

Ueber  
die Bewegung der Elektronen.

Von  
**F. Lindemann.**

Zweiter Teil:  
Stationäre Bewegung.

(Eingelaufen am 10. Juli 1907.)



Im ersten Teile dieser Abhandlung (vgl. oben Seite 235 ff. des vorliegenden Bandes) hatte ich das Problem der Elektronenbewegung für den Fall der Translation auf Grund des Sommerfeldschen Ansatzes neu behandelt, und war dabei zu wesentlich anderen Resultaten gekommen, als sie sonst aufgestellt wurden. Die Unterschiede beruhen hauptsächlich darauf (wie in § 16 dargelegt wurde), daß gewisse Integrationen und Differentiationen sowie andere Grenzübergänge (für  $t = \infty$ ) nicht in beliebiger Anordnung ausgeführt werden dürfen, daß vielmehr das Resultat von der Anordnung dieser Operationen wesentlich beeinflußt wird. Dabei ist bei Auswertung des Integrals  $\Phi_{2,x}$  ein Irrtum vorgekommen, insofern eine Quadratwurzel mit unrichtigem Vorzeichen genommen wurde, und ein in der Entwicklung eines Binoms vorkommendes Glied bei der Integration vergessen wurde: außerdem ist im Nenner der Faktor 2 hinzuzufügen. Ich bin Herrn G. A. Schott in Bonn in außerordentlicher Weise zu Dank verpflichtet, da er sich der Mühe unterzog, die Rechnungen genau zu revidieren und mich auf den Irrtum aufmerksam machte, auch das richtige Resultat mitteilte. Es hat dies in einem Punkte eine wesentliche Änderung der zu ziehenden Folgerungen zur Folge, indem sich jetzt ergibt, daß bei Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft nach Ablauf einer gewissen Zeit gleich Null wird. Wenn also auch in diesem einen Punkte Übereinstimmung mit älteren Resultaten hergestellt wird, so bleiben doch alle anderen Formeln von den früheren abweichend, und die frühere Behandlung der (nach gewisser Zeit eintretenden) kräftefreien Bewegung hat nur zufällig zu dem richtigen Resultate geführt. Es geht dies deutlich daraus hervor, daß nach Abraham und Sommerfeld die Wirkung des skalaren und des vektoriiellen Potentials je für sich gleich Null sein sollte, während tatsächlich nur ihre Summe verschwindet.

In den folgenden Paragraphen sind die Integrale  $\Phi$  neu berechnet, und es ist die stationäre Bewegung eingehend behandelt. Hinzugefügt sind die entsprechenden Gleichungen für die sogenannte quasistationäre Bewegung, wengleich nicht einzusehen ist, wie eine solche zustande kommen soll, denn auch sie kann sich erst herausbilden, nachdem eine gewisse Zeit hindurch nicht unerhebliche verzögernde Kräfte auf das Elektron gewirkt haben. Das Auftreten dieser Kräfte tritt auch der elektromagnetischen Auffassung der materiellen Mechanik hindernd entgegen.

Auf die Einwürfe, welche Sommerfeld in einer Arbeit, die der Akademie im Juni vorgelegt wurde, gegen meine früheren Entwicklungen erhoben hat, kann ich hier nicht eingehen, da sie mir noch nicht näher bekannt sind.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Inzwischen bin ich darauf in einer besondern Abhandlung (Sitzungsberichte der K. Bayerischen Akademie, math.-phys. Klasse, 1907. S. 177 ff.) näher eingegangen.

§ 18. Berechnung der Integrale  $\Phi_{1x}$  und  $\Phi_{2x}$ .

(Nachtrag zu § 7 und § 10.)

In § 3 war für das Potential  $\varphi$  die Gleichung (34) aufgestellt, nämlich:

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^t \frac{S}{R} d\tau,$$

worin der Wert des Integrals:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cosin as}{s^3} \sin c\tau \cdot \sin Rs \cdot ds$$

durch die Untersuchungen in § 4 näher bestimmt wurde, und zwar ist je nach den zwischen  $a$ ,  $R$  und  $c\tau$  bestehenden Ungleichungen gemäß den Gleichungen (43), (44), (45)  $S$  entweder durch:

$$\frac{\pi}{8} [a^2 - (c\tau - R)^2] \text{ oder durch } \frac{\pi}{2} c\tau R \text{ oder durch } 0$$

zu ersetzen, so daß in verschiedenen Intervallen der Beitrag zum Integrale  $\varphi$  durch die Gleichung:

$$d\varphi = \frac{3 \varepsilon c}{16 a^3 \pi} [a^2 - (c\tau - R)^2] d\tau$$

oder:

$$d\varphi = \frac{3 \varepsilon c}{4 a^3 \pi} c\tau R d\tau \text{ oder } d\varphi = 0$$

bestimmt wird. Demgemäß ist in den Relationen der §§ 6 und 7 die im Nenner auftretende Zahl 8 überall durch 16 zu ersetzen, sobald im Zähler unter dem Integralzeichen die Klammer  $[a^2 - (c\tau - R)^2]$  vorkommt.

Hiernach wird das in § 7 für die **erste Lage** zu berechnende Integral  $J_1$  durch die Formel:

$$J_1 = -\frac{3 \varepsilon c}{8 \pi a} \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\pi [a^2 - (c\tau - R)^2] \cosin(n, x) \cdot \sin \Theta \cdot \frac{d\Theta}{R}$$

gegeben, und dasselbe ist gleich  $\Phi_{1x}(t, t)$ , wenn die Funktion  $\Phi_{1x}$  durch die Gleichung:

$$(68) \quad \Phi_{1x}(a, t) = \frac{\varepsilon c}{20 a^3} \int_0^a (T^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2) d\tau$$

definiert wird.

Bei der **dritten Lage** (Seite 263) ist ebenso das Integral  $J_1$  durch die Gleichung:

$$J_1 = \frac{3 \varepsilon c}{16 \pi a} \int_{\tau_0}^t d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{\Theta_1} [a^2 - (c\tau - R)^2] \frac{x}{a R} \sin \Theta \cdot d\Theta$$

gegeben. Die Auswertung führteu wir zwei Integrale  $U_1$  und  $U_2$  zurück, deren Werte aus den in (66) und (66<sup>a</sup>) gegebenen unbestimmten Integralen entnommen werden können. Es wird:

$$U_1 = \int_0^{\Theta_1} \frac{\sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta}}$$

$$= \frac{1}{6a^2 T^2} [\{3(a^2 + T^2) - (a - c\tau)^2\} \sqrt{(a - c\tau)^2} - 2(a + T)(a^2 + T^2 - aT)].$$

Hierin ist für  $\sqrt{(a - c\tau)^2}$  der positive Wert zu nehmen, und dieser ist gleich  $c\tau - a$ , da in der dritten Lage  $c\tau > a$  vorausgesetzt wird, während ich in § 7 aus Versehen den Wert  $a - c\tau$  gewählt hatte (obgleich bei dem entsprechenden Integrale  $\Phi_{2x}$  in § 10 für den Wert der Quadratwurzel  $\sqrt{(T - a)^2}$  das richtige Zeichen gewählt wurde). Es ist also:

$$U_1 = \frac{1}{6a^2 T^2} [\{3(a^2 + T^2) - (a - c\tau)^2\} (c\tau - a) - 2(a + T)(a^2 + T^2 - aT)].$$

Ebenso wird:

$$U_2 = \int_0^{\Theta_1} \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT \cos \Theta} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$$

$$= \frac{1}{30a^2 T^2} [\{5(a^2 + T^2) - 3(c\tau - a)^2\} (c\tau - a)^3 - 2(T + a)^3 (a^2 + T^2 - 3aT)],$$

und hieraus:

$$(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2 = \frac{1}{15a^2 T^2} [-8a^5 + 10a^3(c^2 \tau^2 - T^2)$$

$$+ 10a^2(c^2 \tau^3 - T^3) - 15a(c^2 \tau^2 - T^2)c^2 \tau^2 + (c\tau - T)^2(4c^3 \tau^3 + 8c^2 \tau^2 T + 2c\tau T^2 + T^3)].$$

Zur Berechnung von  $J_1$  bedürfen wir ferner noch des Integrals:

$$\int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{\Theta_1} \frac{2c\tau x}{a} \sin \Theta d\Theta = \frac{\xi}{T} \cdot 4\pi \cdot c\tau \cdot \int_0^{\Theta_1} \sin \Theta \cos \Theta d\Theta = \frac{2\pi c\tau \xi}{T} \sin^2 \Theta_1,$$

was sich leicht ergibt, wenn man den Wert von  $x$  aus der ersten Gleichung (63) einsetzt und  $r = a$  nimmt. Da  $\cos \Theta_1$  durch Gleichung (73<sup>a</sup>) gegeben war, so wird:

$$\sin^2 \Theta_1 = \frac{c^2 \tau^2 - T^2}{4a^2 T^2} [4ac\tau + T^2 - c^2 \tau^2 - 4a^2].$$

Schließlich ergibt sich:

$$J_1 = \Phi_{2x}(t, t),$$

wenn jetzt die Funktion  $\Phi_{2x}$  durch folgende Gleichung definiert wird:

$$(75) \quad \Phi_{2x}(a, t) = \frac{3\varepsilon c}{8a} \int_0^{\xi} \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2 + c\tau \sin^2 \Theta_1] d\tau,$$

wo nun für  $U_1$ ,  $U_2$  und  $\sin^2 \Theta_1$  die obigen Werte einzusetzen sind; unter dem Integralzeichen wird dann:

$$(75^a) = \frac{1}{60a^2 T^2} [-32a^5 + 40a^3(c^2 \tau^2 - T^2) - 20a^2(c\tau - T)^2(c\tau + 2T) + (c\tau - T)^4(c\tau + 4T)].$$

Herr Schott macht mich noch darauf aufmerksam, daß die Auswertung des Integrales  $J_1$  sich etwas einfacher gestaltet, wenn man die Substitution:

$$R = + \sqrt{a^2 + T^2 + 2 a T \cos \Theta},$$

also:

$$\frac{\sin \Theta d \Theta}{R} = - \frac{d R}{a T}$$

ausführt. Es wird dann:

$$(75^a) \quad \Phi_{2x}(a, t) = \frac{3 \varepsilon c}{16 a^3} \int_{\tau_0}^a \frac{\xi d \tau}{T^3} \int_{c \tau - a}^{T+a} [a^2 - (c \tau - R)^2] [R^2 - a^2 - T^2] d R,$$

man vermeidet also das Rechnen mit den Quadratwurzeln.

