der Lage, die folgenden Strahlen mit den einfachsten Indizes zu bestimmen; diejenigen der II. Periode lassen sich durch einfaches Summieren aus denen der ersten Periode erhalten.

Eine Entwicklung in vier Perioden ist in der Figur 2 reproduziert. Dieselbe ist in anschaulicher Weise auch aus beigegebener Tabelle ersichtlich:

I	$\bar{1}0$			$\bar{1}1$				01					11			10
II			$\bar{2}1$				$\bar{1}2$				12				21	
III		$\bar{3}1$		$\bar{3}2$		$\bar{2}3$		$\bar{1}3$		13		23		32	31	
IV	$\bar{4}1$	$\bar{5}2$	$\bar{5}3$	$\bar{4}3$	$\bar{3}4$	$\bar{3}5$	$\bar{2}5$	$\bar{1}4$	14	25	35	34	43	53	52	41

Nun ist es klar, daß in dieser Weise leicht so viele Perioden reproduziert werden, wie man will, und alle dadurch bedingten Strahlen sind die Komplexstrahlen, welche in der Formel 1) ihren Ausdruck finden. Natürlich nimmt die Zahl der Strahlen jeder folgenden Periode nach bestimmtem Gesetze zu, und zwar nach dem Gesetze der geometrischen Progression mit dem Verhältnis 2, da jedesmal bei dem Übergang zur folgenden Periode ein Strahl durch zwei ersetzt wird; wir müssen dabei nur von den Ausgangsstrahlen absehen.

Nun ist leicht zu zeigen, daß man auf die Höhe der Periode aus dem Symbole selbst schließen kann. Dazu gehört folgende Regel: ist $(p_1\, p_2)$, wo $p_1 > p_2$ ein Strahl k^{ten} Periode, so muß $(p_1 - p_2,\, p_2)$ einen Strahl der $(k-1)^{\text{ten}}$ Periode, und im Gegenteil $(p_1 + p_2,\, p_2)$ denjenigen der $(k+1)^{\text{ten}}$ Periode ausdrücken.

Die Höhenzahl der Periode drückt die Anzahl der aufeinanderfolgenden Additionen aus, welche nötig ist, um die Indizes $(p_1\, p_2)$ aus denen der I. Periode abzuleiten. Natürlich spielen dabei keine Rolle weder die Vorzeichen der Indizes noch etwaige Permutationen, da solche von der Höhenzahl der Periode unabhängig sind. Infolgedessen ist es erlaubt, stets nur positive Indizes und eine bestimmte Permutation, z. B. $p_1 > p_2$ allein in Betracht zu ziehen.

Überhaupt läßt sich jede ganze Zahl aus Einheiten durch sukzessive Addition erhalten, und nur die Indizes der I. Periode sind 1 oder 0, das heißt höchstens 1.

Eine bestimmte Sukzession dieser Operationen führt uns zuletzt zu bestimmten Indizes; also alle solche lassen sich aus (10) und (11) zusammensetzen.

Zum Beispiel (53), wie aus oben gegebener Tabelle ersichtlich ist, läßt sich folgendermaßen zusammensetzen:

$$(53) \equiv (32) + (21);\ (32) \equiv (21) + (11);\ (21) \equiv (11) + (10).$$

Zusammengenommen sind drei Operationen notwendig, welche in der Gleichheit

$$(53) \equiv 3\,(11) + 2\,(10)$$

ihren endgültigen Ausdruck finden.

Diese Gleichheit ist aber von vornherein klar und kann ohne sukzessiver Operationsfolge, sondern direkt, geschrieben werden. Zugleich aber ersetzt dieselbe eine ganz bestimmte Aufeinanderfolge der Operationen und dient als deren Ausdruck. und diese Aufeinanderfolge führt stets zu der Steigerung der Höhenzahl der Periode 3, das heißt, sie besitzt nicht nur für die in dieser Gleichung enthaltenen Indizes, sondern eine allgemeine Gültigkeit. Wenn also die Gleichheit

$$(p_1\, p_2) \equiv 3\,(q_1\, q_2) + 2\,(r_1\, r_2)$$

besteht, wo $(q_1\, q_2)$ und $(r_1\, r_2)$ die Indizes zweier solcher Strahlen sind, welche durch Summierung diejenigen einer höheren Periode bedingen, so muß die Höhenzahl der Periode von $(p_1\, p_2)$ um 3 größer sein, als die größte Höhenzahl der Indizes $(q_1\, q_2)$ resp. $(r_1\, r_2)$.

Der Anschaulichkeit wegen betrachten wir folgendes Beispiel:

III	32						21	I	11						10
IV				53				II				21			
V		85				74		III		32				31	
VI	11·7		13·8		12·7		95	IV	43		53		52		41

Diese Zahlenreihen weisen auf so vollständige Analogie hin, daß jeder bestimmten Zahl einer Reihe eine der anderen eindeutig zugeordnet ist.

Nun wissen wir aber, daß $(53) \equiv 3\,(11) + 2\,(10)$. Die bestehende Analogie läßt uns mit Recht auch die Gleichheit

$$(13 \cdot 8) \equiv 3\,(32) + 2\,(21)$$

schreiben, was übrigens unmittelbar klar ist.

Die Analogie besteht hier in der gleichen Aufeinanderfolge derselben Operationen, weshalb auch die Anzahl derselben ebenfalls die gleiche sein muß. Gehört (53) der IV. Periode zu, also führt die angegebene Operation zur Erhöhung der Periode von (11) und (10) um 3, so muß auch das Symbol $(13 \cdot 8)$ auf einen Strahl sich beziehen, welcher ebenso um 3 Perioden höher steht als die höchste der Perioden von (32) und (21); und da (32) der III. Periode zugehört, so muß $(13 \cdot 8)$ der VI. Periode zugehören.

Aber auch (11) läßt sich durch Summieren aus (10) und (01) zusammensetzen; also ist bei dem Übergang aus den letzten Indizes zu den ersten eine eben solche Operation nötig. Demgemäß kann man sagen, daß (53) sich aus (11) und (10) durch dieselbe Operation zusammensetzen läßt, wie (32) und (10) und (01). Wenn wir also für kurze Zeit die Ausgangsstrahlen als der besonderen 0^{ten} Periode zugehörig betrachten wollen, so erhalten wir die Analogie:

I	11						10	0	10						01
II				21				I				11			
III		32				31		II		21				12	
IV	43		53		52		41	III	31		32		23		13

Nun aber sind die Indizes (32) in der Form (5—3, 3) darstellbar, da, wie gesagt, die Permutationen in den Fragen über Periodenhöhe keine Rolle spielen. Wenn also (53) einer um 1 höheren Periode zugehört als (32), so muß dasselbe einer um 1 niedrigeren Periode zugehören als $(5 + 3, 3) = (83)$, da $(83) = 3\,(11) + 5\,(10)$.

Auch (83), wie jedes andere Symbol, läßt sich durch sukzessives Summieren aus Symbolen der niedrigeren Perioden ableiten. Wollen wir dasselbe aus denen der III. Periode erhalten, so hätten wir als Ausgangsstrahlen diejenigen durch (31) und (21) ausgedrückten anzunehmen, da $3 > \frac{8}{3} > 2$.

Und nun finden wir:

III	31				21
IV			52		
V		83		73	

und diese Tabelle dient als Bestätigung der Folgerung über die Periodenhöhe von (83).

Ebenso ist klar, daß (83) durch dieselbe Operationsreihe aus (11) und (01) sich ableiten läßt, wie (53) aus (01) und (10), also:

I	10			11	0	10			01
II			21		I			11	
III		31			II		21		
IV			52		III			32	
V		83			IV		53		

Der eben bewiesene Satz gibt das Verfahren iu die Hand, die Periodenhöhe jedes gegebenen Symbols durch sukzessive Erniedrigungen um 1, bis das Symbol von schon bekannter Höhe erhalten wird, zu bestimmen.

Zum Beispiel, wir finden direkt, daß (87) der VIII. Periode zugehört, da (8—7, 7) $\equiv$ (17) das Symbol der VII. Periode ist.

Nun gehen wir zur detaillierten Studie der isotropen Komplexe über.

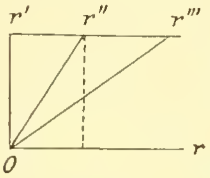


Fig. 3.

Da in denselben sämtliche Strahlen sich in einander seukrechte Paare zerlegen, so ist stets möglich, als Ausgaugsstrahlen einen beliebigeu Strahl r und den ihm senkrechten Strabl r' (Fig. 3) auszuwählen.

Bestimmen wir zuerst die Bedingungeu, welche notwendig und hinreichend sind, daß der Komplex ein isotroper ist.

Gemäß der Formel 3) gehört dazu die Rationalität des Tangentenquadrates eines Winkels.

Es sei r'' derjeuige Strahl, welchem das Symbol (11) zukommt. Nun sind die Achseneinheiten Or und Or' die Strecken $r'r''$ und Or'; aber $\frac{r'r''}{Or'} = \operatorname{tang}(r'r'')$ resp. $\frac{(r'r'')^2}{(Or')^2} = \operatorname{tang}^2(r'r'') = k = \frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen sind; also:

$$(r'r''):(Or') = \sqrt{a}:\sqrt{b}. \qquad 4)$$

Diese Gleichheit ist also die gesuchte Bedingung des Isotropismus.

Wird ein Strahl durch das Symbol $(p_1 p_2)$ ausgedrückt, so haben wir:

$$\frac{r'r'''}{Or'} = \frac{p_1}{p_2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \operatorname{taug}(r'r''') \text{ resp. } \operatorname{tang}^2(r'r''') = \frac{a}{b}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = \frac{a}{b}k^2 \qquad 5)$$

Auf Grund des Satzes, nach welchem ein isotroper Komplex eine Symmetrieachse von unendlicher Zähligkeit besitzt, folgt, daß die Aufeinanderfolge der Winkel genau dieselbe bleibt, welche Strahleu auch als Ausgangsstrahlen genommen würden und in welcher der beiden Richtungen dieselben gemessen würden.

Also kommt der Formel 5) allgemeine Bedeutung zu.

Somit sind in einem isotropeu Komplex die Winkel dadurch bedingt, daß die Tangentenquadrate einer und derselben Zahl gleich sind, multipliziert durch Quadrate einer beliebigen rationalen Zahl.

Durch diese Bedingung wird die Anzahl der einem gegebenen isotropen Komplex zugehörenden Strahlen in hohem Maße beschränkt. Jeder Winkel, dessen Tangentenquadrat eine rationale Zahl ist (unabhängig von einem quadratischen Faktor), welche mit der für den gegebenen Komplex charakteristischen Zahl nicht übereinstimmt, ist für diesen Komplex ein unmöglicher.

In Anbetracht der so hohen Wichtigkeit, welche dieser charakteristischen Zahl zukommt, soll dieselbe, als Parameter des Komplexes bezeichnet und für die bestimmende Hauptkonstante gehalten werden, welche aber im Gegensatz zu den Konstanten der schiefen und orthogonalen Zonen nicht eine beliebige Größe eines Winkels, sondern eine rationale Zahl ist.

Da aber eine unendliche Anzahl solcher vorhanden ist, so sind auch die isotropen Komplexe selbst in unendlicher Anzahl vorhanden.

Formel 5) läßt sich vereinfachen, wenn man dieselbe durch b zugleich multipliziert und dividiert, dann haben wir:

$$\operatorname{tang}^2 (r' r''') = a\, b \left(\frac{k}{a}\right)^2 = a' k'^2. \qquad 5\text{a})$$

Jetzt ist a' eine ganze Zahl und k' ein rationaler Bruch. Diese ganze Zahl ist der eindeutig ausgedrückte Parameter des Komplexes. Also sind die Parameter ganze Zahlen.

Jede ganze Zahl, welche keine zwei gleichen Faktoren besitzt, ist Parameter eines ebenen isotropen Komplexes. Wenn es aber in einer ganzen Zahl zwei (oder mehr) gleiche Faktoren gibt, so ist diese Zahl als Parameter des Komplexes gleichbedeutend mit derjenigen, welcher dieser Faktoren beraubt sind (z. B. 6 und $54 = 6 \cdot 3^2$).

Also kommt den beiden Faktoren der Zahl $a' k'^2$ sehr verschiedene Bedeutung zu: der erste ist für den Komplex charakteristisch, der zweite, quadratische, ist eine beliebige rationale Zahl. Aber auch der erste Faktor kann auf verschiedene Art dargestellt werden, etwa $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $a b$, $\frac{1}{a b}$. Nur wegen der Einfachheit haben wir aus dieser Zahlenreihe ab besonders hervorgehoben und als Parameter bezeichnet.

In Anbetracht des Gesagten kann man sehr verschiedene Zahlen der Form $c k^2$, $\frac{1}{c}\, l^2$ als etwas Einheitliches ansehen. In diesem Sinne können wir alle solche als parametrisch gleiche bezeichnen, da wirklich ihnen ein und derselbe Parameter zukommt. Zum Beispiel sind die Zahlen 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, 27, 12, $\frac{25}{3}$, 75 ... parametrisch gleiche, da allen denselben der gleiche Parameter 3 entspricht.

Vermittelst dieser Definition läßt sich ein allgemeiner Satz folgendermaßen ausdrücken:

Jedem Strahl des ebenen isotropen Komplexes gehört eine bestimmte Parametergröße zu.

Zieht man durch einen Strahlenpunkt, dessen Distanzquadrat dem diesem Strahle zugeordneten Parameter gleich ist, eine irgendwelchem anderen Komplexstrahl parallele Schnittgerade, so schneidet diese Gerade alle übrigen Komplexstrahlen in den Punkten, deren Distanzquadrate gleich sind den den respektiven Strahlen zugeordneten Parametern. Diese Distanzen werden vom Mittelpunkt des Komplexes gezählt.

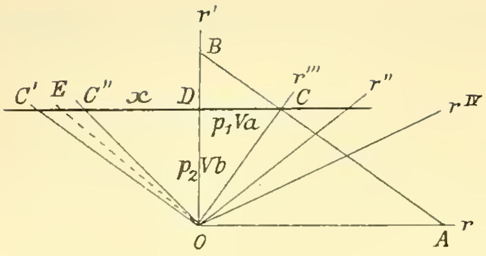


Fig. 4.

Der Definition gemäß werden hier unter Parameterzahlen parametrisch gleiche Zahlen verstanden.

Den Ausgangsstrahlen r und r' seien die Parameter a resp. b zugeordnet.

Ziehen wir eine zum Strahle OC $(p_1 p_2)$ senkrechte Schnittgerade AB (Fig. 4). Es entstehen die ähnlichen Dreiecke AOB und DOC; also:

$$OA : OB = \frac{1}{p_1\sqrt{a}} : \frac{1}{p_2\sqrt{b}} \text{ oder } \overline{OA}^2 : \overline{OB}^2 = a\left(\frac{1}{ap_1}\right)^2 : b\left(\frac{1}{bp_2}\right)^2, \tag{6}$$

Außerdem

$$\overline{OC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{OD}^2 = ap_1^2 + bp_2^2 = cq^2. \tag{7}$$

Berücksichtigen wir noch, daß die Strecken OA uud OB sind $a\left(\frac{ap_1^2 + bp_2^2}{ap_1}\right)^2$ resp. $b\left(\frac{ap_1^2 + bp_2^2}{bp_2}\right)^2$, daß also die Schuittgerade AB auf Strahlen r uud r' durch Puukte hindurchgeht, welchen wirklich die Strecke mit dem Parameter a, resp. b zukommt, so ist klar, daß dem Strahle r''' der Parameter c zukommt.

Wegeu allgemeinsteu Beweis des Satzes ist eine beliebige, aber einem Komplexstrahle parallele Schnittgerade zu ziehen, welche aber auf den Strahlen r und r' die denselben zugeordneten Strecken bestimmt hätte. Als solche nehmeu wir beliebig $\frac{q_1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{q_2}{\sqrt{b}}$, wo q_1 und q_2 irgendwelche ganze Zahlen sind.

Nun ist die Gleichung dieser Geraden

$$\frac{x\sqrt{a}}{q_1} + \frac{y\sqrt{b}}{q_2} = 1$$

und die Gleichung des Strahles OC

$$xp_2\sqrt{b} - yp_1\sqrt{a} = 0.$$

Folglich sind die Koordinaten der Schnittpuukte:

$$x = \frac{p_1 q_1 q_2 \sqrt{a}}{p_1 q_2 a + p_2 q_1 b} \text{ und } y = \frac{p_2 q_1 q_2 \sqrt{b}}{p_1 q_2 a + p_2 q_1 b}.$$

Daraus ergibt sich das Quadrat der Strecke:

$$x^2 + y^2 = (ap_1^2 + bp_2^2)\left(\frac{q_1 q_2}{ap_1 q_2 + bp_2 q_1}\right)^2 \tag{8}$$

Dadurch erhält der aufgestellte Satz den allgemeinsten Beweis, da aus 8) ersichtlich ist, daß der Parameter eines beliebigen Strahles OC derselbe bleibt, wie man auch die Schnittgerade auswählt, wenn nur die im Satze aufgestellten Bedingungen erfüllt worden sind.

Bezeichnen wir die auf der Schnittgerade CD durch den zu OC senkrechten Strahl OC' bedingte Strecke durch x, so erhält man $(p_2\sqrt{b})^2 = xp_1\sqrt{a}$, und daraus

$$\overline{OC'}^2 = (p_2\sqrt{b})^2 + x^2 = \frac{b}{a}(ap_1^2 + bp_2^2)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = dq'^2.$$

Also $$cdq^2q'^2 = \frac{b}{a}(ap_1^2 + bp_2^2)^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = abk^2, \qquad 9)$$

das heißt: das Produkt der Parameter zweier beliebiger zu einander senkrechter Strahlen ist stets gleich dem Parameter des Komplexes.[1])

Nun wollen wir daraus verschiedene Folgerungen ziehen.

Wir sehen, daß es gut möglich ist, eine unendliche Anzahl ebener isotroper Komplexe zu erhalten, indem man zweien einander senkrechten, sonst beliebigen Strahlen die Parameter a und b zuerteilt, wo a und b beliebige Zahlen sind, aber weder gemeinschaftliche noch quadratische Faktoren besitzen.

Die Tangentenquadrate sämtlicher Strahlenwinkel sind parametrisch gleiche Zahlen, und dieser Parameter ab ist der des Gesamtkomplexes.

Auch jedem Komplexstrahl kommt ein bestimmter Parameter zu. Welche Strahlen auch als die Ausgangsstrahlen angenommen würden, stets ist das Produkt der Parameter dieser Strahlen dem Parameter des Komplexes ab gleich; folglich besteht diese Relation gleichgeltend für sämtliche Paare zu einander senkrechter Strahlen, was übrigens durch 9) direkten Beweis erhält.

Aber jedem beliebig herausgenommenen Strahl können wir auch sonst eine beliebige ganze Zahl als dessen Parameter zuerteilen, nur muß diese Zahl in dem Komplex als ein möglicher Parameter auftreten.

Wollen wir einige Beispiele betrachten.

Es sei ein Komplex mit dem Parameter 1 gegeben. Nehmen wir als Parameter eines Strahles die Zahl a, so erhalten wir für den senkrechten Strahl das Parameter $\frac{1}{a}$, das heißt die Zahl, welche der Zahl a parametrisch gleich ist. In diesem Komplex besitzen folglich zwei senkrechte Strahlen stets einen und denselben Parameter resp. die Strahlen selbst sind parametrisch gleich. Daraus folgt das Vorhandensein der vierzähligen Symmetrieachse.

Die Gesamtheit der parametrisch gleichen Strahlen bildet einen Teilkomplex.

Nun ist es klar, daß die Symmetrie jedes Teilkomplexes dieselbe ist, wie die des Gesamtkomplexes. Aus dem Satze über Vorhandensein der Symmetrieachsen mit unendlicher Zähligkeit folgt aber, daß alle Teilkomplexe deckbar gleich sind.

In dem Komplex mit dem Parameter 1 müssen die Symmetrieebenen sich auch unter dem Winkel 45^0 schneiden, als Folge des Vorhandenseins der vierzähligen Symmetrieachse; und wirklich ist $\tang^2 45^0 = 1$.

In dem Komplex mit dem Parameter 3 müssen die Symmetrieebenen unter 60^0 stehen, da $\tang^2 60 = 3$. Also besitzt derselbe drei-, folglich auch sechszählige Symmetrieachsen.

[1]) Ziehen wir noch die Gerade OC'' unter dem Winkel BOC'' gleich dem Winkel BOC, so besitzt der Strahl OC'' denselben Parameter wie OC (da OD die Trace der Symmetrieebene ist). Andersereits ist OC'' mit OC' symmetrisch in Bezug auf OE, welche mit Or' den Winkel 45^0 bildet. Daraus folgt a) daß OE keinem anderen Komplex als $\{11\}$ zugehören kann und b) daß das Produkt der Parameter der so symmetrischen Strahlen gleich dem Parameter des Komplexes ist.

Schreiben wir einem Strahl den Parameter 1 zu, so soll der zu ihm senkrechte den Parameter 3 besitzen. Daraus ist zu schließen, daß in diesem Komplexe nach je 30° sich die Parameter 1 und 3 abwechseln.

Natürlich ist auch in jedem anderen Komplexe mit dem Parameter ab einem Strahle 1 der senkrechte Strahl ab zugeordnet.

Hier treffen wir auch verschiedenartige und lehrreiche Zahlenrelationen.

In erster Linie ist jetzt mit den Summen der Quadrate der ganzen Zahlen zu tun, wie dies aus der Formel 7) hervorgeht.

Der Satz über das Vorhandensein der Symmetrieachse von unendlicher Zähligkeit und der daraus weiter folgende Satz über das Vorhandensein einer unendlichen Reihe von Teilkomplexen mit gleichen Parametern führt uns zu dem Schlusse, daß die Gesamtheit der ganzen Zahlen. welche durch 7) ausgedrückt worden ist, in eine weitere Summe zerlegt werden kann, in welcher jedes Glied aus parametrisch gleichen Zahlen besteht, also:

$$N = A + B + C + \ldots, \tag{10}$$

wo A die Summe der Zahlen ak_1^2, B die Summe der Zahlen bk_2^2 u. s. f. bedeuten.

Diese Teilsummen entsprechen den Teilkomplexen; dabei sind die Strahlen der Teilkomplexe durch die Gleichheit der Winkel verbunden.

Daß wirklich sämtliche mit gleichen Winkeln untereinander stehenden Strahlen demselben Gesamtkomplexe angehören, ersieht man auch direkt aus dem allgemeinen Ausdruck der Tangenten solcher Winkel.

Es sei z. B. der Winkel γ gegeben zwischen dem Strahle r' und beliebigem Strahle r'''. Natürlich hat $\text{tang}^2\gamma$ die Form des Produktes $ab \cdot k^2$, wo ab der Parameter des Komplexes ist. Nun ist zu beweisen, daß $\text{tang}^2 n\gamma = \text{tang}^2 \gamma \cdot l^2$, wo l ebenfalls eine rationale Zahl ist.

Zu diesem Zweck entwickeln wir den Ausdruck $\text{tang}\, n\gamma$. Der Kürze wegen wollen wir anstatt $\text{tang}\,\gamma$ einfach t schreiben.

Also
$$\text{tang}\, 2\gamma = t\,\frac{2}{1-t^2}$$
$$\text{tang}\, 3\gamma = t\,\frac{3-t^2}{1-3t^2}$$
$$\text{tang}\, 4\gamma = t\,\frac{4-4t^2}{1-6t^2+t^4}$$
$$\text{tang}\, 5\gamma = t\,\frac{5-10t^2+t^4}{1-10t^2+5t^4}$$
$$\text{tang}\, 6\gamma = t\,\frac{6-20t^2+6t^4}{1-15t^2+15t^4-t^6}$$
$$\text{tang}\, 7\gamma = t\,\frac{7-35t^2+21t^4-t^6}{1-21t^2+35t^4-7t^6}$$
$$\text{tang}\, 8\gamma = t\,\frac{8-56t^2+56t^4-8t^6}{1-28t^2+70t^4-28t^6+t^8}$$
$$\text{taug}\, 9\gamma = t\,\frac{9-84t^2+126t^4-36t^6+t^8}{1-36t^2+126t^4-84t^6+9t^8}$$
$$\text{tang}\, 10\gamma = t\,\frac{10-120t^2+252t^4-120t^6+10t^8}{1-45t^2+210t^4-210t^6+45t^8-t^{10}}\ ^{1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tang} n\gamma = \mathrm{t}$$

$$\frac{n - n_1 \mathrm{t}^2 + n_2 \mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-5}{2}} n_{\frac{n-5}{2}} \mathrm{t}^{n-5} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_{\frac{n-3}{2}} \mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{t}^{n-1}}{1 - n_{\frac{n-3}{2}} \mathrm{t}^2 + n_{\frac{n-5}{2}} \mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-5}{2}} n_2 \mathrm{t}^{n-5} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_1 \mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \mathrm{t}^{n-1}}$$

$$\operatorname{tang}(n+1)\gamma = \mathrm{t}$$

$$\frac{(n+1) - (n_1 + n_{\frac{n-3}{2}})\mathrm{t}^2 + (n_2 + n_{\frac{n-5}{2}})\mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n_{\frac{n-3}{2}} + n_1)\mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n+1)\mathrm{t}^{n-1}}{1 - (n + n_{\frac{n-3}{2}})\mathrm{t}^2 + (n_1 + n_{\frac{n-5}{2}})\mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n_{\frac{n-5}{2}} + n_1)\mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n_{\frac{n-3}{2}} + n)\mathrm{t}^{n-1} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{t}^{n+1}}$$

Dabei wird die Zahl n als eine ungerade gemeint.

Diese Tabelle, welche unendlich fortgesetzt gedacht werden kann, dient als direkter Beweis des eben erwähnten Satzes, da natürlich, wegen Rationalität des $\mathrm{t}^2\gamma$ auch sämtliche Koeffizienten bei $\operatorname{tang}\gamma$ hier rationale Brüche sind.

Das nähere Studium derselben Tangententabelle lehrt uns sehr merkwürdige Relationen kennen zwischen den Koeffizienten derjenigen Glieder dieser Reihe, welche auf Tangenten mit Winkeln von gerader Zähligkeit sich beziehen. Zuerst wollen wir zeigen, daß diese Koeffizienten unabhängig von denen zusammengesetzt werden können, welche sich auf Winkel mit ungerader Zähligkeit beziehen. Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} 2\gamma &= \frac{2\mathrm{t}}{1-\mathrm{t}^2} \\
\operatorname{tang} 4\gamma &= \frac{4\mathrm{t} - 4\mathrm{t}^3}{1 - 6\mathrm{t}^2 + \mathrm{t}^4} \\
\operatorname{tang} 6\gamma &= \frac{6\mathrm{t} - 20\mathrm{t}^3 + 6\mathrm{t}^5}{1 - 15\mathrm{t}^2 + 15\mathrm{t}^4 - \mathrm{t}^6} \\
\operatorname{tang} 8\gamma &= \frac{8\mathrm{t} - 56\mathrm{t}^3 + 56\mathrm{t}^5 - 8\mathrm{t}^7}{1 - 28\mathrm{t}^2 + 70\mathrm{t}^4 - 28\mathrm{t}^6 + \mathrm{t}^8} \qquad \text{A)} \\
\operatorname{tang} 10\gamma &= \frac{10\mathrm{t} - 120\mathrm{t}^3 + 252\mathrm{t}^5 - 120\mathrm{t}^7 + 10\mathrm{t}^9}{1 - 45\mathrm{t}^2 + 210\mathrm{t}^4 - 210\mathrm{t}^6 + 45\mathrm{t}^8 - \mathrm{t}^{10}} \\
\operatorname{tang} 12\gamma &= \frac{12\mathrm{t} - 220\mathrm{t}^3 + 792\mathrm{t}^5 - 792\mathrm{t}^7 + 220\mathrm{t}^8 - 12\mathrm{t}^{11}}{1 - 66\mathrm{t}^2 + 495\mathrm{t}^4 - 924\mathrm{t}^6 + 495\mathrm{t}^8 - 66\mathrm{t}^{10} + \mathrm{t}^{12}} \\
\operatorname{tang} 14\gamma &= \frac{14\mathrm{t} - 364\mathrm{t}^3 + 2002\mathrm{t}^5 - 3432\mathrm{t}^7 + 2002\mathrm{t}^9 - 364\mathrm{t}^{11} + 14\mathrm{t}^{13}}{1 - 91\mathrm{t}^2 + 1001\mathrm{t}^4 - 3003\mathrm{t}^6 + 3003\mathrm{t}^8 - 1001\mathrm{t}^{10} + 91\mathrm{t}^{12} - \mathrm{t}^{14}} \\
\operatorname{tang} 16\gamma &= \frac{16\mathrm{t} - 560\mathrm{t}^3 + 4368\mathrm{t}^5 - 11440\mathrm{t}^7 + 11440\mathrm{t}^9 - 4368\mathrm{t}^{11} + 560\mathrm{t}^{13} - 16\mathrm{t}^{15}}{1 - 120\mathrm{t}^2 + 1820\mathrm{t}^4 - 8008\mathrm{t}^6 + 12870\mathrm{t}^8 - 8008\mathrm{t}^{10} + 1820\mathrm{t}^{12} - 120\mathrm{t}^{14} + \mathrm{t}^{16}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} 2n\gamma = \frac{2n\mathrm{t} - n_1 \mathrm{t}^3 + n_2 \mathrm{t}^5 - \cdots + (-1)^{n-1} n_2 \mathrm{t}^{2n-5} + (-1)^n n_1 \mathrm{t}^{2n-3} + (-1)^{n+1} 2n\,\mathrm{t}^{2n-1}}{1 - m_1 \mathrm{t}^2 + m_2 \mathrm{t}^4 - m_3 \mathrm{t}^6 \cdots + (-1)^{n-2} m_2 \mathrm{t}^{2n-4} + (-1)^{n-1} m_1 \mathrm{t}^{2n-2} + (-1)^n \mathrm{t}^{2n}}$$

$$\operatorname{tang}(2n+2)\gamma = \frac{(2n+2)\mathrm{t} - (2n + n_1 + 2m_1)\mathrm{t}^3 + (n_1 + n_2 + 2m_2)\mathrm{t}^5 + \cdots\cdots\cdots}{1 - (1 + m_1 + 4n)\mathrm{t}^2 + (m_1 + m_2 + 2n_1)\mathrm{t}^4 - (m_2 + m_3 + 2n_2)\mathrm{t}^6 + \cdots}\ ^{1)}$$

Alle Zahlen n_1. n_2, n_3 ... sind notwendigerweise gerade. was durch die Zusammensetzung $(2n + n_1 + 2m_1)$. $(n_1 + n_2 + 2m_2)$ ... bewiesen wird.

Auf diese Weise läßt sich die Tabelle unbegrenzt fortsetzen.

Nun ist leicht zu konstatieren, daß die Summe der Quadrate des Zählers und des Nenners dieser Brüche gleich ist einem vollständigen Quadrat. Daraus ist leicht zu ersehen, daß

$$\begin{aligned}
1 + \operatorname{tang}^2 2\gamma &= \frac{1}{\cos^2 2\gamma} = \left(\frac{1+\mathrm{t}^2}{1-\mathrm{t}^2}\right)^2 \\
1 + \operatorname{tang}^2 4\gamma &= \frac{1}{\cos^2 4\gamma} = \frac{(1+\mathrm{t}^2)^4}{(1 - 6\mathrm{t}^2 + \mathrm{t}^4)^2} \\
1 + \operatorname{tang}^2 6\gamma &= \frac{1}{\cos^2 6\gamma} = \frac{(1+\mathrm{t}^2)^6}{(1 - 15\mathrm{t}^2 + 15\mathrm{t}^4 - \mathrm{t}^6)^2} \\
1 + \operatorname{tang}^2 8\gamma &= \frac{1}{\cos^2 8\gamma} = \frac{(1+\mathrm{t}^2)^8}{(1 - 28\mathrm{t}^2 + 70\mathrm{t}^4 - 28\mathrm{t}^6 + \mathrm{t}^8)^2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad \mathrm{B)}$$

Diese Relation ist für uus von hoher Wichtigkeit, da sie zum Beweise dieut, daß alle mit r' den Winkel $2n\gamma$ bildenden Strahlen denselben Parameter besitzen, also mit r' zu eiuem und demselben Teilkomplexe gehören.

Wenn in der Tat wir dem Strahl r' den Parameter 1 zuerteilen, so ist der Parameter des Strahles, welcher mit r' den Wiukel $2n\gamma$ bildet, in dem Ausdrucke $1 + \operatorname{tang}^2 2n\gamma = \frac{1}{\cos^2 2n\gamma}$ enthalten. und nun sehen wir, daß derselbe wirklich ein vollständiges Quadrat ist, also als Parameter gleich 1 ist.

Erteilt man dem Winkel γ solche Bedeutung zu, daß taug γ eine ganze Zahl sein würde, so erhält man für deu Zähler ebenso wie für den Nenner der Brüche der angegebenen Tangentenreihe ebenfalls ganze Zahlen, und zwar solche. deren Quadratensumme auch das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Auf diese Weise ist also möglich. eine unbegreuzte Menge solcher Zahlen aufzufinden.

Zugleich läßt sich auf Gruud dieser Relationen eine Anzahl von Sätzen ableiten, zum Beispiel den folgenden allgemeinen Zahlensatz:

Für jede ganze Zahl $1 + t^2$ (wo t eine beliebige ganze Zahl ist) und ihre beliebigen Potenzen ist stets möglich. solche zugeordnete Zahlen aufzufinden, daß

---

[1]) Da der Koeffizient m_1 gleich $(2n-1)n$ ist, so ist $1 + m_1 + 4n = 2n^2 + 3n + 1 = (2n+1)(n+1)$. Auch $n_1 = \sum_{2}^{2n-2} + \sum_{1\cdot 2}^{(2n-3)(2n-2)}$. wo $\sum_{2}^{2n-2}$ die Summe $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n-2)$. und $\sum_{1\cdot 2}^{(2n-3)(2n-2)}$ die Summe $1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \cdots + (2n-3)(2n-2)$ bedeutet. Folglich $(2n + n_1 + 2m_1) = (2n + \sum_{2}^{2n-2} + \sum_{1\cdot 2}^{(2n-3)(2n-2)} + (2n-1)2n) = \sum_{2}^{2n} + \sum_{1\cdot 2}^{(2n-1)2n}$ u. s. f.

die Summe der Quadrate der beiden Zahlen gleich ist dem Quadrate einer ganzen Zahl.

Speziell für $t = 1$ haben wir $1 + t^2 = 2$, und da $\operatorname{tang} \gamma = 1$, so ist $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Somit erhält die periodische Reihe $\operatorname{tang} 2\gamma$, $\operatorname{tang} 4\gamma$, $\operatorname{tang} 6\gamma$ ... sukzessive die Werte ∞, 0, ∞. 0 ..., also in angegebener Reihe sind wechselweise Nenner und Zähler gleich Null, was übrigens direkt ersichtlich ist, da wechselweise die Summe der Koeffizienten in dem Nenner und Zähler der Tangenten gleich Null ist.

Wenn $\operatorname{tang} 2n\gamma$, wo n eine ungerade Zahl ist, gleich ∞ wird, so behält natürlich dieselbe Größe auch $1 + \operatorname{tang}^2 2n\gamma$ resp. $\frac{1}{\cos^2 2n\gamma}$.

Ist aber $\operatorname{tang} 2n\gamma$, wo n eine gerade Zahl ist, gleich 0, so erhält $\frac{1}{\cos^2 2n\gamma}$ die Größe 1. Also bei $t = 1$ haben wir:

$$\pm(1 + t^2)^2 = 1 - 6t^2 + t^4;\quad \pm(1 + t^2)^4 = 1 - 28t^2 + 70t^4 - 28t^6 + t^8;\quad \pm(1 + t^2)^6$$
$$= 1 - 66t^2 + 495t^4 - 924t^6 + 495t^8 - 66t^{10} + t^{12} \text{ u. s. f.}$$ [1])

Daraus besteht eine Reihe von Sätzen über die Koeffizientengrößen der oben angeführten Tangentenausdrücke.

Natürlich läßt sich über dieselben noch eine längere Reihe von Sätzen ableiten.