Auch in den Untersuchungen über die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit ist der Nenner 8 in Gleichung (123) und den daraus folgenden Gleichungen durch 16 zu ersetzen. Die Gleichungen (128) lauten also:

$$(128) \quad \begin{aligned} \Phi_{0x}(a, t) &= \frac{\varepsilon c^2}{20 a^3} \int_0^a \frac{\xi \tau}{T^3} G_0(c \tau, T) d \tau, \\ \Phi_{1x}(a, t) &= \frac{3 \varepsilon c^2}{16 a^3} \int_0^a \frac{\xi \tau}{T^3} G_1(c \tau, T) d \tau, \end{aligned}$$

wo die ganzen Funktionen  $G_0$  und  $G_1$  in der früheren Weise definiert sind. Auch in der Funktion  $\Phi_{2x}$  ist überall mit 2 zu dividieren; wir haben also an Stelle von (135) schließlich:

$$(135) \quad \Phi_{2x}(a, t) = \frac{3 \varepsilon c}{8 a} \int_{\tau_1}^a \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) W_1 - W_2 + 2 c \tau W_0] d \tau.$$

### § 19. Gleichförmige geradlinige Bewegung.

(Ergänzung zu § 12.)

Auf Grund der verbesserten Formeln für die Integrale  $\Phi_x$  müssen wir das Beispiel der gleichförmigen Bewegung (§ 12) nochmals kurz behandeln. Nach (162) ist jetzt  $T = v \tau$  zu setzen, und dann wird:

$$(163) \quad \begin{aligned} \Phi_{1x}(a, t) &= \frac{\varepsilon c v}{20 a^3} \int_0^a \tau [(v^2 + 5 c^2) \tau^2 - 10 a^2] d \tau \\ &= \frac{\varepsilon c v}{20 a^3} \left[ (v^2 + 5 c^2) \frac{a^4}{4} - 5 a^2 a^2 \right], \end{aligned}$$

worin  $a = t$  zu setzen ist.

Für  $\Psi_{1xt}$  erhalten wir aus Gleichung (108) den Wert:

$$\Psi_{1xt}(t, t) = \frac{\varepsilon c v t}{16 a^3} [16 a^3 - 12 a^2 c t + c(c^2 + v^2) t^3].$$

Gemäß (118), § 9 finden wir sonach für die wirkende Kraft  $\tilde{\mathfrak{F}}_x$  die Relation:

$$(164) \quad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \tilde{\mathfrak{F}}_x = -\Phi_{1x} - \frac{1}{c} \Psi_{1xt} = -\varepsilon \omega a \left[ \frac{ct}{a} - \left( \frac{ct}{a} \right)^2 + \frac{5+3\omega^2}{40} \left( \frac{ct}{a} \right)^4 \right],$$

und diese Gleichung ist für die erste und zweite Lage, d. h. in dem ersten Intervalle:

$$0 < t < \frac{2a}{v+c}$$

anwendbar. Die Kraft ist für kleine Werte von  $t$  negativ; für größere Werte hat man die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$40(1-x) + (5+3\omega^2)x^3 = 0$$

zu untersuchen. Das Produkt der Wurzeln ist negativ, die Summe ist Null; es müssen also zwei positive (oder imaginäre) Wurzeln und eine negative Wurzel vorhanden sein. Für  $x=1$  ist die linke Seite positiv.

Setzen wir  $x = \frac{2}{1+\omega}$ , so wird die linke Seite gleich:

$$-\frac{8\omega}{(1+\omega)^3} (5-8\omega-5\omega^2),$$

also negativ für:

$$\omega < \omega_0, \quad \text{wenn:} \quad \omega_0 = \frac{1}{5} (\sqrt{41} - 4).$$

Dieser Wert  $\omega_0$  ist kleiner als die Einheit, kann also vorkommen. Zwischen 0 und  $\frac{2}{1+\omega}$  liegt demnach für  $\omega < \omega_0$  immer eine Wurzel der kubischen Gleichung; diese Wurzel bestimmt diejenige Zeit, wo die Kraft aufhört verzögernd zu wirken, indem sie ihr Vorzeichen ändert, so daß von nun ab die Wirkung des Elektrons auf sich selbst zunächst beschleunigend ist. Der Differentialquotient der linken Seite verschwindet für  $x = \sqrt{\frac{40}{3} \frac{1}{5+3\omega^2}}$ ; dieser Wert ist für  $\omega^2 < 1$  stets größer als  $\frac{2}{1+\omega}$ ; die zweite positive Wurzel ist also größer als der letztere Wert und kommt deshalb nicht in Betracht. Für  $\omega > \frac{5}{3} (> \omega_0)$  sind diese Wurzeln imaginär.

Für  $t = \frac{a}{c}$ , d. h. am Ende der ersten Lage wird:

$$\tilde{\mathfrak{F}}_x \left( \frac{a}{c} \right) = -\frac{3\varepsilon^2 \omega}{4\pi a^2} \cdot \frac{3+5\omega^2}{40},$$

und am Ende der zweiten Lage:

$$(166) \quad \tilde{\mathfrak{F}}_x \left( \frac{2a}{c+v} \right) = \frac{+6\varepsilon^2 \omega^2}{4\pi a^2 (1+\omega)^4} (1 - \frac{5}{3}\omega - \omega^2),$$

d. h. negativ für  $\omega < \omega_0$ , positiv für  $\omega > \omega_0$ .

Für die dritte Lage ist  $t^0 < t < t'$ , wo:

$$t^0 = \frac{2a}{c+v}, \quad t' = \frac{2a}{c-v}.$$

Wir haben die in (78), § 18 gegebene Funktion  $\Phi_{2x}$  für den Fall  $\xi = T = v\tau$  zu berechnen. Es wird:

$$\Phi_{2x}(a, t) = \frac{3 \varepsilon c}{540 v^2 a^3} \int_0^a \left[ -32 \frac{a^5}{\tau^2} + 40 a^3 (c^2 - v^2) - 20 a^2 (c - v)^2 (c + 2v) \tau + (c - v)^4 (c + 4v) \tau^3 \right] d\tau,$$

ferner nach (112):

$$\Psi_{2xt}(a, t) = -\frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^a G(v\tau, c\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

wo nun nach (110):

$$G(v\tau, c\tau) = a^4 (\omega - 1) \left[ -\frac{4}{3} \frac{c\tau}{a} + (1 - \omega) \left( \frac{c\tau}{a} \right)^2 - \frac{1}{12} (1 - \omega)^3 \left( \frac{c\tau}{a} \right)^4 \right].$$

Die Ausführung ergibt:

$$(167^a) \quad \Phi_{2x}(t, t) = \frac{\varepsilon a}{40 \omega^2} \left[ 4 \left\{ \frac{2a}{ct} - (1 + \omega) \right\} + 20 (1 - \omega)^2 \left\{ \frac{ct}{2a} - \frac{1}{(1 + \omega)} \right\} \right. \\ \left. - 10 (1 - \omega)^3 (1 + 2\omega) \left\{ \left( \frac{ct}{2a} \right)^2 - \frac{1}{(1 + \omega)^2} \right\} + (1 - \omega)^4 (1 + 4\omega) \left\{ \left( \frac{ct}{2a} \right)^4 - \frac{1}{(1 + \omega)^4} \right\} \right]$$

$$(167^b) \quad \Psi_{2x}(t, t) = \frac{\varepsilon a}{40 \omega^2} \left[ -40 (1 - \omega) \omega^2 \left\{ \frac{ct}{2a} - \frac{1}{(1 + \omega)} \right\} \right. \\ \left. + 30 (1 - \omega)^2 \omega^2 \left\{ \left( \frac{ct}{2a} \right)^2 - \frac{1}{(1 + \omega)^2} \right\} - 5 (1 - \omega)^4 \omega^2 \left\{ \left( \frac{ct}{2a} \right)^4 - \frac{1}{(1 + \omega)^4} \right\} \right].$$

Für die wirkende Kraft finden wir so in der dritten Lage gemäß (118<sup>a</sup>) den Ausdruck:

$$(168) \quad \mathfrak{F}_x = + \frac{3 \varepsilon^2 \omega^2}{2 \pi a^2 (1 + \omega)^4} \left( 1 - \frac{8}{5} \omega - \omega^2 \right) \\ - \frac{3 \varepsilon^2}{160 \pi a^2 \omega^2} \left[ 4 \left\{ \frac{2a}{ct} - (1 + \omega) \right\} + 20 (1 - \omega)^2 (1 + 2\omega) \left\{ \frac{ct}{2a} - \frac{1}{(1 + \omega)} \right\} \right. \\ \left. - 10 (1 - \omega)^3 (1 + 3\omega) \left\{ \left( \frac{ct}{2a} \right)^2 - \frac{1}{(1 + \omega)^2} \right\} + (1 - \omega)^4 (1 + 5\omega) \left\{ \left( \frac{ct}{2a} \right)^4 - \frac{1}{(1 + \omega)^4} \right\} \right]$$

und diese Gleichung gilt in dem oben bezeichneten Intervalle, nämlich:

$$\frac{1}{1 + \omega} < \frac{ct}{2a} < \frac{1}{1 - \omega}.$$

Liegt  $t$  in der Nähe der unteren Grenze des Intervalls, so überwiegt das erste Glied der eckigen Klammer, letztere vergrößert also die verzögernde Wirkung der Kraft.

Für die vierte Lage ( $t > \frac{2a}{c-v}$ ) ist endlich Gleichung (118<sup>b</sup>) anzuwenden, d. h. es ist  $t$  durch den konstanten Wert  $\frac{2a}{c-v}$  zu ersetzen, der den Beginn der vierten Lage bestimmt; die Kraft wird also stationär. Ihr konstanter Wert aber ergibt sich (das ist das durch die sorgfältigen Rechnungen des Herrn Schott festgestellte Resultat) gleich Null; wir haben nämlich:



$$\begin{aligned} & \Phi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right) + \frac{1}{c} \Psi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right) \\ &= \frac{\varepsilon a}{5\omega} \left[ -1 + 5(1+2\omega) \frac{1-\omega}{1+\omega} - 5(1+3\omega) \frac{1-\omega}{(1+\omega)^2} + (1+5\omega) \frac{(1-\omega)(1+\omega^2)}{(1+\omega)^4} \right] \\ &= \frac{2\varepsilon a \omega^2}{(1+\omega)^4} \left( 1 - \frac{8}{5}\omega - \omega^2 \right), \end{aligned}$$

also genau gleich dem negativen Wert des Ausdrucks:

$$\Phi_1\left(\frac{2a}{c+v}\right) + \frac{1}{c} \Psi_1\left(\frac{2a}{c+v}\right),$$

so daß die Summe zu Null wird:

$$(169^a) \quad \mathfrak{F}_x(t) = 0 \quad \text{für } t \geq \frac{2a}{c-v}.$$

Nach Ablauf der Zeit  $\frac{2a}{c-v}$ , vom Beginne der Bewegung ab gerechnet, ist also die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft, stationär und zwar gleich Null geworden.<sup>1)</sup> Dabei ist vorausgesetzt, daß das Elektron bei Beginn der Bewegung seine Ladung erhält (also gewissermaßen erst geschaffen wird); für den stationären Zustand kann dieser Anfangszustand keinen Einfluß haben; in der Tat werden wir bei anderer Annahme über denselben im folgenden Paragraphen zu dem gleichen Resultate kommen, und dann die weiteren Folgerungen besprechen.

Für den stationären Zustand stimmt also das hier gewonnene Resultat mit dem von Abraham und Sommerfeld erhaltenen überein. Das ist aber (im Sinne der Rechnung) nur zufällig: alle anderen von uns gewonnenen Resultate bleiben von denjenigen Sommerfelds vollkommen verschieden. Es mag dies hier nochmals an dem Beispiele der Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit gezeigt werden.

Nach der Sommerfeldschen Formel wäre in diesem Falle für jede endliche Zeit  $t$  die Kraft gleich (vgl. oben § 16):

$$-\frac{9\varepsilon^2 c}{8\pi^2 a^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} dx dy dz - \frac{9\varepsilon^2 v}{8\pi^2 a^4} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty d\tau \iiint \frac{S}{R} dx dy dz,$$

und zwar ist das erste Glied bei Sommerfeld aus derjenigen Funktion durch angeblich erlaubte Umformungen entstanden, die wir mit  $\Phi_{1x} + \Phi_{2x}$  bezeichnet haben; es wäre also nach Sommerfeld:<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Dadurch wird die auf Seite 321 der früheren Arbeit angestellte Überlegung nicht ungültig: dieselbe bezieht sich auf die einzelnen Potentiale  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$ ; es tritt aber jetzt das Resultat hinzu, daß sich die Wirkungen der beiden einzelnen Potentiale gerade aufheben.

<sup>2)</sup> Bei ihm steht  $t + t_0$  ursprünglich anstatt  $t$  als obere Grenze; indem er  $t_0 = \infty$  nimmt, verlegt er den Beginn der Bewegung in eine unendlich weit zurückliegende Zeit; für den hier besonders in Betracht kommenden stationären Zustand ist aber die Wahl des Anfangszustandes ohne Einfluß.

$$\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t) = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} dx dy dz \right) d\tau$$

und:

$$\frac{1}{c} (\Psi_{1x}(\tau^0) + \Psi_{2x}(t)) = -\frac{v^2}{c^2} (\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t)) + \frac{3 \varepsilon v}{2 \pi^2 a^3} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \left( \iiint \frac{S}{R} dx dy dz \right) d\tau.$$

Dieselbe Formel ist von Abraham in seinem Werke abgeleitet worden. Hier wäre nun:

$$\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t)$$

und:

$$\Psi_{1x}(\tau^0) + \Psi_{2x}(t)$$

nach der Sommerfeldschen Darstellung je für sich gleich Null.<sup>1)</sup> Diese Resultate sollen für alle endlichen Zeiten gelten, und insbesondere für  $t = \infty$ , d. h. für  $t > \frac{2a}{c-v}$ . Dann ist aber nach obigen Gleichungen (163) und (167<sup>a</sup>):

$$\begin{aligned} \Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}\left(\frac{2a}{c-v}\right) &= \Phi_{1x}\left(\frac{2a}{c+v}\right) + \Phi_{2x}\left(\frac{2a}{c-v}\right) \\ &= -\frac{2\varepsilon a \omega^2}{(1+\omega)^4} (1 + \frac{2}{3}\omega) + \frac{\varepsilon a}{5\omega} \left[ -1 + 5\frac{1-\omega}{1+\omega} - 5\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2 (1+2\omega) + \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2 (1+\omega^2)(1+4\omega) \right], \end{aligned}$$

und hier zeigt schon der erste, von  $\omega^{-1}$  abhängige, Term, daß die Summe nicht gleich Null sein kann. Ebenso wenig kann die Summe  $\Psi_{1x}(\tau^0) + \Psi_{2x}(t)$  für endliche oder unendliche Werte von  $t$  verschwinden; es wird vielmehr:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left[ \Psi_{1x}\left(\frac{2a}{c+v}\right) + \Psi_{2x}\left(\frac{2a}{c-v}\right) \right] &= \frac{2\varepsilon a \omega^3}{(1+\omega)^4} (2 + \omega^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon a (1-\omega)}{10(1+\omega)} \left[ -2 + 3\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right) - 10\omega^4 \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^3 (1+\omega^2) \right]. \end{aligned}$$

Auch die ursprüngliche Abrahamsche Ableitung der Gleichung für den stationären Zustand kommt darauf hinaus, daß diese beiden einzelnen Ausdrücke für  $t = \infty$  verschwinden (während dies tatsächlich nicht eintritt, sondern nur ihre Summe gleich Null ist); denn nach ihm würde die Kraft für  $t = \infty$  in unserer Bezeichnungsweise durch die Funktion:

$$-\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} [\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t)]_{t=\infty} (1 - \omega^2)$$

dargestellt sein müssen.

Was endlich die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit betrifft ( $\omega = 1$ ), so wird jetzt nach (164):

$$(170) \quad (\ddot{x})_{\omega=1} = -\frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2} \frac{ct}{a} \left( 1 - \frac{ct}{a} + \frac{1}{5} \left( \frac{ct}{a} \right)^3 \right) \quad \text{für } t < \frac{2a}{c+v},$$

und nach (166) am Ende der zweiten Lage:

<sup>1)</sup> Vgl. Göttinger Nachrichten, 1904, S. 398 ff.

$$= -\frac{3 \varepsilon^2}{20 \cdot \pi \cdot a^2},$$

also in diesem Momente negativ, wie es nach unseren allgemeinen Überlegungen sein muß, wenn  $\omega$  (hier = 1)  $> \omega_0$  ist. Endlich nach (168):

$$(170^a) \quad (\ddot{x})_{\omega=1} = -\frac{3 \varepsilon^2}{20 \cdot \pi \cdot a^2} - \frac{3 \varepsilon^2}{20 \cdot \pi \cdot a^2} \left( \frac{a}{ct} - 1 \right) = -\frac{3 \varepsilon^2}{20 \pi a^2} \frac{a}{ct} \quad \text{für } t > \frac{2a}{c+v},$$

also in der Tat gleich Null für  $t = \infty$ , wie es sein muß, da die obere Grenze des dritten Intervalls  $\left( = \frac{2a}{c-v} \right)$  selbst unendlich groß wird. Beim Beginne einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ist also die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft nach (170) verzögernd; und diese Kraft bleibt dauernd verzögernd, indem sie umgekehrt proportional der Zeit abnimmt.

### § 20. Die Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit bei der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand.

In § 15 hatten wir die Modifikationen betrachtet, die an den vorhergehenden Untersuchungen anzubringen sind, wenn man die Voraussetzung über den Anfangszustand dahin abändert, daß das Elektron, welches zur Zeit  $t = 0$  die Bewegung beginnt, schon vorher seit beliebig langer Zeit seine Ladung besaß, so daß schon bei Beginn der Bewegung ein elektrisches Feld im ganzen Raume vorhanden war. In diesem Falle hatten wir eine Größe  $t_0$  durch die Gleichung (198):

$$(T_0)_{t=t_0} + 2a = ct_0$$

zu bestimmen, in der  $T_0$  den Wert von  $T$  für  $\tau = t$  bezeichnet, und dann gelten die früheren Formeln, wenn nur die obere Grenze  $t$  der nach  $\tau$  zu nehmenden Integrale durch  $t + t_0$  ersetzt wird. Diese positive Größe  $t_0$  war dadurch so bestimmt, daß die vor der Zeit  $t = -t_0$  vom Elektron ausgehenden Kraftwirkungen auf die spätere Bewegung desselben keinen Einfluß mehr ausüben.

Um die einzelnen Intervalle zu bestimmen, hatten wir zunächst die Kurve (200):

$$c\tau + T = 2a,$$

wenn wieder die frühere geometrische Darstellung benutzt wird, mit der geraden Linie (202):

$$\tau = t + t_0$$

zum Schnitt zu bringen, indem letztere an Stelle der früheren Linie  $\tau = t$  tritt. Dies gab den Endpunkt des ersten Intervalles (Ende der zweiten Lage), während der Endpunkt des zweiten Intervalles durch die Kurve (206):

$$c\tau - T = 2a$$

in entsprechender Weise zu bestimmen war.

Bei Anwendung dieser Formeln ist für die Berechnung von  $T$  zu beachten, daß:

$$\xi = \int_{t-\tau}^t v_x(\tau) d\tau = \int_0^t v_x(\tau) d\tau$$

zu nehmen ist, sobald  $\tau > t$  wird; denn die Geschwindigkeit  $v_x$  ist gleich Null für negative Werte des Arguments.