Erteilt man z. B. der Größe t^2 den Wert 3 zu, so erhält man für $1 + \operatorname{tang}^2 2n\gamma$ die periodische Zahlenreihe $+4$, $+4$, $+1$, $+4$, $+4$ ... und da zugleich $1 + t^2 = 4$, so findet man bei $t^2 = 3$:

$$4 = (1 - t^2)^2,\quad 4^3 = (1 - 6t^2 + t^4)^2,\quad \pm 4^5 = 1 - 15t^2 + 15t^4 - t^6;$$
$$4^7 = (1 - 28t^2 + 70t^4 - 28t^6 + t^8)^2 \text{ u. s. f.}$$

In den angeführten Tabellen sind also die Formeln enthalten, welche uns in Stand setzen, nach der Lage des einen gegebenen Strahles unbegrenzt viele Strahlen desselben Teilkomplexes aufzufinden. Wie wir aus der letzten Tabelle ersehen, gehören die Reihen der rationalen Kosinusse dazu.

Im allgemeinen, da der Winkel γ in Bezug auf 2π irrational ist, erhalten wir unendliche Reihen, was gerade mit dem Begriff des Teilkomplexes übereinstimmt. Nur als Ausnahmefälle erscheinen rationale Winkel γ, und dann entsteht anstatt des Komplexes nur eine begrenzte Strahlenkombination.

Für den gegebenen Komplex besteht die Gleichheit $\operatorname{tang}^2 (r'r'') = \frac{a}{b}$, und nun ergibt die erste Formel der letzten Tabelle:

$$\cos^2 2(r'r'') = \left(\frac{b - a}{b + a}\right)^2. \tag{11}$$

Es ist ersichtlich, daß $r'r''$ keinen irrationalen Wert erhält, a) wenn $2(r'r'')$ einen rechten Winkel ausbildet, oder b) wenn Verdoppelung des Winkels keine Änderung in dem Werte von $\cos^2$ führt.

---

[1]) Da diese Gleichungen vermittelst Quadratwurzel zustande gekommen sind, so bleiben die Vorzeichen unbestimmt.

Im ersten Fall haben wir:

$$\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 = 0, \text{ also } a = b, \text{ und } r'r'' = \frac{\pi}{4}.$$

Im zweiten Fall erhält man:

$$\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 = \frac{1}{1+\frac{a}{b}} = \frac{b}{a+b}; \text{ also } a^2 = 3ab. \text{ und } \frac{a}{b} = 3.$$

Im ersten Falle besitzt der Komplex vierzählige, im zweiten sechszählige Symmetrieachsen.

In diesen beiden Fällen erfordert die Entwicklung des Teilkomplexes die Ersetzung des Strahles (11) durch einen anderen Strahl.

Nun läßt sich der Beweis hervorbringen, daß diese beiden Fälle die Ausnahmefälle sind: sonst erhält man nur irrationale Winkel.

Wenn in der Tat eine $2n$zählige Symmetrieachse vorhanden ist, so ist $\operatorname{tang} 2n\gamma = 0$, also in Anbetracht der Reihe A lassen sich sämtliche mögliche Symmetrieachsen auffinden, wenn man die Reihe der Gleichungen höheren Grades

$$2t = 0;\ 4t - 4t^3 = 0;\ 6t - 20t^3 + 6t^5 = 0;\ 8t - 56t^3 + 56t^5 - 8t^7 \ldots$$

auflöst.

Man sieht zuerst, daß alle diese Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel $t = 0$ besitzen, und diese Auflösung gibt uns die zweizählige Symmetrieachse, deren Vorhandensein in allen, sogar anisotropen Komplexen von Anfang an betont wurde. Überhaupt lassen sich Auflösungen der ersten Gleichungen periodisch in den übrigen wiederholen. Für alle geraden Werte von r haben wir die Wurzel 1, was vierzähligen Symmetrieachsen, für alle Werte $n = 3k$ (k beliebige ganze Zahl) haben wir die Wurzel $\frac{1}{3}$, was sechszähligen Symmetrieachsen entspricht.

Unterdrücken wir in allen diesen Gleichungen die gemeinschaftlichen Faktoren und bezeichnen t^2 durch x. so erhalten wir die Reihe (zuerst sehen wir von der zweiten Kolonne ab):

$x - 1 = 0;$	$z - 1 = 0$
$3x^2 - 10x + 3 = 0;$	$z^2 - 10z + 9 = 0$
$x^3 - 7x^2 + 7x - 1 = 0;$	$z^3 - 7z^2 + 7z - 1 = 0$
$5x^4 - 60x^3 + 126x^2 - 60x + 5 = 0;$	$z^4 - 60z^3 + 5\cdot 126z^2 - 5^2\cdot 60z + 5^4 = 0$
$3x^5 - 55x^4 + 198x^3 - 198x^2 + 55x - 3 = 0;$	$z^5 - 55z^4 + 3\cdot 198z^3 - 3^2\cdot 198z^2 + 3^3\cdot 55z - 3^5 = 0$
$7x^6 - 188x^5 + 1001x^4 - 1716x^3 + 1001x^2 - 188x + 7 = 0;$	$z^6 - 188z^5 + 7\cdot 1001z^4 - 7^2\cdot 1716z^3 + 7^3\cdot 1001z^2 - 7^4\cdot 188z + 7^6 = 0$
$2x^7 - 70x^6 + 546x^5 - 1430x^4 + 1430x^3 - 546x^2 + 70x - 2 = 0;$	$z^7 - 70z^6 + 2\cdot 546z^5 - 2^2\cdot 1430z^4 + 2^3\cdot 1430z^3 - 2^4\cdot 546z^2 + 2^5\cdot 70z - 2^7 = 0$

. . . .

Besitzt eine dieser Gleichungen die rationale Wurzel $\frac{p}{q}$ (und solche Wurzeln sind jetzt allein in Betracht zu nehmen), so müssen die Zahlen p und q als Faktoren der Koeffizienten im ersten und letzten Gliede dieser Gleichungen auftreten. Gerade aber läßt sich jetzt von Faktoren absehen und lediglich die Koeffizienten im ganzen in Rücksicht nehmen, da dieselben lauter einfache Zahlen sind. Da aber zugleich der erste und letzte Koeffizient die gleichen Zahlen sind und die Gleichungen nicht in ganzen Zahlen (außer 1) auflösbar sind, so muß p notwendigerweise gleich 1 sein. Also die einzige zulässige Form der Wurzel ist $\frac{1}{q}$.

Ersetzen wir also x durch $\frac{z}{q}$, so erhalten wir die Gleichungen in der Form, in welcher sie die Wurzel 1 besitzen müssen (also die Summe der Koeffizienten gleich Null sein muß). In dieser Form sind diese Gleichungen in der zweiten Kolonne angegeben.

Nun sieht man, daß diese Bedingung lediglich in den drei ersten Gleichungen erfüllt ist, welchen respektive die Wurzeln $1, \frac{1}{3}$ und 1 entsprechen.

Außer diesen beiden besitzen also die Gleichungen keine andere Wurzel, welche den rationalen Winkeln entsprechen.

Aus den Gleichungen B ersieht man noch, daß wenn solche rationalen Werte der Winkel γ vorhanden sind, so müssen auch die Kosinusse derselben rational sein. Und nun ist schon längst bewiesen worden,[1]) daß solche Werte von $\cos\frac{2\pi}{n}$ nur 0, $\pm\frac{1}{2}$ und ± 1 zulässig sind, und diese Werte entsprechen den vierzähligen, der drei- respektive sechszähligen und den zweizähligen Symmetrieachsen.

Demgemäß dürfen die oben angegebenen Sätze nur als Schlußfolgerungen angesehen werden.

Sonst aber existiert eine unendliche Reihe von rationalen Kosinussen, und vermittelst dieser Reihe lassen sich aus einem gegebenen Strahle eines Teilkomplexes alle übrigen Strahlen desselben ableiten.

Sind a und b nicht zu große Zahlen, so können wir leicht einfachste Glieder solcher Kosinus-Tabelle für jeden rationalen Komplex besonders herstellen.

In der Tat $\frac{1}{t^2\gamma} = \frac{\cos^2\gamma}{1-\cos^2\gamma}$; wenn also $\cos\gamma = \frac{c}{d}$ ist, so besteht $\frac{1}{t^2\gamma} = \frac{c^2}{d^2-c^2}$. Dieser Formel gemäß läßt sich die Parametergröße für jeden rationalen Kosinus bestimmen, wenn wir sukzessive dem Zähler alle Werte der natürlichen Zahlenreihe, und dem Nenner alle Werte der größeren Zahlen erteilen.

Diese Zusammenstellung ist in der nächstfolgenden Tabelle geschehen. Der Einfachheit wegen, da jedem Werte von c^2 eine Kolonne entspricht, ist diese Zahl nur einmal am Haupte der Kolonne angegeben, und die übrigen Zahlen der Kolonne sind die Nenner der Brüche, das heißt d^2-c^2.

Wenn nicht direkt der Parameter, sondern eine andere ihm gleiche Zahl auftritt, so wird dieselbe in Parenthesen eingeschlossen angezeigt. Falls der Bruch, welcher die Kosinusgröße darstellt, gemeinschaftliche Faktoren im Zähler und Nenner besitzt, also keinen neuen Fall darstellt, so ist die entsprechende Zahl in Klammern [ ] eingeschlossen.

---

[1]) Zuerst von Budajew in Verhandlungen der K. Mineralog. Gesellschaft zu St. Petersburg 4, 189.

c =	1	2	3	4	5	6	7
c² =	1:	4:	9:	16:	25:	36:	49:
	3 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{2}{3}$	7 $\frac{3}{4}$	9 (1) $\frac{4}{5}$	11 $\frac{5}{6}$	13 $\frac{6}{7}$	15 $\frac{7}{8}$
	8 (2) $\frac{1}{3}$	[12] —	16 (1) $\frac{3}{5}$	[20] —	24 (6) $\frac{5}{7}$	[28] —	32 (2) $\frac{7}{9}$
	15 $\frac{1}{4}$	21 $\frac{2}{5}$	[27] —	33 $\frac{4}{7}$	39 $\frac{5}{8}$	[45] —	51 $\frac{7}{10}$
	24 (6) $\frac{1}{5}$	[32] —	40 (10) $\frac{3}{7}$	[48] —	56 (14) $\frac{5}{9}$	[64] —	72 (2) $\frac{7}{11}$
	35 $\frac{1}{6}$	45 (5) $\frac{2}{7}$	55 $\frac{3}{8}$	65 $\frac{4}{9}$	[75] —	85 $\frac{6}{11}$	95 $\frac{7}{12}$
	48 (3) $\frac{1}{7}$	[60] —	[72] —	[84] —	96 (6) $\frac{5}{11}$	[108] —	120 (30) $\frac{7}{13}$
	63 (7) $\frac{1}{8}$	77 $\frac{2}{9}$	91 $\frac{3}{10}$	105 $\frac{4}{11}$	119 $\frac{5}{12}$	133 $\frac{6}{13}$	[147] —
	80 (5) $\frac{1}{9}$	[96] —	112 (7) $\frac{3}{11}$	[128] —	144 (1) $\frac{5}{13}$	[160] —	176 (11) $\frac{7}{15}$
	99 (11) $\frac{1}{10}$	117 (13) $\frac{2}{11}$	[135] —	153 (17) $\frac{4}{13}$	171 (19) $\frac{5}{14}$	[189] —	207 (23) $\frac{7}{16}$

c =	16	17	18	19	20	21	22
c² =	256:	289:	324:	361:	400:	441:	484:
	33 $\frac{16}{17}$	35 $\frac{17}{18}$	37 $\frac{18}{19}$	39 $\frac{19}{20}$	41 $\frac{20}{21}$	43 $\frac{21}{22}$	45 (5) $\frac{22}{23}$
	[68] —	72 (2) $\frac{17}{19}$	[76] —	80 (5) $\frac{19}{21}$	[84] —	88 (22) $\frac{21}{23}$	[92] —
	105 $\frac{16}{19}$	111 $\frac{17}{20}$	[117] —	123 $\frac{19}{22}$	129 $\frac{20}{23}$	[135] —	141 $\frac{22}{25}$
	[144] —	152 (38) $\frac{17}{21}$	[160] —	168 (42) $\frac{19}{23}$	[176] —	184 (46) $\frac{21}{25}$	[192] —
	185 $\frac{16}{21}$	195 $\frac{17}{22}$	205 $\frac{18}{23}$	215 $\frac{19}{24}$	[225] —	235 $\frac{21}{26}$	245 (5) $\frac{22}{27}$
	[228] —	240 (15) $\frac{17}{23}$	[252] —	264 (66) $\frac{19}{25}$	[276] —	[288] —	[300] —
	273 $\frac{16}{23}$	287 $\frac{17}{24}$	301 $\frac{18}{25}$	315 (35) $\frac{19}{26}$	329 $\frac{20}{27}$	[343] —	357 $\frac{22}{29}$
	[320] —	336 (21) $\frac{17}{25}$	[352] —	368 (23) $\frac{19}{27}$	[384] —	400 (1) $\frac{21}{29}$	[416] —
	369 (41) $\frac{16}{25}$	387 (43) $\frac{17}{26}$	[405] —	423 (47) $\frac{19}{28}$	441 (1) $\frac{20}{29}$	[459] —	477 (53) $\frac{22}{31}$

8	9	10	11	12	13	14	15
64:	81:	100:	121:	144:	169:	196:	225:
17 $\frac{8}{9}$	19 $\frac{9}{10}$	21 $\frac{10}{11}$	23 $\frac{11}{12}$	25 (1) $\frac{12}{13}$	27 (3) $\frac{13}{14}$	29 $\frac{14}{15}$	31 $\frac{15}{16}$
[36] —	40 (10) $\frac{9}{11}$	[44] —	48 (3) $\frac{11}{13}$	[52] —	56 (14) $\frac{13}{15}$	[60] —	64 (1) $\frac{15}{17}$
57 $\frac{8}{11}$	[63] —	69 $\frac{10}{13}$	75 (3) $\frac{11}{14}$	[81] —	87 $\frac{13}{16}$	93 $\frac{14}{17}$	[99] —
[80] —	88 (22) $\frac{9}{13}$	[96] —	104 (26) $\frac{11}{15}$	[112] —	120 (30) $\frac{13}{17}$	[128] —	136 (34) $\frac{15}{19}$
105 $\frac{8}{13}$	115 $\frac{9}{14}$	[125] —	135 (15) $\frac{11}{16}$	145 $\frac{12}{17}$	155 $\frac{13}{18}$	165 $\frac{14}{19}$	[175] —
[132] —	[144] —	[156] —	168 (42) $\frac{11}{17}$	[180] —	192 (3) $\frac{13}{19}$	[204] —	[216] —
161 $\frac{8}{15}$	175 (7) $\frac{9}{16}$	189 (21) $\frac{10}{17}$	203 $\frac{11}{18}$	217 $\frac{12}{19}$	231 $\frac{13}{20}$	[245] —	259 $\frac{15}{22}$
[192] —	208 (13) $\frac{9}{17}$	[224] —	240 $\frac{11}{19}$	[256] —	272 (17) $\frac{13}{21}$	[288] —	304 (19) $\frac{15}{23}$
225 (1) $\frac{8}{17}$	[243] —	261 (29) $\frac{10}{19}$	279 (31) $\frac{11}{20}$	[297] —	315 (35) $\frac{13}{22}$	333 (37) $\frac{14}{23}$	[351] —

23	24	25	26	27	28	29	30
529:	576:	625:	676:	729:	784:	841:	900:
47 $\frac{23}{24}$	49 (1) $\frac{24}{25}$	51 $\frac{25}{26}$	53 $\frac{26}{27}$	55 $\frac{27}{28}$	57 $\frac{28}{29}$	59 $\frac{29}{30}$	61 $\frac{30}{31}$
96 (6) $\frac{23}{25}$	[100] —	104 (26) $\frac{25}{27}$	[108] —	112 (7) $\frac{27}{29}$	[116] —	120 (30) $\frac{29}{31}$	[124] —
147 (3) $\frac{23}{26}$	[153] —	159 $\frac{25}{28}$	165 $\frac{26}{29}$	[171] —	177 $\frac{28}{31}$	183 $\frac{29}{32}$	[189] —
200 (2) $\frac{23}{27}$	[208] —	216 (6) $\frac{25}{29}$	[224] —	232 (58) $\frac{27}{31}$	[240] —	298 (62) $\frac{29}{33}$	[256] —
255 $\frac{23}{28}$	265 $\frac{24}{29}$	[275] —	285 $\frac{26}{31}$	295 $\frac{27}{32}$	305 $\frac{28}{33}$	315 (35) $\frac{29}{34}$	[325] —
312 (78) $\frac{23}{29}$	[324] —	336 (21) $\frac{25}{31}$	[348] —	[360] —	[372] —	384 (6) $\frac{29}{35}$	[396] —
371 $\frac{23}{30}$	385 $\frac{24}{31}$	399 $\frac{25}{32}$	413 $\frac{26}{33}$	427 $\frac{27}{34}$	[441] —	455 $\frac{29}{36}$	469 $\frac{30}{37}$
432 (3) $\frac{23}{31}$	[448] —	464 (29) $\frac{25}{33}$	[480] —	496 (31) $\frac{27}{35}$	[512] —	528 (33) $\frac{29}{37}$	[544] —
495 (55) $\frac{23}{32}$	[513] —	531 (59) $\frac{25}{34}$	549 (61) $\frac{26}{35}$	[567] —	585 (65) $\frac{28}{37}$	603 (67) $\frac{29}{38}$	[621] —

Zieht man aus dieser Tabelle die jedem gegebenen Parameter zukommende rationale Kosinusgröße, so erhält man noch folgende Tabelle:

Parameter	1	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21
	3/5	1/3	1/2	2/3	1/5	3/4	3/7	5/6	6/7	5/9	1/4	8/9	9/10	2/5
	4/5	7/9	1/7	2/7	5/7	1/8	9/11	1/10	2/11	1/15	7/8	4/13	5/14	10/11
	5/13	7/11	11/13	1/9	5/11	3/11	3/13	7/15	9/17	13/15	11/16	13/21	15/23	10/17
	12/13	1/17	11/14	19/21	23/25	9/16	1/19				11/19			17/25
	8/17	17/19	13/14	22/23	25/29	27/29					17/23			25/31
	15/17	23/27	13/19	22/27	29/35	31/32								
	7/25		23/26											
	24/25													
	20/29		23/31											
	21/29													

Parameter	23	26	29	30	31	33	34	35	37	38	39	41	42	43	46
	11/12	11/15	14/15	1/11 7/13	15/16	4/7	15/19	1/6	18/19	17/21	5/8	20/21	1/13 11/17	21/22	21/25
	19/27	25/27	10/19	13/17	11/20	16/17	33/35	17/18	14/23	37/39	19/20	16/25	19/23	17/26	45/47
			25/33	29/31	27/35	1/23 27/37		13/22							
								19/26							
								29/34							

Parameter	47	51	53	55	57	58	59	61	62	65	66	67	69	. . . . .
	23/24	7/10	26/27	3/8	8/11	27/31	29/30	30/31	29/33	4/9	5/17	33/34	10/13	
	19/28	25/26	22/31	27/28	28/29	57/59	25/34	26/35	61/63	32/33	19/25	29/38	34/35	
										28/37				

Übrigens ist es sehr leicht, die Zugehörigkeit des bestimmten rationalen Kosinus zu einem Komplex mit bestimmtem Parameter festzustellen. Ist $\cos\gamma = \frac{p}{q}$, so folgt daraus, daß $\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{q^2 - p^2}{p^2} = \frac{(q+p)(q-p)}{p^2}$. Diese Zahl ist der Zahl $(q+p)(q-p)$ parametrisch gleich.

Im speziellen Fall, wenn $q - p = 1$, haben wir $(q + p)$, wenn $q - p = 2$, haben wir $2(q+p)$, wenn $q - p = 3$, haben wir $3(q+p)$ als Parameter. Auch umgekehrt, für jeden gegebenen Parameter ist leicht die zugeordnete rationale Kosinusgröße aufzufinden, indem wir die Parameterzahl P resp. $P \cdot 2^2$, $P\,3^2$ . . . . in irgendwelche zwei Faktoren zerlegen und dieselben gleich $q + p$ und $q - p$ setzen; dann ist $\frac{p}{q}$ die gesuchte Größe.

Im ganz speziellen Fall $P = 1$ resp. a^2 haben wir $p^2 + q^2 = a^2$. In die erste Kolonne der letzten Tabelle kommen also lediglich die Zahlen, welche dieser Bedingung Genüge leisten.[1])

Wir haben gesehen, daß jeder Teilkomplex durch eine sehr einfache Operation — unbegrenzt gedachte Vervielfachung eines gegebenen Winkels desselben — entwickelt werden kann. Ist aber diese Entwicklung vollständig, das heißt würden mittelst dieser Operation sämtliche Strahlen erscheinen?

Es ist leicht den Beweis hervorzubringen, daß dies nicht der Fall ist.

Nehmen wir vorläufig an, daß dies der Fall ist für einen bestimmten Winkel a, dessen Kosinus gleich $\frac{p}{q}$ ist. Nun ist sofort klar, daß, wenn wir diesen Winkel durch $2a, 3a \ldots na \ldots$ ersetzen, der Strahl unter dem Winkel a keineswegs bei dieser Operation erscheint, wie lange dieselbe auch fortgesetzt gedacht wird. Allgemeiner ausgedrückt ist dies für sämtliche Winkel $2a, 3a \ldots$ nicht der Fall, wenn zur Entwicklung als Grundwinkel na angenommen wird. Natürlich werden hier die Winkel $m_1 2\pi + a$, $m_2 2\pi + 2a$, $m_3 2\pi + 3a \ldots m_\varkappa 2\pi + \varkappa a \ldots$ gemeint.

Wäre in der Tat die Annahme zutreffend, daß

$$m_\varkappa 2\pi + \varkappa a = Nna,$$

so würde daraus folgen

$$a(Nn - \varkappa) = m_\varkappa 2\pi \quad \text{resp.} \quad a = \frac{m_\varkappa}{Nn - \varkappa} 2\pi.$$

Die Zonenachse wäre dann Symmetrieachse mit der Zähligkeit $Nn - \varkappa$ gewesen, was aber unmöglich ist.

Daraus folgt, daß die auf diese Weise aus $a, 2a, 3a \ldots (n-1)a \ldots$ bestimmten Komplexe verschiedene sind, obgleich sämtliche die Strahlen enthalten, welche schon im Komplex a eingeschlossen sind. Wir können somit in Bezug auf einen gegebenen Winkel den ersten, zweiten, ... n^{ten} Komplex unterscheiden.

Zum Beispiel erwähnen wir für den ersten Winkel des Teilkomplexes in dem Komplexe $\{11\}$ den Winkel 53° 8′ 15,96″, dessen Kosinus gleich $\frac{3}{5}$ ist, so erhalten wir

für den zweiten Winkel den Wert	106° 16′ 31,92″	dessen Kosinus	$-\frac{7}{25}$	ist,
„ „ dritten „ „ „	159° 24′ 47,88″	„ „	$-\frac{44}{125}$	ist,
„ „ vierten „ „ „	212° 33′ 3,84″	„ „	$-\frac{527}{625}$	ist,
„ „ fünften „ „ „	265° 41′ 19,80″	„ „	$-\frac{237}{3125}$	ist,
„ „ sechsten „ „ „	318° 49′ 35,76″	„ „	$+\frac{11753}{15625}$	ist,

[1]) Die allgemeine Formel für die Auffindung solcher Zahlen wurde von mir schon in Zeitschrift für Kristallographie 28, 47 hergeleitet. Dabei wurde von dem speziellen Fall abgesehen, für welchen $a - c$ ein volles Quadrat ist. In diesem Fall ist aber auch $a + c$ ein volles Quadrat, z. B. $29 - 20 = 3^2$, $29 + 20 = 7^2$, also $20^2 + 21^2 = 29^2$ u. s. w.

für den siebenten Winkel den Wert	(360° +)	11° 57′ 51,72″	dessen Kosinus	$+\frac{76443}{78125}$	ist,
„ „ achten „ „ „	„	65° 6′ 7,68″	„ „	$+\frac{164833}{390625}$	ist.

Im Komplex {12} erhalten wir auf analoge Weise, falls wir als ersten Winkel 70° 31′ 43,62″ wählen, dessen Kosinus $\frac{1}{3}$ ist:

für den zweiten Winkel den Wert		141° 3′ 27,24″	dessen Kosinus	$-\frac{7}{9}$	ist,
„ „ dritten „ „ „		211° 35′ 10,86″	„ „	$-\frac{23}{27}$	ist,
„ „ vierten „ „ „		282° 6′ 54,48″	„ „	$+\frac{17}{81}$	ist,
„ „ fünften „ „ „		352° 38′ 38,10″	„ „	$+\frac{241}{243}$	ist,
„ „ sechsten „ „ „	(360° +)	63° 10′ 21.72″	„ „	$+\frac{329}{729}$	ist,
„ „ siebenten „ „ „	„	133° 42′ 5.34″	„ „	$-\frac{1511}{2187}$	ist,
„ „ achten „ „ „	„	204° 13′ 48,96″	„ „	$-\frac{5983}{6561}$	ist.

Wenn wir einen Winkel als n^{ten} bezeichnen, so heißt das, daß auch ein n mal geringerer Winkel demselben Teilkomplex eigen ist, wenn gleich zu demselben auch eine Anzahl von 360° hinzugefügt wird. Der Winkel 63° 10′ 21.72″ in der letzten Tabelle ist nicht der sechste Winkel, sondern der Winkel 423° 10′ 21,72″.

Die Betrachtung dieser beiden Tabellen zeigt uns, daß der Nenner des Kosinus des n^{ten} Winkels die n^{te} Potenz ist des Nenners des ersten Winkels. Es ist nun leicht zu beweisen, daß dieses Verhältnis das allgemeine Gesetz ist mit Ausnahme derjenigen Fälle, in welchen q eine gerade Zahl ist.

Daß der genannte Nenner wirklich eine solche Zahl ist und nicht mehr Faktoren besitzen kann, ersieht man direkt aus dem allgemeinen Ausdruck für $\cos(n\,a)$, und zwar:

$$\cos(n\,a) = \cos^n a - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cos^{n-2} a \sin^2 a + \frac{n!}{4!\,(n-4)!}\cos^{n-4} a \sin^4 a - \cdots$$

$$= \frac{p^n}{q^n} - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\,\frac{p^{n-2}(q^2-p^2)}{p^n} + \frac{n!}{4!\,(n-4)!}\,\frac{p^{n-4}(q^2-p^2)^2}{q^n} - \cdots$$

$$= \frac{1}{q^n}\left\{p^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,p^{n-2}(q^2-p^2)\left[1 + \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}\,\frac{(q^2-p^2)}{p^2}\left(1 - \frac{(n-4)(n-5)}{5\cdot 6}\,\frac{(q^2-p^2)}{p^2}\cdots\right)\right]\right\}$$

Nun denken wir, daß q eine ungerade Zahl ist, und schreiben die Reihe der Ausdrücke:

$$\cos(2\,a) = 2\cos^2 a - 1 = \frac{1}{q^2}(2\,p^2 - q^2)$$

$$\cos(4\,a) = 2\,(2\cos^2 a - 1)^2 - 1 = \frac{1}{q^4}[2\,(2\,p^2 - q^2)^2 - q^2]$$

$$\cos(8\,a) = 2\,[2\,(2\cos^2 a - 1)^2 - 1]^2 - 1 = \frac{1}{q^8}\{2\,[2\,(2\,p^2 - q^2)^2 - q^2] - q^2\}$$

. . . .

In jedem Gliede dieser Reihe haben wir in Parenthesen ein Binom von der Form $2\,p'^2 - q^2$, wo p' und q keine gemeinschaftliche Faktoren besitzen; infolgedessen bleibt der Nenner des Bruches $\cos(2^n\,a)$ stets q^{2^n}.

Wenn aber dies der Fall ist für diese Reihe, so muß dasselbe auch für alle anderen Glieder der Reihe $\cos(n\,a)$ bestehen; denn, wie aus dem allgemeinen Ausdruck zu ersehen ist, würde die Reduktion in einem Gliede dieser Reihe stattgehabt, so hätte dieselbe auch für alle folgenden Glieder bestanden, was aber für die Glieder der eben angeführten Reihe nicht der Fall sein kann.

Dieser Satz ist für uns von hoher Bedeutung, da derselbe uns in Stand setzt für jeden gegebenen Winkel eines Teilkomplexes direkt zu entscheiden, ob derselbe der erste, zweite. . . . n^{te} Winkel des Systems ist. Dazu ist nur nötig zahlenmäßig seinen Kosinus auszudrücken; ist der Nenner keine ganze Potenz, so ist der Winkel der erste.

Nur in dem Falle $q = 2\,r$ (wenn also q eine gerade Zahl ist) erfolgt eine Reduktion der Ausdrücke, und zwar:

$$\cos(2\,a) = 2\cos^2 a - 1 = \frac{1}{2\,r^2}(p^2 - 2\,r^2)$$

$$\cos(4\,a) = 2\,(2\cos^2 a - 1)^2 - 1 = \frac{1}{2\,r^4}[(p^2 - 2\,r^2)^2 - 2\,r^2]$$

$$\cos(8\,a) = 2\,[2\,(2\cos^2 a - 1)^2 - 1]^2 - 1 = \frac{1}{2\,r^8}\{[(p^2 - 2\,r^2)^2 - 2\,r^2]^2 - 2\,r^2\}$$

. . . .

Wie man sieht, ist auch in diesem Falle die Nummer des gegebenen Winkels im Systeme zu ermitteln, nachdem sein Kosinus zahlenmäßigen Ausdruck in der Form eines regelmäßigen Bruches erhält.

Wenn aber die Bedingung q^n (resp. $2\,r^n$) für den Nenner des Bruches notwendig dafür ist, daß der Bruch im n^{ten} Winkel des Systems wäre, so ist dieselbe nicht zugleich hinreichend.

Man hätte zum Beispiel glauben können, daß $\frac{24}{25}$ ein Kosinus des zweiten Winkels eines Systems gewesen wäre; dies ist aber nicht der Fall, da dieses Glied weder dem System $\frac{3}{5}$, noch dem System $\frac{4}{5}$ angehört. Also ist der zugeordnete Winkel der erste Winkel des speziellen Systems des Komplexes {11}.

Die Systeme $\frac{p}{q}$ und $-\frac{p}{q}$ können als identische gelten, obgleich in denselben die identischen Glieder mit solchen von entgegengesetzten Vorzeichen wechseln.

Aber es sind Systeme denkbar, welche teilweise identisch sind. Zum Beispiel die Systeme $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$.

Natürlich gehören diese Kosinusse den ersten Gliedern der zugeordneten Systeme an. Die zweiteu Glieder derselben sind respektive $-\frac{7}{25}$ und $+\frac{7}{25}$; die vierten Glieder sind aber vollständig identisch. Wenn also der Winkel angegeben wird, dessen Kosinus $\frac{527}{625}$ ist, so bleibt ganz unbestimmt, ob das erste Glied dieses Systems $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{5}$ ist.

Jedenfalls folgt aus dieser Auseinandersetzung, daß sogar ein Teilkomplex nicht etwas Einheitliches darstellt, sondern in unendlich viele Teilsysteme sich gliedern läßt, und nur für diese letztere kommt die Entwicklung durch Zusammenstellung einer einfachen arithmetischen Progression aus dem ersten Winkel desselben zustande.

Auf diese Weise kann jeder Teilkomplex nach einem gegebenen Strahle entwickelt werden. Dazu gehört die Gesamtheit der Winkel, deren rationale Kosinusse dem Komplex-Parameter entsprechen, also eine und dieselbe Gesamtheit für alle Strahlen, unabhängig von den Parametern der letzteren. Wenn wir also den Strahlenkomplex (ab) so auf sich selbst anlegen, daß ein Strahl vom Parameter c zur Deckung mit einem Strahle vom Parameter d kommt, so kommen zugleich die betreffenden Teilkomplexe vollständig zur Deckung; dabei kommen aber die Komplexe selbst zur Deckung, das heißt auch die übrigen Teilkomplexe mit bestimmten anderen Teilkomplexen, da zur Deckung des Komplexes nur notwendig und hinreichend ist, wenn drei Strahlen einander decken.

Gerade aber diese Folgerung ist gleichbedeutend mit dem Satze, nach welchem jeder isotrope Komplex unendlich-zählige Symmetrieachsen besitzt.

Ist γ ein Winkel zwischen zwei Strahlen verschiedener Teilkomplexe, so ist 2γ der Winkel, welcher die Zähligkeit einer vorhandenen Symmetrieachse bedingt, und alle Drehungen um den mehrfachen Winkel ergeben keinen einzigen Strahl der übrigen Teilkomplexe. Für den Übergang zu einem Strahl von diesen übrigen Teilkomplexen ist eine Drehung um einen ganz anderen Winkel und dessen mehrfache nötig.

Daraus ergibt sich, daß einem jeden isotropen Komplex nicht eine einzige, sondern die unendliche Gesamtheit der Symmetrieachsen von unendlicher Zähligkeit zukommt, und daß dabei alle unendlichen Größen, welche die Zähligkeit der betreffenden Symmetrieachsen bedingen, keine endliche Faktoren (außer 2) besitzen. Als Ausnahmefälle erscheinen der tetragonale Komplex, für welchen diese Größe durch 4 und der hexagonale Komplex, für welchen diese Größe durch 6 teilbar ist.

Alle diese unendlich-zähligen Symmetrieachsen sind untereinander inkongruent (abgesehen vom gemeinschaftlichen Faktor 2), weil bei der Annahme des gemeinschaftlichen Faktors r zwischen den Zähligkeiten der beiden, dies bedeuten würde, daß auch eine n zählige Symmetrieachse vorhanden ist, was, wie bewiesen, unmöglich ist. Wenn also γ einen Winkel zwischen zwei Strahlen verschiedener Teilkomplexe bedeutet, so fehlen in dem Komplexe sämtliche Winkel $\frac{\gamma}{n}$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

In Anbetracht der Formel 7) haben wir hier also mit folgenden Aufgaben der Zahlentheorie zu tun.

1. Es sind drei Zahlen a, b und c gegeben. Zu finden sind die Zahlen p_1 und p_2, deren Quadratmesser $ap_1^2 + bp_2^2$ durch c gleiche Quadrate ausgedrückt werden kann?

Die Auflösung dieser Zahlenaufgabe reduziert sich auf die Konstruktion eines Komplexes mit den Ausgangsstrahlen r (Parameter a) und r' (Parameter b) und die Entscheidung darüber, ob Strahlen mit dem Parameter c vorhanden sind.

Haben wir einmal konstatiert, daß ein solcher Parameter wirklich vorhanden ist, so existiert ein ganzer Teilkomplex mit diesem Parameter. Folglich, wenn es möglich erscheint, die Summe von a Quadraten irgendwelcher ganzen Zahl p_1 und von b Quadraten einer ganzen Zahl p_2 durch die Summe von c Quadraten einer Zahl q zu ersetzen, so sind unendlich viele Zahlen p_1, p_2 und q vorhanden, welche dieser Bedingung Genüge leisten. Die betreffenden Strahlen $(p_1\, p_2)$ bilden eine unendliche Reihe von Winkeln, welchen rationale Kosinusse entsprechen und dem Komplexparameter $a\,b$ entsprechen.

Daraus ersehen wir, daß dieselbe Aufgabe mehr korrekt so zu formulieren wäre:

2. Es sind zwei ganze Zahlen a und b gegeben. Zu entscheiden ist, ob die Summe von $a p_1^2 + b p_2^2$, wo p_1 und p_2 verschiedenartige ganze Zahlen sind, durch c gleiche Quadrate ausgedrückt werden kann? oder noch: „durch welche Summe von c gleichen Quadraten kann die Summe $a p_1^2 + b p_2^2$ ausgedrückt werden, wo p_1 und p_2 beliebige ganze Zahlen sind?"

Vom Standpunkt der Syngonielehre reduziert sich diese Aufgabe auf die Auffindung der möglichen Strahlenparameter. Unter den notwendig vorhandenen Werten von c sind auch die Zahlen a und b vorhanden, das heißt die Summe $a p_1^2 + b p_2^2$ kann auf unendliche Weise auch einfach durch die Summen von a resp. b gleichen Quadraten ersetzt werden. Ist z. B. $a = 1$, so kann diese Summe auf unendliche Weise auch durch ein einziges Quadrat der ganzen Zahlen ersetzt werden.

Aus allem Gesagten geht klar hervor, auf welche Weise sich jeder Komplex bildlich vorstellen läßt.

Derselbe besteht aus einer unendlichen Anzahl von Teilkomplexen, und jedem letzteren kommt eine bestimmte Parametergröße, die gleiche für alle Strahlen des Teilkomplexes, zu. Wenn wir also jedem Strahle eine Strecke zuerteilen, welche durch diesen Parameter ausgedrückt wird, so wird jeder Teilkomplex durch einen Kreis dargestellt und der vollständige Komplex durch eine Gesamtheit von konzentrischen Kreisen, deren Radien gleich sind den respektiven Parametern der Teilkomplexe.