Wenden wir dies auf das Beispiel der gleichförmigen Bewegung an, so wird:

$$(240) \quad \begin{aligned} \xi &= T = v\tau \quad \text{für } 0 < \tau < t \\ \xi &= T = vt \quad \text{, } t < \tau < t + t_0. \end{aligned}$$

Die Kurve (73<sup>a</sup>) oder (200) wird daher:

$$(241) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c+v} (= t^0) \quad \text{für } \tau < t \\ \tau &= -\frac{v}{c}t + \frac{2a}{c} \quad \text{, } \tau > t. \end{aligned}$$

Ersteres ist eine Parallele zur Achse  $\tau = 0$ , letzteres eine Gerade, die erstere in ihrem Schnittpunkte mit der Linie  $\tau = t$  trifft, und die Achse  $t = 0$  im Punkte  $\tau = \frac{2a}{c}$  schneidet; sie ist in beistehender Figur 18 durch  $P_1$  bezeichnet. Ebenso gibt obige Kurve (206) jetzt:

$$(242) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c-v} (= t') \quad \text{für } \tau < t \\ \tau &= \frac{v}{c}t + \frac{2a}{c} \quad \text{, } \tau > t. \end{aligned}$$

Letztere Linie ( $P_2$  in Fig. 18) schneidet die Linie  $P_1$  in ihrem Schnittpunkte mit der Achse  $t = 0$  und trifft die Linie  $\tau = t$  in demselben Punkte, durch den auch die Gerade  $\tau = t'$  hindurchgeht. Die Kurven (200) und (206) erhalten also jetzt in ihren Schnittpunkten mit der Linie  $\tau = t$  einen Knick, wie es Figur 18 veranschaulicht, während ich bei der früheren Behandlung diese Knickung nicht beachtet hatte. Diese Abänderung wird bei der Kleinheit des Intervalles  $0 < t < t_0$  nicht von großem Einfluß sein, gewinnt aber im Falle der gleichförmigen Bewegung doch prinzipielle Wichtigkeit.

Der Schnitt der Linie  $P_1$  (d. h. der zweiten Linie (240)) mit der Geraden  $\tau = t + t_0$  ergibt als Grenze des ersten Intervalles den Wert:

$$t^0 = \frac{2a}{v+c} - \frac{t_0 c}{v+c} = \frac{2a}{v+c} \left(1 - \frac{c}{c-v}\right),$$

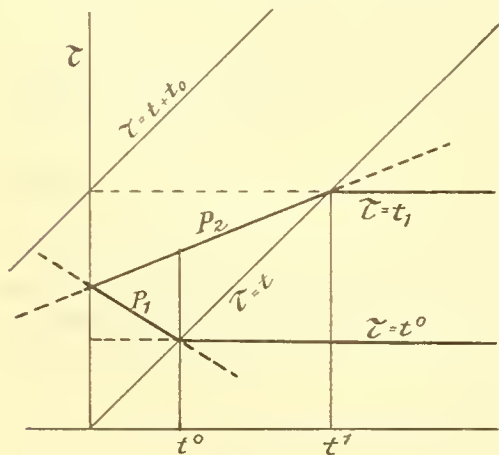


Fig. 18.

denn es ist hier nach (198), wie früher in § 15,  $t_0 = \frac{2a}{c-v}$  zu setzen. Dieser Wert ist negativ und kommt daher nicht in Betracht.

Das Ende des zweiten Intervalls (der dritten Lage) wird gefunden, indem wir die Linie  $P_2$  (zweite Linie (242)) mit der Linie  $\tau = t + t_0$  zum Schnitt bringen; das gibt:

$$t' = \frac{2a}{c-v} \left( 1 - \frac{c}{c-v} \right),$$

also ebenfalls negativ, und für uns nicht brauchbar.

Die früheren Formeln des dritten Intervalls sind also (bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand) sofort bei Beginn der Bewegung anzuwenden, wie wir auch in § 15 gefunden hatten. Es ist also:

$$(243) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \left[ \Phi_1(\tau^0) + \Phi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0) + \frac{1}{c} \Psi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right) \right]$$

für alle Werte von  $t$ .

Aber bei Auswertung der rechts stehenden Integrale ist die verschiedenartige Definition von  $\tau^0$  ( $\tau < t$  und  $\tau > t$ ) zu beachten: und dadurch ergibt sich die Notwendigkeit wieder verschiedene Fälle und Zeitintervalle zu unterscheiden.

Es ist allgemein nach (71) und (197):

$$\varphi_x = \Phi_x(t, t) + \Phi'_x(t + t_0, t),$$

wenn wir setzen:

$$(244) \quad \begin{aligned} \Phi_x(t, t) &= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^t d\tau \iiint \frac{S}{R} dx dy dz, \\ \Phi'_x(t + t_0, t) &= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_t^{t+t_0} d\tau \iiint \frac{S}{R} dx dy dz. \end{aligned}$$

Das erste Integral stimmt vollständig mit demjenigen überein, das wir oben mit Hilfe der Funktion  $\Phi_{1x}$  und  $\Phi_{2x}$  auswerteten; das Integral  $\Phi'$  dagegen bedarf erneuter Behandlung, indem für den Fall der gleichförmigen Bewegung unter den Integralzeichen  $T$  nicht gleich  $v\tau$ , sondern gemäß (240) gleich  $vt$  gesetzt werden muß. Wir haben demnach folgende Reihe von Intervallen:

**Erstes Intervall**  $0 < t < \frac{2a}{c+v}$  ( $= t^0$ ). Wir erhalten aus Gleichung (68), § 18:

$$\Phi'_x(a, t) = \Phi'_{1x}(a, t) = \frac{\varepsilon c}{20 a^3} \int_t^a v t (v^2 t^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2) d\tau,$$

wenn  $a$  kleiner als der durch die zweite Gleichung (241) bestimmte Wert:

$$(245) \quad \tau^{00} = -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c}$$

ist; denn für das Intervall  $t < \tau < t + t_0$  wird die Grenze der Anwendbarkeit der Formel (68), § 18 jetzt durch diese Gleichung (241) bestimmt, d. h. in Figur 18 durch die gerade Linie  $P_1$ . Für unsern Fall kann also  $\tau$  bis zu dieser Grenze wachsen, so daß wir erhalten:

$$(246) \quad \Phi'_x(\tau^{00}, t) = \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) = \frac{\varepsilon c v t}{20 a^3} \int_t^{\tau^{00}} (v^2 t^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2) d\tau,$$

wo  $\tau^{00}$  durch (245) definiert wird. Die Linie  $P_1$  wird aber nur für  $t < t^0$  von der in der Entfernung  $t$  zur  $\tau$ -Achse gezogenen Parallelen innerhalb des von den Geraden  $\tau = t$  und  $\tau = -\frac{v}{c}t + \frac{2a}{c}$  begrenzten Streifens getroffen. Die Anwendbarkeit der Formel (246) bleibt daher auf das bezeichnete erste Intervall beschränkt. Die Ausführung der Integration ergibt:

$$\frac{\varepsilon c v t}{20 a^3} [(\tau^{00} - t)(v^2 t^2 - 10 a^2) + \frac{5}{3} c^2 (\tau^{003} - t^3)].$$

oder:

$$(247) \quad \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) = \frac{\varepsilon \omega}{15} \left( \frac{c t}{a} \right) \left[ 1 - (1 + \omega) \frac{c t}{2 a} \right] \left[ (16 \omega^2 - 10 \omega + 10) \left( \frac{c t}{2 a} \right)^2 + 10(1 - 2 \omega) \frac{c t}{2 a} - 5 \right].$$

Es ist bemerkenswert, daß dieser Ausdruck für:

$$\frac{c t}{2 a} = \frac{1}{1 + \omega}.$$

d. h. an der oberen Grenze des Intervalles verschwindet.

Wächst jetzt bei der Integration (von  $\tau = 0$  bis  $\tau = t + t_0$ ) die Variable  $\tau$  über  $\tau^{00}$  hinaus, so haben wir die Formel (175), § 18 anzuwenden; es ist:

$$\Phi'_x(a, t) = \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) + \Phi'_{2x}(a, t).$$

wenn gemäß obigem Resultate:

$$(248) \quad \Phi'_{2x}(a, t) = \frac{3 \varepsilon c}{8 a} \int_{\tau^{00}}^a \frac{\xi}{T} [(a^2 - c^2 \tau^2) U_1 - U_2 + c \tau \sin^2 \Theta_1] d\tau$$

gesetzt wird, oder nach (75<sup>a</sup>), § 18 unter Berücksichtigung der zweiten Gleichung (240):

$$(249) \quad \Phi'_{2x}(a, t) = \frac{3 \varepsilon c}{480 a^3 v^2 t^2} \int_{\tau^{00}}^a \left[ -32 a^5 + 40 a^3 (c^2 \tau^2 - v^2 t^2) - 20 a^2 (c \tau - v t)^2 (c \tau + 2 v t) \right. \\ \left. + (c \tau - v t)^4 (c \tau + 4 v t) \right] d\tau.$$

Zum Zwecke der Integration schreiben wir die eckige Klammer in der Form:

$$-32 a^5 + 80 a^3 v t (c \tau - v t) + 40 a^3 (c \tau - v t)^2 - 20 a^2 (c \tau - v t)^3 \\ - 60 a^2 v t (c \tau - v t)^2 + 5 v t (c \tau - v t)^4 + (c \tau - v t)^5,$$

und die unbestimmte Integration ergibt:

$$(249^a) \quad \frac{1}{c} \left[ -32 a^5 (c \tau - v t) + 40 a^3 v t (c \tau - v t)^2 + \frac{1}{3} (40 a^3 - 60 a^2 v t) (c \tau - v t)^3 \right. \\ \left. - 5 a^2 (c \tau - v t)^4 + v t (c \tau - v t)^5 + \frac{1}{6} (c \tau - v t)^6 \right].$$