Nun aber spielen sämtliche Strahlen des Komplexes dieselbe Rolle, da durch Drehung um einen bestimmten Winkel zwischen zwei Strahlen verschiedener Teilkomplexe auch der vollständige Komplex mit sich zur Deckung kommt.

Von dem erwähnten bildlichen Standpunkte aus ist aber diese Drehoperation identisch mit Verlängerung einer Strecke um eine Größe, welche dieselbe einer anderen Strecke gleich macht und einem Strahle des anderen Teilkomplexes zukommt.

Falls wir also die Strecken eines Ausgangsstrahles um einen Faktor vergrößern, wodurch diese Strecke einer anderen Strecke des Komplexes gleich kommt und zugleich sämtliche anderen Strahlenstrecken um denselben Faktor vergrößern, so erhalten wir einen mit dem früheren identischen Komplex, was seine bildliche Darstellung anbetrifft, obgleich der analytische Ausdruck des Komplexes durch die Formel 7) verändert wird.

Multiplizieren wir zum Beispiel diese Gleichung mit $a\,c$, so erhalten wir:

$$c\,p_1'^2 + a\,b\,c\,p_2^2 = a\,q'^2. \qquad 7\,a)$$

Diese Identität der Komplexe führt zu einer sehr wichtigen Folgerung.

Denken wir, daß a und c Primzahlen sind, ebenso wie eine noch vorhandene Komplexzahl d. Die Multiplikation mit ac gibt die Zahl acd; die Identität des Komplexes erfordert aber, daß auch in dem ersten Komplexe die Zahl acd vertreten wäre. Also sind die Komplexzahlen (Parameter) die verschiedenartigen Produkte der bestimmten Primzahlen, welche selbst als Parameter auftreten.

Wenn aber d nicht eine Primzahl ist, sondern ein Produkt $d_1 d_2$ von zwei (oder mehreren) Primzahlen, so sagt das Produkt $a c d_1 d_2$ gar nicht aus, daß notwendigerweise auch d_1 und d_2 als selbständige Parameter auftreten. Es ist also auch der Fall nicht ausgeschlossen, daß einige Primzahlen nicht selbständig als Parameter, sondern nur als Faktoren der Parameterzahlen auftreten.

Nun ist aber stets möglich solche zwei Zahlen a und b auszuwählen, daß die Summe $a p_1^2 + b p_2^2$ durch keine p_1, p_2 als ein einziges Quadrat dargestellt werden kann. Durch die Multiplikation mit a nimmt aber die Summe die Form $p_1'^2 + a b p_2^2$ an, und da die Parameter der Ausgangsstrahlen natürlich zwei möglichen Parametern der Komplexstrahlen angehören, so ist jetzt auch Parameter 1 notwendigerweise ein möglicher Strahlenparameter.

Daraus ist zu folgern, daß in der Reihe der Komplexzahlen desselben Komplexes in seinen beiden Formen $a p_1^2 + b p_2^2$ und $p_1'^2 + a b p_2^2$ keine einzige gemeinschaftliche ist. Wäre eine einzige Zahl für beide Komplexe gemeinschaftlich, so würden auch sämtliche Komplexzahlen identisch, und das ist unmöglich.

Demzufolge sind Strahlenkomplexe und Zahlenkomplexe zu unterscheiden: einem und demselben Strahlenkomplexe können verschiedene Zahlenkomplexe zugeordnet sein, und dann haben solche Zahlenkomplexe keine einzige Zahl gemeinschaftlich. Wollen wir solche Zahlenkomplexe als koordinierte bezeichnen.

Dann ist der Satz zu formulieren: jeden zwei koordinierten Zahlenkomplexen gehört eine und dieselbe Gesamtheit der Primzahlen zu, aber in verschiedenen Kombinationen als Faktoren der Zahl.

Solche Zahlenkomplexe, welchen keine koordinierten Zahlenkomplexe zugeordnet sind, wollen wir als vollständige bezeichnen.

Nun ist es klar, daß jeder vollständige Zahlenkomplex auch die Zahl 1 enthält und überhaupt alle seine Zahlen alle möglichen Kombinationen einer bestimmten Reihe von Primzahlen darstellen: wäre eine Faktorenkombination $a_1 a_2 a_3 \ldots$ nicht darin enthalten, so würden demselben auch sämtliche andere Kombinationen dieser einfachen Zahlen a_1, a_2, a_3 fremd sein, da durch Multiplikation mit $a_1, a_2, a_3, a_1 a_2, a_1 a_3$ u. s. w. wir andere Kombinationen erhalten, welche durch Einführung der komplementären Faktoren die Zahl $a_1 a_2 a_3 \ldots$ ergeben hätten, als ein Glied des koordinierten Zahlenkomplexes, und dies ist unmöglich.

Also kann der vollständige Komplex nur durch die Gleichung der Form

$$a p_1^2 + p_2^2 = c q^2 \tag{7 b}$$

ausgedrückt werden, und dabei muß a eine Primzahl sein, weil sonst, z. B. wenn $a = a_1 a_2$, a_1 ein möglicher Parameter gewesen wäre; so würde er nur mit einem quadratischen Faktor erscheinen können und die Kombination der Faktoren würde in dem Komplexe nicht vollständig vertreten sein, da die Zahlen a_1, a_2, einzeln genommen, in demselben nicht auftreten würden. Die Ursache des Fehlens dieser Zahlen ist also dieselbe, wie die der Gleichheit einer der Zahleu a oder b der Einheit.

Durch Multiplikation mit a erhält die Gleichung die Form:

$$p_1'^2 + a p_2^2 = a c q^2. \tag{7 c)}$$

Die Einheit wird durch a und a durch die Einheit ersetzt, ebenso wie c durch $a c$ und $a c$ durch c. Das ist keine eigentliche Multiplikation, sondern die Vertauschung des Strahles r mit r', was natürlich stets erlaubt worden ist, ohne daß dabei eine Änderung auftritt.

Überhaupt bleibt der Zahlenkomplex unverändert, wenn man seine sämtlichen Zahlen durch zwei derselben multipliziert. Sind z. B. zwei Zahlen a und b vorhanden, so ersetzt die Multiplikation mit $a b$ a durch b und b durch a. Nun ist aber das Vorhandensein einer einzigen gemeinschaftlichen Zahl genügend, um die Identität der Zahleukomplexe festzustellen.

Wenn also der Komplex durch zwei Zahlen 1 und $a_1 a_2$ bestimmt wird, so enthält derselbe weder a_1 noch a_2, da einfach Multiplikation durch $a_1 a_2$ diese zwei einander gegenseitig ersetzt. Das gleichzeitige Vorhandensein sämtlicher vier Zahlen 1, a_1, a_2 und $c. a_2$ würde bedeuten, daß der Komplex vollständig ist, was für die nicht einfache Zahl $a_1 a_2$ unmöglich ist.

Wird der Komplex durch zwei Zahlen 1 und $a_1 a_2 a_3$ bestimmt, so findet man auf dieselbe Weise, daß demselben weder a_1, a_2, a_3, noch $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$ notwendig zugehören. Überhaupt demjenigen koordinierten Komplex, welchem die Zahlen a_1 und $a_2 a_3$ zugehören, können nicht die Zahlen a_2 und $a_1 a_3$, auch nicht die Zahlen a_3 und $a_1 a_2$ zugehören. Diesem Strahlenkomplex sind somit vier Zahlenkomplexe zugeordnet.

Bei größerer Anzahl von einfachen Faktoren erhält man auch größere Anzahl der zugeordneten koujugierten Zahlenkomplexe. Es ist leicht den Beweis zu erbringen, daß, wenn die Anzahl der einfachen Zahlenfaktoren gleich n ist, die Anzahl der zugeordneten Zahlenkomplexe 2^{n-1} ist.

Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß auch einem einzigen einfachen Faktor nicht der vollständige, sondern eine Anzahl koordinierter Zahlenkomplexe entspricht und daß dies sogar der allgemeine Fall ist. Man bedenke nur, daß unter anderen auch stets der Parameter $1 + a$ vorhanden ist (dazu ist nur nötig p_1 und p_2 gleich 1 zu setzen); da a eine ungerade Zahl ist (mit Ausnahme von $a = 2$), so ist $1 + a$ stets eine gerade Zahl und überhaupt kann $1 + a$ verschiedene Faktoren besitzen, und diese Faktoren können nicht explicite als Parameter auftreten.

Sehr lehrreich ist hier auch die Vektorentheorie (resp. die Lehre der Imaginären) zur Anwendung zu bringen.

Man weiß, daß nach dieser Theorie $a + b i$, also auch $p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b} \cdot i$ (wo $i = \sqrt{-1}$) einen Vektor ausdrückt, welcher eine Resultierende (geometrische Summe) von zwei senkrechten Vektoren a resp. $p_1 \sqrt{a}$ auf der Ausgangsgerade und b resp. $p_2 \sqrt{b}$ auf der dazu senkrechten Gerade ist. Die jedem Vektor zukommende Streckengröße wird nach Hamilton „Skalar" genannt. Also die Größen a resp. $p_1 \sqrt{a}$ und b resp. $p_2 \sqrt{b}$ sind die Skalare beider zusammengesetzten Vektoren.

Die Summierung zweier komplexen Zahlen geschieht durch die gesonderte Summierung ihrer reellen und ihrer imaginären Zahlen. Die geometrische Bedeutung der Summe ist die parallelogrammatische Zusammensetzung wie bei dem Summieren der Kräfte u. dgl. Also ist die Zahl $p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b\, i}$ die Summe von $p_1 \sqrt{a}$ und $p_2 \sqrt{b\, i}$ und der betreffende Vektor ist die Diagonale des Rechteckes, dessen Seiten den zusammensetzenden Skalaren gleich ist.

In der Theorie der Imaginären wird anstatt „Skalar" das Fachwort „Modulus" gebraucht.

Der komplexen Zahl $a + b\, i$ entspricht der Modulus $\sqrt{a^2 + b^2}$. Also ist der Parameter der Syngonielehre das Quadrat des Modulus. Ausserdem nennt man „Argument" den Winkel α, für welchen $\operatorname{tang} \alpha = \frac{b}{a}$, also der Winkel zwischen dem Ausgangsstrahle r und dem gegebenem Vektor resp. Strahl.

Für den Vektor resp. Strahl $p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b\, i}$ ist der Modulus $\sqrt{a\, p_1^2 + b\, p_2^2}$ resp. $q \sqrt{c}$.

Nun ist von vornherein klar, daß die Summe der Vektoren eines rationalen Komplexes ein Vektor desselben Komplexes ist.

In der Tat haben wir:

$$(p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b \cdot i}) + (q_1 \sqrt{a} + q_2 \sqrt{b \cdot i}) = (p_1 + q_1) \sqrt{a} + (p_2 + q_2) \sqrt{b \cdot i}.$$

Diesem zusammengesetzten Vektor gehört der Modulus $\sqrt{a (p_1 + q_1)^2 + b (p_2 + q_2)^2}$ an.

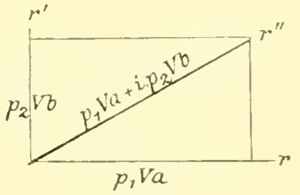


Fig. 5.

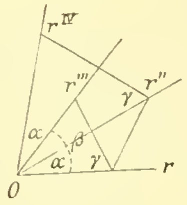


Fig. 6.

Der Begriff „Vektor" unterscheidet sich von dem einfacheren Begriff „Strahl" dadurch, daß in dem ersten außer der Lage des Strahles noch seine Strecke hinzugenommen wird. Dieser Unterschied ist also dem Unterschiede zwischen Koordinatenachse und kristallographischer Achse analog.

Es muß noch bemerkt werden, daß der Parameter nicht eigentlich das Quadrat des Modulus, sondern diese Zahl mit Ausschluß von quadratischen Faktoren, als nicht $c\, q^2$, sondern c ist.

Der Begriff des Symboles $(p_1\, p_2)$ eines Strahles gehört ausschließlich der Lehre von den rationalen Strahlenkomplexen, also der reinen Syngonielehre an, und war der allgemeinen Vektorenlehre fremd.

Nun wird in der Theorie des Imaginären der für uns sehr wichtige Satz bewiesen, daß die Multiplikation zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen eine Zahl ergibt, deren Modulus dem Produkte der Moduli und deren Argumente der Summe der Argumente der gegebenen Zahlen gleich sind.

In der Theorie der Vektoren ist dasselbe in Bezug auf Vektoren selbst der Fall.

Es ist leicht den Beweis hervorzubringen, daß das Produkt zweier Vektoren eines gegebenen Komplexes ein Vektor desselben Komplexes ist.

Auf Grund des Satzes, nach welchem sämtlichen Komplexstrahlen die gleiche Rolle zukommt, ist es zuerst ganz klar, daß, wenn außer r'', welcher mit r den Winkel α bildet, noch der Strahl r''' in demselben Komplexe vorkommt, welcher mit r den Winkel β bildet, auch der Strahl r^{IV} vorhanden ist, welcher mit r den Winkel $\alpha + \beta$ bildet, da dieser Strahl mit r'' den Winkel β, also denselben wie r''' mit r, bildet.

Nehmen wir weiter den Strahl resp. Vektor r'' (Fig. 6) als den Ausgangsvektor. Da die Strecke $d\,r''$ die diesem Vektor zugeordnete Strecke (Modulus) ist, so wird jede geometrische Konstruktion, welche aus einem gegebenen Strahl zu einem anderen desselben Komplexes führt, für den letzteren auch die ihm früher zukommende Strecke ergeben. Und nun ist die Konstruktion des Strahles r^{IV} mittelst der Winkel β und γ aus r'' genau dieselbe, wie die Konstruktion von r''' aus r. Also ist der Vektor r^{IV} ein Vektor des Komplexes. Aber dieser Vektor ist das Produkt der Vektoren r'' und r'''.[1])

Sind also die Parameter der Strahlen r'' und r''' Primzahlen a_1 und a_2, so ist der Parameter des Strahles r^{IV} das Produkt a_1 und a_2. Folglich sind unter den Parametern alle solche vorhanden, welche sämtliche mögliche Kombinationen derjenigen Primzahlen darstellen, die auch gesondert die Parameter einiger Strahlen sind.[2])

Daraus folgt weiter, daß solche Vektoren nicht möglich sind, deren Parameter das Produkt $a\,f$ darstellt, wo a die Primzahl ist, welche als Parameter auftritt, und f eine solche, welche als Parameter nicht auftritt. Also sind die Primzahlen, welche, vereinzelt, als Parameter, nicht auftreten, auch in Produkten nur in einer Gesamtheit und nicht vereinzelt möglich.

Im besonderen sind für einen Komplex $(1, a\,b)$ die Parameter a und b unmöglich. Da aber $(1, a\,b)$ und $(a\,b)$ eigentlich einen und denselben Strahlenkomplex darstellen, so sind dieselben als Zahlenkomplexe von Grund aus verschieden (besitzen keine einzige gemeinschaftliche Zahl). Zwei solche Zahlenkomplexe, zusammen genommen, bilden einen vollständigen Komplex.

Ganz analog können wir diese Regel auf die Komplexe übertragen, welche durch 1 und ein Produkt von mehr als zwei Primzahlen sich bestimmen lassen.

Im Speziellen können wir aber einen gegebenen Vektor beliebige Male mit sich selbst multiplizieren, das heißt denselben potenzieren, und alle Potenzen desselben bilden ebenfalls mögliche Vektoren des Komplexes.

Bei sukzessiver Potenzierung erhalten wir für einen Vektor $p_1\sqrt{a} + p_2\sqrt{b} \cdot i$ eine arithmetische Reihe von Argumenten α, also α, $2\,\alpha$, $3\,\alpha \ldots$ und zugleich ist der Modulus der Potenz gleich der respektiven Potenz des Modulus, also der Reihe nach $\sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2}$, $(\sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2})^2 = a\,p_1^2 + b\,p_2^2$ (Parameter gleich 1), $(\sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2})^3 = \sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2}$ u. s. w., also Sukzession von zwei gleichen Parametern, in welchen alle geraden Glieder gleich 1 sind.

[1]) Das Produkt der Vektoren $p_1\sqrt{a} + p_2\sqrt{b} \cdot i$ und $q_1\sqrt{a} + q_2\sqrt{b} \cdot i$ ist der Vektorensumme $(p_1\,q_1\,a - p_2\,q_2\,b) + \sqrt{a\,b}\,(p_1\,q_2 + p_2\,q_1)\,i$ gleich.

[2]) Zu bemerken ist, daß dabei der Ausgangsvektor gleich 1 vorausgesetzt wird. Für die Komplexe $\{a\,b\}$, wo keine bestimmende Zahl gleich 1 ist, ist der Satz nicht mehr anwendbar; nun aber kann ein solcher Zahlenkomplex durch $\{1, a\,b\}$ ersetzt werden, und dann erhält der Satz wieder seine Gültigkeit.

Wenn wir also alle diese Potenzen mit dem Vektor des Ausgangsstrahles multiplizieren, so erhalten wir die Sukzession von Modulen $\sqrt{a}$, $\sqrt{a p_1^2 + b p_2^2}$ uud $\sqrt{a}$.

Alle gerade Glieder dieser Sukzession bilden zusammen einen Kreis mit dem Radius a, und die ungeraden Glieder den Kreis mit dem Radius $a(a p_1^2 + b p_2^2)$, resp. $a c q^2$.

Somit sind wir auf anderem Wege zu derselben bildlichen Vorstellung des Komplexes durch eine unendliche Gesamtheit konzentrischer Kreise gekommen.

Nun wollen wir einige einfache Beispiele näher betrachten.

Bei der Entwicklung (in V Perioden) verschiedener Komplexe wollen wir die Symbole der Strahlen in Klammern oben und die zugeordneten Parameter unten schreiben.

Entwicklung des Komplexes {11}.

(01) (12) (11) (21) (10)
1 5 2 5 1

(13) (23) (32) (31)
10 13 13 10

(14) (25) (35) (34) (43) (53) (52) (41)
17 29 34 1 1 34 29 17

(15) (27) (38) (37) (47) (58) (57) (45) (54) (75) (85) (74) (73) (83) (72) (51)
26 53 73 58 65 89 74 41 41 74 89 65 58 73 53 26

(16) (29) (3 · 11) (3 · 10) (4 · 11) (5 · 13) (5 · 12) (49) (59) (7 · 12) (8 · 13) (7 · 11) (7 · 10)
37 85 130 109 137 191 169 97 106 193 233 170 149

(8 · 11) (7 · 12) (56) (65) (12 · 7) (11 · 8) (10 · 7) (11 · 7) (13 · 8) (12 · 7) (95) (94) (12 · 5)
185 193 61 61 193 185 149 170 233 193 106 97 169

(13 · 5) (11 · 4) (10 · 3) (11 · 3) (92) (61)
191 137 109 130 85 37

Alle diese Parameter in der Reihe der Zahlen vereinigend, erhalten wir die Tabelle:

1 · 2 · 5 · 10 · 13 · 17 · 26 · 29 · 34 · 37 · 41 · 53 · 58 · 61 · 65 · 73 · 74 · 85 · 89 · 97 · 106 · 109 · 130 . . .
2·5 2·13 2·17 2·29 5·13 2·37 5·17 2·53 2·5·13

Sehr merkwürdig ist die Reihe der Primzahlen, welche diesen vollständigen Komplex bilden. Das sind außer der Zahl 2 noch die Primzahlen von der Form $1 + 4n$, also:

1, 2, 5, (9), 13, 17, (21), (25), 29, (33), 37, 41, (45), (49), 53, (57), 61, (65), (69), 73, (77), (81), (85), 89, (93), 97 . . . . .

Also sind alle diejenigen Glieder dieser arithmetischen Progression auszustreicheu, welche nicht Primzahlen sind: deswegen sind sie in Klammern eingeschlossen.

Bei der eingeschränkten Entwicklung ist natürlich das Fehlen einiger Glieder zu erwarten, welche aus der weiteren Entwicklung zum Vorschein kommen würden.

Eine solche Zahl ist z. B. $82 = 2 \cdot 41$. Nun ist aber leicht zu beweisen, daß diese Zahl notwendigerweise als ein Parameter dieses Komplexes auftreten muß. Dazu ist nötig die Tangente derjenigen Summe von zwei Winkeln zu bestimmen, welche den Strahlen 2 (Symbol 11) und 41 (Symbol 54) entsprechen.

Nun ist tang $(1 \cdot 2) = 1$; tang $(1 \cdot 41) = \frac{4}{5}$; folglich

$$\operatorname{tang}(1 \cdot 82) = \frac{\operatorname{tang}(1 \cdot 2) + \operatorname{tang}(1 \cdot 41)}{1 - \operatorname{tang}(1 \cdot 2)\operatorname{tang}(1 \cdot 41)} = 9;$$

das Symbol ist also $(9 \cdot 1)$.

Die besondere Eigenschaft dieses Komplexes, welche allein demselben zukommt, ist seine Symmetrie in Bezug auf den Strahl (11). Dieselbe kommt keinem anderen Komplex zu, da in keinem die beiden den Komplex bestimmenden Parameter gleich sein können. Das ist die Ursache, warum die Entwicklung ausnahmsweise bis zu VI Perioden verlängert wurde.

Entwicklung des Komplexes {12}.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	1	3	6	2

(13)	(23)	(32)	(31)
19	22	17	11

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
33	6	59	41	34	43	33	2

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
51	102	137	107	114	153	123	66	57	11	114	1	67	82	57	3

Daraus entnimmt man folgende Reihe der Parameterzahlen:[1])

1	2	3	6	11	17	19	22	33	34	38[2])	41	43	51	57	59	66	67	82	102	107	114...
			2·3				2·11	3·11	2·17	2·19			3·17	3·19		2·3·11		2·41	2·3·17		2·3·19

Dieser Komplex ist also wieder ein vollständiger.

Entwicklung des Komplexes {13}.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	13	1	7	3

(13)	(23)	(32)	(31)
7	31	21	3

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
1	79	21	57	43	13	37	19

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
19	151	201	39	163	217	43	91	73	131	139	97	19	91	61	7

Daraus entnimmt man folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	3	7	13	19	21	31	37	39	43	57	61	67	73	79	91	97	139	151	163	201 ...
					3·7			3·13		3·19					7·13					3·67

Auch dieser Komplex ist der vollständige (obgleich infolge ungenügender Entwicklung manche Zahlenkombinationen nicht zum Vorschein gekommen sind).

[1]) In diesem Komplex sind die Primzahlen von der Form $3 + 8n$ enthalten. Wenn z. B. in der angegebenen Entwicklung die Zahl 83 fehlt (und sie allein), so ersieht man aus der Gleichung $83 = 1 \cdot 9^2 + 2 \cdot 1$, daß diese Zahl bei der weiteren Entwicklung wirklich zum Vorschein kommt. Aber außer dieser Reihe der einfachen Zahlen gibt es noch andere, wie 2, 17, 41 ...

[2]) $38 = 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 1^2$.

Auch hier, wie im Komplex $\{11\}$, ersieht man eine merkwürdige Reihe von Primzahlen in der Form $1 + 6n$ mit Hinzufügung von 3. Also

1, 3, 7, 13, 19, (25), 31, 37, 43, (49), (55), 61, 67, 73, 79, (85), (91), 97, 103, 109, (115) . . . .

Infolge der ungenügenden Entwicklung hat es den Anschein, als ob einige dieser Zahlen fehlen, zum Beispiel 103, 109 . . ; nun ist es aber nicht schwer zu beweisen, daß in der Tat solche Zahlen wirklich als Parameter in die Reihe kommen. Also

$103 \cdot 2^2 = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 11^2$ oder $103 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 10^2$, endlich $103 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1 \ldots$

Entwicklung des Komplexes $\{15\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	21	6	1	5

(13)	(23)	(32)	(31)
46	1	29	14

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
1	129	134	89	61	70	5	21

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
14	249	329	254	29	345	30	141	105	174	21	129	94	109	69	30

Daraus entnimmt man folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	5	6	14	21	29	30	61	69	70	89	94	105	109	129	134	141	145[1]
		2·3	2·7	3·7		2·3·5		2·23	2·5·7		2·47	3·5·7		3·43	2·67	3·37	5·29

174	249	254	329	345 . . .
2·3·29	3·83	2·127	7·47	3·5·23

Nun sieht man, daß dieser Zahlenkomplex kein vollständiger ist. Außer den Primzahlen, welche explizit in Parametern auftreten, gibt es eine Reihe anderer Zahlen, für welche dies nicht der Fall ist und welche, dem obigen Satz gemäß, überhaupt in die Parameter nur in einer Gesamtheit von Faktoren eintreten. Dazu gehören die Zahlen 2, 3, 7, 23, 37, 43, 67 . . .

Ersetzt man diesen Zahlenkomplex durch den Komplex $(2 \cdot 10)$, welcher als Strahlenkomplex mit demselben identisch ist, so findet man, daß dieser letzte der demselben koordinierte Komplex ist.

Entwicklung des Komplexes $\{2 \cdot 10\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
2	42	3	2	10

(13)	(23)	(32)	(31)
92	2	58	7

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
2	258	268	178	122	140	10	42

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
7	498	658	127	58	690	15	282	210	87	42	258	47	218	138	15

[1]) $145 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 3^2$.

Daraus entnimmt man folgende Reihen der Parameterzahlen:

2	3	7	10	15	23	35	42	47	58	67	87	122	127	138	178	210
			2·5	3·5		5·7	2·3·7		2·29		3·29	2·61		2·3·23	2·89	2·3·5·7

218	258	282	498	658	690	...
2·109	2·129	2·141	2·249	2·329	2·3·5·23	

Stellt man in einer Zeile die explizit auftretenden Primzahlen des ersten, und in zweiter diejenigen des zweiten Komplexes, so erhält man die Reihe:

1			5			29		41			61		...
	2	3		7	23		37		43	47		67	...

Das Verhältnis der beiden Zahlenkomplexe ist folgendes: Alle möglichen Kombinationen der Zahlen der ersten Zeile, ebenso wie dieselben mit geraden Kombinationen der Zahlen der zweiten Zeile setzen den ersten Komplex zusammen. In dem zweiten sind dieselben Kombinationen nur mit den ungeraden Kombinationen der Zahlen der zweiten Zeile verbunden. Zusammengenommen bilden die beiden einen vollständigen Zahlenkomplex.

Da die Primzahlen einer jeden Zeile die gleiche Rolle spielen — man hätte sagen können, daß der Zahlenkomplex symmetrisch ist in Bezug auf jede Primzahl einer Zeile — so erhalten wir dasselbe Resultat, wenn wir die Zahl 2 durch 3 ersetzen würden, das heißt, daß die Zahlenkomplexe $\{2 \cdot 10\}$, $\{3 \cdot 15\}$ identische sind. Man kann weiter gehen und behaupten, daß der erste Komplex identisch bleibt, wenn wir seine bestimmenden Zahlen $\{15\}$ mit einer beliebigen Kombination der Primzahlen der ersten Zeile und noch durch eine gerade Anzahl der Primzahlen der zweiten Zeile multiplizieren, und daß der zweite Zahlenkomplex identisch bleibt, wenn wir dieselben bestimmenden Zahlen des ersteren durch eine beliebige Kombination der Primzahlen der ersten Zeile und zugleich noch mit einer ungeraden Anzahl der Primzahlen der zweiten Zeile multiplizieren.

Jetzt kehren wir uns der Betrachtung der Zahlenkomplexe $\{a\ 1\}$ zu, in welchen a keine Primzahl ist. Dabei müssen aber die quadratischen Zahlen ausgeschlossen werden, da dieselben in den Zahlenkomplex keine Änderung einführen; $\{a^2, 1\}$ ist offenbar mit $\{11\}$ identisch, was übrigens leicht direkt zu beweisen, wenn man die Gesamtheit der Zahlen $a^2 p_1^2 + p_2^2$ berücksichtigt. Auch der Komplex $\{a^2, b^2\}$ ist mit dem Komplex $\{11\}$ identisch gleich und zwar aus demselben Grunde.

Bei näherer Betrachtung eines Zahlenkomplexes sind also überhaupt quadratische Faktoren auszuschließen.

Nun gehen wir zur näheren Betrachtung der Komplexe $\{a\,b \cdot 1\}$ über, wo a und b Primzahlen sind.

Diese Primzahlen treten schon nicht mehr vereinzelt, sondern paarweise oder überhaupt in gerader Anzahl der Faktoren auf. Also muß in diesem Falle notwendigerweise ein koordinierter Zahlenkomplex vorhanden sein, welcher aus diesem durch Multiplikation mit $a, b \ldots.$ oder einer ungeraden Anzahl solcher Faktoren entsteht. Solche zwei Zahlenkomplexe, zusammengenommen, bilden einen vollständigen Zahlenkomplex mit bestimmter, ihm eigener Reihe der Primzahlen.

Als das einfachste Beispiel ziehen wir folgende Komplexe in Betracht.

Entwicklung des Komplexes $\{16\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	1	7	10	6

(13)	(23)	(32)	(31)
55	58	33	15

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
95	154	159	105	70	79	1	22

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
151	298	393	303	310	409	319	166	1	199	214	145	103	118	73	31

Daraus entnehmen wir folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	6	7	10	15	22	31	33	55	58	73	79	97	103	105	118	145
	2·3		2·5	3·5	2·11		3·11	5·11	2·29					3·5·**7**	2·59	5·29

154	159	166	199	214	217	298	303	310	319 . . .
2·7·11	3·53	2·83		2·107	**7·31**	2·149	3·101	2·5·**31**	

Der Anschaulichkeit wegen sind die hier explizit vorkommenden Primzahlen fett gedruckt. Man sieht, daß andere Primzahlen, welche explizit nicht auftreten, ausschließlich in gerader Kombination vertreten sind, während die ersteren in beliebiger Kombination vorkommen.

Wir können also die für diesen Komplex charakteristische Reihe der Primzahlen in zwei Teile sondern, und dadurch werden sämtliche Parameter dieses, wie des ihm koordinierten Zahlenkomplexes, eindeutig bestimmt.

Diese Zahlenreihen sind respektive:

1				7			31			73	79		97	103	. . .
	2	3	5		11	29		53	59			83			107 . . .

Der einfachste Ausdruck des ihm koordinierten Zahlenkomplexes wird durch Multiplikation mit 2, als $\{23\}$, erhalten.

Es ist aber natürlich, daß

$$\{23\} = \{32\} = \{5 \cdot 30\} = \{11 \cdot 176\} \text{ u. s. w., während}$$
$$\{16\} = \{7 \cdot 42\} = \{31 \cdot 186\} \text{ u. s. w. auch } = \{10 \cdot 60\} = \{15 \cdot 90\} \ldots$$

Überhaupt ist jede Kombination dieser Primzahlen direkt auf den einen oder anderen Teilkomplex zu beziehen. Bezeichnen wir im Allgemeinen diese Zahlenreihen respektive

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ b & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \end{array}$$

so ist die Zahl $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_m \times b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots b_n$ der Parameter des ersteren, wenn n eine gerade und des letzteren, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Entwicklung des Komplexes $\{1 \cdot 10\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	41	11	14	10

(13)	(23)	(32)	(31)
91	94	1	19

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
161	254	259	1	106	115	65	26

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
251	494	649	499	506	665	575	266	185	299	314	209	139	154	89	35

Daraus entnehmen wir folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	10	11	14	19	26	35	46	59	65	74	89	91	94	106	110	115	139
	2·5		2·7		2·13	5·7	2·23		5·13	2·37		7·13	2·47	2·53	2·5·**11**	5·23	

154	161	185	190	209	251	254	259	266	299	...
2·7·**11**	7·23	5·37	2·5·**19**	**11·19**		2·127		2·133	13·23	

Also sind die charakteristischen Primzahlen in folgende zwei Zeilen zu verteilen:

1				11		19					59	...
	2	5	7		13		23	37	47	53		...

Solche Zahlen wie 2, 5, 7, 13, $22 = 2 \cdot 11$, 23, 37, $38 = 2 \cdot 19$, 47, $55 = 5 \cdot 11$ u. s. f. sind die Parameterzahlen des Komplexes $\{25\}$ und demselben gleicher Komplexe.

Aus dem Obigen ersehen wir, von wie hervorragender Bedeutung derjenige Zahlencomplex ist, in dessen Zusammensetzung der Parameter 1 hinzutritt. In demselben, ebenso wie in allen mit ihm koordinirten Komplexen sind die für denselben charakteristischen Primzahlen in beliebigen Kombinationen zu nehmen; für die übrigen Primzahlen ist dies nicht der Fall. Deswegen verdient ein solcher Komplex als **Hauptkomplex** bezeichnet zu werden.

Im Allgemeinen sind zwei solche Komplexe wie $\{1 \cdot ab\}$ und $\{ab\}$ koordinierte. Aber dies ist nicht stets der Fall, da die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, daß $a p_1^2 + b p_2^2$ durch ein einziges Quadrat ausgedrückt werden kann. Tritt ein solcher Fall ein, so sind die beiden Komplexe identisch, da es für die Identität hinreichend ist, daß ein einziger Parameter gemeinschaftlich auftritt.

Als der einfachste solche Fall ist der Komplex $\{2 \cdot 7\}$ resp. $\{1 : 14\}$ aufzuzeichnen, da $2 + 9 = 1 \cdot 3^2$ und folglich nicht nur in $\{1 \cdot 14\}$, sondern auch in $\{2 \cdot 7\}$ der Parameter 1 gemeinschaftlich auftritt.

Jedem solchen Komplexenpaar ist ein anderes zugeordnet, welches durch Permutation der ersten Zahlen entsteht.

Unter solchen sind auch die Komplexe $\{1 \cdot 7\}$ und $\{2 \cdot 14\}$ die gleichen, da $2 \cdot 5^2 + 14 = 1 \,.\, 8^2$.

Dasselbe gilt für die Komplexenpaare $\{2 \cdot 23\} = \{1 \cdot 46\}$ und $\{1 \cdot 23\} = \{2 \cdot 46\}$, da $2 \cdot 3^2 + 46 = 1 \cdot 8^2$.

Auch für die Komplexenpaare $\{2 \cdot 34\} = \{1 \cdot 68\} = \{1 \cdot 17\}$ und $\{1 \cdot 34\} = \{2 \cdot 68\} = \{2 \cdot 17\}$, da $2 \cdot 4^2 + 17 = 1 \cdot 7^2$.

Auch für die Komplexenpaare $\{2 \cdot 47\} = \{1 \cdot 94\}$ und $\{1 \cdot 47\} = \{2 \cdot 94\}$, da $2 \cdot 9^2 + 1 \cdot 94 = 1 \cdot 16^2$.

In diesen Fällen sind die beiden so einander zugeordneten Komplexenpaare die gleichen.

Für die Komplexe $\{2 \cdot 7\}$ und $\{1 \cdot 14\}$ sind die charakteristischen Primzahlen:

1	2			7			23			71			....
		3	5		13	19		59	61		83	101	....

Ein Komplex $\{1 \cdot abc\}$ kann auch in den Formen $\{a \cdot bc\}$, $\{b \cdot ca\}$, $\{c \cdot ab\}$ dargestellt werden. Man erhält diese drei Formen durch Multiplikation des Hauptkomplexes respektive mit a, b, c. Treten also diese Zahlen in demselben nicht auf, so erhalten wir vier verschiedene Zahlenkomplexe; demgemäß sind auch die charakteristischen Primzahlen in vier Zeilen zu gliedern; die Zahlen jeder Zeile treten einzeln nur in dem respektiven Zahlenkomplex auf. Sind aber alle Zeilen gegeben, so ist schon leicht für jeden besonderen Zahlenkomplex seine Parameter zusammenzusetzen.

Wollen wir diese Zahlen durch

$$\begin{array}{cccccc} 1 & o_1 & o_2 & o_3 & \dots & abc \\ a & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & bc \\ b & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & ac \\ c & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & ab \end{array}$$

bezeichnen, und nun sei eine Kombination

$$o_1\ o_3\ a\, a_1\ a_4\ b_2\ c_1\ c_3$$

gegeben und es wird gefragt, zu welchem Zahlenkomplex gehört dieser Parameter?

Zuerst unterdrücken wir alle o und die gerade Anzahl der Faktoren jeder Zeile, da solche Produkte die Zugehörigkeit des Parameters zu einem bestimmten Zahlenkomplex nicht ändern.

Wir erhalten auf diesem Wege etwa

$$a\, b_2,$$

also die Kombination der Faktoren, welche für die Zeile c charakteristisch sind, und nun ist die Aufgabe gelöst.