Die Variable  $\tau$  kann bis zu dem durch die zweite Gleichung (242) bestimmten Werte:

$$(250) \quad \tau_{01} = \omega t + \frac{2a}{c}$$

wachsen: geht ihr Wert darüber hinaus, so verschwindet das Integral gemäß den allgemeinen Erörterungen in § 7. In  $\Phi'_{2x}$  ist daher als obere Grenze für  $a$  der Wert  $\tau_{01}$  einzusetzen; als untere Grenze ist  $\tau^{00}$  gegeben. Nun haben wir:  $\tau_{01} - \omega t = \frac{2a}{c}$ ; für die obere Grenze erhalten wir also:

$$\begin{aligned} & \frac{2a^6}{c} \left[ -32 + 160 \omega \frac{ct}{2a} + \frac{160}{3} \left( 1 - 3 \omega \frac{ct}{2a} \right) - 40 + 32 \omega \frac{ct}{2a} + \frac{16}{3} \right] \\ & = -\frac{16a^6}{3c} \left( 5 - 12 \omega \frac{ct}{2a} \right) = \frac{a^6}{c} \cdot \gamma_1 \left( \omega \frac{ct}{a} \right) \end{aligned}$$

und für die untere Grenze, da:

$$\tau^{00} - \omega t = -2 \omega t + \frac{2a}{c}$$

zu nehmen ist:

$$\begin{aligned} & \frac{2a^6}{c} \left( 1 - \omega \frac{ct}{a} \right) \left[ -32 + 80 \omega \frac{ct}{a} \left( 1 - \omega \frac{ct}{a} \right) + \frac{160}{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \omega \frac{ct}{a} \right) \left( 1 - \omega \frac{ct}{a} \right)^2 \right. \\ & \left. - 40 \left( 1 - \omega \frac{ct}{a} \right)^3 + 16 \omega \frac{ct}{a} \left( 1 - \omega \frac{ct}{a} \right)^4 + \frac{16}{3} \left( 1 - \omega \frac{ct}{a} \right)^5 \right] = \frac{a^6}{c} \cdot \gamma_2 \left( \omega \frac{ct}{a} \right). \end{aligned}$$

Führen wir für die hier auftretenden ganzen Funktionen die angedeuteten abkürzenden Bezeichnungen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ein, so wird:

$$(251) \quad \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) = \frac{3 \varepsilon a}{480 \omega^2 \left( \frac{ct}{a} \right)^2} \left[ \gamma_1 \left( \omega \frac{ct}{a} \right) - \gamma_2 \left( \omega \frac{ct}{a} \right) \right].$$

Man sieht sofort, daß bei weiterer Ausrechnung das Glied mit  $\omega^{-2}$  den Faktor Null erhält: für kleine Werte von  $\omega$  überwiegt also das Glied mit  $\omega^{-1} \left( \frac{ct}{a} \right)^{-1}$ . Es ist hiernach die in (244) eingeführte Funktion  $\Phi'_x$  gegeben durch die Gleichung:

$$(252) \quad \Phi'_x(t + t_0, t) = \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) + \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) \quad \text{für } 0 < t < \frac{2a}{c + v},$$

wo  $\Phi'_{1x}$  durch (247),  $\Phi'_{2x}$  durch (251) bestimmt wird.

Zur Berechnung der Kraft haben wir die Funktionen  $\Psi_{1x}$  und  $\Psi_{2x}$  entsprechend zu behandeln. Nach (97) und (107) ist:

$$\Psi_x(a, t) = \frac{3 \varepsilon}{2 \pi^2 a^3} \int_0^a v_x(t - \tau) d\tau \iiint \left( \frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \frac{dx dy dz}{R},$$

wo  $\left( \frac{\partial S}{\partial \tau} \right)$  durch die Gleichungen (96), (96<sup>a</sup>), (96<sup>b</sup>) definiert ist. Da aber  $v_x(t - \tau)$  gleich Null zu nehmen ist, sobald  $\tau > t$  wird (da dann das Elektron ruht), so ist stets:

$$(253) \quad \Psi_x(a, t) = \Psi_x(t, t) \quad \text{für } a > t.$$

Das Integral  $\Psi_x$  hat deshalb bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand denselben Wert wie früher; derselbe ist in § 12 für den Fall der konstanten Unterlichtgeschwindigkeit genau berechnet. Für die wirkende Kraft erhalten wir so im ersten Intervalle die Gleichung:

$$(254) \quad \delta_x = -\frac{3 \varepsilon^2}{4 \pi^2 a^3} \left[ \Phi_{1x}(t, t) + \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) + \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) + \frac{1}{c} \Psi_{1x}(t, t) \right]$$

für  $0 < t < \frac{2a}{c+v}$ ;

hierbei ist  $\Phi_{1x}$  durch (163), § 18,  $\Phi'_{1x}$  durch (247),  $\Phi'_{2x}$  durch (251),  $\tau^{00}$  durch (245),  $\tau_{01}$  durch (250),  $\Psi_{1x}$  durch (163<sup>a</sup>), § 18 gegeben: das erste Argument der Funktion  $\Psi_{1x}$  ist dadurch bestimmt, daß für diese Funktion nach (253) die früheren Formeln gelten, und wir uns im früheren Sinne jetzt im ersten Intervalle befinden.

Zweites Intervall  $t^0 < t < t'$ , wo wieder:

$$t^0 = \frac{2a}{c+v}, \quad t' = \frac{2a}{c-v}.$$

Eine Parallele zur Achse  $t=0$  schneidet jetzt die Strecke  $P_1$  nicht mehr; aber die Linie  $\tau = t^0$  kommt jetzt in Betracht und bestimmt für die frühere Funktion  $\Phi_{1x}$  und  $\Phi_{2x}$  die sie trennende Grenze. Die Kraft wird demnach:

$$(255) \quad \delta_x = -\frac{3 \varepsilon}{4 \pi^2 a^3} \left[ \Phi_{1x}(t^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) + \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) - \Phi'_{2x}(t, t) \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \Psi_{1x}(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_{2x}(t, t) \right] \quad \text{für} \quad \frac{2a}{c+v} < t < \frac{2a}{c-v}.$$

Die Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  sind hier so, wie in (254) definiert,  $\Phi_{2x}$  und  $\Psi_{2x}$  durch (167<sup>a</sup>) bzw. (167<sup>b</sup>), § 18. Das Integral  $\Phi'_{2x}$  hatte in (251) die untere Grenze  $\tau^{00}$ ; jetzt wird statt dessen, wie aus Figur 18 hervorgeht, die untere Grenze  $t$  gebraucht; deshalb tritt die Differenz  $\Phi'(\tau_{01}) - \Phi'(t)$  auf. Nach (249<sup>a</sup>) ist  $\Phi'(t)$  bis auf eine additive Konstante, die in der Differenz herausfällt, gleich:

$$\frac{3 \varepsilon a}{480 \omega^2} \left( \frac{a}{ct} \right)^2 \cdot \gamma_3 \left( \frac{ct}{a} \right).$$

wenn:

$$\gamma_3 \left( \frac{ct}{a} \right) = (1 - \omega) \left( \frac{ct}{a} \right) \left[ -32 + 40 \omega \left( \frac{ct}{a} \right)^2 (1 - \omega) + \frac{40}{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \omega \frac{ct}{a} \right) \left( \frac{ct}{a} \right)^2 (1 - \omega)^2 \right. \\ \left. - 5 \left( \frac{ct}{a} \right)^3 (1 - \omega)^3 + \omega \left( \frac{ct}{a} \right)^5 (1 - \omega)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{ct}{a} \right)^5 (1 - \omega)^5 \right];$$

es wird dann:

$$(256) \quad \Phi'_{2x}(\tau_{01}) - \Phi'_{2x}(t) = \frac{3 \varepsilon a}{480 \omega^2} \left( \frac{ct}{a} \right)^2 \left[ \gamma_1 \left( \omega \frac{ct}{a} \right) - \gamma_3 \left( \frac{ct}{a} \right) \right].$$



Das in  $\gamma_3$  vorkommende Glied mit dem Faktor  $\omega^{-2}$  hebt sich hier nicht gegen ein entsprechendes Glied in  $\gamma_1$  fort; denn das in  $\gamma_1$  vorkommende Glied mit dem Faktor  $\omega^{-2}$  ist von  $t$  unabhängig, das entsprechende Glied in  $\gamma_3$  aber enthält den Faktor  $\frac{ct}{a}$ .

**Drittes Intervall**  $t > t'$ . Hier wird eine Parallele zur Achse  $t = 0$  innerhalb des zwischen den Linien  $\tau = t$  und  $\tau = t + t_0$  liegenden Parallelstreifens von den Geraden  $P_1$  und  $P_2$  nicht mehr getroffen (vgl. Fig. 18). Hier gelten also die früheren, in § 18 aufgestellten Relationen, und die Funktionen  $\Phi'_1$  und  $\Phi'_2$  kommen nicht mehr in Betracht. Es wird nach (169<sup>a</sup>), § 18:

$$(257) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3} \left[ \Phi_{1x} \left( \frac{2a}{c+v} \right) + \Phi_{2x} \left( \frac{2a}{c-v} \right) + \frac{1}{c} \Psi_{1x} \left( \frac{2a}{c+v} \right) + \frac{1}{c} \Psi_{2x} \left( \frac{2a}{c-v} \right) \right] \\ = 0 \quad \text{für } t > \frac{2a}{c-v}.$$

Im stationären Zustand erfolgt also auch bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand die Bewegung kräftefrei.

Will man aber von der Elektronenbewegung Anwendungen auf die Mechanik machen, um letztere elektrodynamisch aufzufassen, so handelt es sich immer um den Übergang aus der Ruhelage zur Bewegung; nach unseren Resultaten wirken bei Beginn der Bewegung stets verzögernde Kräfte des Elektrons auf sich selbst. Da wir kein Mittel haben, diese Kraft willkürlich aufzuheben, so geschieht also eine Bewegung, die etwa eine sehr kleine Zeit mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt ist, im nächsten Momente schon mit anderer Geschwindigkeit; es kann also in Wirklichkeit der stationäre kräftefreie Zustand niemals zustande kommen.

Man könnte einwerfen, daß es überhaupt keine ruhenden Elemente gibt, indem die gewöhnliche Mechanik nur von relativer Ruhe spricht, hier aber absolute Ruhe (für  $t < 0$ ) vorausgesetzt wurde. Das ist allerdings richtig; aber dann erfolgen die Bewegungen schwerlich mit konstanter Geschwindigkeit; wenn dies aber doch geschehen sollte, so hätte die Dynamik die Aufgabe, den Einfluß einer Geschwindigkeitsänderung zu untersuchen, und da würde sich sofort in ganz analoger Weise ergeben, daß das Elektron dabei eine verzögernde Kraft auf sich selbst ausübt.