Man hätte auch rekursiv verfahren können, was zu demselben Resultate führt, aber ohne Nutzen komplizierter wird:

c_3 gehört der Zeile c, $c_1 c_3$ der Zeile 1 $b_2 c_1 c_3$ der Zeile b, $a_4 b_2 c_1 c_3$ der Zeile c, $a_1 a_4 b_2 c_1 c_3$ der Zeile b, $a\, a_1 a_4 b_2 c_1 c_3$ der Zeile c an, und die Faktoren o_1, o_3 ändern diese Zugehörigkeit nicht.

Wollen wir diese Verhältnisse an einem Beispiel, z. B. dem Komplex $\{1 \cdot 30\}$, demonstrieren.

Nach Ausführung der Entwicklung findet man die folgenden Zahlenzeilen:

1					31					79						30
2			17	23			47					113		137		15
3		13			37	43			67						157	10
5	11				29			59			101		131		149	6

Mit Hilfe dieser vier Zeilen nun können wir eine beliebige Anzahl von Parametern ermitteln und jeden auf einen bestimmten Zahlenkomplex beziehen. Wollen wir z. B. sämtliche Parameter aufsuchen, welche aus zwei Faktoren zusammengesetzt sind, deren Größen die Zahl 70 nicht übertreffen, so finden wir:

1	2·17	2·23	2·47	3·13	3·37	3·43	3·67	5·11	5·29	5·59	11·29	11·59	13·37	13·43	30
2	2·31	3·5	3·11	3·29	3·59	5·13	5·37	5·43	5·67	11·13	11·37	11·43	11·67	13·29	15
3	2·5	2·11	2·29	2·59	3·31	5·17	5·23	5·47	11·17	11·23	11·47	13·31	17·29	17·59	10
5	2·3	2·13	2·37	2·43	2·67	3·17	3·23	3·47	5·31	11·31	13·17	13·23	13·47	17·37	6

1	13·67	17·23	17·47	23·47	29·59	37·43	37·67	43·67			30
2	13·59	17·31	23·31	29·37	29·43	29·67	31·47	37·59	43·59	59·67	15
3	23·29	23·59	29·47	31·37	31·43	31·67	47·59				10
5	17·43	17·67	23·37	23·43	23·67	29·31	31·59	37·47	43·47	47·67	6

Wollen wir noch sämtliche Parameter aufsuchen, welche aus drei Faktoren zusammengesetzt sind, deren Größe die Zahl 35 nicht übertrifft, so finden wir:

1	2·3·5	2·3·11	2·3·29	2·5·13	2·11·13	2·13·29	2·17·31	2·23·31	3·5·17	3·5·23	3·11·17	30
2	2·3·13	2·5·11	2·5·29	2·11·29	2·17·23	3·5·31	3·11·31	3·13·17	3·13·23	3·29·31	5·11·17	15
3	2·3·17	2·3·23	2·5·31	2·11·31	2·13·17	2·13·23	2·29·31	3·5·11	3·5·29	3·11·29	3·17·23	10
5	2·3·31	2·5·17	2·5·23	2·11·17	2·11·23	2·13·31	2·17·29	2·23·29	3·5·13	3·11·13	3·13·29	6

1	3·11·23	3·13·31	3·17·29	3·23·29	5·11·31	5·13·17	5·13·23	5·29·31	11·13·17	11·13·23	30
2	5·11·23	5·13·31	5·17·29	5·23·29	11·13·31	11·17·29	11·23·29	13·29·31			15
3	5·11·13	5·13·29	5·17·31	5·23·31	11·13·29	11·17·31	11·23·31	13·17·23	17·29·31	23·29·31	10
5	3·17·31	3·23·31	5·11·29	5·17·23	11·17·23	13·17·31	13·23·31	17·23·29			6
1	11·29·31	13·17·29	13·23·29	17·23·31							30

Natürlich sind auch hier Fälle möglich, in welchen manche der vier Zahlenkomplexe $\{1 \cdot abc\}$, $\{a \cdot bc\}$, $\{b \cdot ca\}$, $\{c \cdot ab\}$ einige Parameter gemein haben, und dann haben sie sämtliche Parameter gemein, das heißt die Komplexe sind identisch.

Das ist zum Beispiel der Fall für die Zahlenkomplexe $\{1 \cdot 66\}$ und $\{3 \cdot 22\}$, da $22 + 3 = 1 \cdot 5^2$. In diesem Fall sind auch $\{2 \cdot 33\}$ und $\{6 \cdot 11\}$ identisch.

Dieser Komplex hat folgende charakteristische Zeilen der Primzahlen:

1 resp. 3	1		3									67		97		66 resp. 22
2 resp. 6		2				11		17		41			83		107	33 resp. 11
5·1				5					23							5·66
7·1					7		13				61					7·66

Nach obigem ist es leicht daraus für jeden dieser Zahlenkomplexe eine unbegrenzte Anzahl von Parametern herzuleiten.

Der Komplex $\{1 \cdot abcd\}$ gliedert sich in acht Zahlenkomplexe:

1) $\{1 \cdot abcd\}$, 2) $\{a \cdot bcd\}$, 3) $\{b \cdot cda\}$, 4) $\{c \cdot dab\}$, 5) $\{d \cdot abc\}$, 6) $\{ab \cdot cd\}$, 7) $\{ac \cdot da\}$, 8) $\{ad \cdot bc\}$.

Und überhaupt der Komplex $\{1 \cdot ab \ldots c\}$, wo n Faktoren in der zweiten bestimmenden Zahl enthalten sind, gliedert sich in 2^{n-1} Zahlenkomplexe, da diese Zahl durch den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{n\,(n-1)\,.\,.\,2}{1\cdot 2\cdot 3\,.\,.\,(n-1)}\right)$$

bestimmt wird.

Man ersieht daraus, daß die Aufgabe der Aufsuchung der Parameter jedes gegebenen Komplexes sich auf die der Aufsuchung der charakteristischen Zeilen der Reihen der Primzahlen reduziert.

Man kann natürlich diese Aufgabe durch reguläre Entwicklung des Komplexes auflösen, aber dabei werden unterwegs auch und zwar in überwiegender Mehrzahl die Parameter selbst zur Rechnung gelangen, und dieser Umstand erfordert viele unnütze Mühe. Viel einfacher ist, sich darauf zu beschränken, zwei Reihen der für den Komplex charakteristischen Quadrate zu schreiben und dann die Reihe der Primzahlen zu prüfen, ob dieselbe aus diesen Quadraten zusammengesetzt werden kann.

Zur Demonstration des Verfahrens wollen wir uns mit einigen einfachen Beispielen begnügen.

Für die Aufsuchung der charakteristischen Primzahlen des Komplexes $\{1\}$ schreiben wir die natürlichen Reihen der Quadrate, also:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 324 361 400 . . .
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 324 361 400 . . .

Die angedeutete Prüfung ergibt:

$1 = 1\cdot 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $5 = 4 + 1$, $13 = 9 + 4$, $17 = 16 + 1$, $29 = 25 + 4$, $37 = 36 + 1$, $41 = 25 + 16$, $53 = 49 + 4$, $61 = 36 + 25$, $73 = 64 + 9$, $89 = 64 + 25$, $97 = 81 + 16$, $101 = 100 + 1$, $109 = 100 + 9$, $113 = 64 + 49$, $129 = 121 + 8$, $137 = 121 + 16$, $149 + 100 + 49$, $157 = 121 + 36$, $173 = 169 + 4$, $181 = 100 + 81$, $193 = 144 + 49$, $197 = 196 + 1$, $221 = 196 + 25$, $229 = 225 + 4$, $233 = 169 + 64$, $241 = 225 + 16$, $257 = 256 + 1$, $269 = 169 + 100$, $277 = 196 + 81$, $281 = 256 + 25$, $293 = 289 + 4$, $313 = 169 + 144$, $317 = 196 + 121$, $337 = 256 + 81$, $401 = 400 + 1\ldots$

Dasselbe Verfahren für den Komplex $\{1\cdot 3\}$ ergibt:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 334 361 400 . . .
3 12 27 48 75 108 147 192 243 300 363 432 507 588 . . . .

Nun haben wir:

$1 = 1 + 0\cdot 3$, $3 = 1\cdot 0 + 3$, $7 = 4 + 3$, $13 = 1 + 12$, $19 = 16 + 3$, $31 = 4 + 27$, $37 = 25 + 12$, $43 = 16 + 27$, $61 = 49 + 12$, $67 = 64 + 3$, $73 = 25 + 48$, $79 = 4 + 75$, $97 = 49 + 48$, $103 = 100 + 3$, $109 = 1 + 108$, $127 = 100 + 27$, $133 = 25 + 108$, $139 = 64 + 75$, $151 = 4 + 147$, $157 = 49 + 108$, $163 = 16 + 147$, $181 = 169 + 12$, $193 = 1 + 192$, $199 = 196 + 3$, $211 = 64 + 147$, $223 = 96 + 27$, $229 = 121 + 108$, $241 = 49 + 192$, $247 = 4 + 243$, $259 = 16 + 243$, $271 = 196 + 75$, $277 = 169 + 108$, $283 = 256 + 27$, $301 = 1 + 300$, $307 = 64 + 243$, $313 = 121 + 192$, $331 = 256 + 75$, $337 = 289 + 48$, $349 = 49 + 300$, $367 = 4 + 363$, $373 = 361 + 12$, $379 = 16 + 363$, $397 = 289 + 108$, $403 = 400 + 3\ldots$

Wenn die bestimmende Zahl des Komplexes mehrere einfache Faktoren besitzt, so wird das Verfahren natürlich etwas komplizierter, da die gefundenen einfachen Zahlen sich in verschiedene Zeilen gliedern lassen.

Ich glaube, daß das einfachste Verfahren dasselbe ist, welches weiter unten an dem Beispiele $\{1 \cdot 30\}$ demonstriert wird. Dabei werden der Prüfung nicht allein die Primzahlen selbst, sondern auch deren Produkte mit den einfachsten Parametern des Komplexes, je eine aus jeder Zeile, unterzogen. Gerade aus der Zusammensetzung der Faktoren ersehen wir, auf welche Zeile die gefundene Primzahl Bezug hat.

Für diesen Komplex schreiben wir also folgende Quadratenreihen:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289
								324	361	400	441	484	529	576	. . . .	
30	120	270	480	750	1080	. . . .										

Da die Zahl 30 aus den Faktoren 2, 3 und 5 besteht, so erhalten wir direkt die Anfangsglieder sämtlicher vier Zeilen und nun steht uns bevor, jede Primzahl sukzessive mit allen diesen Zahlen zu multiplizieren und der Prüfung zu unterziehen, ob die so gefundene Zahl eine Summe von zwei dieser quadratischen Zahlen ist.

Nun finden wir:

$$5 \cdot 11 = 25 + 30,\ 3 \cdot 13 = 9 + 30,\ 2 \cdot 17 = 4 + 30,\ 2 \cdot 23 = 16 + 30,\ 5 \cdot 29 = 25 + 120,$$
$$31 = 1 + 30,\ 3 \cdot 37 = 81 + 30,\ 3 \cdot 43 = 9 + 120,\ 2 \cdot 47 = 64 + 30,\ 5 \cdot 59 = 25 + 270,$$
$$3 \cdot 67 = 81 + 120,\ 79 = 49 + 30,\ 5 \cdot 101 = 25 + 480,\ 2 \cdot 113 = 196 + 30,$$
$$5 \cdot 131 = 625 + 30,\ 2 \cdot 137 = 4 + 270 \ldots$$

Daraus entnehmen wir direkt folgende Zeilen der Primzahlen:

1									31						79				
	2					17	23					47					113		137
		3			13					37	43			67					
			5	11				29					59			101		131	

Diese Zeilen sind mit den oben angegebenen identisch, aber auf viel einfachere Weise erhalten, als jene.

Unter allen isotropen Komplexen sind also zwei, und nur zwei, welche sich durch ihre Symmetrieeigenschaften auszeichnen und infolgedessen auf besondere Syngoniearten zu beziehen sind. Das sind $\{11\}$, dessen Syngonie als tetragonale und $\{13\}$, dessen Syngonie als hexagonale bezeichnet wird.

Zusammengenommen sind also vier Syngoniearten der ebenen Komplexe zu verzeichnen: monokline, rhombische, tetragonale und hexagonale.

Wir haben gesehen, daß sämtliche Vektoren eines Strahlenkomplexes durch Addition von zwei senkrechten Vektoren $p_1 \sqrt{a}$ und $p_2 \sqrt{b \cdot i}$ sich ableiten lassen, wo p_1 und p_2 die Gesamtheit aller ganzen Zahlen ist.

Analytischer Ausdruck dieser Gesamtheit ist die Gleichung

$$a p_1^2 + b p_2^2 = c q^2,$$

also eine lineare quadratische Form.

Nun ist offenbar, daß die erwähnte Vektorensumme ein ebenes Netz bedingt, dessen parallelogrammatischen Maschen Rechtecke sind, mit den Seiten $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ respektive auf den Strahl r und r'. Wie bekannt, drückt dasselbe auch die angegebene quadratische Form aus. Ein einziger Widerspruch entsteht bei Anwesenheit der sechszähligen Symmetrieachse, also für die Form $p_1^2 + 3 p_2^2 = c q^2$.

Der Vektor $1 + \sqrt{3} \cdot i$ hat den Modulus $\sqrt{1 + 3} = 2$; derselbe ist also mit dem Modulus von 1 nicht gleich, sondern doppelt so groß, trotzdem daß der Winkel zwischen beiden 60^0 groß ist. In diesem einzigen Falle, um den Widerspruch zu beseitigen und das Vorhandensein der sechszähligen Symmetrieachse wirklich geltend zu machen, muß man die betreffenden rechteckig-parallelepipedischen Maschen noch mit Zentralpunkten ergänzen, was aber zulässig, da dadurch keine Parametergröße in dem Strahlensystem einer Änderung unterliegt; aber dieses ergänzende Punktsystem ist von vornherein in der allgemeinen Gleichung nicht enthalten.

Es ist selbstverständlich, daß solche ergänzende Punktsysteme auch für sämtliche vollständige Vektorensysteme zulässig und im Allgemeinen die auf diese Weise erhaltenen Punktsysteme verschieden sind.

Jedem vollständigen Vektorensystem entsprechen also je zwei regelmäßige Punktsysteme einfachster Art resp. ebene Netze.

Somit sind wir also zur Theorie der ebenen Netze gekommen. Darin liegen also die Berührungspunkte der Syngonielehre mit dieser Theorie.

Daß sämtliche solche Punktsysteme wirklich die ebenen Netze sind, ist daraus ersichtlich, daß dabei ganz gleichgültig jeder Systempunkt für den Mittelpunkt des gleichen Strahlen- resp. Vektorensystems angenommen werden darf. Bei solcher Transformation ändern sich nur die ganzen Zahlen p_1 und p_2, und nun ist von vornherein vorausgesetzt, daß diese Zahlen sämtlich ganze Zahlen sind. Die erwähnte Transformation führt also noch zu keiner Änderung in dem Punktsystem.

Speziell aber für den Fall des Vektorensystems $\{11\}$ dürfen die beiden zugeordneten Punktsysteme als die gleichen angesehen werden: durch die Addition der Vektoren 1 und i erhält man zwar den Vektor $1 + i$ mit dem Modulus $\sqrt{2}$, also für den neu eingeführten Punkt den Modulus $\frac{\sqrt{2}}{2}$, aber jedes Vektorensystem kann als das gleiche betrachtet werden, wenn wir seine sämtliche Vektoren mit einer und derselben, rationalen oder irrationalen Zahl, multiplizieren. Und nun wird das neu gefundene System mit dem früheren identisch, wenn wir als einen solchen Faktor $\frac{2}{\sqrt{2}}$ annehmen.

Nun führt die Anwendung der Syngonielehre auf die Lehre über die ebenen Netze zu folgender neuen Definition und folgenden Sätzen:

Ein ebenes Netz, dessen parallelogrammatischen Maschen Rechtecke sind mit den Seiten $\sqrt{a}$ resp. $\sqrt{b}$ (wo $a\ b$ ganze Zahlen sind) wird das isotrope genannt.

Es gibt unendlich viele isotrope ebene Netze.

Wenn wir in einem isotropen ebenen Netze die Seiten der Maschen, welche die Vektoren $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b} \cdot i$ sind, durch zwei beliebige senkrechte Vektoren $p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b} \cdot i$ und $a\, p_1 \sqrt{b} + b\, p_2 \sqrt{a} \cdot i$ ersetzen und diese wieder als Maschenseiten annehmen, so erhalten wir das dem früheren gleiche ebene Netz.

Also enthält jedes isotrope ebene Netz unendlich viele nicht parallele gleiche ebene Netze in sich.

Nun denken wir uns, daß um jeden Punkt eines isotropen ebenen Netzes gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit ein Kreis wächst, dessen Mittelpunkt dieser Punkt ist.

bis endlich unendlich viele Kreise zugleich zur Berührung kommen, aber in dem frei gebliebenen Raume mit derselben Geschwindigkeit fortwachsen; zuletzt entsteht in der unbegrenzt gedachten Ebene ein System gleicher und paralleler Polygone, welche Parallelogone genannt wurden, da in denselben notwendigerweise die Seiten in die gleichen und parallel zugeordneten Seiten sich teilen lassen.

Daß diese Figuren wirklich Polygone und dabei Paarseitner[1]) sind, ergibt sich daraus, daß unter gemachter Voraussetzung ihre Grenzseiten zu den ein Paar nächster Punkte verbindenden Geraden die senkrechten Geraden sind, welche durch die Mittelpunkte der betreffenden Strecken hindurchgehen. Daß die Figuren Parallelogone sind, folgt daraus, daß durch dieselben die Ebene in parallele gleiche Teile regulär geteilt wird. Zugleich sind diese Parallelogone konvexe Polygone.

In der Lehre von der regulären Planteilung wird der Beweis erbracht, daß solche Parallelogone von Tri- resp. Diparallelogonen möglich sind.

Es sei noch erwähnt, daß hier von den primitiven und einfachen Parallelogonen die Rede ist.[2])

Nun ist von vornherein klar, daß jedem isotropen ebenen Netz erster Art (d. h. ohne Hinzufügen des intermediären Punktsystems) die Parallelogone zukommen, welche mit den rechteckigen Maschen des Netzes selbst identisch sind.

Weiter ist leicht der Beweis zu erbringen, daß jedem isotropen ebenen Netz zweiter Art bestimmte Triparallelogone zukommen.

In jedem solchen Punktsystem sind, außer den durch die allgemeine Formel bedingten Punkten a, b, c, d (Fig. 7), noch die intermediären Punkte o vorhanden. Verbinden

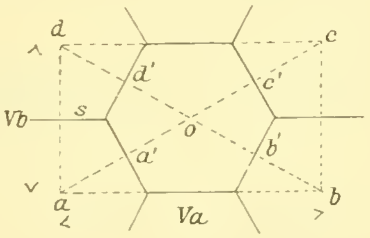


Fig. 7.

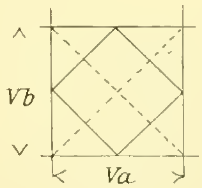


Fig. 8.

wir einen solchen Punkt mit den ihm nächstliegenden Punkten a, b, c, d und ziehen zu den Mittelpunkten a', b', c', d' der so entstandenen Strecken die Perpendikel, so bedingen dieselben das Perimeter des betreffenden Triparallelogons, wie dies aus der Figur unmittelbar ersichtlich ist. Dieses Parallelogon wird dann in ein Diparallelogon verwandelt, wenn eine Seite etwa sich bis zum Verschwinden verkürzt. In diesem Fall, wie aus der Figur 8 ersichtlich, verwandelt sich die rechteckige Masche in die quadratische, und dann entsteht

[1]) Unter Paarseitner wurde noch in den Elementen der Gestaltenlehre des Verfassers ein Polygon verstanden, dessen Seiten paarweise gleich und parallel sind.

[2]) Das Parallelogon heißt primitiv, wenn es das Inversionszentrum besitzt. Das primitive Parallelogon ist einfach, wenn in demselben nur je ein Paar paralleler Seiten vorhanden sind. Ein konvexes Parallelogon ist stets primitiv und einfach.

das Punktsystem zweiter Art von dem Parametersystem {11}, welches, wie eben bewiesen, gleich ist dem betreffenden Punktsystem erster Art.

Nun wurde in der Lehre von der regulären Planteilung der Beweis erbracht, daß den besonderen symmetrischen Komplexen {11} und {13} besondere symmetrische Parallelogone zugeordnet sind, und zwar dem {11} das Quadrat und dem Punktsystem zweiter Art von {13} das reguläre Sechseck. Die anderen Vektorensystemen zukommenden Parallelogone sind anomale, das heißt solche, welche durch kein System von Verschiebungen in das Quadrat resp. in ein reguläres Sechseck verwandelt werden können. In der Tat, jedem solchen Parallelogon können zwei konzentrische Kreise eingeschrieben werden, deren Durchmesser den Höhenlinien der betreffenden Parallelogone entspricht. Dies ist in der Figur 9 für Di- und in der Figur 10 für Triparallelogone angezeigt.

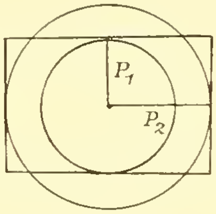


Fig. 9.

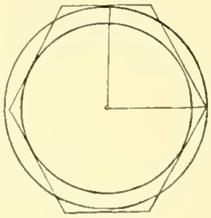


Fig. 10.

Auch in diese Lehre führt die Syngonielehre neue Definitionen und Sätze ein und zwar:

Unter isotropen Parallelogonen werden solche verstanden, deren Höhenlinien (resp. die die Berührungspunkte der Parallelogone mit Kreisen verbindenden Durchmesser) die Vektoren eines isotropen Komplexes sind.

Es gibt unendlich viele isotrope Parallelogone. Darunter zeichnen sich zwei besondere — das Quadrat und das reguläre Sechseck — aus und die übrigen sind die anomalen. Überhaupt ist jedem isotropen Vektorenkomplex ein Di- und ein Triparallelogon zugeordnet.

Zwei besondere Parallelogone zeichnen sich dadurch aus, daß darin nur ein einziger Kreis eingeschrieben ist, in den übrigen aber zwei Kreise.

Andererseits können in den letzteren zwei eingeschriebene Kreise durch eine einzige Ellipse ersetzt werden. Im Grunde genommen sind solche Systeme von den nicht isotropen nicht verschieden, welche ihren Ausdruck in diesen Ellipsen findet, und davon soll jetzt die Rede sein.

Sämtliche Komplexe überhaupt sind miteinander durch eindeutige kristallographische Projektivität verbunden; eindeutige, weil jeder Strahl durch die Indizes $(p_1\, p_2)$ ausgedrückt werden kann und dies ist für sämtliche Komplexe der Fall; also jede zwei Strahlen von irgendwelchen zwei verschiedenen Komplexen, welche durch dieselben Indizes $(p_1\, p_2)$ ausgedrückt werden, sind untereinander eindeutig projektiv verbunden. Daß die Projektivität die kristallographische ist, erhellt daraus, daß auch nach der Deformation das Netz in ein anderes Netz verwandelt wird, das heißt gleiche und parallele gerade Strecken bleiben auch nach der Deformation gleich und parallel, und das ist gerade die Charakteristik der kristallographischen Projektivität (Affinität Mobius').

Nun läßt sich im allgemeinsten Falle diese Projektivität durch die Gleichungen

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$
$$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

ausdrücken.[1])

Demgemäß erhält die Gleichung des Kreises

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

nach der Deformation die Form:

$$x_1'^2 (a_{22}^2 + a_{21}^2) - 2\, x_1' x_2' (a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22}) + x_2'^2 (a_{12}^2 + a_{11}^2) = r^2 \Delta^2 \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right).$$

Diese Kurve II. Ordnung ist die Ellipse, da für dieselbe die Bedingung $4AC - B^2 > 0$ Geltung hat, weil:

$$4 (a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2) - 4 (a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22})^2 = 4 (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})^2 = 4 \Delta^2 > 0 .$$

Im besonderen, wenn $\Delta = 1$, ist die Deformation eine Gesamtheit von Verschiebungen, da dabei die Flächengröße der parallelogrammatischen Maschen unverändert bleibt.

Diese Ellipse wird Projektivitätskurve genannt, da dieselbe bildlich den Effekt der Deformation darstellt.

Infolge eines bekannten Satzes kann das Quadrat durch homogene Deformation in ein beliebiges Parallelogramm verwandelt werden. Andererseits läßt sich in einem beliebigen Parallelogramm $a\,b\,c\,d$ eine bestimmte Ellipse einschreiben, deren zwei koordinierte Diameter $e\,g$ und $f\,h$ (Fig. 11) den Seiten des gegebenen Parallelogramm respektive parallel sind.

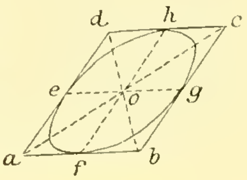


Fig. 11.

Daraus ist zu schließen, daß die Besonderheiten der isotropen Komplexe nach der Deformation verloren gehen, und man kann sämtliche deformierte Komplexe aus einem einzigen, zum Beispiel von $\{11\}$ entstanden, annehmen.

Natürlich ändert sich das Quadrat je nach der Art der Deformation. Wird es dabei in ein Rechteck verwandelt, so verbleiben zwei senkrechte Symmetrieebenen, und der Komplex wird rhombisch; sonst erhält er die Zugehörigkeit zur monoklinen Syngonie.

Aber stets wird für seine Bestimmung eine einzige parallelogrammatische Masche hinreichend, da dieselbe uns außer den Strahlen $o\,f$ und $o\,g$ noch zwei Strahlen $o\,a$ und $o\,b$ offenbart; zur vollständigen Bestimmung des Komplexes sind aber schon drei Strahlen hinreichend.

Für die isotropen Komplexe gilt als Ausdruck der komplexialen Symmetrieverhältnisse der Kreis als eine partikuläre Form der Ellipse. In demselben sind alle zwei senkrechte Durchmesser die konjugierten, und wenn einer derselben Komplexstrahl ist, so gilt dasselbe auch für den senkrechten Strahl.

Da aber die homogene Deformation von solchen Eigenschaften, wie die Zuordnung der konjugierten Strahlen, unberührt bleibt, so kann man für die beliebige Ellipse als Projektivitätskurve sagen, daß, wenn einer ihrer Durchmesser der Komplexstrahl ist, das-

[1]) Die betreffenden Fragen wurden in der III. analytisch-kristallographischen Studie speziell behandelt.

selbe auch für den konjugierten Durchmesser gilt. Ist also eine der Hauptachsen der Ellipse der Komplexstrahl, so ist dasselbe auch für die andere der Fall. Das bezeichnet den Fall eines rhombischen Komplexes: im monoklinen Komplex ist dies für keine der Hauptachsen der Fall, das heißt: die beiden Hauptachsen sind irrational.

Dadurch erhalten die Syngonieeigenschaften in Ellipsen als Projektivitätskurven ihren genauen Ausdruck.

In der Projektivitätsellipse findet seinen Ausdruck das Gesetz der Verteilung der rationalen Vektoren samt ihren Strecken.

Wenn auch die Frage über den isotropen Komplex, aus welchem jeder gegebene abgeleitet gedacht werden muß, die unbestimmte Lösung erhält — da diese Lösung schon außerhalb der Grenzen der Syngonielehre enthalten ist —, so ist doch die aus irgendwelchem Grunde gefaßte Lösung in der Form einer oder zweier Ellipsen, welche in Di- resp. Triparallelogonen eingeschrieben sind, zugleich die Lösung der Frage über denjenigen isotropen Komplex resp. das isotrope ebene Netz, aus welchen die gegebenen entstanden gedacht werden müssen.

Und nun ist jeder Vektor durch dieselben Indizes $(p_1 p_2)$ bestimmt, welche in dem isotropen Komplex eindeutig auch seinen Parameter bestimmten. Jetzt aber erhält jeder Strahl nicht diejenige Strecke, welche ihm durch den Parameter zugeschrieben wird, sondern er kommt verändert vor, und gerade das Gesetz dieser Veränderung ist das Ellipsengesetz. Für jede gegebene rationale Richtung eines ebenen Netzes, die Richtung mit bestimmten ihr zukommenden Indizes, kann man jetzt mittelst dieser Indizes und des Ellipsengesetzes die betreffende Streckengröße auffinden; diejenigen, welche gleiche Parameter besaßen, erhalten jetzt ungleiche, aber leicht zu bestimmende Streckengrößen bis auf den quadratischen Faktor, welcher dabei ebenso ausfällt, wie dies für die isotropen Komplexe der Fall ist. Auch die gleichen Winkel zwischen den Strahlen von gleichem Parameter werden durch eine Reihe ungleicher, einem bestimmten Gesetz folgenden Winkel ersetzt.[1])

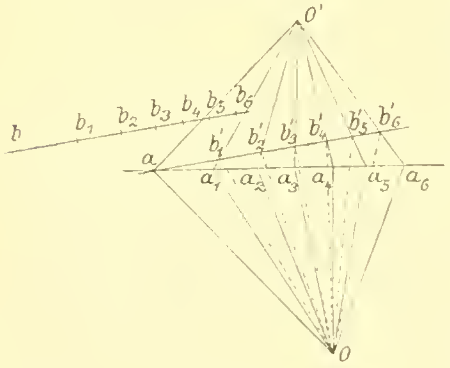


Fig. 12.

Das Ellipsengesetz ist also das Grundgesetz der Syngonielehre in der Ebene.

Wenn aber die Ellipse unbekannt bleibt und nur drei Strahlen gegeben sind, was eigentlich für die Bestimmung des Strahlenkomplexes hinreichend ist, so ist es doch möglich die Syngonieart des betreffenden Komplexes aufzufinden.

[1]) Dieses Gesetz ist leicht zu formulieren. Es seien Oa, Oa_1, Oa_2 ... (Fig. 12) die unter gleichen Winkeln stehenden Strahlen eines isotropen Komplexes; es sei die Punktreihe a, a_1, a_2 ... durch die erfolgte Deformation (welche den Kreis in die gegebene Ellipse verwandelt) durch die Punktreihe b, b_1, b_2 .. ersetzt. Nun ist nötig die beiden Punktreihen, als die projektiven, in perspektive Lage zu setzen, also z. B. den Punkt b mit dem ihm zugeordneten Punkt a in Koinzidenz zu bringen und dabei die Reihe b in die parallele Lage der Reihe b' zu führen. Dann genügt es, irgend zwei Paare zugeordneter Punkte, z. B. a_1 und b_1', a_2 und b_2' durch Gerade zu verbinden, welche sich in dem Punkte O' schneiden. Durch das Projizieren aus diesem Punkte erhält man die der Punktreihe a_1, a_2, a_3 .. zugeordnete Punktreihe $b_1' b_2' b_3'$... und es ist der Strahlenbüschel Oa, Ob_1', Ob_2', Ob_3' ... der gesuchte.

Zuerst finden wir die Größen der Tangentenquadrate beider Winkel, und falls dieselben in einem und demselben rationalen Parameter sich auflösen lassen, so kann man nicht nur behaupten, daß der Komplex der isotrope ist, sondern zugleich durch seine Konstante — Parameter — charakterisiert wird. Aber nur in den Fällen der Gleichheit dieser Parameter mit den Zahlen 1 resp. 3 haben wir das Recht von bestimmten Syngoniearten zu sprechen und zwar der tetragonalen resp. der hexagonalen. Sonst bleibt die Antwort unbestimmt (wie wir im folgenden Teile erkennen, erscheinen solche Komplexe nur als die Ebenen der rationalen Schnitte eines isotropen räumlichen Komplexes).

Ist dies nicht der Fall, so bleibt nur eine Entwicklung des Komplexes auszuführen und das Vorhandensein zweier zueinander senkrechter Strahlen zu prüfen. Führt diese Prüfung zu positivem Resultat, so können wir behaupten, daß der Komplex der rhombische ist. In dem Falle des negativen Resultates können wir sagen, daß die Prüfung in den Grenzen der ausgeführten Entwicklung (zum Beispiel in n bestimmten Perioden) als Resultat zu einem monoklinen Komplex geführt hätte.

Wie gesagt, dient die für jeden Komplex charakteristische Kurve, Projektivitätsellipse als Indexkurve aller wesentlichen Eigenschaften des Komplexes, unter anderem auch seiner (das heißt komplexialer) Symmetrie. Zugleich aber entsteht sie aus der homogenen Deformation des Kreises, als Indexkurve eines isotropen Komplexes. Bei dieser Deformation gehen aber Symmetrieelemente verloren (außer dem Inversionszentrum und der zur Komplexebene senkrechten Gerade, welche stets zweizählige Symmetrieachse bleibt). Als Ausnahmefall verbleiben zwei senkrechte Symmetrieebenen, und dann haben wir einen speziellen Fall des rhombischen Komplexes. Wir wollen jetzt von diesem speziellen Ausnahmefall absehen und die Frage aufstellen, was verbleibt von den Symmetrieelementen in dem allgemeinen Fall?

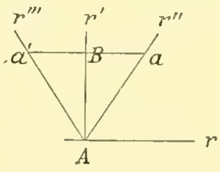


Fig. 13.

Wenn vor der Deformation AB Symmetrieebene ist, so soll jedem Punkt a ein Punkt a' zugeordnet werden, welcher sich auf derselben zu AB senkrechten Gerade aBa' befindet, und dabei $aB = a'B$ ist. Bezeichnen wir den zur AB senkrechten Strahl durch r, so bildet die Gesamtheit der Strahlen $(r\ r'\ r''\ r''')$ ein sogenanntes harmonisches Strahlenbündel, da

$$\frac{\sin r\ r''}{\sin r'\ r''} : \frac{\sin r\ r'''}{\sin r'\ r'''} = -1,$$

was man noch einfacher durch die symbolische Gleichheit $(r r' r'' r''') = -1$ bezeichnet.

Nach der erfolgten Deformation bleibt aber diese Gleichheit bestehen. Wenn also die Symmetrieebene verschwindet, so behält doch diese wesentliche Bedingung ihre Gültigkeit; harmonische Eigenschaften sind also diejenigen, welche für sämtliche Komplexe charakteristisch sind und nur für spezielle (z. B. rhombische und ganz besonders für die isotropen) Komplexe zu Symmetrieeigenschaften werden. Es besteht also zwischen komplexialer Symmetrie und Harmonie eine nahe Verwandtschaft. Demzufolge lassen sich auch Harmonieelemente — und dies haben gerade Herr Goldschmidt und besonders Herr Viola[1]) getan — bestimmen, also solche Symmetrieelemente

[1]) In seinen „Grundzügen der Kristallographie“, Leipzig 1904.

des Komplexes, welche durch die betreffende homogene Deformation verloren gegangen sind. Außer Harmonieebenen können wir also Harmonieachsen unterscheiden, aber keineswegs spezielle Elemente der zusammengesetzten Harmonie, da solche spezielle Symmetrieelemente von vornherein den Komplexen eigen sind, wenn die respektiven Symmetrieachsen vorhanden sind (vierzählige Achse der zusammengesetzten Symmetrie, wenn vierzählige Symmetrieachse, und sechszählige Achsen der zusammengesetzten Symmetrie, wenn sechszählige Symmetrieachse vorhanden ist).

Diese verwandtschaftlichen Beziehungen existieren aber ausschließlich zwischen den Harmonieelementen uud den Elementen der komplexialen Symmetrie, keineswegs aber den Elementen der realen (resp. wirklichen) Symmetrieelementen. Wenn wir unter Symmetrieelementen eines Komplexes die komplexialen und realen unterscheiden können, so ist dies nicht der Fall für die Harmonieelemente, welche ausschließlich komplexial sind.

Und gerade nun die Symmetrieelemente sind die individuellen, ganz bestimmten geometrischen Gebilde, während komplexiale Symmetrieelemente in unendlicher Anzahl vorhanden sind, z. B. sämtliche Strahlen eines isotropen Komplexes sind die Tracen der komplexialen Symmetrieebenen, also auch sämtliche Strahlen eines beliebigen Komplexes sind die Harmonieebenen; allen kommt die gleiche Rolle in einem Komplex zu, welchem spezielle reelle Symmetrieelemente fehlen. Das Vorhandensein eines realen Symmetrieelementes ist also eine wichtige und ganz bestimmte Konstante dieses Komplexes, was für die Harmonieelemente nicht der Fall ist.

Da alle Harmonieeigenschaften durch obige Gleichheit eiuen vollständigen Ausdruck erhalten, wenn man — 1 durch sämtliche rationale Zahlen ersetzt, und dieser Ausdruck nichts anderes ist als die Bedingung der Rationalität des Komplexes, welche schon seit Gauss und Miller festgestellt und ausführlich studiert wurde, so kann man sagen, daß Harmonie nur ein neues Fachwort ist und keinen neuen Inhalt mit sich briugt.