Ganz analoge Schwierigkeiten ergeben sich, wenn man den elektrischen Strom als eine Elektronenbewegung mit konstanter Geschwindigkeit auffassen will; denn man sieht nicht ein, wie eine solche Bewegung zustande kommt. Bei dem Sommerfeldschen Resultate dagegen, nach welchem eine kräftefreie Bewegung von Anfang an (d. h. von  $t = -\infty$  an) bestehen sollte, hätte man sich vorstellen können, daß die erwähnte Schwierigkeit zu überwinden sei. Überdies ist zu beachten, daß jene Sommerfeldschen Formeln für die elektrischen und magnetischen Kräfte je für sich nicht die richtigen Ausdrücke ergeben (vgl. § 19).

Die Zeit, während welcher die anfängliche verzögernde Kraft wirkt, ist allerdings bei geringen Geschwindigkeiten außerordentlich klein  $\left( = \frac{2a}{c-v} \right)$ , aber bei größeren Werten von  $v$  (wie z. B. beim elektrischen Strome) wird ihre Dauer beträchtlich. Auch

die Kraft, die als Funktion von  $\frac{ct}{a}$  und von  $\omega = \frac{v}{c}$  gefunden wurde, ist nicht zu vernachlässigen, da sie negative Potenzen von  $\omega$  und  $t$  enthält, wie aus den Gleichungen (255) und (256) hervorgeht.

Es bleibt noch zu vergleichen, wie sich die Sommerfeldschen Formeln bei dem jetzt betrachteten Anfangszustand verhalten. Wie schon hervorgehoben wurde (vgl. § 16) stimmt seine Fundamentalformel, aus der alles andere durch scheinbar zulässige Operationen abgeleitet wird, mit unserer Gleichung (34), § 3 wesentlich überein. Diese Gleichung aber bezieht sich ausschließlich auf den von uns zuerst vorausgesetzten Anfangszustand, also für gleichförmige Bewegung, auf den soeben in § 19 behandelten Fall. Die jetzt in § 20 (und früher in § 15) gemachte (physikalisch näher liegende) Voraussetzung über den Anfangszustand wird daher von Sommerfeld in seiner ursprünglichen Arbeit nicht behandelt; darauf bezieht sich aber die spätere Fortsetzung.<sup>1)</sup> Hier wird die Bedingung  $T = v\tau$  für  $\tau < t$  und  $T = vt$  für  $\tau > t$  eingeführt, also die jetzige zweite Voraussetzung berücksichtigt; für dieselbe wird auch eine verzögernde Kraft gefunden; da aber seine allgemeine Ausgangsformel (nach den von ihm vorgenommenen Umformungen) mit der unsrigen nicht übereinstimmt, so sind natürlich auch seine Resultate von den unsrigen verschieden.

Die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit erhält man, indem man in vorstehenden Formeln  $\omega = 1$  setzt. Dann wird die durch (250) dargestellte Linie  $P_2$  (Fig. 18) parallel zur Linie  $\tau = t$ , und der Einfluß des Anfangszustandes dauert für alle Zeiten fort; die Größe  $t_0$  wird unendlich groß: die Linie  $\tau = t + t_0$  verschiebt sich also ins Unendliche, und wir kommen so niemals aus dem zweiten Intervalle heraus, in welchem eine von  $t$  abhängige verzögernde Kraft gemäß Gleichung (255) dauernd wirkt.

### § 21. Die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit.

Ebenso wie bei Unterlichtgeschwindigkeit ist bei Überlichtgeschwindigkeit in den Integralen  $\Phi_1^*$  und  $\Phi_2^*$  überall der Faktor 2 in Nenner hinzuzufügen, also insbesondere in den Gleichungen (123), (126), (127), (128) und (135), vgl. S. 342. Dasselbe gilt dann für das Beispiel der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit in § 13; wir erhalten jetzt:

$$(171) \quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t) + \Phi_{1x}^*(t) = \frac{\varepsilon a}{20 \omega^2} \left( \frac{ct}{2a} \right)^2 \left[ (10 - 30 \omega^2) + (23 - 14 \omega^2 + 15 \omega^4) \left( \frac{ct}{2a} \right)^2 \right]$$

und am Ende der ersten Lage den Wert:

$$(172) \quad \varphi_x \left( \frac{2a}{v+c} \right) = \frac{\varepsilon a}{20 \omega^2 (1+\omega)^4} (33 + 20 \omega - 34 \omega^2 - 60 \omega^3 - 15 \omega^4),$$

und für die wirkende Kraft in der ersten Lage erhalten wir den Wert:

$$(174) \quad \bar{\delta}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left( \varphi_x + \frac{1}{c} \dot{\varphi}_x \right) = -\frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2 \omega^2} \left[ 2 \omega^3 \left( \frac{ct}{2a} \right) + \frac{1}{2} (1 - 6 \omega^2 - 3 \omega^4) \left( \frac{ct}{2a} \right)^2 + \frac{1}{20} (23 - 9 \omega^2 + 45 \omega^4 + 5 \omega^6) \left( \frac{ct}{2a} \right)^4 \right].$$

<sup>1)</sup> Göttinger Nachrichten 1905, S. 201 ff.

In (175<sup>a</sup>) und (175<sup>b</sup>) ist auf der rechten Seite wieder der Nenner 2 hinzuzufügen. Da die Berechnung der Kraft nicht weiter durchgeführt wurde, so wird an den weiteren Formeln von § 13 nichts geändert.

Geht man von der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand aus, so beginnt die Bewegung in der dritten Lage, so daß sofort vom Beginne ab die entsprechenden Gleichungen zur Anwendung kommen. Es ist die früher für den stationären Endzustand anzuwendende Formel. Die Ausführung der Integration muß aber jetzt in etwas anderer Weise geschehen, ganz wie es für Uterlichtgeschwindigkeit in § 20 soeben erörtert wurde. Entsprechend zu den Gleichungen (240) haben wir:

$$(258) \quad \begin{aligned} \xi &= T = v \tau \quad \text{für } 0 < \tau < t \\ \xi &= T = v t \quad , \quad t < \tau < t + t_0, \quad \text{wo } t_0 = \frac{2a}{v-c}, \end{aligned}$$

und die kritischen Kurven werden:

$$(259) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c+v} (= t^0) \quad \text{für } \tau < t \\ \tau &= -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c} \quad , \quad \tau > t; \end{aligned}$$

sie liegen ganz analog, wie die entsprechenden in Figur 18; nur ist jetzt  $\frac{v}{c} > 1$ , die Neigung gegen die  $t$ -Achse also größer als 45°. Die wirkende Kraft wird, analog zu (254), gleich folgendem Ausdrucke gefunden, wie sogleich näher erörtert werden soll:

$$(260) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_{0x}'(t, t) + \Phi_{1x}'(t, t) + \Phi_{0x}''(\tau^{00}, t) - \Phi_{0x}''(t, t) \right. \\ &+ \left. \Phi_{1x}''(\tau^{00}, t) - \Phi_{1x}''(t, t) + \Phi_{2x}''(t + t_0, t) - \Phi_{2x}''(\tau^{00}, t) + \frac{1}{c} \Psi_{1x}'(t, t) \right]. \end{aligned}$$

Die Glieder mit den Funktionen  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_0', \Phi_1', \Psi_1$  sind nach Analogie zu (254) sofort verständlich: aus den Gleichungen (128) ergeben sich folgende Definitionen, indem man dort  $T = vt$  setzt und jetzt unter  $\tau^{00}$  den aus der zweiten Gleichung (259) fließenden Wert:

$$(261) \quad \tau^{00} = -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c}$$

versteht (vgl. S. 280 und 342):

$$(262) \quad \begin{aligned} \Phi_{0x}''(a, t) &= \frac{\varepsilon c^2}{20 a^3 v^2 t^2} \int_0^a \tau [6c^4 \tau^4 - 10a^2 c^2 \tau^2 + (c^2 \tau^2 - v^2 t^2)(15ac\tau - 4c^2 \tau^2)] d\tau \\ \Phi_{1x}''(a, t) &= \frac{3\varepsilon c^2}{16 a^3 v^2 t^2} \int_0^a \tau (v^2 t^2 - c^2 \tau^2)(vt + c\tau - 2a)(vt - c\tau + 2a) d\tau. \end{aligned}$$

Um das Glied mit  $\Phi_{2x}''$  zu begründen, müssen wir zunächst die zweite kritische Kurve in ihrem Verlaufe innerhalb des Parallelstreifens ( $\tau = t$  und  $\tau = t + t_0$ ) untersuchen; ihre Gleichung  $T - c\tau = 2a$  wird hier:

$$(263) \quad vt - c\tau = 2a.$$

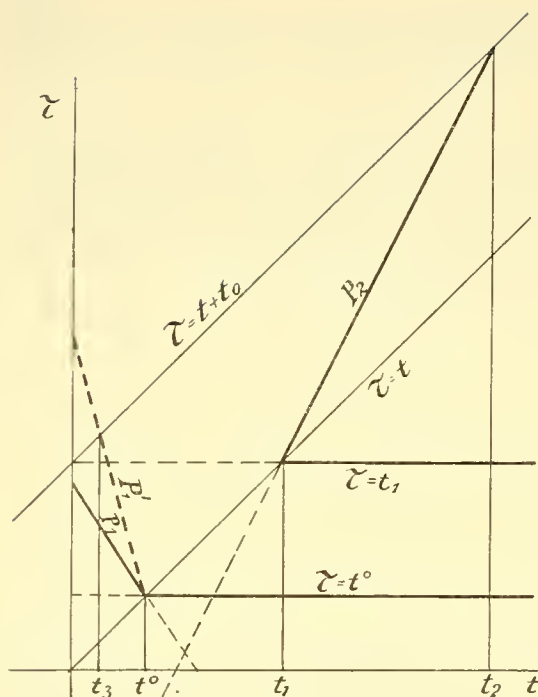


Fig. 19.

eingeschlossen. Für  $t < t^0$  kommt daher für  $\tau$  das Intervall von  $\tau^{00}$  bis  $t + t_0$  in Betracht, wie aus der erwähnten Figur sofort ersichtlich ist; und zwar ist das Integral  $\Phi_{2x}^*$  hier durch folgende Gleichung definiert:

$$(265) \quad \Phi_{2x}^*(a, t) - \Phi_{2x}^*(\beta, t) = \frac{3 \varepsilon c}{8 a} \int_{\beta}^a [(a^2 - c^2 \tau^2) W_1^* - W_2^* + 2 c \tau W_0^*] d\tau,$$

wobei nach (134) (134<sup>e</sup>) zu setzen ist.

$$W_0^* = \frac{c^2 \tau^2 - v^2 t^2}{8 a^2 v^2 t^2} [c^2 \tau^2 - v^2 t^2 + 4 a^2 + 4 a c \tau],$$

$$(266) \quad W_1^* = \frac{1}{6 a^2 v^2 t^2} [2(a^2 + v^2 t^2 + a v t) \sqrt{(a - v t)^2} - \{3 a^2 + 3 v^2 t^2 - (a + c \tau)^2\} (a + c \tau)],$$

$$W_2^* = \frac{1}{30 a^2 v^2 t^2} [2(a^2 + v^2 t^2 + 3 a v t) (\sqrt{(a - v t)^2})^3 - (a + c \tau)^3 \{5(a^2 + v^2 \tau^2) - 3(a + c \tau)^2\}],$$

wenn über das Vorzeichen der Quadratwurzel in der sogleich zu besprechenden Weise verfügt wird.