Wenn also Rationalität der Komplexe dasselbe Ding ist, wie deren Harmonie, so würden auch die Bezeichuungen rationale Komplexe uud harmonische Komplexe als identische zu betrachten sein, und also auch die Lehre von den rationalen Komplexen, d. h. die Syngonielehre, zugleich die Lehre über harmonische Strahlenbündel sein, wo aber darunter nicht nur vier bestimmte, sondern unendlich viele Strahlen verstanden werden, gemäß der Definition der Harmonie.

Aus den verwandtschaftlichen Beziehungen zwischeu Elementen der komplexialen Symmetrie- und Harmouieelementen können wir schließen, daß außer den in jedem Komplexe vorhandenen realen Symmetrieelementen nur Harmonieebene, sowie vier- und sechszählige Harmonieachsen möglich sind (nicht aber acht-, zehn . . . zählige).

Diese verwandtschaftlichen Beziehungen sind aber einseitig. Ein komplexiales Symmetrieelemeut verwandelt sich nach der Deformation in eiu zugeordnetes Harmonieelement und nicht umgekehrt. Das ersieht man daraus, daß nur bestimmte Komplexe vier- und sechszählige Symmetrieachsen, ebenso wie Symmetrieebenen besitzen können; es gibt sogar unendlich viele isotrope Komplexe, in welchen die erwähnten Symmetrieelemente fehlen. Für Harmonieelemente ist dies nicht der Fall. In dieser Hinsicht sind sämtliche Komplexe gleich. Wir können z. B. aus dem Komplexe beliebig drei Strahlen herauswählen und da dieselben die Tracen der Harmonieebenen sind, so ist die Schnittgerade dieser Ebenen (Zonenachse) die sechszählige Harmonieachse. Jeder harmonische vierstrahlige Büschel, welcher aus dem Komplexe in unzähliger Anzahl herausgenommen werden kann (dabei drei Strahlen beliebig herausgenommen), kann als Beweis dienen, daß der Komplex zugleich eine vierzählige Harmonieachse besitzt.

In Anbetracht dessen, daß die Einführung der neuen Fachwörter „Harmonie", „Harmonieelemente" u. dgl. keinen neuen Inhalt mitbringt, infolge der eben erwähnten Einseitigkeit, welche Veranlassung zu einer Verlegenheit gibt, glaube ich nicht, daß sie den alten Fachwörtern „rationale Doppelverhältnisse", „rationale Komplexe" vorzuziehen ist. Dabei spielen auch „harmonische Doppelverhältnisse" eine wichtige Rolle und waren stets im Gebrauch, ebenso wie anharmonische resp. Doppelverhältnisse schlechtweg.[1]) In der Tat, wenn in komplexialer Hinsicht sämtlichen Strahlen eine ganz gleiche harmonische Rolle zukommt, wenn man also die Eigenschaften der rationalen Komplexe überhaupt kennt, wozu dann dieselben Strahlen noch als die Tracen der Harmonieebenen bezeichnen? Darin liegt keine neue Entdeckung. Dies würde der Fall sein, wenn nur einige individuelle Strahlen solche Eigenschaften besitzen würden, welche den übrigen fehlen, wie dies für die Symmetrieeigenschaften der Fall ist, oder wenn dabei solche Eigenschaften entdeckt würden und nur durch diese Bezeichnungen ausgedrückt werden könnten, welche bisher unbekannt waren. Dies ist aber nicht der Fall und es bleiben nur leere Wörter übrig.

II. Teil.

Syngonielehre im Raume.

Nachdem die Eigenschaften des ebenen rationalen Komplexes untersucht wurden, entsteht am allerersten die Frage, was unter dem rationalen Komplex im Raume zu verstehen ist.

In Anbetracht dessen, daß die Fragen der Geometrie zweier Dimensionen nur partikuläre Fälle derjenigen im Raume sind, kann man die Forderung aufstellen, daß jeder ebene Schnitt des rationalen Raumkomplexes ein rationaler ebener Komplex sein muß. Um aber eine solche Definition zulässig zu machen, muß der Beweis erbracht werden, daß solche Komplexe wirklich existieren.

Nun ist es leicht den Beweis zu erbringen, daß wirklich ein solcher Komplex entsteht aus vier beliebig im Raume gedachten Strahlen (von welchen keine drei komplanar sind) mit der Anwendung der bekannten Regeln der Zonenentwicklung, welche durch das Zonengesetz bedingt worden sind.

Zuerst beweisen wir den Satz, nach welchem zwei in perspektivischer Lage sich befindende ebene Komplexe beide rational sind, wenn einer davon rational ist.

---

[1]) Z. B. „Die Determinanten und anharmonischen Verhältnisse in dem Gebiete der Kristallographie" wurden zum alleinigen Objekt der II. analytischen kristallographischen Studie des Verfassers, und dort wurde die hierzu gehörige Literatur erwähnt und benutzt. Sogar sämtliche vier erwähnte Studien sind auf der projektiven Geometrie fußend, und gerade für diese stellt der Begriff des „anharmonischen" Verhältnisses den Grundbegriff dar.

Es sei ein ebener rationaler Komplex mit den Winkeln a, b, c . . gegeben (Fig. 14); es sei ein anderer ebener Komplex mit den zugeordneten Winkeln a', b', c' . . in perspektivischer Lage mit demselben befindliche gegeben, indem die beiden den zugeordneten Strahl A gemein haben, und sämtliche andere zugeordnete Strahlen, durch große Kreise vereinigt, den Hauptstrahl C der Perspektive bedingen.

Nun haben wir:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin f}{\sin \varphi}; \quad \frac{\sin (a+b)}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin g}{\sin \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin a}{\sin (a+b)} = \frac{\sin f \, \sin \alpha}{\sin g \, \sin (\alpha + \beta)}.$$

Auch:

$$\frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin g}{\sin \psi}; \quad \frac{\sin (b+c)}{\sin (\beta + \gamma)} = \frac{\sin f}{\sin \psi} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin c}{\sin (b+c)} = \frac{\sin g \, \sin \gamma}{\sin f \, \sin (\beta + \gamma)}.$$

Also

$$\frac{\sin a}{\sin (a+b)} : \frac{\sin (b+c)}{\sin c} = k = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} : \frac{\sin (\beta + \gamma)}{\sin \gamma}, \tag{1}$$

wo k eine beliebige rationale Zahl ist, gemäß der Voraussetzung.

Da der zweite Teil von der Lage der in perspektivischer Lage befindlichen Komplexe a . . , a' . . unabhängig ist, so besteht ebenfalls die Relation:

$$\frac{\sin a'}{\sin (a'+b')} : \frac{\sin (b'+c')}{\sin c'} = k, \tag{1 a}$$

was zu beweisen war.

Aus diesen Formeln folgt zugleich, daß nicht nur die ebenen Strahlenkomplexe selbst (mit den Winkeln a . . a' . .), sondern auch die Zonenkomplexe der Strahlenebenen rational sind.

Wenn wir in dem geführten Beweise die Strahlen durch die Normalen zu Ebenenbüschel ersetzen, so erhalten wir dasselbe Resultat der Rationalität der Normalenkomplexe ebenso wie der Ebenenbüschel selbst.

Daraus folgt, daß, wenn wir für die integrierenden Teile des Raumkomplexes alle Strahlen halten würden, welche die Schnittgeraden zweier rationalen projizierenden Ebenenbüschel sind, der Raumkomplex selbst rational wird.

Es seien zwei rationale Ebenenbüschel A (mit den Winkeln α . .) und A' (mit den Winkeln α' . .) als Bestimmungsbüschel des Raumkomplexes ausgewählt (Fig. 15); dann bestimmen zwei zugeordnete Ebenenpaare dieser Büschel zwei Schnittstrahlen und zugleich

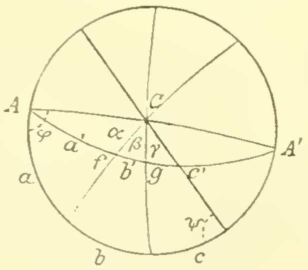


Fig. 14.

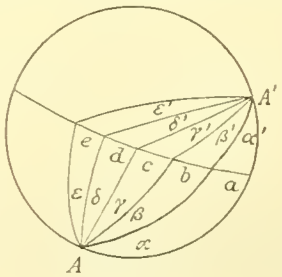


Fig. 15.

eine Strahlenebene (mit den Winkeln a . .), welche sich in perspektivischer Lage befindet in Bezug auf den Büschel A ebenso wie auf den Büschel A'. Folglich ist diese Strahlenebene die Ebene eines rationalen Strahlenkomplexes.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man A und A' als die Normalen zweier Ebenen und die projizierenden Ebenen als diejenigen annimmt, welche zu den Strahlen eines ebenen Komplexes senkrecht sind. Dann ist die Ebene mit den Winkeln a . . . eine zu einem gewissen Strahle senkrechte Ebene und die Winkel a . . . beziehen sich auf die Ebenenwinkeln eines rationalen Ebenenbüschels.

Auf Grund dieser aus der projektiven Geometrie bekannten Relationen ist es schon leicht, den allgemeinen analytischen Ausdruck für rationale Raumkomplexe aufzufinden.

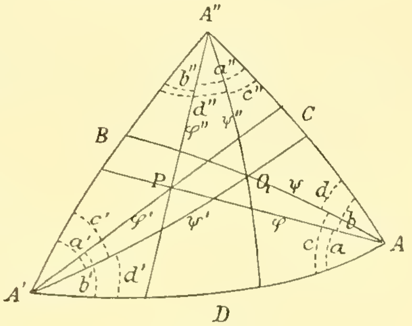


Fig. 16.

In Anbetracht der Bezeichnungen, welche in der Figur 16 angegeben sind, mit Hinzunahme noch folgender: die Winkel $A'PA''$, $A''PA$, APA' werden respektive durch B_p, C_p, D_p und die Winkel $A'QA''$, $A''QA$, AQA' werden respektive durch B_q, C_q, D_q bezeichnet, kann man schreiben:

$$\frac{\sin a}{\sin\varphi'} = \frac{\sin b'}{\sin\varphi} = \frac{\sin D_p}{\sin D}; \quad \frac{\sin c}{\sin\psi'} = \frac{\sin\partial'}{\sin\psi} = \frac{\sin D_q}{\sin D}$$

$$\frac{\sin a'}{\sin\varphi''} = \frac{\sin b''}{\sin\varphi'} = \frac{\sin B_p}{\sin B}; \quad \frac{\sin c'}{\sin\psi''} = \frac{\sin\partial''}{\sin\psi'} = \frac{\sin B_q}{\sin B}$$

$$\frac{\sin a''}{\sin\varphi} = \frac{\sin b}{\sin\varphi''} = \frac{\sin C_p}{\sin C}; \quad \frac{\sin c''}{\sin\psi} = \frac{\sin\partial}{\sin\varphi''} = \frac{\sin C_q}{\sin C}.$$

Also auch:

$$\frac{\sin a}{\sin c} : \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = \frac{\sin D_p}{\sin D_q} = \frac{\sin b'}{\sin\partial'} : \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \text{ resp. } \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin D_p \sin\varphi'}{\sin D_q \sin\psi'}; \quad \frac{\sin b'}{\sin\partial'} = \frac{\sin D_p \sin\varphi}{\sin D_q \sin\psi}$$

$$\frac{\sin a'}{\sin c'} = \frac{\sin B_p \sin\varphi''}{\sin B_q \sin\psi''}; \quad \frac{\sin b''}{\sin\partial''} = \frac{\sin B_p \sin\varphi'}{\sin D_q \sin\psi'}$$

$$\frac{\sin a''}{\sin c''} = \frac{\sin C_p \sin\varphi}{\sin C_q \sin\psi}; \quad \frac{\sin b}{\sin\partial} = \frac{\sin C_p \sin\varphi''}{\sin C_q \sin\psi''}.$$

Daraus

$$\frac{\sin a}{\sin c} : \frac{\sin b}{\sin d} = \frac{\sin D_p \sin\varphi' \sin\varphi}{\sin D_q \sin\psi' \sin\psi} : \frac{\sin C_p \sin\varphi'' \sin\varphi}{\sin C_q \sin\psi'' \sin\psi} = \frac{\mathrm{Sin}(APA')}{\mathrm{Sin}(AQA')} : \frac{\mathrm{Sin}(APA'')}{\mathrm{Sin}(AQA'')}$$

und noch

$$\frac{\sin a'}{\sin c'} : \frac{\sin b'}{\sin d'} = \frac{\mathrm{Sin}(A'PA'')}{\mathrm{Sin}(A'QA'')} : \frac{\mathrm{Sin}(A'PA)}{\mathrm{Sin}(A'QA)}$$

und 2)

$$\frac{\sin a''}{\sin c''} : \frac{\sin b''}{\sin d''} = \frac{\mathrm{Sin}(A'PA)}{\mathrm{Sin}(A''QA)} : \frac{\mathrm{Sin}(A''PA')}{\mathrm{Sin}(A''QA')}.$$

Sin bedeutet hier Sinusfunktion des betreffenden Trigonoëders.

Man ersieht sogleich aus den letzten Teilen der Gleichungen, daß jede derselben nur eine Folgerung der beiden anderen ist und sich durch einfache Multiplikation erhalten läßt. Das muß auch für die ersten Teile der Fall sein. Wenn zwei derselben rationale Zahlen sind, so ist dies der Fall für alle angegebenen Doppelverhältnisse, und diese sind die bekannten Gaussschen Doppelverhältnisse für einen kristallographischen Komplex.

Nun kann man sagen, daß jeder Strahl eines Raumkomplexes durch zwei rationale Winkel als sphärische Koordinaten desselben sich bestimmen läßt.

Im I. Teile wurden die wichtigsten speziellen Komplexe, die isotropen, mit besonderer Umständlichkeit untersucht. Dieselben zeichnen sich dadurch aus, daß die Tangentenquadrate sämtlicher Winkel derselben rationale Zahlen sind und in der Form $c\,q^2$ dargestellt werden können, wo die ganze Zahl c, welche keine zwei gleiche Faktoren besitzt, als Parameter bezeichnet wurde.

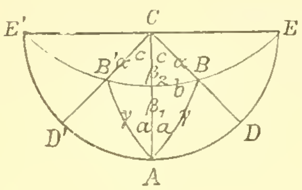


Fig. 17.

Nun ist leicht der Beweis zu erbringen, daß auch in Raumkomplexen sämtliche ebene Komplexe (Zonen), als integrierende Teile derselben, isotrop sind, wenn für zwei Bestimmungskomplexe die isotropen genommen sind, und wenn die Achsen dieser beiden aufeinander senkrecht stehen.

Nehmen wir als die den Raumkomplex bestimmenden die isotropen Ebenenbüschel, deren Achsen die senkrechten Geraden A und C sind (Fig. 17).

Da der Winkel β ein rechter ist, so ist nach bekannter Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos^2 b = \cos^2 c \cos^2 a \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1 + \mathrm{t}^2 b} = \frac{1}{(1 + \mathrm{t}^2 c)(1 + \mathrm{t}^2 a)}.$$

Also

$$\mathrm{t}^2 b = \mathrm{t}^2 a + \mathrm{t}^2 c + \mathrm{t}^2 a \, \mathrm{t}^2 c. \tag{3}$$

Wenn $\mathrm{t}^2 a$ und $\mathrm{t}^2 c$ rationale Zahlen sind, so ist dies auch für $\mathrm{t}^2 b$ der Fall, was zu beweisen war.

Solche Raumkomplexe werden ebenfalls als isotrope bezeichnet.

Diesem Satze gemäß sind die Quadrate der Tangenten von sämtlichen Winkeln, als integrierenden Teilen der isotropen Komplexe, rationale Zahlen, welchen die Form $c\,q^2$ zugeschrieben werden kann. Da durch jeden Strahl derselben unendlich viele isotrope ebene Komplexe gezogen werden können, und in jedem derselben notwendig ein zum gegebenen senkrechter Strahl vorhanden ist, so ist zugleich demselben die ihm senkrechte komplexiale Ebene zugeordnet, und die einzelnen Strahlen der letzteren bilden dieselben ebenen Winkel, wie die Flächenwinkel der durch diesen Strahl hindurchgehenden Ebenen. Wenn also der Parameter c charakteristisch ist für den ebenen Strahlenkomplex, so gilt genau dasselbe auch für die Flächenwinkel der letzteren Ebenenbüschel. Wir können also nicht nur jedem ebenen Schnitte eines isotropen Komplexes, sondern auch jedem einzelnen Strahl einen bestimmten Parameter in der Form einer ganzen Zahl zuschreiben, und dieser Parameter wird derselbe für einen beliebigen Strahl und für den ihm senkrechten ebenen Komplex.

Ersetzen wir in der Gleichung 3) die Tangentenquadrate durch die rationalen Zahlen von bekannter Form. so erhalten wir

$$P\left(\frac{p}{q}\right)^2 = P_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 + P_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2 + P_1 P_2\left(\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right)^2$$

oder

$$P(p\, q_1 q_2)^2 = P_1 (q\, p_1 q_2)^2 + P_2 (q\, q_1 p_2)^2 + P_1 P_2 (q\, p_1 p_2)^2.$$

Da alle vier Zahlen $p\, q_1 q_2$, $p_1 q_1 q_2$, $q\, p_2 q_2$ und $q\, p_1 p_2$ voneinander unabhängig sind, so ist einfacher dieselbe Gleichung in der Form:

$$P p^2 = P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + P_1 P_2 p_3^2. \tag{4}$$

Hier bedeuten P_1 und P_2 die Parameterzahlen der beiden den isotropen Komplex bedingenden senkrechten Zonen. Der Anschaulichkeit wegen können wir diese Zonen durch die zugeordneten Parameterzahlen bezeichnen.

Nehmen wir jetzt anstatt der Zone P_2 eine andere zu P_1 senkrechte Zone mit dem Parameter $P_1 P_2$. Dann erhalten wir als die entsprechende Gleichung:

$$P p^2 = P_1 p_1^2 + P_1 P_2 p_2^2 + P_1^2 P_2 p_3^2 = P_1 p_1^2 + P_1 P_2 p_2^2 + P_2 p_3'^2. \tag{4 a}$$

Somit verhält sich die Zone P_2 zu den Zonen P_1 und $P_1 P_2$, ebenso wie $P_1 P_2$ zu den Zonen P_1 und P_2. Da aber P_2 als die zu P_1 senkrechte Zone angenommen wurde, so müssen alle drei Zonen P_1, P_2 und P_3 zu einander senkrechte Zonen sein.

Also die in jedem isotropen Komplex zu beiden senkrechten gegebenen Zonen mit den Parametern P_1 und P_2 senkrechte Zone besitzt den Parameter $P_1 P_2$, wie beliebig die Zonen P_1 und P_2 auch aus dem Komplex herausgenommen würden.

Dieser sehr wichtige Satz von allgemeiner Bedeutung für die isotropen Komplexe wäre als Grundsatz für dieselben zu bezeichnen.

Da $P_1 \times P_2 \times P_1 P_2 = (P_1 P_2)^2$, so kann man denselben Satz auch derart formulieren, daß das Produkt der Parameter dreier sonst beliebigen, aber zueinander senkrechten Zonen stets ein volles Quadrat ist.

Multiplizieren wir die Parameterzahlen der drei senkrechten Zonen mit einer dieser Zahlen, so erhalten wir drei Zahlen, welche schon die Bedingung für drei senkrechte Zonen eines isotropen Komplexes nicht mehr erfüllen.

Multiplizieren wir zum Beispiel die Zahlen P_1, P_2, $P_1 P_2$ mit P_1, so erhalten wir P_1^2, $P_1 P_2$, $P_1^2 P_2$ respektive 1, $P_1 P_2$, P_2 (da P_1^2 als volles Quadrat eine verschwindende Zahl ist); nun sieht man, daß eine dieser Zahlen keineswegs das Produkt der beiden anderen ist; auch ist das Produkt aller drei $P_1 P_2^2$, also kein volles Quadrat.

Darin ersehen wir einen Grundunterschied in der Bedeutung dieser Zahlen für den ebenen und für den Raumkomplex. Im isotropen Raumkomplexe ist nicht gestattet die Parameterzahlen sämtlich durch irgendwelche ganze Zahl zu multiplizieren, da auch die Zahlen $P_1 k$, $P_2 k$, $P_1 P_2 k$ die Bedingungen nicht erfüllen, welche den Parametern dreier senkrechten Zonen zukommen.

In isotropen Raumkomplexen kommt den Parameterzahlen eine absolute Bedeutung zu.

Auf Grund derselben Formel der sphärischen Trigonometrie können wir auch schreiben:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \cos a \cos\gamma + \sin a \sin\gamma \cos b \quad \text{oder} \quad \mathrm{t}\, a\, \mathrm{t}\, \gamma = -\frac{1}{\cos b},$$

oder weiter

$$\mathrm{t}^2 a\, \mathrm{t}^2 \gamma = \frac{1}{\cos^2 b} = 1 + \mathrm{t}^2 b$$

oder endlich

$$\mathrm{t}^2 b = \mathrm{t}^2 a\, \mathrm{t}^2 \gamma - 1. \qquad 5)$$

Der Vergleich dieser Formel mit 3) zeigt, daß wir den Parameter desselben Strahles auch vermittelst sphärischer Koordinaten anderer Art bestimmen können.

Auch dieser Formel kommt hervorragende Bedeutung zu in Anbetracht der zahlreichen Folgerungen, welche zur Aufklärung der Eigenschaften der isotropen Komplexe beitragen.

Ziehen wir in Betracht, daß jedes Tangentenquadrat des isotropen Komplexes eine Zahl von der Form $a\left(\frac{p}{q}\right)^2$ ist, wo a, p und q ganze Zahlen sind, dabei p und q ganz beliebige.

Es seien:

$$\mathrm{t}^2 b = B\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 ; \quad \mathrm{t}^2 a = A\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 ; \quad \mathrm{t}^2 \gamma = C\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 .$$

Denken wir zuerst, daß a_1 und a_2 ganz beliebig herausgenommen werden, aber $\gamma_1 : a_2 = \gamma_2 : a_1$. Diesen Werten entsprechen unendlich viele Werte der Winkel a und γ, aber nur solche, welche zweien isotropen ebenen Zonen mit den Parametern A resp. C entsprechen und dabei in bestimmt koordinierten Kombinationen stehen. Für alle diese Koordinatenkombinationen bleibt das Produkt $\mathrm{t}^2 a\, \mathrm{t}^2 \gamma$ konstant, folglich auch $\mathrm{t}^2 b$. Die unendliche Gesamtheit aller dieser Strahlen des Komplexes besitzt einen und denselben Parameter B.

Weiter denken wir sämtliche Glieder dieser Gleichheit mit dem Quadrat einer beliebigen rationalen Zahl c multipliziert: also:

$$\mathrm{t}^2 b' = c^2\, \mathrm{t}^2 b = c^2\, \mathrm{t}^2 a\, \mathrm{t}^2 \gamma - c^2. \qquad 5\,a)$$

Als Koordinaten können wir jedesmal beliebig $\mathrm{t}^2 a' = c^2\, \mathrm{t}^2 a$ oder $\mathrm{t}^2 \gamma' = c^2\, \mathrm{t}^2 \gamma$ setzen. Diese beiden Annahmen entsprechen den Winkelkombinationen $(a' \gamma)$ oder $(a \gamma')$, welche untereinander und zugleich von den oben erwähnten wesentlich verschieden sind. Trotzdem erhalten wir für b' solche Werte, welche den Strahlen mit demselben Parameter entsprechen, obgleich diese Werte von den obigen Werten b verschieden sind; es ist aber natürlich, daß alle Werte von b' gerade die Gesamtheit der Winkel der isotropen Zone mit dem Parameter B umfassen.

So verschiedenartig erweist sich die Entwicklung desjenigen Teiles des Gesamtkomplexes, welche allein die Strahlen mit gleichen Parameter, also die parametrisch gleichen Strahlen, umfaßt. Diese Gesamtheit in Analogie mit der im I. Teile gemachten Annahme kann als ein Teilkomplex mit dem Parameter B bezeichnet werden.

Weiter ersehen wir aus der Formel 5) direkt, daß die Ebene $A\,C$ Symmetrieebene des Komplexes ist. Da aber die senkrechten Strahlen A und C aus dem Komplex in seiner beliebigen Ebene herausgenommen wurden, so sind sämtliche Strahlenebenen des

Komplexes Symmetrieebenen desselben und folglich auch sämtliche Strahlen desselben zweizählige Symmetrieachsen desselben.

Nehmen wir beliebig aus dem Komplex zwei Strahlenebenen mit gleichem Parameter heraus, so schneiden sich die beiden in einem bestimmten Strahl, welcher als die Achse einer bestimmten Zone angenommen werden kann. Nun sind die beiden senkrechten Bisektrissen-Ebenen dieses Paares von Ebenen die Symmetrieebenen dieses Paares. Die Bestimmung des Gesamtkomplexes erleidet keine Änderung, wenn anstatt eines Paares senkrechter Strahlen wir auf einer dieser Ebenen das ihm symmetrische Strahlenpaar aus der anderen Ebene zur Bestimmung herausnehmen. Die Bestimmung erleidet auch keine Änderung, wenn wir das herausgenommene Strahlenpaar auf der ersten Ebene durch ein anderes Strahlenpaar auf derselben Ebene ersetzen, dessen konstituierende Strahlen gleichen Parameter besitzen.

Also die Gesamtheit aller Strahlen des Komplexes, welche gleichen Parameter besitzen, bildet eine symmetrische Gruppe, das heißt: sämtlichen Komplexstrahlen mit gleichem Parameter kommt in dem Komplexe gleiche Rolle zu.

Die Strahlen mit gleichem Parameter sind also die gleichen Strahlen. Aus dem Dualismusgrunde ist dasselbe für sämtliche Strahlenebenen gültig, das heißt: die Gesamtheit aller Strahlenebenen des Komplexes, welche gleichen Parameter besitzen, bildet eine symmetrische Gruppe, anders ausgedrückt: sämtlichen Komplexebenen mit gleichem Parameter kommt in dem Komplexe gleiche Rolle zu.

Die Komplexebenen mit gleichem Parameter sind die gleichen.

Dadurch werden die oben erwähnten Teilkomplexe bedingt: ein Teilkomplex umfaßt also die vollständige Gesamtheit aller gleichen Strahlen resp. Ebenen.

Wollen wir auf jedem Strahle seinen Parameter in der Form einer zentralen Strecke auffassen, so bedingt jeder Teilkomplex eine Sphäre mit bestimmtem Radius. Dieselbe Sphäre drückt zugleich die Gesamtheit der den Strahlen zugeordneten (das heißt respektive senkrechten) Komplexebenen aus.

Der Gesamtkomplex wird somit durch eine unendliche Gesamtheit der konzentrischen Sphären ausgedrückt, deren Radius durch alle dem Komplex zukommenden Parameterzahlen bestimmt werden.

Aus dem Satze, nach welchem sämtliche Strahlenebenen Symmetrieebenen des Komplexes sind und daß es solche Ebenen, welche sich in einer einzigen Achse schneiden, in unendlicher Anzahl gibt, folgt weiter, daß sämtliche Strahlen des Komplexes unendlichzählige (und nicht nur zweizählige) Symmetrieachsen sind.

Wenn wir also um jeden Strahl unendliche gleichachsige Rotationskegel mit den Öffnungswinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .. beschreiben würden, so liegen auf der Oberfläche jedes solchen Kegels die unendlich vielen gleichen Strahlen.

Dieser Schluß ist übrigens aus der Formel 5 a) direkt ersichtlich, wenn wir in derselben der Zahl c alle möglichen Werte erteilen und dabei den Winkel α unverändert lassen und nur von dem Winkel γ die aus der Formel hervorgehenden Werte γ' berechnen.

Aus der Formel 5) scheint weiter hervorzugehen, daß wir bei Änderung von γ und Beibehaltung von α den Strahl mit dem von B verschiedenen Parameter als Komplexstrahl erhalten, und zugleich muß sich dieser Strahl auf derselben Kegeloberfläche mit dem Öffnungswinkel α befinden.

Dies ist aber nicht der Fall, wie man aus dem Folgenden ersieht.

Es sei C ein Komplexstrahl, welcher als die Achse eines Kegels mit dem sphärischen Radius Ca' angenommen ist (Fig. 18). Es seien $a, a_1, a_2 \ldots$ die in der zu C senkrechten Ebene vorkommenden gleichen, und $b, c \ldots$ die ungleichen Strahlen. Dadurch wird die unendliche Anzahl von ebenen Komplexstrahlen bedingt, welche sämtlich den Strahl C mit bestimmten Parameter gemeinsam haben. Unter diesen Komplexen sind die Komplexe Ca, Ca_1, $Ca_2 \ldots$ die gleichen, da sie durch gleiche Parameter auf senkrechten Strahlen bestimmt sind; folglich müssen auch die Strahlen a', a_1', a_2' auf der Kegelfläche die gleichen sein. Würden aber auch die Strahlen b', $c' \ldots$ auf derselben Kegelfläche möglich sein, so würde dies bedeuten, daß auch die Komplexe Cb, $Cc \ldots$ den Komplexen $Ca \ldots$ gleich sind, da für die Gleichheit der ebenenen isotropen Komplexe die Gleichheit je eines Winkels hinreichend ist, und hier haben wir die gleichen Winkel $Ca' = Cb' = Cc' \ldots$

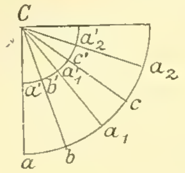


Fig. 18.

Die Strahlen b', $c' \ldots$ sind also unmöglich, das heißt sie können in dem gegebenen Komplexe nicht vorhanden sein. Somit entsteht ein scheinbarer Widerspruch mit der Formel 5). Dieser Widerspruch entsteht aber infolgedessen, daß die Koordinatenwinkel α, γ nicht voneinander unabhängig sind, und davon ist in Formel 5) nichts enthalten.

Die zwischen α und γ bestehende Koordinatiou kann auf folgendem Wege aufgeklärt werden. Bezeichnen wir diejenigen zwei Wiukel, welche aus dem rechten Wiukel AC durch die Zone BB' entstehen, durch β_1 resp. β_2, so erhalten wir:[1]

$$\begin{aligned} \mathrm{t}^2 \alpha &= \mathrm{t}^2 \beta_2 (1 + \mathrm{t}^2 c) = P_a P_c (1 + P_c k^2)\, C^2 = P_a (P_c p_1^2 + p_2^2)\, C_1^2 \\ \mathrm{t}^2 \gamma &= \mathrm{t}^2 \beta_1 (1 + \mathrm{t}^2 \alpha) = P_a P_c (1 + P_a k'^2)\, C'^2 = P_c (P_a q_1^2 + q_2^2)\, C_1'^2 . \end{aligned} \qquad 6)$$

Aus dieser Formel ersieht man sogleich, daß α nicht sämtliche für den Komplex zulässige Größen annehmen kann. Im Gegenteil nimmt die Gesamtheit von Zahlen $\mathrm{t}^2 \alpha$ nur die Werte derjenigen Zahlenreihe an, welche einem ebenen Komplex $\{P_c \cdot 1\}$ entspricht, und dabei noch mit P_a multipliziert. Der erste Faktor aller dieser Zahlen ist also gerade derselbe, wie für den Komplex von $\mathrm{t}^2 (c)$. Falls also in dieser unendlichen Reihe auch die Zahl P_a vorkommt, so bringt die Einführung der Faktoren P_a keine Änderuug, und die beiden Zahlenreihen sind identisch. Ist dies aber nicht der Fall, so haben die beiden Zahlenreihen keine eiuzige Zahl gemeiusam.

Natürlich gilt dasselbe auch in Bezug auf die Zahlen der Reihe $\mathrm{t}^2 \gamma$ und $\{P_a \cdot 1\}$.

Jedenfalls läßt sich die Gesamtheit der Koordinaten $\mathrm{t}^2 \alpha$ (wie $\mathrm{t}^2 \gamma$) als eine solche auffassen, welche den Zahlen einer eiuzigen Zone entsprechen.

Übrigens kann dieser Schluß als selbstverständlich gelten. Wenn in der Tat D der zu C senkrechte Strahl der Zone ist, welche durch die Koordinate α bestimmt wird, und D' die Achse dieser Zone ist, so sind die Parameter beider identisch. Die Strahlen D und D' sind die senkrechten, also koordinierte Strahlen der Zone C: jedem Strahle dieser Zone entsprechen die Zahlen $x \{P_c \cdot 1\}$, wo x eine beliebige Zahl der betreffenden Zahlenreihe ist, und nun ist in dieser Zahleureihe allein die Zahl P_a gegeben, welche den Parameter

---

[1] Dem oben erwähnten Satze zufolge besitzt die Zone AC den Parameter $P_a P_c$, wenn P_a der Parameter des Strahles A, und P_c der Parameter des Strahles C ist.

des Strahles A darstellt, folglich $x = P_a$. Ist $P_a = 1$, so ist dasselbe für x der Fall, aber das ist ein sehr partikulärer Fall.

Wenn P_x der Parameter eines Strahles der Zone $D\,A\,D'$ z. B. D' ist, so sind die betreffenden Parameter der Zone $C\,D$ die Gesamtheit der Zahlen $P_c\{P_x \cdot 1\}$; folglich ist die vollständige Gesamtheit aller Parameterzahlen des Komplexes:

$$P_c\,[P_a\{P_c \cdot 1\} \cdot 1] \equiv [P_a\{P_c \cdot 1\} \cdot P_c] \text{ resp. } [P_c\{P_a \cdot 1\} \cdot P_a]. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck, welchen man einfacher durch ein einheitliches Symbol $[P_a \cdot P_c]$ ersetzt, kann als Symbol des Gesamtkomplexes gelten, da in demselben sämtliche Parameterzahlen eingeschlossen sind.

Im Gegensatz zu den ebenen Komplexen ist hier nicht gestattet die Zahlen mit irgendwelcher Zahl weder zu multiplizieren noch dividieren, da in Raumkomplexen jeder Parameterzahl eine absolute Bedeutung zukommt; diese Zahl bedingt nämlich die Entwicklung der betreffenden Zone in eine Reihe bestimmter Winkel. Führt man einen beliebigen Faktor ein, so wird die Winkelreihe selbst eine ganz andere.

Also z. B. drücken solche zwei Symbole wie $[3 \cdot 1]$, $[6 \cdot 2]$, $[3 \cdot 4] \ldots$ ganz verschiedene Raumkomplexe aus, oder wenigstens bedarf deren Identität eines speziellen Beweises.

Wenn aber eine der bestimmenden Zahlen ein volles Quadrat ist, so ist der Parameter eigentlich gleich 1; also kann man von vornherein schreiben:

$$[3 \cdot 4] \equiv [3 \cdot 1],\ [3 \cdot 12] \equiv [3 \cdot 3] \equiv [3 \cdot 1] \ldots$$

Die letzte Gleichung beruht darauf, daß, wenn zwei bestimmende Zahlen A und C sind, die Parameterzahl des zu den gegebenen Strahlen senkrechten Strahles $A\,C$ ist, in diesem speziellen Fall $3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2$; nun ist es erlaubt, denselben Komplex durch die Zahlen A und $A\,C$ oder C und $A\,C$ zu bestimmen.

Da auf Grund der Formel 7) die Identität besteht

$$[A \cdot C] \equiv [A\{C \cdot 1\} \cdot C] \equiv [A \cdot C\{A \cdot 1\}],$$

so kann man sagen, daß, wenn irgendwelche Zahlen der Reihe $\{C \cdot 1\}$ bekannt sind, z. B. $C_1, C_2, C_3 \ldots$ oder wenn irgendwelche Zahlen der Reihe $\{A \cdot 1\}$ bekannt sind, z. B. $A_1, A_2, A_3 \ldots$ man eine neue Reihe der Identitäten aufstellen kann und zwar:

$$\left.\begin{array}{ll} & [A \cdot C] \equiv [A\,C_1 \cdot C] \equiv [A\,C_2 \cdot C] \equiv [A\,C_3 \cdot C] \ldots \\ \text{und} & [A \cdot C] \equiv [A \cdot A_1\,C] \equiv [A \cdot A_2\,C] \equiv [A \cdot A_3\,C] \ldots \end{array}\right\} \tag{8}$$

Zum Beispiel bestehen die Identitäten (vgl. S. 34 ff.):

$$\begin{array}{l} [1 \cdot 1] \equiv [2 \cdot 1] \equiv [\ 5 \cdot 1] \equiv [10 \cdot 1] \equiv [13 \cdot 1] \equiv [17 \cdot 1] \equiv [26 \cdot 1] \ldots \\ [3 \cdot 1] \equiv [6 \cdot 1] \equiv [15 \cdot 1] \equiv [30 \cdot 1] \equiv [39 \cdot 1] \equiv [51 \cdot 1] \equiv [78 \cdot 1] \ldots \\ \qquad \equiv [3 \cdot 3] \equiv \underset{[\ 3 \cdot 1]}{[\ 3 \cdot 9]} \equiv [3 \cdot 21] \equiv [3 \cdot 39] \equiv [3 \cdot 57] \equiv \underset{[3 \cdot\ 7].}{[3 \cdot 63]} \ldots \end{array}$$

Jedes Glied dieser Gleichungen können wir durch weitere Entwicklungen als Anfangsglieder neuer Identitätenreihen darstellen, zum Beispiel:

$$\begin{array}{ll} & ([1 \cdot 1] \equiv)\ [2 \cdot 1] \equiv [2 \cdot 2] \equiv [2 \cdot 3] \equiv [2 \cdot\ 6] \equiv [2 \cdot 11] \equiv [2 \cdot 17] \equiv [2 \cdot 19] \ldots \\ \text{auch} & [5 \cdot 1] \equiv [5 \cdot 5] \equiv [5 \cdot 6] \equiv [5 \cdot 14] \equiv [5 \cdot 21] \equiv [5 \cdot 29] \equiv [5 \cdot 30] \ldots \end{array}$$

Alle diese unbegrenzt gedachten Entwicklungen der Identitäten weisen auf das Vorhandensein zweier senkrechten Strahlen in dem gegebenen Komplex mit den angegebenen Parameterzahlen, welche zu koordinierten Paaren vereinigt vorkommen, hin.

Jedem dieser Zahlenpaare ist noch eine dritte Zahl koordiniert, welche das Produkt beider ist.

Eine weitere Erforschung der Formel 5) zeigt, daß die Bedingung der Möglichkeit zweier Koordinaten α und γ ist:

$$t^2 \alpha \; t^2 \gamma > 1. \tag{9}$$

Ist einer dieser Winkel, z. B. α ein rechter, so hat die Gleichheit $t^2 \alpha = \infty$ statt. Folglich ist auch $t^2 b = \infty$ unabhängig von dem Werte des Winkels γ. Diese Folgerung ist von vornherein klar.

Alle vorhergehenden Folgerungen über isotrope Raumkomplexe zusammenfassend, können wir sagen, daß jedem Strahle derselben eine bestimmte Parameterzahl zukommt und daß der Gesamtkomplex aus unendlich vielen Teilkomplexen besteht, unter welchen jedem eine bestimmte Parameterzahl zukommt, jeder also durch eine Sphäre repräsentiert werden kann, und die Gesamtheit aller solcher Sphären alle für den Komplex zulässigen Parameterzahlen als deren Radien umfaßt.

Besonders interessant ist aus dem Vorhergehenden folgende Repräsentation einer einem Teilkomplexe zukommenden Sphäre. Nehmen wir jeden von zwei senkrechten beliebigen Strahlen des Komplexes als die Achsen eines Büschels von einem koaxialen Rotationskegel an, wobei die Öffnungswinkel der Kegel sämtliche Winkel zwischen gleichen Strahlen zweier koordinierten Zonen umfassen, so sind die Schnittstrahlen dieser Kegelflächen die Strahlen eines und desselben Teilkomplexes. Unter koordinierten Zonen werden solche verstanden, deren senkrechten Achsen die koordinierten Parameterzahlenpaare des gegebenen Komplexes sind.

Da aber jedem koordinierten Strahlenpaar auch ein dritter, zu beiden senkrechter Strahl, koordiniert ist (und seine Parameterzahl das Produkt der beiden Parameterzahlen der gegebenen koordinierten Strahlen ist), so gilt dasselbe auch für das dritte koordinierte Kegelsystem.

Auf der Sphäre werden die koaxialen Kegeloberflächen durch konzentrische Kleinkreise repräsentiert, und da die gleichen Strahlen einer Zone (ebenen Komplexes) unter lauter gleichen (irrationalen) Winkeln stehen, also die Radien der konzentrischen Kleinkreise eine arithmetische Progression bilden, so kann man das Gesamtsystem von sphärischen konzentrischen Kreisen mit einem Wellensystem vergleichen, und dann können wir diese Folgerung in folgenden Worten zum Ausdruck bringen:

Ein Teilkomplex wird durch drei koordinierte sphärische Wellensysteme repräsentiert. Knotenpunkte dieser Systeme sind die Strahlen dieses Teilkomplexes. Auf sämtlichen Knotenkreisen dieser Wellensysteme liegt kein einziger Knotenpunkt (resp. ein Komplexstrahl) eines anderen Teilkomplexes.

Berücksichtigt man, daß die elementare Differenz dieser arithmetischen Progression, welche wir als $\Delta \alpha$ bezeichnen wollen, irrational ist, so kann man daraus schließen, daß unter diesen unendlichen Systemen von Kleinkreisen kein einzigesmal ein Großkreis entstehen kann.

In der Tat, hätte die Gleichheit $n \cdot \Delta a = \frac{\pi}{2}$ bestanden, wo n eine endliche, ganze Zahl bedeutet, so würde dies zu dem Schlusse führen, daß die betreffende Zonenachse vierzählige Symmetrieachse ist; diese Annahme ist aber, wie in dem I. Teil dieser Arbeit bewiesen wurde, unmöglich. Daraus folgt aber keineswegs die Unmöglichkeit derselben Annahme für den Fall $n = \infty$, da die letzte Annahme nur bedeuten würde, daß die Zonenachse eine Symmetrieachse von unendlicher Zähligkeit ist.

Wie in dem I. Teile ebenfalls bewiesen wurde, läßt sich jeder Teilkomplex in unendlich viele Systeme gliedern. Demzufolge stellt auch ein Teilkomplex im Raume nicht allein eine Gesamtheit der Knotenpunkte eines einzigen sphärischen Wellensystems, sondern die Knotenpunkte unendlich vieler solcher Systeme dar.

Kommt unter unendlichen konzentrischen Kleinkreisen auch ein Großkreis vor, so bildet derselbe von sich selbst ein abgesondertes System. Wie wir oben gesehen haben, unterscheidet sich derselbe von allen Kleinkreisen wesentlich dadurch, daß in ihm nicht allein die Strahlen desselben Teilkomplexes, sondern auch eine unendliche Anzahl der Strahlen anderer Teilkomplexe vorkommen.

Bezeichnen wir eine Kegelfläche eines Systems als konische Zone, so können wir sagen, daß die Schnittstrahlen konjugierter konischer Zonen eines Teilkomplexes die Strahlen desselben sind.

Es fällt die Analogie dieses Gesetzes der Teilkomplexe mit dem Zonengesetz für den Gesamtkomplex in die Augen.

Wollen wir den Teilkomplex entwickeln, dessen Strahlen einem Hauptstrahl, z. B. dem Strahl C (Fig. 17, S. 54) gleich sind, so sind die beiden senkrechten, durch C hindurchgehenden Hauptzonengroßkreise diejenigen besonderen Großkreise, welche den aus den beiden anderen Hauptstrahlen ausgehenden Wellensystemen zukommen. Der Fall aber, in welchem auch in der zu C senkrechten Zone Strahlen vorhanden sind, welche dem Strahle C gleich sind, ist ein partikulärer. Wenn ein solcher Strahl wirklich vorhanden ist, so können wir denselben als Hauptstrahl annehmen, und dann erhalten wir einen Komplex, welchen wir durch zwei gleiche Strahlen mit dem Parameter C bestimmen; dann ist der dritte Hauptstrahl der mit Parameter 1, das heißt zugleich eine komplexiale vierzählige Symmetrieachse.

Solche spezielle Komplexe können wir als tetragonaloïd-isotrope bezeichnen, ebenso wie solche, in welchen der Parameter 3 auftritt, als hexagonaloïd-isotrope.

Im Allgemeinen lassen sich die Winkel α und γ in der Formel 5) nicht vertauschen (trotzdem die Formel selbst in Bezug auf die beiden symmetrisch ist).

Wäre dies der Fall gewesen, so würde die Ebene BB' Symmetrieebene des Komplexes, also eine Zone desselben sein, und dann wären die Strahlen A und C die gleichen; die zur Ebene derselben senkrechte Gerade würde dann die vierzählige Symmetrieachse des Komplexes und der letzte wäre ein tetragonaloïder gewesen.

Im Allgemeinen sind durchaus nicht alle Schnittpunkte der aus verschiedenen aber gleichen Punkten eines Teilkomplexes sich ausbreitenden Wellensysteme Punkte desselben Teilkomplexes. Bei dieser Annahme hätten wir stets gleichseitige sphärische Dreiecke, deren sphärische Zentren einer dreizähligen Symmetrieachse des Teilkomplexes angehört hätten. Ein solcher Fall ist also allein in hexagonaloiden Komplexen zulässig. Sonst nicht.

Natürlich sind auch solche Komplexe denkbar, welche zugleich tetragonaloide und hexagonaloide sind. Es sind z. B. der Komplex $[1 \cdot 3]$, welcher als hexagonal-isotroper, und $[1 \cdot 1]$, welcher als kubischer bezeichnet wird. Für den ersten ist dies direkt ersichtlich. Was den zweiten anbetrifft, so wird dies klar sein, wenn man berücksichtigt, daß auch der dritte zu beiden Hauptstrahlen 1 und 1 senkrechte Hauptstrahl ebenfalls den Parameter 1 besitzt, also den beiden anderen gleich ist. In einem solchen sind also drei Bissektrissenebenen vorhanden BB', welche Symmetrieebene sind und sich unter gleichen Winkeln in dem Strahle B schneiden. Folglich ist B sechszählige Symmetrieachse.

Der Komplex $[3 \cdot 3]$ ist mit dem Komplex $[1 \cdot 3]$ identisch, da der dritte Hauptstrahl denselben Parameter 1 besitzt.

Nun ist aber zu beweisen, daß wirklich Komplexe vorhanden sind, welchen die Teilkomplexe 1 respektive 3 fehlen, welche also weder tetragonaloide noch hexagonaloide sind.

Betrachten wir zum Beispiel den Komplex $[3 \cdot 5]$, welcher augenscheinlich ein hexagonaloider ist. Wir haben einen solchen ausgewählt, da derselbe sicher von den Komplexen $[1 \cdot 1]$ resp. $[1 \cdot 3]$ verschieden ist, weil weder in dem ersten, noch in dem zweiten der Strahl 5 (das heißt mit dem Parameter 5) in der Zone des Strahles 3 auftritt.

Gemäß der Formel 4) haben wir für diesen Komplex:

$$P p^2 = 3 p_1^2 + 5 p_2^2 + 15 p_3^2.$$

Wäre ein Komplex ein tetragonaloider (wobei also $P = 1$ als möglicher Wert erscheinen würde), so hätten wir gehabt:

$$p^2 = 3 p_1^2 + 5 p_2^2 + 15 p_3^2 \text{ respektive } p^2 + 2 p_1^2 = 5 (p_1^2 + p_2^2 + 3 p_3^2).$$

Die Zahl $p^2 + 2 p_1^2$ muß also durch 5 teilbar sein können; mit anderen Worten, unter den Parametern des ebenen Komplexes $\{12\}$ muß auch 5 vorhanden sein.

Wie in dem I. Teile (S. 35) bewiesen ist, ist dies nicht der Fall. Also es gibt isotrope Komplexe, welche keine tetragonaloide sind. Dieser Komplex ist in der oberen Hälfte der beigegebenen Tabelle reproduziert worden.

Betrachten wir weiter den Komplex $[1 \cdot 7]$.

Derselbe ist offenbar ein tetragonaloider. Für denselben haben wir:

$$P p^2 = p_1^2 + 7 p_2^2 + 7 p_3^2.$$

Soll in demselben der Parameter 3 auftreten, so hätten wir:

$$3 p^2 + 6 p_1^2 = 7 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \text{ respektive } 3 (p^2 + 2 p_1^2) = 7 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

Diese Gleichheit ist aber eine unmögliche, da der Komplex $\{1 \cdot 2\}$ den Parameter 7 nicht besitzt. Es gibt somit isotrope Komplexe, welche keine hexagonaloiden sind.

Dieser Komplex ist in der unteren Hälfte der beigegebenen Tabelle reproduziert.

Überhaupt können wir über jeden gegebenen isotropen Komplex entscheiden, ob in demselben ein Teilkomplex mit bestimmten Parameter P auftritt oder nicht.

In der Tat können wir die Gleichung 4) stets in der Form

$$P p^2 + (P_2 - P_1) p_1^2 = P_2 (p_1^2 + p_2^2 + P_1 p_3^2)$$

darstellen, und in dieser Form reduziert sich die aufgestellte Aufgabe auf die Auflösung der Aufgabe, ob in dem Zahlenkomplexe $\{P \cdot (P_2 - P_1)\}$ die Zahl P_2 auftritt oder nicht.

Betrachten wir den Komplex [2 · 6].

Derselbe erhält als seinen Ausdruck die Gleichung:

$$P p^2 = 2 p_1^2 + 6 p_2^2 + 12 p_3^2.$$

Zur Prüfung des Parameters 1 haben wir die Gleichung:

$$p^2 + 4 p_1^2 = p^2 + p_1'^2 = 6 (p_1^2 + p_2^2 + 2 p_3^2).$$

Da dem Komplex {1 · 1} der Parameter 6 nicht zukommt, so kommt dem Komplex [2 · 6] der Parameter 1 nicht zu.

Zur Prüfung des Parameters 3 haben wir die Gleichung:

$$3 p^2 + 4 p_1^2 = 3 p^2 + p_1'^2 = 6 (p_1^2 + p_2^2 + 2 p_3^2).$$

Da dem Komplex {3 · 1} der Parameter 6 nicht zukommt, so kommt dem Komplex [2 · 6] der Parameter 3 nicht zu.

Daraus hätte man den Schluß ziehen können, daß dem Komplex weder 1 noch 3 zukommt: aber dieser Schluß ist unrichtig, weil der dritte Hauptparameter nicht eigentlich $12 = 3 \cdot 2^2$, sondern 3 ist. Also [2 · 6] = [2 · 3] = [1 · 1] (wie dies übrigens schon oben angeführt wurde), und der Komplex besitzt somit die beiden Parameter 1 und 3.

Schreiben wir die Gleichung richtig

$$P p^2 = 2 p_1^2 + 6 p_2^2 + 3 p_3^2,$$

so haben wir zur Prüfung die Gleichungen

$$p^2 + p_3^2 = 2 (p_1^2 + 3 p_2^2 + 2 p_3^2)$$

und

$$3 p^2 + p_1^2 = 3 (p_1^2 + 2 p_2^2 + p_3^2),$$

welche das schon bekannte Resultat bestätigen.

Schreiben wir aber die erste Gleichung in der Form

$$p^2 + p_1^2 = 3 (p_1^2 + 2 p_2^2 + p_3^2),$$

so hätte man leicht einen falschen Schluß ziehen können, ob dem Komplexe nicht der Parameter 1 zukommt. Diese Bemerkungen sollen dazu beitragen, die Vorsichtsmaßregeln hervortreten zu lassen, welche nötig sind, damit die angeführte Operation nicht zu einem falschen Schluß angeregt hätte.

Auf den ersten Blick kann es den Anschein haben, als ob auf räumliche Komplexe der Multiplikationssatz anwendbar wäre. Daraus würde folgen, daß, wenn in dem Komplexe zwei Parameter P_1 und P_2 vertreten sind, notwendig auch der Parameter $P_1 P_2$ vorhanden sein muß, welcher nach der Multiplikationsregel der Vektoren gefunden wird.

Dies ist aber nicht der Fall, da, wie im I. Teile hervorgehoben wurde, dieser Satz nur dann zur Anwendung kommt, wenn in der Zone der Strahlen P_1 und P_2 auch der Strahl 1 vorhanden ist. Und es wurde oben bewiesen, daß es sogar Komplexe gibt, in welchen der Parameter 1 vollständig fehlt.

Dieser Satz ist also ausschließlich auf solche Zonen anwendbar. Zum Beispiel im kubischen Komplex auf Zonen $\{1 \cdot A\}$, wo A eine Zahl der Reihe ist, welche die einfachen Zahlen 1, 2, 5, (9), 13, 17, (21), (25), 29 . . . allein als Faktoren vertreten. Im hypohexagonalen Komplex auf Zonen $\{1 \cdot B\}$, wo B dieselben Zahlen sind, mit 3 multipliziert u. s. w.

In der Zone 3 ist also die Zahlenreihe $\{1 \cdot 3\}$ nur in dem hexagonalen Komplex repräsentiert und nicht in dem kubischen, wo dieselbe durch $\{2 \cdot 6\} = 2\{1 \cdot 3\}$ repräsentiert ist, auch nicht in sämtlichen anderen Komplexen, wo die betreffende Reihe $k\{1 \cdot 3\}$, wo k für den betreffenden hexagonaloiden Komplex charakteristisch ist; würde in zwei Komplexen dieser Faktor gemeinschaftlich, so wären die Komplexe selbst identisch.

Ebenso ist im kubischen Komplex die Zone 1 durch den Zahlenkomplex $\{1 \cdot 1\}$ repräsentiert, während es in dem hexagonalen die Zahlenreihe $3\{1 \cdot 1\}$ ist.

Wenn wir aber für einen Parameter eine Zahl, welche keine Primzahl ist, auswählen, zum Beispiel 6, so kann ebenfalls für jeden gegebenen Komplex entschieden werden, ob die betreffende Zone durch den Zahlenkomplex $\{1 \cdot 6\}$ oder $\{2 \cdot 3\}$ oder endlich durch dieselben Zahlen mit bestimmten Faktoren vertreten sind. Die erste Zahlenreihe gehört dem hexagonalen Komplex an. Zum Beispiel der Zone $[2\bar{1}21]$ gehören die Fläche $(010\bar{1})$ (Parameter 1) und die senkrechte Fläche $\bar{2}1\bar{2}1$ (Parameter 6) an, während im kubischen Komplex der Zone $[211]$ die Fläche $\bar{1}10$ (Parameter 2) und die senkrechte Fläche $(\bar{1}11)$ (Parameter 3), oder der Zone $[552]$ (ebenfalls Parameter 6) die Fläche $(1\bar{1}0)$ (Parameter 2) und die senkrechte Fläche $(\bar{1}\bar{1}5)$ (Parameter 3) angehören.

Man kann sogar sagen, daß in den Zonen, welche den Parameter 1 besitzen, die Anwendung des Satzes unbestimmt ist, da es jedenfalls solche Parameter in derselben Zone eine unendliche Anzahl gibt.

Trotzdem kann der Satz in Anwendung gebracht werden. Es sei ein Komplex gegeben mit den senkrechten Vektoren P_1, P_2, $P_1 P_2$. Durch diese drei Vektoren werden drei Zonen bestimmt, und eine beliebige andere Zone schneidet sich mit denselben in drei Vektoren. Es seien dieselben a, b, c. Nun nehmen wir den Vektor a als den Einheitsvektor 1; dann werden die beiden anderen $a\,b$ und $a\,c$ und das Produkt der beiden $a^2\,b\,c$ respektive $b\,c$. Es bleibt noch übrig, diesen Vektor mit a zu multiplizieren, und wir erhalten als Produkt von b und c den Vektor $a\,b\,c$; derselbe bildet mit c denselben Winkel, wie a mit b.

Wenn überhaupt in einer Zone drei Vektoren a, b und c bekannt sind, so muß sich in derselben als Produktvektor $a\,b\,c$ befinden. Der Satz läßt sich in Produkte von 5, 7 ... und überhaupt von einer ungeraden Anzahl Vektoren verallgemeinern.

Andererseits lassen sich in jeder Zone Vektoren entwickeln aus der Zahlenreihe $k\{1 \cdot P\}$, wenn P der Parameter der Zone und k die charakteristische Zahl ist. Diese Zahl ist aber keine streng bestimmte. Für eine solche kann eine beliebige Zahl der Vektorenzone angenommen werden.

Da die Zone P die drei Grundzonen $\{a \cdot b\}$, $\{b \cdot c\}$, $\{c \cdot a\}$ in bestimmten Vektoren schneidet, so kann ein beliebiger Parameter dieser drei Schnittebenen für k angenommen werden. Das Resultat der Entwicklung der Zone bleibt davon unabhängig, da der Zahlenkomplex $\{k \cdot k\,P\}$ durch Multiplikation mit einer beliebigen ihm zugehörigen Zahl stets einen und denselben Zahlenkomplex $\{1 \cdot P\}$ gibt.

Was aber den Additionssatz der Vektoren anbetrifft, so ist derselbe in vollem Grade anwendbar, da derselbe eigentlich mit demjenigen elementaren Satze übereinstimmt, welcher als der Satz der drei Perpendikeln bekannt ist.

Die drei ganzen Zahlen $p_1\,p_2\,p_3$ in der Formel 4) werden als Indizes eines Strahles bezeichnet, und die Größen $p_1\sqrt{P_1}$, $p_2\sqrt{P_2}$, $p_3\sqrt{P_3}$ sind die Komponenten des Vektors. Jede dieser Komponenten kann als die Summe $p_1\sqrt{P_1} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_1} + \cdots$ betrachtet werden:

der Summierung kommen dabei nur die Indizes zu; der Faktor $\sqrt{P_1}$ bleibt dabei gemeinschaftlich. Wenn wir drei Vektoren a, b, c (Fig. 19) mit den respektiven Indizes $a_1\, a_2\, a_3$, $b_1\, b_2\, b_3$, $c_1\, c_2\, c_3$ so auswählen, daß ein Strahl in der Ebene $b\,c$ zwischen b und c die Indizes $(b_1 + c_1\; b_2 + c_2\; b_3 + c_3)$ und ein Strahl in der Ebene $c\,a$ zwischen c und a die Indizes $(c_1 + a_1\; c_2 + a_2\; c_3 + a_3)$ erhält[1]), so ist leicht der Beweis zu erbringen, daß der Schnittstrahl von a und $(b + c)$ einerseits und b und $(c + a)$ andererseits die Indizes $(a + b + c)$, ebenso wie der Schnittstrahl $a\,b$ und $c \cdot (a + b + c)$ die Indizes $(a + b)$ erhält.

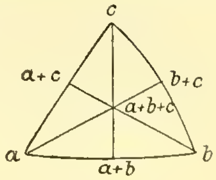


Fig. 19.

Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist; jedenfalls muß aber derselbe die Form $(a + c)m + k b$ und zugleich die Form $(b + c)n + l a$ haben, also $(a + c)m + k b = (b + c)n + l a$ respektive $a(m - l) + b(k - n) + c(m - n) = 0$. Diese Formel enthält in sich das System von sich selbst widersprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 (m - l) + b_1 (k - n) + c_1 (m - n) &= 0 \\ a_2 (m - l) + b_2 (k - n) + c_2 (m - n) &= 0 \\ a_3 (m - l) + b_3 (k - n) + c_3 (m - n) &= 0 \end{aligned}$$

respektive

$$(m - l):(k - n):(m - n) = (b\,c)_3 : (c\,a)_3 : (a\,b)_3 = (b\,c)_1 : (c\,a)_1 : (a\,b)_1 = (b\,c)_2 : (c\,a)_2 : (a\,b)_2 .$$

Diesen Gleichungen werden nur die Bedingungen $(m - l) = 0$, $(k - n) = 0$, $(m - n) = 0$ genüge leisten, also $k = l = m = n$. In den Indizes werden aber die gemeinschaftlichen Faktoren beseitigt, woraus folgt, daß $k = l = m = n = 1$ ist, was zu beweisen war.

Aus diesem Satz folgt aber weiter, daß wir alle beliebigen Indizes eines Strahles durch sukzessives Addieren reproduzieren können, indem jedes aus drei Strahlen bestimmte sphärische Dreieck sich in sechs weitere zerlegt, welche durch die neu erhaltenen Zwischenstrahlen bedingt werden.

Daß dabei die Dreiecke stets die für die Anwendung der Additionsregel nötige Bedingung erfüllen, ist aus den Identitäten

$$1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_1 + b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + c_2 & a_2 + b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + c_3 & a_3 + b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \ldots .$$

ersichtlich, indem die erste als die von vornherein für das Dreieck $(a\,b\,c)$ geltende angenommen wird, während die zweite auf Dreieck $(a + b + c\;\; b + c\;\; c)$, die dritte auf Dreieck $(a + c\;\; a + b + c\;\; c) \ldots$ Bezug hat.

Jedesmal aber, wenn wir von den Zahlen, welche die Indizes derjenigen Strahlen sind, welche die Scheitelpunkte eines Dreiecks bestimmen, zu neuen übergehen, welche die Zerlegung dieses Dreiecks in sechs weitere bedingen, wird die Periode der Komplexentwicklung um eins gesteigert. Dementsprechend können wir jede besondere Gruppe der Indizes einer

---

[1]) Wie in der zonalen Kristallographie bewiesen wird, ist dazu nötig, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

gleich 1 gewesen wäre.

bestimmten Periode zuordnen; und nun kann der Satz bewiesen werden, daß durch Ersetzung der Indizes $(p_1 p_2 p_3)$, wo $p_1 > p_2 > p_3$, durch $(p_1 - p_2, p_2 - p_3, p_3)$ die Periode um eins erniedrigt und durch Ersetzung durch $(p_1 + p_2 + p_3, p_2 + p_3, p_3)$ um eins gesteigert wird.

Aus den im I. Teile entwickelten Gründen kann man schließen, daß jeder gegebene Strahl $(p_1 p_2 p_3)$ als ein Resultat bestimmter Additionsoperationen vorkommt. Dieses Resultat respektive diese Operationsfolge wird durch den Ausdruck $(p_1 p_2 p_3) = p_1 (100) + p_2 (010) + p_3 (001)$ eindeutig bedingt und kann sogar durch ein bestimmtes spezielles Symbol ersetzt werden, wie dies wirklich in der zonalen Kristallographie durch die zonalen Symbole geschehen ist. Das Dreieck (100), (010), (001) (Fig. 20) läßt sich aber in sechs Teildreiecke zerlegen, welche respektive durch $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ bezeichnet werden. Genau dieselbe Operationsfolge kann in jedem dieser Teildreiecke geschehen, und das Resultat wird davon abhängen, in welchem davon es geschehen wird.

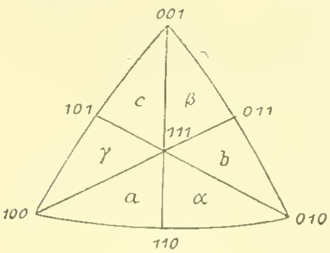


Fig. 20.

Wir erhalten:

in dem Dreiecke a $p_1(100)+p_2(110)+p_3(111)=(p_1+p_2+p_3)(100)+(p_2+p_3)(010)+p_3(001)$

" " " α $p_1(010)+p_2(110)+p_3(111)=(p_2+p_3)(100)+(p_1+p_2+p_3)(010)+p_3(001)$

" " " b $p_1(010)+p_2(011)+p_3(111)=p_3(100)+(p_1+p_2+p_3)(010)+(p_2+p_3)(001)$

" " " β $p_1(001)+p_2(011)+p_3(111)=p_3(100)+(p_2+p_3)(010)+(p_1+p_2+p_3)(001)$

" " " c $p_1(001)+p_2(101)+p_3(111)=(p_2+p_3)(100)+p_3(010)+(p_1+p_2+p_3)(001)$

" " " γ $p_1(100)+p_2(101)+p_3(111)=(p_1+p_2+p_3)(100)+p_3(010)+(p_2+p_3)(001)$.

Man kann sagen, daß in allen Fällen die Indizes dieselben sind, aber in verschiedenartiger Permutation und zwar:

in dem Dreiecke a gilt $(q_1\, q_2\, q_3)$ und dabei ist $q_1 > q_2 > q_3$

" " " α " $(q_2\, q_1\, q_3)$

" " " b " $(q_3\, q_1\, q_2)$

" " " β " $(q_3\, q_2\, q_1)$

" " " c " $(q_2\, q_3\, q_1)$

" " " γ " $(q_1\, q_3\, q_2)$.

Natürlich ergibt auch bei weiterer Entwicklung des Komplexes im Bereiche eines jeden von diesen Teildreiecken die Anwendung derselben Operationsfolge dasselbe Resultat, das heißt gleiche Indizes mit verschiedener Permutation.

Die Permutationen spielen also in Fragen dieser Art keine Rolle; sie weisen nur auf den Dreiecksbereich hin, in welchem die betreffenden Operationen geschehen. Wir können gegebene Indizes in derjenigen Permutation annehmen, für welche die Bedingung $p_1 > p_2 > p_3$ gültig ist. Dies würde nur bedeuten, daß wir uns die betreffende Operation innerhalb des Dreiecks a vorstellen.

Wie wir gesehen haben, hat dieselbe Operation $p_1(100) + p_2(010) + p_3(001)$, in dem Bereiche des Dreiecks a ausgeführt, zu einer anderen Operation geführt, da

$$p_1(100) + p_2(110) + p_3(111) = (p_1 + p_2 + p_3)(100) + (p_2 + p_3)(010) + p_3(001).$$

Diese Operation ist also in Bezug auf (100), (010), (001) als eine kompliziertere zu betrachten, als in Bezug auf (100), (110), (111). Man kann dieselbe also auf eine um eins höhere Periode beziehen. Und in der Tat haben wir $(110) = 1(100) + 1(010) + 0(001)$ und $(111) = 1(100) + 1(010) + 1(001)$, das heißt (110) und (111) sind mit einer komplementären Additionsoperation verbunden.

Falls man also für irgendwelche $(k-1)^{\text{te}}$ Periode annimmt, daß der Strahl dieser Periode $[(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)p_3]$ einer um eins niedrigeren Periode angehört, als der Strahl $[p_1 p_2 p_3]$ k^{ter} Periode, so gilt derselbe Ausdruck für die nächstfolgende Periode, da

$$\begin{array}{r} (p_1 - p_2)(100) \\ (p_2 - p_3)(110) \\ p_3\,(111) \\ \hline p_1 p_2 p_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} p_1(100) \\ p_2(110) \\ p_3(111) \\ \hline (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_3)p_3 \end{array},$$

das heißt:

$$p_1(100) + p_2(110) + p_3(111) = (p_1 + p_2 + p_3)(100) + (p_2 + p_3)(010) + p_3(001).$$

Auf diese Weise läßt sich für jede gegebenen Indizes in rekursivem Wege entscheiden, zu welcher Periode dieselben Bezug haben. Zum Beispiel (752) muß der IV. Periode angehören, da

$$\begin{aligned} (7-5,\ 5-2,\ 2) &= (2,\ 3,\ 2) \\ (3-2,\ 2-2,\ 2) &= (1,\ 0,\ 2) \\ (2-1,\ 1-0,\ 0) &= (1,\ 1,\ 0) \end{aligned}$$

und diese Indizes beziehen sich auf die I. Periode.

Wie erwähnt, pflegt man in dem Gebiete der zonalen Kristallographie sämtliche Operationen dieser Art durch spezielle zonale Symbole zu bezeichnen und zwar aus folgendem Grunde. In jedem Teildreieck $k\,l\,m$ höherer Perioden läßt sich die Reihenordnung der Indizes unterscheiden, indem man als den ersten k denjenigen annimmt, welcher der Strahl einer niedrigeren Periode ist, und als den zweiten l denjenigen, welcher mit k einer Strahlenebene niedrigerer Periode angehört.

Nach genügender Zerlegung der Sphäre in Teildreiecke höherer Perioden gelangt man endlich dazu, daß der gegebene Strahl entweder die Lage $k + l$, oder $l + m$, oder $m + k$, oder endlich $k + l + m$ annimmt. Diese Fälle werden respektive durch A, B, C und $\mathfrak{A}$ bezeichnet.

Wenn der Strahl $(p_1 p_2 p_3)$ der k^{ten} Periode angehört, so befindet sich derselbe innerhalb eines bestimmten Teildreiecks der $k - 1^{\text{ten}}$ Periode, und dieses Teildreieck nimmt innerhalb des Teildreiecks der $k - 2^{\text{ten}}$ Periode eine der Lagen a, α, b, β, c, γ ein. Dieses Teildreieck seinerseits nimmt innerhalb des bestimmten Teildreiecks der $k - 3^{\text{ten}}$ Periode ebenfalls eine durch diese Buchstaben charakterisierte Lage ein und so fort, bis wir endlich zum Teildreieck der II. Periode gelangen. Der Strahl kann aber nicht nur innerhalb dieses Dreiecks liegen, sondern sich auch auf einer seiner Seiten befinden.

Wenn der Strahl auf einer Seite mit A sich befindet, so wird die Frage über die Zugehörigkeit zu einem Dreieck a, α, b, β, c, γ unzweideutig beantwortet; wenn aber der Strahl auf den mit B oder C enthaltenden Seiten desselben liegt, so gehört derselbe zugleich entweder $a\,\alpha$, $a\,\gamma$, oder $b\,\beta$, $b\,\alpha$, oder endlich $c\,\gamma$, $c\,\beta$. Dementsprechend wird entweder A oder B, oder endlich C gesetzt. Die Zusammenstellung dieser Buchstaben bildet das zonale Symbol, welches zugleich das Symbol der sukzessiven Additionsoperationen ist. Demgemäß ersieht man aus dem Symbol direkt die Zugehörigkeit des Strahles zu einer bestimmten Periode, welche eine um eins größere Zahl ist, als die Anzahl der Buchstaben des Symbols. Natürlich bilden hiervon die Strahlen der I. Periode eine Ausnahme, indem für sie besondere Buchstaben zur Anwendung gebracht sind, und zwar H für (100), D für (110) und O für (111).

Aus dem eben Gesagten ersieht man, daß der auf voriger Seite erwähnte Strahl (752) durch das zonale Symbol AcB ausgedrückt wird. Der letzte Buchstabe weist darauf hin, daß sich der Strahl in der Ebene $b\,a$ befindet.

Wie gesagt, drückt A die Indizes (210) aus; der Buchstabe c weist darauf hin, daß für den Übergang zur folgenden, d. i. III. Periode, die Permutation (102) anzuwenden ist, folglich Ac die Indizes $[(1+0+2)(0+2)\,2] = (322)$ ausdrückt. Der folgende Buchstabe B weist auf Unbestimmtheit der Lösung der Frage, ob zum folgenden Übergang die Permutation b $(p_3\,p_1\,p_2)$ oder α $(p_2\,p_1\,p_3)$ zur Anwendung zu bringen ist. Nun sieht man wirklich, daß die beiden das gleiche Resultat (232) ergeben. Deswegen ist weder b noch α, sondern B gesetzt. Also ist AcB $[(2+3+2)\,(3+2)\;2] = (752)$. In Summa haben wir

$$(752) = 7(100) + 5(010) + 2(001) = 2(100) + 3(110) + 2(111) = 1(110) + 0(221) + 2(321).$$

Man begreift leicht, daß direkt nach den Buchstaben B, C oder nach einer Buchstabenfolge $A\,k\,b$ oder $A\,k\,c$, wo k die Buchstaben a und α in beliebiger Anzahl und beliebiger Permutation enthält, nur die Buchstaben A, B oder C und nicht a, α, b, β, c, γ folgen können.

Zum Beispiel $B\,A = (531)$, da $B = (221)$; $C\,B = (431)$, da $C = (211)$; $C^2 = C\,C = (432)$, da $C = (211)$; $A\,b\,C = (743)$, da $A\,b = (331)$; $A\,a^2\,\alpha^2\,a\,c\,C = (47 \cdot 33 \cdot 19)$, da $A\,a^2\,\alpha^2\,a\,c = (19 \cdot 14 \;\; 14)$.

Und umgekehrt, nach dem Buchstaben $\mathfrak{A}$ können nur Buchstaben $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ und nicht A, B, C (noch $\mathfrak{A}$) folgen. Zum Beispiel $\mathfrak{A}\,\gamma = (632)$, $\mathfrak{A}\,a\,c = (10 \cdot 4 \cdot 3)$, da $\mathfrak{A}\,a = (631)$ und so fort. Dies ist schon daraus ersichtlich, daß das Erscheinen des Buchstaben $\mathfrak{A}$ jede Zweideutigkeit in der Schätzung der Lage des betreffenden Teildreiecks ausschließt.

Zwischen dem Komplex der Strahlen und der zu ihnen senkrechten Ebenen existiert eine eindeutige und vollständige Zuordnung, indem jeder Strahl mit der ihm zugeordneten Ebene in Bezug auf die Sphäre koordiniert ist.