Um das Gültigkeitsintervall der Formel (260) genau festzustellen, muß man noch die Fälle:

$$c < v < 2c \quad \text{und} \quad v > 2c$$

unterscheiden. Im ersten Falle ( $c < v < 2c$ ) liegt die Gerade  $P_1$  so, wie in Figur 19 die stark angezogene Linie; sie schneidet die Achse  $t = 0$  zwischen den Punkten  $\tau = \frac{2a}{c+v} = t^0$

Sie stellt eine gerade Linie dar, welche in Fig. 19 mit  $P_2$  bezeichnet ist; sie schneidet die Achse  $t = 0$  im Punkte  $\tau = -\frac{2a}{c}$  und die Linie  $\tau = t$  im Punkte  $\tau = t = \frac{2a}{v-c}$ , die Achse  $\tau = 0$  im Punkte  $t = \frac{2a}{v} > \frac{2a}{v+c}$ ; sie verläuft also ganz unterhalb der Linie  $\tau = t$  für  $0 < t < \frac{2a}{v-c}$ ; erst für  $t > \frac{2a}{v-c}$  tritt sie in den Streifen zwischen den Parallelen  $\tau = t$  und  $\tau = t + t_0$  ein, der für uns jetzt in Betracht kommt. Nun liefert nach unseren allgemeinen Erörterungen in § 10 das Integral  $\Phi_2^*$  einen von Null verschiedenen Beitrag nur in dem Gebiete, der  $\tau$ - $t$ -Ebene, in welchem:

$$(264) \quad T + c\tau > 2a, \quad T - c\tau < 2a$$

ist. Dieses Gebiet ist in unserem Falle zwischen den Linien  $P_1$  und  $P_2$  (und den Linien  $\tau = t$  und  $\tau = t + t_0$ ) in Figur 19

und  $\tau = \frac{2a}{v-c}$ . In diesem Falle gilt die Formel (260) für das ganze Intervall  $0 < t < \frac{2a}{c+v}$ .

Im anderen Falle ( $v > 2c$ ) schneidet die Linie  $P_1$  (d. i. die punktierte Linie  $P'_1$  in Fig. 19) die Achse  $t = 0$  oberhalb der Stelle  $\tau = \frac{2a}{v-c}$ ; sie trifft deshalb die Linie  $\tau = t + t_0$  in dem Punkte:

$$(267) \quad \tau = \frac{4av}{v^2 - c^2}, \quad t = \frac{2a(v-2c)}{v^2 - c^2} \quad (= t_3),$$

welcher auf der Seite  $t > 0$  liegt und deshalb zu berücksichtigen ist. Da nun die Integration ursprünglich gemäß (244) bis zur Grenze  $t + t_0$  ausgedehnt werden soll, und da jetzt ein Teil der Linie  $\tau = t + t_0$  noch unterhalb der Linie  $P_1$  liegt, so haben wir an Stelle von (260), wenn der Index  $x$  an  $\Phi$  und  $\Psi$  fortgelassen wird:

$$(268) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi'_0(t, t) + \Phi'_1(t, t) + \Phi''_0(t + t_0, t) - \Phi''_0(t, t) \right. \\ \left. + \Phi'_1(t + t_0, t) - \Phi'_1(t, t) + \frac{1}{c} \Psi'_1(t, t) \right] \quad \text{für } 0 < t < t_3,$$

wo  $t_3$  durch (267) definiert ist, und:

$$(269) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi'_0(t, t) + \Phi'_1(t, t) + \Phi''_0(\tau^{00}, t) - \Phi''_0(t, t) + \Phi'_1(\tau^{00}, t) - \Phi'_1(t, t) \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \Psi'_1(t, t) + \Phi''_2(t + t_0, t) - \Phi''_2(\tau^{00}, t) \right] \quad \text{für } t_3 < t < t^0.$$

Diese beiden Gleichungen gelten im zweiten Falle ( $v > 2c$ ) an Stelle der Gleichung (260).

Es erübrigt noch das Vorzeichen der in den Ausdrücken  $W_1^*$  und  $W_2^*$  gemäß (266) vorkommenden Quadratwurzel zu bestimmen. Für  $t < t^0$  ist:

$$vt + ct < 2a, \quad \text{also} \quad vt < 2a.$$

Demgemäß zerfällt das Intervall  $0 < t < t^0$ , in dem die Gleichung (260) gilt, in zwei Teile; für  $0 < t < \frac{a}{v}$  ist in (266) der Ausdruck  $\sqrt{(a-vt)^2}$  gleich  $vt - a$  zu setzen, dagegen für  $\frac{a}{v} < t < t^0$  ist derselbe Ausdruck gleich  $a - vt$  zu wählen (vgl. die allgemeine Erörterung hierüber auf S. 283). Im zweiten Falle ( $v > 2c$ ) ist in gleicher Weise das Intervall, in welchem die Gleichung (268) gilt, in zwei Teilintervalle zu zerlegen oder dasjenige für Gleichung (269), und zwar je nachdem  $\omega$  außerhalb oder innerhalb der Werte  $2 \pm \sqrt{3}$  liegt.

Zwischen den Linien  $t = t^0$  und  $t = t_1$  liegen die Linien  $P_1$  und  $P_2$  ganz innerhalb des Gebietes  $\tau < t$ , kommen also nicht in Betracht und wir erhalten (vgl. Figur 19):

$$(270) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = & -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_0^*(t^0, t) + \Phi_1^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(t^0, t) + \Phi_2^{*\prime}(t + t_0, t) - \Phi_2^{*\prime}(t, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t) - \frac{1}{c} \Psi_2^*(t^0, t) \right] \quad \text{für } (t^0 \Rightarrow) \frac{2a}{c+v} < t < \frac{2a}{v-c} (= t_1). \end{aligned}$$

Wächst  $t$  über den Wert  $t_1$  hinaus, so tritt die Linie  $P_2$  in den Parallelstreifen zwischen den Linien  $\tau = t$  und  $\tau = t + t_0$  ein; sie ist daher mit zu berücksichtigen; sie zeigt uns, wie der Einfluß des Anfangszustandes allmählich verschwindet. Wir müssen jetzt den Wert von  $\tau$ , welcher sich aus der Gleichung der Linie  $P_2$ , d. h. aus (263), ergibt:

$$(271) \quad \tau_{01} = \frac{v}{c} t - \frac{2a}{c},$$

in die Integralgrenze von  $\Phi_2^*$  einführen und finden:

$$(272) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = & -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_0^*(t^0, t) + \Phi_1^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t_1, t) - \Phi_2^*(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t^0, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t_1, t) - \frac{1}{c} \Psi_2^*(t^0, t) + \Phi_2^{*\prime}(t + t_0, t) - \Phi_2^{*\prime}(\tau_{01}, t) \right] \quad \text{für } t_1 < t < \frac{2av}{(v-c)^2} (= t_2), \end{aligned}$$

denn in dem Punkte  $t = \frac{2av}{(v-c)^2}$  wird die Linie  $\tau = t + t_0$  von der Linie  $P_2$  geschnitten.

Hier tritt letztere aus dem für uns wichtigen Parallelstreifen heraus; es verschwindet somit der Einfluß der Anfangslage ganz und wir erhalten:

$$(273) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = & -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_0^*(t^0, t) + \Phi_1^*(t^0, t) + \Phi_2^*(t_1, t) - \Phi_2^*(t^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t^0, t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t_1, t) - \frac{1}{c} \Psi_2^*(t^0, t) \right] \quad \text{für } t > \frac{2av}{(v-c)^2}. \end{aligned}$$

In diesem Intervalle erhalten wir eine konstante Kraft, da bei konstanter Geschwindigkeit die Funktionen  $\Phi^*$  und  $\Psi^*$  von ihrem zweiten Argumente unabhängig sind (anders  $\Phi_1^{*\prime}$  und  $\Phi_2^{*\prime}$ ).

## § 22. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung bei der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand.

Wie soeben in § 20 die gleichförmige Bewegung unter Annahme des zweiten (in § 15) besprochenen Anfangszustandes genauer behandelt wurde, so ist in gleicher Weise jeder andere Fall zu erledigen; es sei das hier noch an dem Beispiele der gleichförmig beschleunigten Bewegung gezeigt. Analog zu (240) haben wir hier gemäß Gleichung (179):

$$(274) \quad \begin{aligned} \xi = T = & (v + q t) \tau - \frac{1}{2} q \tau^2 \quad \text{für } 0 < \tau < t, \\ \xi = T = & (v + q t) t - \frac{1}{2} q t^2 \quad \text{für } t < \tau < t + t_0. \end{aligned}$$

Dabei ist  $t_0$  gemäß der Gleichung (198) durch den Wert (212) gegeben. Die kritischen Kurven sind also, analog wie in (241):

für  $\tau < t$  die Hyperbel  $H_1$  in Figur 14, dargestellt durch die Gleichung (181<sup>b</sup>):

$$(275) \quad q\tau^2 - 2q\tau t - 2(c+v)\tau + 4a = 0,$$

und für  $t < \tau < t + t_0$  die Kurve:

$$(275^a) \quad qt^2 + 2vt + 2c\tau - 4a = 0.$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach  $\tau$  gibt den Wert  $\tau^{00}$ , den wir jetzt an Stelle von obigem Werte (245) zu benutzen haben, nämlich:

$$(276) \quad \tau^{00} = -\frac{1}{2c}(qt^2 + 2vt - 4a).$$

Die Gleichung (275<sup>a</sup>) stellt eine Parabel dar, welche die Achse  $t$  im Punkte  $\tau = \frac{2a}{c}$  trifft, und die Achse  $\tau = 0$  in den Punkten:

$$t = -\frac{v}{q} \pm \sqrt{\frac{v^2}{q^2} + \frac{2a}{q}};$$

letztere sind reell: sie trifft die Linie  $\tau = t$  in denselben Punkten wie die Hyperbel  $H_1$ ; wir haben:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{q}{c}t - \frac{v}{c}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{q}{c};$$

der Scheitel der Parabel liegt also an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = \frac{2a}{c} + \frac{v^2}{2cq};$$

die Kurve ist gegen die Achse  $\tau = 0$  konkav gekrümmt; in Figur 20 ist sie mit  $P_1$  bezeichnet: sie tritt an Stelle der geraden Linie  $P_1$  in Figur 18.