Da alle vorangehenden Sätze auf den Winkelgrößen zwischen den Strahlen beruhen, und da diese Winkelgrößen dieselben sind für die koordinierten Ebenen, so haben alle diese Sätze gleiche Geltung auch für den Ebenenkomplex.

Aber es ist noch ein Satz von sehr allgemeiner Bedeutung aufzustellen, welcher nicht auf die Winkelgrößen, sondern auf die Streckengrößen Bezug hat.

Dieser Satz lautet:

Jedem Strahl des Komplexes gehört ein bestimmter Parameter zu, und diese Zahl kann als dessen Streckengröße betrachtet werden. Zieht man durch den Endpunkt einer solchen Strecke die zum Strahle senkrechte Ebene, so bedingt dieselbe auf sämtlichen anderen Strahlen Strecken, deren Größen den betreffenden Strahlenstrecken parametrisch gleiche Zahlen sind.

Betrachten wir zwei Strahlen p mit den Indizes $(p_1\, p_2\, p_3)$ und q mit den Indizes $(q_1\, q_2\, q_3)$; ziehen wir die zum ersten senkrechte Ebene, welche durch den Endpunkt der demselben zugehörenden Strecke $(P_1\, p_1^2 + P_2\, p_2^2 + P_1\, P_2\, p_3^2)$ hindurchgeht. Dann bleibt nur die Streckengröße auf dem Strahle q aufzufinden, welche durch diese Ebene bedingt wird.

Die Gleichung der betreffenden Ebene ist

$$x_1 \sqrt{P_1}\, p_1 + x_2 \sqrt{P_2}\, p_2 + x_3 \sqrt{P_1\, P_2}\, p_3 = 1$$

des Strahles p

$$\frac{x_1}{\sqrt{P_1}\, p_1} = \frac{x_2}{\sqrt{P_2}\, p_1} = \frac{x_3}{\sqrt{P_1\, P_2}\, p_3}$$

und des Strahles q

$$\frac{x_1}{\sqrt{P_1}\, q_1} = \frac{x_2}{\sqrt{P_2}\, q_2} = \frac{x_3}{\sqrt{P_1\, P_2}\, q_3}.$$

Daraus die Koordinaten des Endpunktes von p

$$x_1 = \frac{\sqrt{P_1}\, p_1}{P} \quad x_2 = \frac{\sqrt{P_2}\, p_2}{P} \quad x_3 = \frac{\sqrt{P_1\, P_2}\, p_3}{P}, \quad \text{wo } P = P_1\, p_1^2 + P_2\, p_2^2 + P_1\, P_2\, p_3^2$$

und des von q

$$x_1 = \frac{\sqrt{P_1}\, q_1}{Q_p} \quad x_2 = \frac{\sqrt{P_2}\, q_2}{Q_p} \quad x_3 = \frac{\sqrt{P_1\, P_2}\, q_3}{Q_q}, \quad \text{wo } Q_p = P_1\, p_1\, q_1 + P_2\, p_2\, q_2 + P_1\, P_2\, p_3\, q_3.$$

Also

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)_p = \frac{P}{P^2} = \frac{1}{P}$$

und

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)_q = \frac{P_1\, q_1^2 + P_2\, q_2^2 + P_1\, P_2\, q_3^2)}{Q_p^2} = \frac{Q}{Q_p^2}, \tag{10}$$

was zu beweisen war, da die letzte Zahl parametrisch gleich ist mit Q.

Aus allem Vorhergehenden ergibt sich, daß eine unendlich große Anzahl isotroper Komplexe existiert, aber im Allgemeinen ihre vollständigen Indizes irrational sind, und zwar quadratische Wurzeln von ganzen Zahlen enthalten. Unter vollständigen Indizes werden hier die Produkte $p_1 \sqrt{P_1}$, $p_2 \sqrt{P_2}$, $p_3 \sqrt{P_1\, P_2}$ verstanden.[1])

Wesentlich erscheint also die Frage, ob auch solche isotrope Komplexe vorhanden sind, deren vollständige Indizes rational sind.

Ist dies der Fall, so müssen drei Strahlen des Dreiecks der I. Periode (Grundstrahlen) gleichen Parameter besitzen, welcher als gemeinschaftlicher Faktor von selbst verschwindet. Diese Verschwindung findet aber für sämtliche höhere Perioden der Komplexentwicklung statt, da dieselbe stets zu Strahlen führt, deren Indizes durch einfache Summierung der Indizes der dadurch bestimmten Strahlen sich erhalten lassen; also in sämtlichen Strahlen

[1]) Von einem gewissen Standpunkte aus kann dieser Satz als selbstverständlich gelten. In der Tat ist $Q\, k^2 = \frac{P}{\cos^2 \alpha}$ (α — Winkel zwischen p und q) $= P(1 + \mathrm{t}^2\, \alpha) = P\left(1 + \frac{R\, p_2^2}{p_1^2}\right)$, wenn durch R der Parameter des zur Ebene $p\, q$ senkrechten Strahles bezeichnet wird. Also $Q\, k'^2 = P(p_1^2 + R\, p_1^2)$. Dieser Satz behauptet also, daß der Parameter Q zur Zone $P\left\{1 \cdot R\right\}$ gehört, und dies ist selbstverständlich.

des Komplexes verschwinden die irrationalen Faktoren der vollständigen Indizes als die gemeinschaftlichen.

Es braucht nicht erwähnt zu werden, daß hierzu der kubische Komplex gehört, da demselben als Grundparameter die Zahlen $\sqrt{1}$ eigen sind, welche von selbst rational sind. Überhaupt können solche Komplexe nur unter denjenigen trigonalen mesosphärischen Isoëdern sein, welchen die gleichen Parameter sämtlicher den Mittelpunkt (der ein- und umgeschriebenen Sphäre) mit den Eckpunkten verbindenden Strahlen zukommen.

Die Frage läßt sich somit durch einfache Zusammenstellung sämtlicher hierzu gehöriger Figuren lösen. Von vornherein sind aber alle diejenigen ausgeschlossen, welchen fünf-, sieben- und mehrzählige Symmetrieachsen eigen sind. Mit diesem Ausschluß bleiben nur folgende zur Berücksichtigung: [1])

1. Mesosphärisches Hexakisoktaëder. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da den betreffenden Strahlen die Parameter 1, 2 und 3 zukommen.

2. Die pyramidalen Würfel. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da den betreffenden Strahlen die Parameter 1, 3 und 3 zukommen.

3. Oktaëder. Den Strahlen kommen die Parameter 1, 1 und 1 zu. Diese Figur ist aber die Grundfigur für den kubischen Komplex.

4. Tetraëder. Den Strahlen kommen die Parameter 3, 3 und 3 zu. Der betreffende Komplex ist aber mit dem kubischen identisch.

5. Trigonale Bipyramide. Den Strahlen dieses mesosphärischen Isoëders kommen die Parameter 3, 3 und 1 zu. Dieser Komplex $[3 \cdot 3] = [1 \cdot 3]$ ist also derjenige, welcher als hexagonal-isotrop bezeichnet wird.

6. Tetragonale Bipyramide. Der mesosphärische Vertreter dieser Reihe ist aber das reguläre Oktaëder, welcher, wie erwähnt, den kubischen Komplex bedingt.

7. Hexagonale Bipyramide. Den Strahlen dieses mesosphärischen Isoëders kommen die Parameter 3, 3 und 1 zu. Der Komplex ist also mit demjenigen der trigonalen Bipyramide identisch, das heißt hexagonal-isotrop.

In anderen mesosphärischen Isoëdern, wie in Skalenoëdern, Sphenoëdern, sind nicht alle zentralen durch die Flächenteile hindurchgehenden Ebenen Symmetrieebenen und die von zwei solchen Ebenen gebildeten Winkeln keine rationalen.

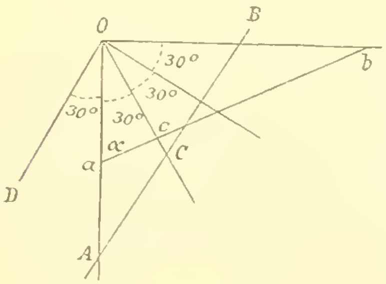


Fig. 21.

Nun wollen wir zeigen, wie sich die vollständigen Indizes des hexagonal-isotropen Komplexes rational gestalten lassen. Auf drei senkrechten Strahlen dieses Komplexes hat man die Parameter 1, 3, 3 anzunehmen. Es seien diese Strahlen OA, OB und der zu beiden senkrechte Strahl (Fig. 21). Nachdem der Komplex mit irrationalen vollständigen Indizes entwickelt worden ist, soll der erste Index durch einen anderen ersetzt werden, welcher sich auf einen Strahl mit dem Parameter 3 bezieht. Dieser Strahl ist aber der Strahl OC, welcher mit OA

[1]) Bei dieser Zusammenstellung folgen wir dem Werke des Verfassers „Über die mesosphärischen Polyëder“, wo die vollständige Ableitung derselben ausgeführt wurde (in Mémoires de l'Akad. J. des Sciences de St. Petersbourg, XIV. Nr. 1).

den Winkel 30° bildet. Es ist ganz augenscheinlich, daß nur der auf diesen Strahl sich beziehende Index zu berechnen ist, während die beiden anderen unverändert bleiben.

Wenn wir also eine beliebige Ebene des Komplexes ziehen würden, welche die Ebene des Strahles OA und OB in der Geraden acb schneidet, so bleibt nur die Strecke Oc in der Streckengröße Oa auszudrücken, da diese Größen den betreffenden Indizes umgekehrt proportional sind. Während $OA = 1$, $OB = OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nehmen wir $Oa = \frac{1}{m}$ und $Ob = \frac{1}{n\sqrt{3}}$.

Die Strecke Oc läßt sich aus dem Dreieck Oac berechnen, wo Oa und zwei anliegende Winkel bekannt sind, da $\operatorname{tang} \alpha = \frac{m}{\sqrt{3} \cdot n}$. Nun ist aus der elementaren Trigonometrie bekannt, daß:

$$Oc = x = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (Oca)} = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (150 - \alpha)}.$$

Daraus läßt sich berechnen $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{m+n}$.

Schreiben wir als ersten Index denjenigen, welcher sich auf den senkrechten, als zweiten denjenigen, welcher sich auf den Strahl Ob und als dritten denjenigen, welcher sich auf den Strahl Oa bezieht, so erhalten wir eine Ebene, für welche die bezüglichen Achsenschnittstrecken $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$, die früheren irrationalen Indizes $l\sqrt{3}$, $m\sqrt{3}$, n und die neueren rationalen respektive $l\sqrt{3}$, $m\sqrt{3}$, $\frac{m+n}{2}\sqrt{3}$ oder $l, m, \frac{m+n}{2}$ sind.

Man ersieht daraus, daß die alten und neuen Indizes allein in derjenigen Zone unverändert bleiben, für welche $m = n$.

Berücksichtigt man noch, daß den beiden Strahlen OB und OC noch ein dritter OD gleich ist, welcher mit den beiden durch eine sechszählige vertikale Symmetrieachse verbunden ist, und daß für denselben die von derselben Ebene bedingte Strecke gleich $\frac{2}{\sqrt{3}\,(n-m)}$ ist, so erhält man als vollständiges Symbol ein viergliedriges $\left(l, m, \frac{m+n}{2}, \frac{n-m}{2}\right)$.

In der Figur 22 sind die unvollständigen irrationalen Indizes mit den respektiven vollständigen rationalen zusammengestellt. Die irrationale Komplexentwicklung ist durch punktierte Linien und die neue, rationale, durch ununterbrochene Linien angedeutet.

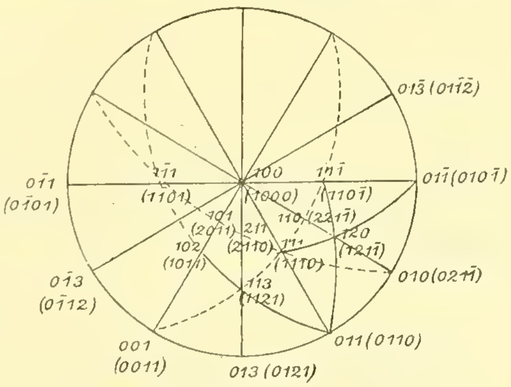


Fig. 22.

Obgleich für sämtliche Strahlen die beiden ersten Indizes unverändert (proportional) bleiben, so ändert sich doch der Entwicklungsgang vom

Grunde aus. Anstatt vier Grunddreiecke auf der Hemisphäre erhält man jetzt sechs solcher, welche vom Strahl (100) einerseits und von den Strahlen (001), (011), $(01\bar{1})$, $(00\bar{1})$, $(0\bar{1}\bar{1})$, $(0\bar{1}1)$ andererseits bestimmt werden.

Bezeichnet man die alten unvollständigen Indizes durch $(p_1\, p_2\, p_3)$ und die drei ersten neuen vollständigen durch $(q_1\, q_2\, q_3)$, so hat man also die Beziehung

$$q_1 : q_2 : q_3 = 2\, p_1 : 2\, p_2 : p_2 + p_3$$

und umgekehrt:

$$p_1 : p_2 : p_3 = q_1 : q_2 : -q_2 + 2\, q_3 .$$

Für zwei zueinander senkrechte Strahlen existiert bekannterweise die Relation (Zonengleichung):

$$p_1 \sqrt{3} \cdot r_1 \sqrt{3} + p_2 \sqrt{3} \cdot r_2 \sqrt{3} + p_3 r_3 = 0 \text{ respektive } 3\, p_1 r_1 + 3\, p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0 .$$

Für die neuen Indizes nimmt die Gleichung die folgende Form an:

$$3\, q_1 s_1 + 3\, q_2 s_2 + (2\, q_3 - q_2)(2\, s_3 - s_2) = 0 \text{ resp. } 3\, q_1 s_1 + 4\, q_2 s_2 + 4\, q_3 s_3 - 2\,(q_2 s_3 + q_3 s_2) = 0 .$$

Diese Gleichung kann man schreiben

$$q_1\,(3\, s_1) + q_2\,(4\, s_2 - 2\, s_3) + q_3\,(-2\, s_2 + 4\, s_3) = 0$$

oder

$$s_1\,(3\, q_1) + s_2\,(4\, q_2 - 2\, q_3) + s_3\,(-2\, q_2 + 4\, q_3) = 0 .$$

Die in Klammern gestellten Faktoren bezeichnet man als die **Subindizes**. Ersetzt man diese Faktoren einfach durch Indizes mit unten gestelltem Strich, so erhält diese Zonengleichung die Form:

$$q_1\, \underline{s_1} + q_2\, \underline{s_2} + q_3\, \underline{s_3} = 0 \text{ respektive } \underline{q_1}\, s_1 + \underline{q_2}\, s_2 + \underline{q_3}\, s_3 = 0 .$$

Denken wir, daß die beiden Strahlen q und q' zum Strahl s senkrecht sind, so erhalten wir

$$q_1\, \underline{s_1} + q_2\, \underline{s_2} + q_3\, \underline{s_3} = 0$$

und

$$q_1'\, \underline{s_1} + q_2'\, \underline{s_2} + q_3'\, \underline{s_3} = 0 ;$$

folglich:

$$\underline{s_1} : \underline{s_2} : \underline{s_3} = \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ q_2' & q_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ q_3' & q_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} .$$

Die Subindizes lassen sich also direkt durch diese Operation berechnen, und dann mit Anwendung von

$$s_1 : s_2 : s_3 = 2\, \underline{s_1} : 2\, \underline{s_2} + \underline{s_3} : \underline{s_2} + 2\, \underline{s_3} ,$$

welche sich als umgekehrte aus der oben angedeuteten Gleichung

$$\underline{s_1} : \underline{s_2} : \underline{s_3} = 3\, s_1 : 4\, s_2 - 2\, s_3 : -2\, s_2 + 4\, s_3$$

ergibt, lassen sich die Indizes der Zone berechnen.

Zum Beispiel für die Subindizes der Zone von zwei Strahlen $(121\bar{1})$ und (2121) erhält man:

$$\underline{s_1} : \underline{s_2} : \underline{s_3} = \begin{vmatrix} 121 \\ 212 \end{vmatrix} = 3\,(10\bar{1}).$$

Folglich $\quad s_1 : s_2 : s_3 = 2 \cdot 1 : 2 \cdot 0 + \bar{1} : 0 + 2 \cdot \bar{1} = 2 : \bar{1} : \bar{2}.$

Also die Zonenachse ist $(2\overline{121})$ und so fort.

Unter allen isotropen Komplexen zeichnen sich also zwei besonders, der kubische und der hexagonale, dadurch aus, daß ihnen trigonale mesosphärische Isoëder — das Oktaëder und die hexagonale Bipyramide — zu Grunde liegen, deren Achsen wirkliche Symmetrieachsen sind und zugleich gleiche Parameter besitzen — 1 für den kubischen und 3 für den hexagonalen Komplex — und daß infolgedessen ihre sämtliche Strahlen durch vollständige rationale Indizes sich ausdrücken lassen.

Die übrigen trigonalen mesosphärischen Isoëder mit den Achsen, welche gleiche Parameter besitzen, können nur Polyëder von unendlich hohem Grade sein.

Man hätte sagen können, daß nur diesen beiden Komplexen reale Bedeutung zukommen kann, weil reale Objekte von unendlich hohem Grade nicht gut denkbar sind. Und in der Tat hat die zonale Kristallographie den erfahrungsmäßigen Beweis erbracht, daß in der Natur, in dem Reiche der Kristalle, nur diese beiden isotropen Komplexe vertreten sind und zugleich als typische Vertreter der unendlich veränderlichen Objekte vorkommen, so daß jeder natürliche Kristall entweder als nach bestimmten Gesetzen deformierter kubischer oder hexagonaler betrachtet werden kann. Demgemäß wurde in der zonalen Kristallographie die Einteilung sämtlicher Kristalle in zwei Typen — den kubischen und den hypohexagonalen — konstatiert.

Jetzt können wir die Gesamtheit derjenigen Parameter auffinden, welche diesen beiden Komplexen zukommen.

Es läßt sich der Beweis erbringen, daß in dem kubischen Komplex die Zahlen der Form $8n-1$ und in dem hexagonalen Komplex die Zahlen von der Form $2+3n$ als Parameter nicht vorkommen.

Zuerst ist der Hilfssatz zu beweisen, daß die Zahl a^2+1 nicht durch 3 teilbar sein kann.

Wäre dies der Fall gewesen, so hätte a nicht durch 3 teilbar sein können, also entweder nur die Zahl $3c+1$ oder $3c-1$. Bei der ersten Annahme hätten wir gehabt, daß die Zahl $(3c+1)^2+1=3(3c^2+2c)+2$, bei der zweiten Annahme, daß die Zahl $(3c-1)^2+1=3(3c^2-2c)+2$ durch 3 teilbare Zahlen sind, was aber unmöglich ist.

Wie wir im I. Teile (S. 34) gesehen haben, sind sämtliche Zahlen des Komplexes $\{1, 1\}$ Produkte von der Form $(4a_1+1)(4a_2+1)(4a_3+1)\ldots$ oder noch mit dem Faktor 2 versehen. Diese Produkte sind aber selbst von der Form $(4c+1)$. Wäre also in dem Komplexe [11] eine Zahl von der Form $8n-1$ vertreten gewesen, so hätten wir die Gleichungen

entweder $$a^2+(4c+1)=8n-1,$$

oder $$a^2+2(4c+1)=8n-1$$

gehabt.

Daraus können die Gleichungen gefolgert werden

entweder $a^2=2(4n-2c-1)$,

oder $a^2=4(2n-2c-1)+1$ respektive $(a+1)(a-1)=4(2k-1)$.

Die erste Gleichung ist von vornherein als unmögliche ausgeschlossen. Aber auch die letzte Gleichung ist unmöglich. In der Tat ist für dieselbe die Annahme, es sei a eine gerade Zahl, ausgeschlossen. Wäre aber a eine ungerade Zahl, so ist eine von den

Zahlen $(a + 1)$ und $(a - 1)$ nur mit 2, und die andere durch 4 (in partikularen Fällen sogar mit 8, 16 u. s. w., das heißt überhaupt durch 2^k, wo $k > 1$) teilbar. Daraus ersieht man, daß die Zahlen der beiden Teile der geschriebenen Gleichung nicht die gleichen sein können[1]).

Der Komplex $[1 \cdot 3] = [1 \cdot 3\,(1, 1)]$ enthält als Parameter die Zahlen von der Form $a^2 + 3\,(1 + 4\,c)$ respektive $a^2 + 6\,(1 + 4\,c)$. Soll unter diesen Zahlen auch die Zahl $2 + 3\,n$ vorkommen, so hätten wir die Gleichheiten

$$a^2 + 1 = 3\,k \quad \text{respektive} \quad a^2 + 4 = 3\,k$$

gehabt.

Nun sieht man, daß die letzte Gleichheit nur eine spezielle Form der ersteren ist; ist die erste unmöglich, so gilt dasselbe auch für die zweite. Die Unmöglichkeit der ersten wurde aber durch den oben aufgestellten Satz festgestellt.

Derselbe Beweis läßt sich aber auf direktem Wege erhalten. Wäre die Gleichheit

$$p_1^2 + 3\,p_2^2 + 3\,p_3^2 = 2 + 3\,n$$

eine mögliche, so wäre dasselbe auch für die Gleichheit

$$3\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 2\,(p_1^2 + 1) + 3\,k$$

der Fall. Die letzte Gleichheit ist aber unmöglich, da $p_1^2 + 1$ nicht durch 3 teilbar ist.

Wir haben im Vorhergehenden die quadratischen Faktoren unberücksichtigt gelassen. Der Beweisgang ändert sich aber nicht wesentlich, wenn auch diese Faktoren mit in Betracht gezogen werden.

Für den kubischen Komplex erhalten wir anstatt der zweiten obigen Gleichheit die Gleichheit

$$a^2 + 2\,(4\,c + 1) = (8\,n - 1)\,d^2$$

und daraus

$$a^2 + d^2 = 2\,[4\,(n\,d^2 - c) - 1].$$

Der erste Teil der Gleichheit ist der Zahlenkomplex $\{1 \cdot 1\}$. Derselbe enthält aber ausschließlich die Faktoren 2 und $(4\,c + 1)$, kann also den Faktor $4\,(n\,d^2 - c) - 1$ nicht enthalten.

Für den hexagonalen Komplex erhalten wir die Gleichheit

$$3\,a^2 + 3\,b^2 + c^2 = (2 + 3\,n)\,d^2$$

respektive

$$3\,(a^2 + b^2 + c^2) = 3\,n\,d^2 + 2\,(c^2 + d^2).$$

Nun aber enthält der Zahlenkomplex $(c^2 + d^2)$ respektive $\{1, 1\}$ den Faktor 3 nicht, und die Gleichheit ist somit eine unmögliche.

Jetzt wollen wir die beiden Zahlenkomplexe entwickeln.

Diese Entwicklung kann, analog dem, was im ersten Teile ausgeführt, durch sukzessive Addition der Indizes nach Perioden geschehen. Aber der kürzere Weg ist direkt die Reihe $\{1, 1\}$ anzugeben, und derselben die Reihe a^2 hinzuzufügen.

---

[1]) In der Zeitschrift für Kristallographie 40, 340 wurde der Beweis auf anderem Wege erbracht.

Dann erhalten wir folgende Tabelle.

Dritter Index	Zwei erste Indizes 00	01	11	02	12	22	03	13	23	04	14	33	24	34	15	25	44	35	06	16	26	45	36	07	17, 55	46
	0	1	2	4	5	8	9	10	13	16	17	18	20	25	26	29	32	34	36	37	40	41	45	49	50	52
1	1	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	5	6	8	9	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	9	10	11	13	14	17	18	19	22	—	—	27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	16	17	18	20	21	24	25	26	29	32	33	34	36	—	—	—	48	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	25	26	27	29	30	33	34	35	38	41	42	43	45	50	51	54	57	59	—	—	—	66	—	—	75	—
6	36	37	38	40	41	44	45	46	49	52	53	54	56	61	62	65	68	70	72	73	76	77	81	—	86	88
7	49	50	51	53	54	57	58	59	62	65	66	67	69	74	75	78	81	83	85	86	89	90	94	98	99	
8	64	65	66	68	69	72	73	74	77	80	81	82	84	89	90	93	96	98								
9	81	82	83	85	86	89	90	91	94	97	98	99														

Um Wiederholungen zu vermeiden, wurden hier nur solche dritte Indizes berücksichtigt, welchen kleinere bis gleiche und keineswegs größere Zahlen unter den beiden ersten Indizes entsprechen.

Vergleichen wir die auf diese Weise erhaltene Zahlenreihe mit der vollständigen Reihe der Parameterzahlen bis 100:

1, 2, 3, 5, 6, **7**, 10, 11, 13, 14, **15**, 17, 19, 21, 22, **23**, 26, 27, 29, 30, **31**, 33, 34, 35, 37, 38, **39**, 41, 42, 43, 46, **47**, 51, 53, **55**, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 66, 67, 69, 70, **71**, 73, 74, 77, 78, **79**, 82, 83, 85, 86, **87**, 89, 91, 93, 94, **95**, 97,

so finden wir, daß unter den Parameterzahlen des kubischen Komplexes ausschließlich und allein die Zahlen der Form $8n - 1$ nicht vorkommen. Diese Zahlen sind in dieser Reihe fett gedruckt.[1])

Ermitteln wir auf analoge Weise die vollständige Zahlenreihe für den hexagonalen Komplex $[1 \cdot 3] = [1 \cdot 3 \{1, 1\}]$.

Dazu läßt sich folgende Tabelle zusammenfassen:

[1]) Für den Komplex $[[1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1]]$ des vierdimensionalen Raumes, welcher sich natürlich auch in der Form $\{1 [11]\}$ darstellen läßt, kann man also sagen, daß in demselben alle möglichen Parameterzahlen vertreten sind, was auch aus dem längst bekannten Satze der Zahlentheorie folgt, nach welchem aus vier ganzen Quadraten jede ganze Zahl zusammengesetzt werden kann.

Zwei erste Indizes

Dritter Index	00	01	11	02	12	22	03	13	23	04	14	33	24	34	15	25	44	35	06	16	26	45	36	07	17 55
0	0	3	6	12	15	24	27	30	39	48	51	54	60	75	78	87	96	102	108	111	120	123	135	147	150
1	1	4	7	13	16	25	28	31	40	49	52	55	61	76	79	88	97	103	109	112	121	124	136	148	
2	4	7	10	16	19	28	31	34	43	52	55	58	64	79	82	91	100	106	112	115	124	127	139		
3	9	12	15	21	24	33	36	39	48	57	60	63	69	84	87	96	105	111	117	120	129	132	144		
4	16	19	22	28	31	40	43	46	55	64	67	70	76	91	94	103	112	118	124	127	136	139			
5	25	28	31	37	40	49	52	55	64	73	76	79	85	100	103	112	121	127	133	136	145	148			
6	36	39	42	48	51	60	63	66	75	84	87	90	96	111	114	123	132	138	144	147					
7	49	52	55	61	64	73	76	79	88	99	100	103	109	124	127	136	145								
8	64	67	70	76	79	88	91	94	103	112	115	118	124	139	142										
9	81	84	87	93	96	105	108	111	120	129	132	135	141												
10	100	103	106	112	115	124	127	130	139	148															
11	121	124	127	133	136	145	148																		

Vergleichen wir die auf diese Weise erhaltene Zahlenreihe mit der vollständigen Reihe der Parameterzahlen bis 150

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, **11**, 13, **14**, 15, **17**, 19, 21, 22, **23**, **26**, 27, 29, 30, 31, 33, 34, **35**, 37, **38**, 39, **41**, 42, 43, 46, **47**, 51, **53**, 55, 57, 58, **59**, 61, **62**, **65**, 66, 67, 69, 70, **71**, 73, **74**, **77**, 78, 79, 82, **83**, 85, **86**, 87, **89**, 91, 93, 94, **95**, 97, **101**, 102, 103, 105, 106, **107**, 109, **110**, 111, **113**, 114, 115, 118, **119**, **122**, 123, 127, 129, 130, **131**, 133, **134**, **137**, 138, 139, **140**, 141, 142, **143**, 145, **146**, 147, **149**,

so finden wir, daß unter den Parameterzahlen des hexagonalen Komplexes ausschließlich und allein die Zahlen der Form $2 + 3n$ nicht vorkommen. Diese Zahlen sind in dieser Reihe fett gedruckt.

Der letzten Tabelle können wir uns bedienen, um die Parameter für jede gegebenen Indizes direkt abzulesen. In derselben sind die unvollständigen (S. 71), welche wir von den richtigen Symbolen mit Klammern und Parenthesen unterscheiden wollen.

Also aus der zweiten Kolonne ersehen wir, daß den Indizes

$\{100\} = (1000)$ und $\{010\} = (02\bar{1}\bar{1})$ der Parameter 3,
$\{101\} = (2011)$ „ $\{011\} = (0110)$ „ „ 1,
$\{102\} = (1011)$ „ $\{012\} = (0231)$ „ „ 7,
$\{103\} = (2033)$ „ $\{013\} = (0121)$ „ „ 3,
$\{104\} = (1022)$ „ $\{014\} = (0253)$ „ „ 19,
$\{105\} = (2055)$ „ $\{015\} = (0132)$ „ „ 7 u. s. w.

entspricht.

Die ternäre quadratische Form

$$Pc^2 = P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + P_1 P_2 p_3^2,$$

welche den vollständigen Zahlenkomplex ausdrückt, drückt zugleich die Gesamtheit der Punkte eines Raumgitters, dessen parallelepipedische Maschen rechteckige Parallelepipede mit den Kantenlängen $\sqrt{P_1}$, $\sqrt{P_2}$, $\sqrt{P_1 P_2}$ sind, aus.

Nun wird in der Lehre von den regulären Punktsystemen (zuerst von Frankenheim und Bravais) der Beweis erbracht, daß, wenn zu dem gegebenen Raumgitter noch die ihm parallelen Raumgitter hinzugefügt werden, deren Punkte entweder a) die Mittelpunkte eines Systems von rechtwinkligen Flächen oder b) die Mittelpunkte aller drei Systeme dieser Flächen der parallelepipedischen Maschen, oder c) die Mittelpunkte der parallelepipedischen Maschen selbst ohne oder endlich d) mit den Mittelpunkten der Kanten desselben einnehmen, neue Raumgitter entstehen. Der Beweis wurde eigentlich aus allen isotropen Komplexen allein für den kubischen erbracht; der Beweisgang zeichnet sich aber durch solche Einfachheit aus, daß es hinreichend ist zu erwähnen, daß derselbe ebenfalls für alle isotropen Komplexe gültig ist.

In der Lehre von der regulären Raumteilung[1]) wird der Beweis erbracht, daß diesen verschiedenen Raumgittern verschiedene reguläre parallele Raumteilungen resp. Paralleloëder entsprechen, und zwar jedem solchen Punktsystem ohne hinzugefügte Raumgitter — die Triparalleloëder, den Raumgittern a) die Tetraparalleloëder, den Raumgittern b) die Heptaparalleloëder und endlich den Raumgittern c) die Hexaparalleloëder.

Beschränken wir jetzt unsere Betrachtungen auf die zwei besonderen Komplexe, den kubischen und den hexagonalen.

Die Symmetrieverhältnisse des ersten sind nur mit den Raumgittern 1) der einfachen, 2) der dem Falle b) und 3) der dem Falle c) entsprechenden kompatibel, und die Symmetrieverhältnisse des zweiten nur mit dem Raumgitter a) kompatibel. Also dem kubischen Komplex sind die Tri-, Hexa- und Heptaparalleloëder zugeordnet, welche sich durch dieselben wirklichen Symmetrieelemente auszeichnen, die für diesen Komplex charakteristisch sind, und dem hexagonal-isotropen System sind allein die Tetraparalleloëder zugeordnet mit den für diesen Komplex charakteristischen wirklichen Symmetrieelementen.

Alle übrigen Paralleloëder, für welche diese Übereinstimmung in wirklichen Symmetrieelementen derselben mit denen der Komplexe nicht besteht, bezeichnet man als die anomalen.

Nun führt die Anwendung der Syngonielehre auf die Lehre über die Raumgitter die folgenden neuen Definitionen und Sätze ein.

Ein rechtwinkliges Raumgitter, dessen parallelepipedische Maschen durch rechteckige Flächen begrenzt sind, und in deren Flächen die Seiten sich wie die Quadratwurzeln von ganzen Zahlen verhalten, wird das isotrope genannt.

Es gibt unendlich viele isotrope Raumgitter.

Wenn wir ein isotropes Raumgitter, dessen Seitenkanten die Parameter P_1, P_2, $P_1 P_2$ sind, in demselben Punktsystem durch ein anderes ersetzen, dessen Seitenkanten wieder drei zueinander senkrechte Strahlen sind mit denselben Parameter P_1, P_2 und $P_1 P_2$ (deren zugeordnete Strecken aber von anderer absoluter Größe sind), so erhalten wir ein anderes Raumgitter, welches dem ersteren wesentlich gleich ist, indem seine Kantenstrecken durch proportionale Strecken ersetzt sind, und dabei bildet dieses Raumgitter nur einen integrierenden Teil des ersten.

---

[1]) Am umständlichsten in den Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wiss., II. Kl., XX. Bd., II. Abteil., 1900, S. 32 ff.

Dieser Ersatz ist aber auf unendlich viele Weise anszuführen.

Bezeichnen wir die drei Hauptstrahlen des ersten Raumgitters durch r_1, r_2, r_3 respektive mit den Parametern P_1, P_2, $P_1 P_2$, so können wir zum Beispiel die Strahlen r_1 und r_2 in ihrer Ebene um r_3 drehen, bis r_1 mit einem Strahl r_1' sich deckt, welcher sich in derselben Ebene durch denselben Parameter P_1 anszeichnet (und wir wissen, daß in jeder Strahlenebene unendlich viele solcher gleichen Strahlen vorhanden sind); dann muß notwendig auch der Strahl r_2 mit einem ihm gleichen Strahl r_2' mit dem Parameter P_2 zur Deckung kommen. Jetzt führen wir noch eine solche Drehung der Strahlen r_2' und r_3 in ihrer Ebene um den Strahl r_1' aus, und erhalten eine neue Kombination zueinander senkrechten Strahlen r_1', r_2'', r_3' mit denselben respektiven Parametern P_1, P_2 und $P_1 P_2$, und diese drei Strahlen können wir also als Hauptstrahlen des neuen, aber gleichen Raumgitters annehmen.

Überhaupt können wir den Strahl r_1 durch einen beliebigen ihm gleichen Strahl r_1' des Komplexes ersetzen und als r_2' einen sonst beliebigen, aber zu r_1' senkrechten Strahl auswählen, dessen Parameter gleich P_2 ist; dann muß als r_3' derjenige Strahl angenommen werden, welcher zu beiden Strahlen r_1' und r_2' senkrecht steht. Da der Komplex derselbe ist, so muß r_3' den Parameter $P_1 P_2$ besitzen.

Also jedes isotrope Raumgitter enthält in sich unendlich viele ihm gleiche aber nicht parallele isotrope Raumgitter.

Im Gegensatz zu ebenen Netzen enthält jedes Raumgitter auch unendlich viele Systeme ihm ungleicher isotroper Raumgitter in sich.

Denken wir uns nun, daß um jeden Punkt eines isotropen Raumgitters gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit eine Sphäre wächst, deren Mittelpunkt dieser Punkt ist, bis endlich unendlich viele Sphären zugleich zur Berührung kommen, aber in dem frei gebliebenen Raume mit derselben Geschwindigkeit fortwachsen; dann entsteht zuletzt in dem unbegrenzt gedachten Raume ein unendliches System von Polyëdern, welche als Paralleloëder bezeichnet wurden, da in denselben notwendigerweise die Flächen in die gleichen und parallelen Paare sich teilen lassen.

Daß diese Polyëder wirklich Polyëder und dabei Paarflächner[1]) sind, folgt daraus, daß bei diesem Sphärenwachstum sich die ebenen Flächen ausbilden, welche zu den die nächstliegenden Punkte verbindenden Geraden senkrecht stehen und durch deren Mittelpunkte hindurchgehen.

Daß dieselben wirklich Paralleloëder sind, folgt daraus, daß durch sie der unbegrenzt gedachte Raum in gleiche und parallele Bereiche regulär geteilt wird. Zugleich sind diese Paralleloëder konvexe Polyëder.

Nun wird in der Lehre von der regulären Raumteilung wirklich der Beweis erbracht, daß solche Paralleloëder nur Tri-, Tetra-, Hepta- und Hexaparalleloëder sein können. Wie wir gesehen haben, gehören dazu vier verschiedene Arten von Raumgittern, welche wir als solche I., II., III. und IV. Art bezeichnen können.

Es sei noch erwähnt, daß hier von den primitiven und einfachen Parallelogonen die Rede ist.[2])

[1]) Unter Paarflächner wird ein Polyëder verstanden, dessen Flächen paarweise gleich und parallel sind (gleichgültig gerade oder umgekehrt parallel). Elemente der Gestaltenlehre § 69.

[2]) Das primitive, das heißt das Inversionszentrum besitzende Paralleloëder (Elemente der Gestaltenlehre § 76). Das primitive Paralleloëder wird als das einfache bezeichnet, wenn in demselben parallele Flächen nur paarweise auftreten; sonst heißt es ein zusammengesetztes (ebenda § 76).

Alles zusammengefaßt, ergibt sich, daß jedem isotropen Raumgitter I. Art die Triparalleloëder zukommen, welche mit den parallelepipedischen Maschen desselben identisch sind.

Jedem isotropen Raumgitter II. Art kommen bestimmte Tetraparalleloëder zu.

Jedem isotropen Raumgitter III. Art kommen bestimmte Hepta- und demjenigen IV. Art bestimmte Hexaparalleloëder zu.

Bekanntlich gehören die Paralleloëder zu derjenigen Abteilung der Polyëder, welche als die Zonoëder abgegliedert werden.[1])

Nun läßt sich der Satz aufstellen, nach welchem sämtliche zentrale, zu primitiven Zonenachsen senkrechte Schnittfiguren der einfachen isotropen Paralleloëder einfache isotrope Parallelogone sind.

Daß diese Schnittfiguren Parallelogone sind, wurde schon früher erkannt[2]). Daß aber diese Schnittfiguren isotrope sind, folgt daraus, daß die respektiven Schnitte des Raumkomplexes isotrope ebene Komplexe sind.

Aber durchaus nicht alle diese Schnittfiguren stellen normale Parallelogone dar.

Dies ist für das normale Triparalleloëder des kubischen und für das normale Tetraparalleloëder des hexagonal-isotropen Komplexes, ebenso wie für sämtliche Schnittfiguren des normalen Hexaparalleloëders des kubischen Komplexes der Fall. Die Schnittfiguren aber des normalen Heptaparalleloëders des kubischen Komplexes sind die anomalen Triparallelogone.

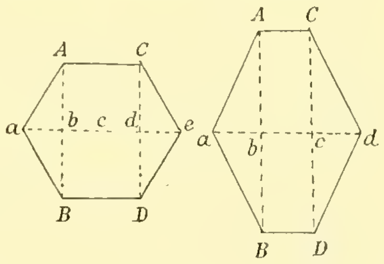


Fig. 23.

Dies ist schon daraus ersichtlich, daß der ebene Schnittkomplex des Heptaparalleloëders den Parameter 2 und nicht 3 besitzt. Übrigens ist dies direkt daraus zu schließen, daß in der zentralen Schnittfigur des Heptaparalleloëders die Diagonale ad des Triparallelogons durch zwei vertikale AB und CD in drei gleiche Strecken ab, bc, cd geteilt wird, während im regulären Sechsecke dieselbe Diagonale durch AB und CD in ungleiche Strecken $ab = de$, und $bd = bc + cd = ab + de$ geteilt wird. Folglich kann das erste Sechseck durch keine homogene Deformation in das reguläre Sechseck verwandelt werden.

Die ebenen Schnittkomplexe des normalen Triparalleloëders besitzen sämtlich den Parameter 1.

Der ebene, zur Achse [1000] senkrechte ebene Schnittkomplex des normalen Tetraparalleloëders besitzt den Parameter 3, während drei zu derselben Achse parallele ebene Schnittkomplexe derselben Figur durch die senkrechten Strahlen $\{3 \cdot 3\}$ bestimmt sind, folglich den Parameter 1 besitzen.

---

[1]) Die primitive Zone eines Polyëders heißt eine ununterbrochene Flächenreihe, deren jede zwei nächste Flächen sich in parallelen Kanten schneiden (Kantenrichtung = Zonenachse). Das Zonoëder ist ein Polyëder, deren sämtliche Flächen sich in primitiven Zonen verbinden (Elemente der Gestaltenlehre § 65).

[2]) Elemente der Gestaltenlehre § 82.

Endlich besitzen alle sechs ebenen Schnittkomplexe des normalen Hexaparalleloëders den Parameter 3.

Die übrigen Schnitte der normalen Paralleloëder, außer den erwähnten zentralen, sind die Parallelogone höherer Ordnung und könuen wieder als die isotropen von anderen unterschieden werden.

Jetzt kehren wir uns den nicht isotropen rationalen Komplexen zu. Da jeder rationale ebene Schnitt eines solchen, wie in dem I. Teile bewiesen wurde, in der Verteilung der Komplexstrahlen seinen Ausdruck in einer bestimmten Ellipse findet, so folgt daraus, daß die Verteilung der Strahlen im Raumkomplexe durch ein bestimmtes Ellipsoid, Syngonieellipsoid, ausgedrückt wird.

Die zonalen Verhältnisse für die isotropen und nicht isotropen Komplexe bleiben dieselben. Dies folgt daraus, daß die Strahlen aller Komplexe durch eindeutige Projektivität verbunden sind, was in gleichen (unvollständigen) Indizes seinen Ausdruck erhält; die zugeordneten Strahlen, welche im isotropen Komplex tautozonal sind, verbleiben tautozonal auch in nicht isotropen, so daß der Gang der Entwicklung des Komplexes durch sukzessives Addieren der Indizes derselbe verbleibt für alle Komplexe und durch ganz analoge geometrische Operation zu Stande kommt, und gerade diese Operation bestimmt die zonalen Verhältnisse des Komplexes.

Nun ist diese kristallographische Projektivität, welche mit der Affinität übereinstimmt, gleichbedeutend mit dem System der homogenen Deformationen, für welche die Bedinguugen gelten, daß die Ebenen und Geraden vor der Deformation als solche auch nach der Deformation verbleiben; die parallelen Geraden und Ebenen verbleiben auch nach der Deformation parallel; jede Punktreihe in beliebiger Richtung auch nach der Deformation in allen ihren Teilen proportional (ähnlich).

Wenn also vor der Deformation als Ausdruck der Verteilung der Strahlen eine Sphäre galt, welche wir als in einem Würfel oder mesosphärischen hexagonalen Prisma eingeschrieben denken, so verwandelt sich nach der Deformation der Würfel in ein beliebiges Parallelepipedon, aus dem so spezifizierten Prisma in eines von allgemeineren Charakter, und die in ihnen eingeschriebenen Sphären in Ellipsoide, welche aber in dem betreffenden Parallelepipedon und Prisma eingeschrieben verbleiben.

Alle Kombinatiouen von drei zueinander senkrechten Vektoren werden jetzt zu Kombinationen der konjugierten Vektoren. Der Begriff des Parameters verliert jetzt seine Bedeutuug, und anstatt dessen verbleibt nur von Bedeutung der Begriff des Vektors mit der jedem Strahle zugeordneten Strecke (Modulus). Alle kongruenten Punktreihen der isotropen Raumgitter verbleiben als kongruente Punktreihen, und dabei wird die Puuktdistauz dieser Reihe durch die Strahlenstrecken bestimmt. Das Produkt der Strecken dieser koordinierten Vektoreu wird jetzt veränderlich, aber dasselbe, multipliziert mit der Sinusfunktion des von den koordinierten Vektoren gebildeten Trigonoëders bildet eine konstante Größe, welche der Größe des Volums des von den Vektoren bedingten Parallelepipedon gleich ist. Wenn wir als homogene Deformationen allein das System von Verschiebungen zur Anwendung bringen, so kann man sagen, daß diese Größe derjenigen des Volumens des rechtwinkligen Parallelepipedon der isotropen Komplexe gleich ist, weil die Verschiebungen die Volumenelemente unveränderlich lassen.

Die Gleichungen dieses Syngonieellipsoides lassen sich direkt aufstellen auf Grund derjenigen Eigenschaft desselben, daß seine Hauptachsen die einzigen konjugierten senkrechten Geraden sind. Dazu sind die Projektivitätsgleichungen anzuwenden, welche nach dem Berechnungssystem des Verfassers zur Bestimmung der projektiven Indizes dienen[1]).

In einfachster Form sind diese Gleichungen für die Berechnung der Flächenindizes:

$$p_1' : p_2' : p_3' = (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) : (a_4 p_2 + a_5 p_3) : p_3$$

und für die Berechnung der Kantenindizes:

$$r_1' : r_2' : r_3' = a_4 r_1 : (-a_2 r_1 + a_1 r_2) : \left((a_2 a_5 - a_3 a_4) r_1 - a_1 a_5 r_2 + a_1 a_4 r_3\right).$$

Für die senkrechten Flächen und Kanten haben wir die Gleichung:

$$p_1' : p_2' : p_3' = r_1' : r_2' : r_3'.$$

Speziell für die konjugierten haben wir außerdem:

$$p_1 : p_2 : p_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

Folglich bestehen für die Achsen (d_1, d_2, d_3) der Syngonieellipsoide die Gleichungen

$$(a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3) : (a_4 d_2 + a_5 d_3) : d_3 = a_4 d_1 : (-a_2 d_1 + a_1 d_2) : \left((a_2 a_5 - a_3 a_4) d_1 - a_1 a_5 d_2 + a_1 a_4 d_3\right)$$

und gerade diese Gleichuug ist die gesuchte charakteristische Gleichung für das Syngonieellipsoid.

Da in diesen Gleichungen die Koeffizienten der Projektivitätsgleichungen a_i im Allgemeinen irrationale Zahlen sind, so ergibt die Auflösung dieser Gleichungen irrationale Werte für d. Also im Allgemeinen, das heißt für die trikline Syngonie, sind die Strahlen, welche die Ellipsoidachsen darstellen, nur durch irrationale Indizes ausdrückbar.

Diese Schlußfolgerung ist mit derjenigen identisch, nach welcher in triklinen Komplexen drei senkrechte rationale, das heißt dem Komplexe zugehörige Strahlen unmöglich sind. Und in der Tat, wären solche vorhanden gewesen, so hätten wir in den drei senkrechten Schnittebenen des Komplexes orthogonale Zonen (rhombische ebene Strahlenkomplexe) gehabt, und dies wäre keineswegs als allgemeiner Fall zu bezeichnen.

Noch zweckmäßiger wäre es die Komplexe als veränderliche zu betrachten, insofern diese Veränderlichkeit mit dem Vorhandensein der bestimmten wirklichen Symmetrieelemente kompatibel ist. In dieser Auffassung wäre aber das Vorhandensein der Symmetrieelemente als eines speziellen Falles abzusondern. Dann hätten wir sagen können, daß von Belang nicht die zufällig erscheinenden rechten Winkel, sondern solche sind, welche als die notwendigen Folgerungen der Annahme der Symmetrieelemente auftreten.

---

[1]) IV. Analytisch-kristallographische Studie. Einleitung.

Dann würden wir folgeude spezielle Fälle unterscheiden können:

1. Es gibt keine wirklichen Symmetrieelemente. Natürlich ist im Komplexe selbst stets ein Inversiouszentrum vorhanden. In diesem Falle sind keine notwendigen Bedingungen dafür vorhanden, daß die Ellipsoidachsen rational sind. Sie sind also alle als irrationale Strahlen anzunehmen. Zugleich gibt es keine gleiche Strahlen, das heißt solche, welche notwendigerweise zur Deckung kommen, wenn wir den Strahlenkomplex in anderer Orientierung mit sich selbst zur Deckung bringen, da jetzt überhaupt eine solche Deckung ausgeschlossen ist. Alle Komplexstrahlen sind somit singuläre.

Diese Syngonieart wird als die trikline bezeichnet.

In diesen Strahlenkomplexen sind sämtliche Zonen schiefe.

2. Es gibt eine zweizählige Symmetrieaxe. Da zugleich das Inversionszentrum notwendig vorhanden ist, so folgt daraus, daß auch die resultierende, zur Symmetrieachse senkrechte, Symmetrieebene notwendig vorhandeu ist.

In diesem Falle muß notwendigerweise eine der Ellipsoidachsen diese Symmetrieachse sein, und die senkrechte Symmetrieebene ist die Ebene der beiden anderen Ellipsoidachsen.

Diese Ebene ist zugleich diejenige besondere Ebene, in welcher sämtliche Strahlen singuläre sind. Außerdem ist natürlich die Symmetrieachse, welche allein vorhanden ist und zu dieser Ebene senkrecht steht, ebenfalls singulär. Sämtliche andere Strahlen sind paarweise einander gleich, da sie zur Deckung kommen, wenn mau den Komplex selbst durch die diesem zukommende symmetrische Operation zur Deckung briugt.

Diese Syngonieart wird als die monokline bezeichnet.

Da in diesem Falle eine Ellipsoidachse notwendigerweise rational ist, so könuen wir derselben rationale Iudizes zuschreiben. Nehmen wir für dieselbe die Indizes [010] an, so erhalten wir für die Koeffizienten der Projektivitätsgleichungen die Bedingungen $a_2 = 0$ und $a_5 = 0$, und dann reduziert sich die Gleichung der Ellipsoidachsen zu:

$$\frac{a_1 d_1 + a_3 d_3}{a_4 d_1} = \frac{a_4 d_2}{a_1 d_2} = \frac{d_3}{-a_3 a_4 d_1 + a_1 a_4 d_3}.$$

Da für die Indizes $(d_1 d_2 d_3)$ nur ihr Zahlenverhältnis in Rücksicht kommt, so ist es erlaubt, eine dieser Zahlen, z. B. d_3. als Einheit anzunehmen, falls dieselbe nicht gleich Null ist.

Dann erhalten wir zwei Gleichungen zur Bestiumung der beiden anderen Indizes

$$(a_1 d_1 + a_3)(-a_3 a_4 d_1 + a_1 a_4) = a_4 d_1$$

und

$$a_4^2 d_1 d_2 = a_1 (a_1 d_1 + a_3) d_2 = (a_1^2 d_1 + a_1 a_3) d_2.$$

Die Auflösung der ersten Gleichung als quadratische in Bezug auf d_1 gibt zwei Werte d_1' und d_1'', und dabei stets reelle, da:

$$d_1 = \frac{a_1^2 - a_3^2 + 1 \pm \sqrt{(a_1^2 - a_3^2 + 1)^2 + 4}}{2 a_1 a_3}.$$

Setzen wir diese Werte in die zweite Gleichung, so erhalten wir, daß die Summe $(a_4^2 - a_1^2) d_1 - a_1 a_3$ nicht verschwindet, also d_2 gleich Null sein muß.

Wenn umgekehrt in der zweiten Gleichung d_2 nicht gleich Null angenommen wird, so erhält man $d_1 = \frac{a_1 a_3}{a_4^2 - a_1^2}$, und setzt man diesen Wert in die erste Gleichung, so erhält man den Widerspruch. Also bei der Annahme, daß d_2 der Zahl 0 nicht gleich ist, ist die Annahme $d_3 = 1$ unmöglich, also $d_3 = 0$ und zugleich $d_1 = 0$, da $\frac{d_1}{d_3} = \frac{a_1 a_3}{a_4^2 - a_1^2}$.

Somit erhalten wir die Werte für drei Ellipsoidachsen d_1' 01, d_1'' 01 und 010. Die Kenntnis der Indizes d_1' und d_1'' lassen uns die Lage der betreffenden Strahlen berechnen durch die Winkelgrößen, welche diese Achsen mit der Vertikalachse [001] bilden. Diese Indizes selbst sind aber irrational, und die Achsen selbst können nicht die Komplexstrahlen sein.

In diesem Falle sind alle ebenen Strahlenkomplexe, welche den besonderen Strahl (Symmetrieachse respektive Normale zur Symmetrieebene) enthalten, orthogonale (rhombische).

Wählen wir als diesen besonderen Strahl den Strahl A (Fig. 16, S. 53) aus, und als Strahlen A' und A'' die Strahlen in der besonderen Ebene, so erhalten wir aus der Formel 2), daß das rationale Doppelverhältnis

$$\frac{\operatorname{Sin}(A' P A'')}{\operatorname{Sin}(A' Q A'')} : \frac{\operatorname{Sin}(A'' P A)}{\operatorname{Sin}(A'' Q A)},$$

falls P und Q in der Ebene $A A'$ liegende Strahlen sind, sich auf das folgende

$$\frac{\cos A P}{\cos A Q} : \frac{\sin A P}{\sin A Q} \quad \text{respektive} \quad \frac{\operatorname{tang} A Q}{\operatorname{tang} A P}$$

reduziert, was gemäß dem I. Teil für die orthogonalen Zonen charakteristisch ist.

Auf Grund des Gesetzes des Dualismus folgt weiter, daß auch jeder in der besonderen Ebene liegende Strahl die Achse der orthogonalen Flächenzone ist.

Das sind die einzigen Fälle, in welchen nicht sämtliche drei Ellipsoidachsen die rationalen Strahlen und zugleich die Achsen der orthogonalen Zonen sind.

Von den isotropen Komplexen vertritt allein der kubische eine besondere Syngonieart, da hier allein die Gesamtheit der Symmetrieelemente zulässig ist, welche den Komplex unveränderlich machen. Dazu sind vier dreizählige Symmetrieachsen hinreichend, welche die Lage der Würfeldiagonalen besitzen. Für die übrigen isotropen Komplexe ist dies nicht der Fall. Allein der hexagonal-isotrope Komplex zeichnet sich durch Zulässigkeit der sechszähligen Symmetrieachse aus. Aber das Vorhandensein dieser Achse bedingt noch keineswegs die genannte Unveränderlichkeit, da dabei stets die Dilatation in der Richtung dieser Achse möglich ist unter der Bedingung der Beibehaltung der vorhandenen Symmetrieelemente.

Diesem Komplex entspricht als Syngonieellipsoid nicht notwendig die Sphäre, welche lediglich als ein Grenzfall bei diesen Veränderungen erscheint, sondern ein Rotationsellipsoid, in welchem die Rotationsachse mit dieser Symmetrieachse koinzidiert.

Das Rotationsellipsoid kommt aber auch zu Stande, wenn man die Dilatation des kubischen Komplexes in der Richtung der vierzähligen Symmetrieachse ausführt. Diese Syngonieart ist aber von der vorigen dadurch verschieden, daß eine einzige isotrope Zone hier die tetragonale (mit Parameter 1), dort die hexagonale (mit Parameter 3) ist.

Somit erlaubt uns das Syngonieellipsoidgesetz folgende Syngoniearten zu unterscheiden.

1. Kubische Syngonie. Dieselbe ist allein durch den tetragonal-isotropen Komplex vertreten, durch die Sphäre als Syngonieellipsoid charakterisiert, unveränderlich in ihren singulären Elementen. Sie ist durch spezielle Symmetrieelemente fixiert, unter welchen notwendig vier dreizählige Symmetrieachsen vertreten sind. Natürlich sind sämtliche Zonen isotrop. Es gibt keine singulären Richtungen. Die minimale Anzahl gleicher Richtungen ist drei: das sind die Hauptachsen mit dem Parameter 1.

2. Tetragonale Syngonie. Dieselbe ist durch den Komplex vertreten, welcher aus dem vorigen durch Dilatation in der Richtung einer Hauptachse zu Stande kommt. Für sie ist das Vorhandensein einer einzigen isotropen und zwar tetragonal-isotropen Zone charakteristisch, deren Achse mit der Richtung der Dilatation koinzidiert. Sie ist durch ein Rotationsellipsoid als Syngonieellipsoid charakterisiert, wo der Rotatiousachse als Strahl der Parameter 1 zukommt. Diese Richtung ist zugleich die singuläre. Alle übrigen Strahlen sind Achsen orthogonaler Zonen. Die minimale Anzahl gleicher Richtungen ist zwei.

3. Hexagonale Syngonie. Ihr Komplex entsteht gleichgültig aus dem kubischen oder aus dem hexagonal-isotropen Komplex durch Dilatation in der Richtuug der drei- respektive sechszähligen Achse mit dem Parameter 3. Sie ist ebenfalls durch ein Rotationsellipsoid als Syngonieellipsoid charakterisiert, aber mit anderem Parameterwerte als für die vorige Syugonieart. Auch jetzt ist diese Achse die einzige singuläre Richtung, aber die minimale Anzahl der gleichen Richtungen ist drei und zwar in der zur Rotationsachse senkrechten Ebene.

Da der hierzu gehörige Komplex sich aus dem kubischeu, wie aus dem hexagonal-isotropen durch Dilatatiou in der Richtung der dreizähligen Symmetrieachse ableiten läßt, so folgt, daß die beiden isotropen Komplexe sich auseinander auf demselben Wege ableiten lassen.

4. Rhombische Syngonie. Ihr Komplex entsteht ebenfalls aus dem kubischen, wie aus dem hexagonal-isotropen durch Dilatation in der Richtung der drei rationalen senkrechteu Richtungen. Diese Richtungen sind zugleich die singulären, und können als die Achsen der orthogonalen Zonen betrachtet werden. Das charakteristische Syngonieellipsoid ist schon ein dreiachsiges, und dessen Achsen sind die genannten singulären Richtungen. Die Strahlen überhaupt, welche in drei singulären (durch singuläre Richtungen bestimmten) Ebenen liegen, sind die Achsen der orthogonalen Zonen. Sonstige Strahlen sind schon die Achsen von schiefen Zonen.

Von der 5. monoklinen und 6. triklinen Syngonie war oben die Rede. Es ist nur hinzuzufügen, daß auch die hierzu gehörigen Komplexe sich ebenfalls aus dem kubischen, wie aus deu hexagonal-isotropen Komplexen ableiten lassen.

Diese Verhältuisse treten noch deutlicher hervor, wenu wir anstatt der Strahlenkomplexe die Raumgitter in näheren Betracht ziehen.

Für die letzteren erscheint es noch möglich die respektiven Trägheitsellipsoide zu bestimmen und den Beweis zu liefern, daß dieselben mit den Syngonieellipsoiden zusammenfallen.

Es ist von vornhereiu klar, daß für die Raumgitter der kubischen Syngonie, gleichgültig von welcher Strukturart, hexaëdrischer, oktaëdrischer oder dodekaëdrischer, sich das

Trägheitsellipsoid zur Sphäre reduziert, wie dies für das Syngonieellipsoid der Fall ist. Dies ist aber nicht der Fall für die Raumgitter der übrigen isotropen Komplexe, da dieselben sich aus dem kubischen durch bestimmte Dilatation in der Richtung der Hauptachsen ableiten lassen, wie dies auch für die Komplexe der rhombischen Syngonie der Fall ist.

Aber speziell für den hexagonal-isotropen Komplex, wenn wir das Raumgitter II. Art annehmen, erscheint die sechszählige Symmetrieachse; in Schnittebenen aber, welche dieser Achse parallel sind, erhalten wir das gewöhnliche quadratische Netz. Daraus folgt, daß speziell für dieses Raumgitter das Trägheitsellipsoid zur Sphäre wird.

Wir können also alle diese vier Raumgitter den respektiven Dilatationen unterwerfen, und dabei verwandelt sich die Sphäre als Syngonieellipsoid und als Trägheitsellipsoid in die gleichen Ellipsoide.

Berücksichtigen wir nun, daß eine solche Dilatation die Trägheitsmomente in den der Dilatationsachse parallelen Schnitten unverändert läßt, während in dem zu dieser Achse senkrechten Schnitte sich zugleich die Trägheitsmomente sämtlicher Systempunkte um einen und denselben Faktor ändern, so ändert sich folglich auch die Summe dieser Momente. In dieser Hinsicht spielt der Umstand keine Rolle, ob die Dilatationsachse rational oder irrational ist.

Das Syngonieellipsoid ist ein vollkommener Ausdruck für die rationalen Komplexe, und das Syngonieellipsoidgesetz muß als Grundgesetz der Syngonielehre betrachtet werden.

Was die komplexialen Symmetrieverhältnisse und die Verteilung der Parameter anbetrifft, wurde schon oben mit genügender Ausführlichkeit dargetan. Nur muß bemerkt werden, daß in den isotropen Komplexen die Parameterverhältnisse nicht durch eine einzige, sondern durch eine unendliche Gesamtheit der konzentrischen Kugeln zum Ausdruck gebracht wird. Für die anderen Syngoniearten verliert aber die absolute Größe der Parameter ihre Bedeutung, und es bleibt nur die relative übrig. Anstatt einer Schaar konzentrischer ähnlicher Ellipsoide brauchen wir jetzt nur ein einziges, welches von allen den isotropen Komplexen zukommenden Sphären nur diejenige mit dem Radius gleich der Einheit berücksichtigt.

Jetzt wollen wir zeigen, wie dieses Gesetz uns die Verteilung der rationalen und irrationalen Strahlen zur Anschaulichkeit bringt. Wir wollen nämlich die Frage untersuchen, in welchen ebenen Schnitten des Syngonieellipsoides die beiden Ellipsenachsen die rationalen sind.

Denken wir uns einen Schnitt durch die Ebene $(p_1\, p_2\, p_3)$.

Wählen wir als Ausgangskanten dieser ebenen Zone die Kanten $|01| = \begin{vmatrix} 1\,0\,0 \\ p_1\, p_2\, p_3 \end{vmatrix} = [0\, \bar{p}_3\, p_2]$ und $|10| = \begin{vmatrix} p_1\, p_2\, p_3 \\ 0\,1\,0 \end{vmatrix} = [\bar{p}_3\, 0\, p_1]$. Dann wird eine beliebige Zonenkante $|m\, n|$ durch die Indizes

$$[-n\, p_3;\ -m\, p_3;\ m\, p_2 + n\, p_1]$$

ausgedrückt. Für die konjugierte Kante derselben Zone haben wir den Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} -n\, p_3 & -m\, p_3 & m\, p_2 + n\, p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}.$$

Wenn also diese konjugierte Kante zur Kante $|mn|$ senkrecht steht, so muß die Gleichheit bestehen[1])

$$\begin{vmatrix} -n r_3' & -m r_3' & m r_2' + n r_1' \\ -n p_3' & -m p_3' & m p_2' + n p_1' \\ p_1' & p_2' & p_3' \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Apostrophe die zugehörenden projektiven Indizes bedeuten und der Kante $[r_1' r_2' r_3']$ die eigentlichen Indizes $[p_1 p_2 p_3]$ zukommen.

Führen wir also die eigentlichen Werte ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -n\{(a_2 a_5 - a_3 a_4) p_1 - a_1 a_5 p_2 + a_1 a_4 p_3\} & -m\{(a_2 a_5 - a_3 a_4) p_1 - a_1 a_5 p_2 + a_1 a_4 p_3\} & \{m(-a_2 p_1 + a_1 p_2) + n a_4 p_1\} \\ -n p_3 & -m p_3 & m(a_4 p_2 + a_5 p_3) + n(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) \\ a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 & a_4 p_2 + a_5 p_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Für die trikline Syngonie ergibt diese Gleichung für m und n lauter irrationale Werte, da keine senkrechten rationalen Strahlen vorkommen.

Für die monokline Syngonie vereinfacht sich diese Gleichung, da $a_2 = 0$ und $a_5 = 0$. Also nimmt sie die Form an:

$$\begin{vmatrix} -n(-a_3 a_4 p_1 + a_1 a_4 p_3) & -m(-a_3 a_4 p_1 + a_1 a_4 p_3) & (m a_1 p_2 + n a_4 p_1) \\ -n p_3 & -m p_3 & m a_4 p_2 + n(a_1 p_1 + a_3 p_3) \\ a_1 p_1 + a_3 p_3 & a_4 p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung genügt für alle Flächen $(p_1\, 0\, p_3)$, also $p_2 = 0$, wenn dabei $m = 0$, und n bleibt unbestimmt. Also sind zueinander senkrecht die Kanten

$$0\,[0\,\bar{p}_3\,0] + n\,[\bar{p}_3\,0\,p_1] = -n\,[p_3\,0\,\bar{p}_1].$$

Die dieser Kante koordinierte ist $\begin{vmatrix} \bar{p}_3 & 0 & p_1 \\ p_1 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = [010]$.

Für die rhombischen Komplexe haben wir noch $a_3 = 0$, und die Gleichung reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} -n a_1 a_4 p_3 & -m a_1 a_4 p_3 & m a_1 p_2 + n a_4 p_1 \\ -n p_3 & -m p_3 & m a_4 p_2 + n a_1 p_1 \\ a_1 p_1 & a_4 p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Gleichung wird nicht nur die Bedingung $p_2 = 0$ und $m = 0$, sondern auch $p_1 = 0$ und $n = 0$, und noch $p_3 = 0$ und $n = 0$ zugeordnet. Wenn z. B. $p_1 = 0$, so haben wir:

$$|01| = [0\,\bar{p}_3\,p_2], \quad |10| = [\bar{1}00], \quad \text{also} \quad |mn| \equiv m\,[0\,\bar{p}_3\,p_2] + 0\,[\bar{1}00] \equiv [0\,\bar{p}_3\,p_2].$$

---

1) Diese Gleichheit wurde zuerst in der Zeitschrift für Kristallographie **33**, 588 aufgestellt.

Die dieser Kante koordinierte ist $\begin{vmatrix} 0 \; \bar{p}_3 \; p_2 \\ 0 \; p_2 \; p_3 \end{vmatrix} = [100]$ u. s. f.

Für die tetragonalen Komplexe haben wir noch $a_1 = a_4$. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung auf:

$$\begin{vmatrix} -n a_1 p_3 & -m a_1 p_3 & m p_2 + n p_1 \\ -n p_3 & -m p_3 & m a_1 p_2 + n a_1 p_1 \\ a_1 p_1 & a_1 p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun sieht man, daß der Gleichung durch ganz beliebige Indizes genügt wird, wenn man $m : n$ gleich $p_2 : p_1$ setzt. Dann haben wir:

$$|m\,n| \equiv p_2\,[0\,\bar{p}_3\,p_2] + p_1\,[\bar{p}_3\,0\,p_1] \equiv [-p_1 p_3;\ -p_2 p_3;\ p_1^2 + p_2^2].$$

Die dieser Kante koordinierte ist $\begin{vmatrix} -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_1^2 + p_2^2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = [\bar{p}_2\,p_1\,0]$.

Wenn wir aber $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ annehmen, so wird die Gleichung zur Identität:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In diesem Falle sind also m und n völlig unbestimmt, das heißt: es läßt sich in dieser Zone (als einer isotropen) ein beliebiger Strahl auswählen, und stets wird der ihm koordinierte Strahl der dazu senkrechte.

Endlich reduziert sich für die kubische Syngonie die Gleichung von selbst auf die Identität

$$\begin{vmatrix} -n p_3 & -m p_3 & m p_2 + n p_1 \\ -n p_3 & -m p_3 & m p_2 + n p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

was selbstverständlich ist, da in diesem Fall die Werte m und n wesentlich unbestimmt sind für sämtliche rationale Schnitte des isotropen Komplexes.[1])

Auf Grund dieser Verteilung der orthogonalen und isotropen Zonen kann die Frage über die Syngonieart beantwortet werden, wenn z. B. allein vier Strahlen (resp. Ebenen) gegeben sind, von welchen keine drei tautozonal sind.

Ist der Komplex isotrop, so sind die Tangentenquadrate rational. Man entwickle den Komplex. Wenn derselbe tetragonal oder hexagonal ist, so sind sämtliche Zonen orthogonal. Von zwei konjugierten senkrechten Ebenen geht eine notwendig durch die Hauptsymmetrieachse. Der Schnittwinkel zweier solcher Ebenen bedingt, ob die einzige isotrope Zone tetragonal oder hexagonal ist. Ist der Komplex rhombisch, so steht bevor, die Ebene aufzusuchen, deren Strahlen die Achsen der orthogonalen Zonen sind, und dann bestimme man die senkrechten konjugierten Ebenen, welche den zur vorigen Ebene senkrechten Strahl gemein haben. Ist aber dieser Strahl die Achse der schiefen Zone, so ist der Komplex monoklin. Im triklinen fehlen die orthogonalen Zonen vollständig.

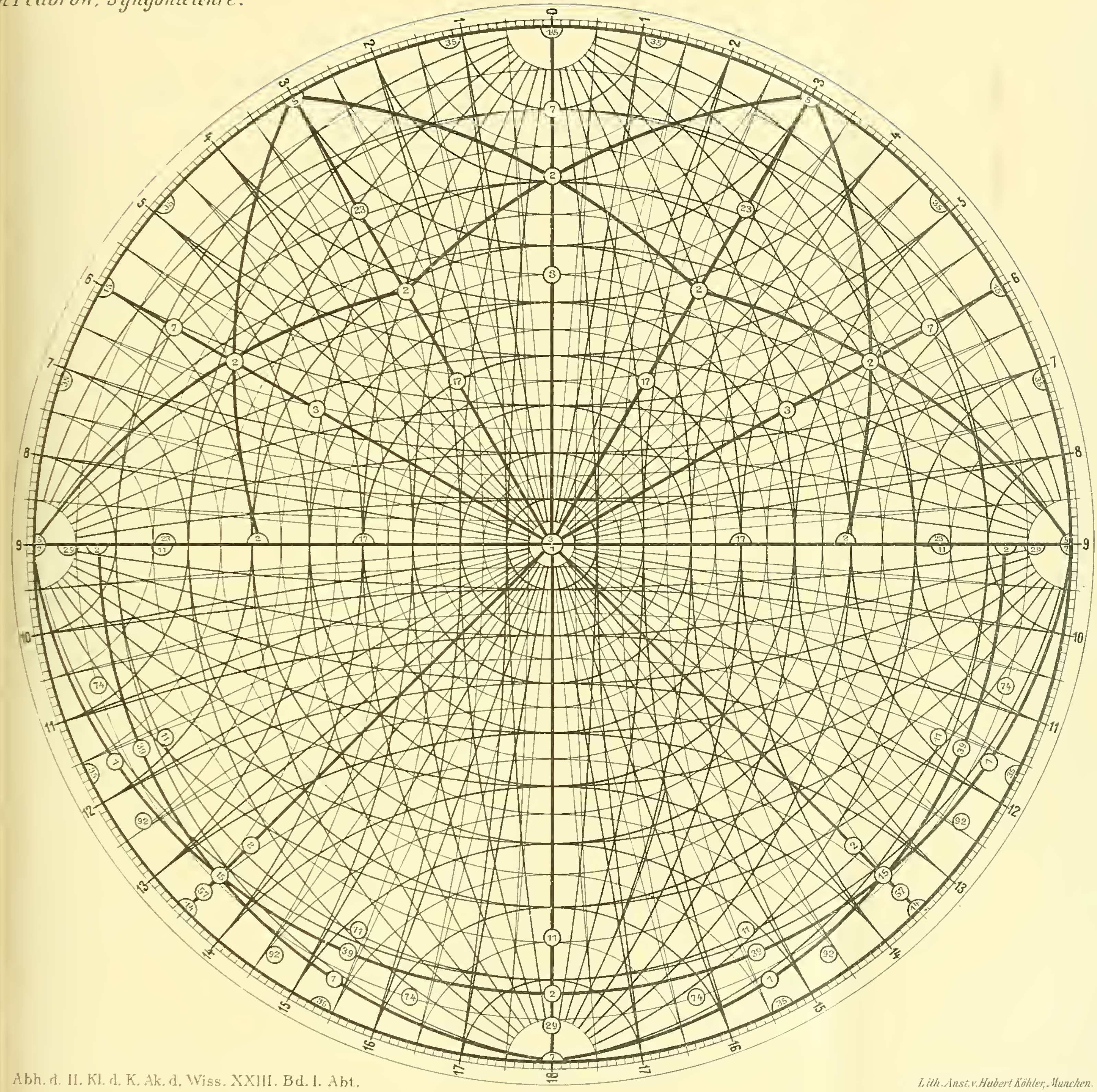
---

[1]) Was speziell die hexagonale Syngonie anbetrifft, so ist die analoge Operation in der Zeitschrift für Kristallographie 33, 588 angeführt.

Das Entstehen sämtlicher Komplexe aus den isotropen, was als Gesetz der Projektivität der Komplexe bezeichnet wird, bewirkt die Eigenschaften, welche von Herrn Goldschmidt und Viola als harmonische bezeichnet wurden. Harmonieachse mit bestimmter Zähligkeit bleibt jede Achse, welche vor der Deformation, das heißt im isotropen Komplexe als Symmetrieachse mit derselben Zähligkeit auftrat; dasselbe gilt auch für Harmonieebenen.

Wie schon im I. Teile erklärt (S. 51), bringen die neuen Fachwörter „Harmonie", „Harmonieelemente" keinen neuen Inhalt mit; hier ist also nur nötig, am Schlusse dieses I. Teiles auf sie Bezug zu nehmen.

Inhalt.



Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.