Die andere kritische Kurve ist analog zu (242) aufzustellen, nämlich:

für  $0 < \tau < t$  die Hyperbel  $H_2$  in Figur 14:

$$(277) \quad q\tau^2 - 2qt\tau + 2(c-v)\tau - 4a = 0$$

und für  $t < \tau < t_0 + t$  die Parabel:

$$(277^a) \quad qt^2 + 2vt + 4a - 2c\tau = 0.$$

Die Auflösung ergibt den Wert  $\tau_{01}$ :

$$(278) \quad \tau_{01} = \frac{1}{2c}(qt^2 + 2vt + 4a).$$

Diese Parabel ( $P_2$  in Figur 20) trifft die Linie  $\tau = t$  in denselben Punkten wie die Hyperbel  $H_2$  und schneidet die Achse  $t = 0$  in demselben Punkte, wie die Parabel  $P_1$ . Sie ist konvex gegen die Achse  $\tau = 0$  gekrümmt; ihr Scheitel liegt an der Stelle:

$$(279) \quad t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = \frac{2a}{c} - \frac{v^2}{2cq}.$$

Für uns kommen nur die Teile derselben in Betracht, welche zwischen den beiden Parallelen  $\tau = t$  und  $\tau = t + t_0$  gelegen sind.

Innerhalb dieses Streifens ist aber auch die Grenze zwischen Unter- und Überlichtgeschwindigkeit neu zu bestimmen; sie ist für  $\tau < t$  durch die gerade Linie (180) gegeben,

für  $\tau > t$  dagegen durch die Gleichung, welche entsteht, wenn man den zweiten Ausdruck für  $T$  aus (274) in die Gleichung  $T = c\tau$  einsetzt, d. h. durch die Gleichung:

$$(280) \quad c\tau = vt + \frac{1}{2}qt^2.$$

Es ist dies eine Parabel, welche durch den Anfangspunkt geht, welche die Linie  $\tau = t$  im Schnittpunkte mit der durch (180) dargestellten Linie  $L$ , d. h. im Punkte:

$$(281) \quad \tau = t = 2 \frac{c-v}{q} + t_0$$

trifft, und deren Scheitel an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{cq}$$

gelegen ist; sie ist in Figur 20 mit  $L'$  bezeichnet. Die Parabeln (280) und (277<sup>a</sup>) haben dieselbe Achse; sie schneiden sich nicht (berühren sich im Unendlichen von der dritten Ordnung); die Parabel  $P_2$  verläuft demnach ganz im Gebiete der Unterlichtgeschwindigkeit.

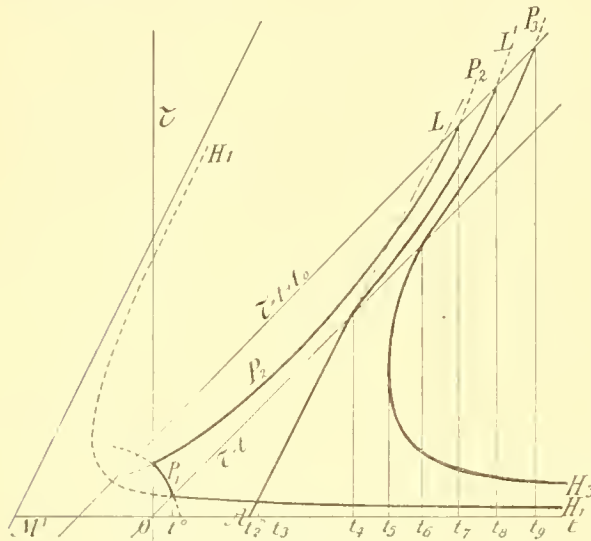


Fig. 20.

Die Parabeln  $P_1$  und  $P_2$  schneiden sich dagegen, und zwar auf der  $\tau$ -Achse, in dem Punkte:

$$t = 0, \quad \tau = \frac{2a}{c}.$$

Das von diesen Parabeln und der Linie  $\tau = t$  gebildete Dreieck spielt hier ganz dieselbe Rolle, wie in Figur 18 das von derselben Linie und den dortigen Linien  $P_1$  und  $P_2$  gebildete Dreieck.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß die Schnittpunkte der Hyperbel  $H_2$  mit der Geraden  $\tau = t$  imaginär seien; dann schneidet auch die Parabel  $P_2$  diese Gerade nicht, und wir erhalten deren Verlauf wie in Figur 20. Die Kräfte werden in den einzelnen Intervallen:

$$(282) \quad \delta_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_1(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(t, t) + \Phi_1(\tau^{00}, t) - \Phi_1(t, t) + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(\tau^{00}, t) \right]. \quad \text{für } 0 < t < t^0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Funktionen  $\Psi$  wegen des bei ihnen unter dem Integralzeichen auftretenden Faktors  $v_x(t - \tau)$  jetzt in ganz der gleichen Weise auftreten, wie vorher bei der früheren Voraussetzung über den Anfangszustand; es ist das ganz ebenso, wie in § 20. Die Gleichung (282) ist der Gleichung (254) genau analog gebildet. Es ist also  $\Phi_1'$  gemäß (244) dadurch bestimmt, daß in die allgemeine Gleichung (68), § 18 für  $T$  der Wert aus der zweiten Gleichung (274) eingesetzt wird, den wir mit  $T_0$  bezeichnen wollen:



$$(283) \quad T_0 = v t + \frac{1}{2} q t^2;$$

es ist also:

$$(284) \quad \begin{aligned} \Phi_1'(a, t) - \Phi_1'(t, t) &= \frac{\varepsilon c}{20 a^3} \int_t^a T_0 (T_0^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2) d\tau \\ &= \frac{\varepsilon c}{20 a^3} [(T_0^3 - 10 a^2 T_0) (a - t) + \frac{5}{3} c^2 T_0 (a^3 - t^3)]. \end{aligned}$$

Ebenso entsteht  $\Phi_2'$  aus dem allgemeinen Ausdrucke (75), § 18, indem man dort  $T$  überall durch den Wert  $T_0$  ersetzt; wir haben demnach, analog zu (249):

$$(285) \quad \begin{aligned} \Phi_2'(a, t) - \Phi_2'(\beta, t) &= \frac{\varepsilon c}{160 a^3 T_0^2} \int_\beta^a [-32 a^5 + 40 a^3 (c^2 \tau^2 - T_0^2) - 20 a^2 (c\tau - T_0)^2 (c\tau + 2 T_0) \\ &\quad + (c\tau - T_0)^4 (c\tau + 4 T_0)] d\tau. \end{aligned}$$

Bei Ausführung der Integration kann man dieselbe Umformung benutzen, wie oben in (249): die eckige Klammer unter dem Integralzeichen ist gleich:

$$\begin{aligned} &- 32 a^5 + 80 a^3 T_0 (c\tau - T_0) + 40 a^3 (c\tau - T_0)^2 - 20 a^2 (c\tau - T_0)^3 \\ &- 60 a^2 T_0 (c\tau - T_0)^2 + 5 T_0 (c\tau - T_0)^4 + (c\tau - T_0)^5; \end{aligned}$$

es wird also:

$$\begin{aligned} \Phi_2'(a, t) - \Phi_2'(\beta, t) &= \frac{\varepsilon}{160 a^3 T_0^2} [-32 a^5 c (a - \beta) + 40 a^3 T_0 \{(c a - T_0)^2 - (c \beta - T_0)^2\} \\ &\quad + \frac{1}{3} (40 a^3 - 60 a^2 T_0) \{(c a - T_0)^3 - (c \beta - T_0)^3\} \\ &\quad - 5 a^2 \{(c a - T_0)^4 - (c \beta - T_0)^4\} + T_0 \{(c a - T_0)^5 - (c \beta - T_0)^5\} \\ &\quad + \frac{1}{6} \{(c a - T_0)^6 - (c \beta - T_0)^6\}]. \end{aligned}$$

Im nächsten Intervalle ist die Parabel  $P_1$  durch die Hyperbel  $H_1$  zu ersetzen; für das Integrationsintervall  $\tau^0 < \tau < t$  kommt jetzt auch die Funktion  $\Phi_2$  bzw.  $\Psi_2$  zur Anwendung, wo  $\Phi_2$  durch (75), § 18,  $\Psi_2$  durch (112), § 8 gegeben ist, und wir finden:

$$(286) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(t, t) \right], \quad \text{für } t^0 < t < t_2. \end{aligned}$$

Die Hyperbel  $H_2$  und der Wert  $\tau_1$  kommen hier nicht zur Geltung, da diese Hyperbel ganz außerhalb des Gebietes  $\tau < t$  liegt, wenn ihre Schnittpunkte mit der Linie  $\tau = t$ , wie wir jetzt annehmen, imaginär sein sollen. Für das nächste Intervall kommen die der Überlichtgeschwindigkeit entsprechenden Funktionen zur Anwendung; wir haben, analog zu (188):

$$(287) \quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^*, t) + \Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t) \\ &\quad + \frac{1}{c} [\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] + \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(t, t) \\ &\quad + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(t, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3. \end{aligned}$$

Hierbei ist der Wert  $\tau^*$  wieder durch Gleichung (185), § 14 definiert.

Für das nächste Intervall kommt es auf den durch (192), § 14 definierten Wert:

$$t_4 = 2 \frac{c-v}{q} \quad (\text{in § 14 mit } t_6 \text{ bezeichnet})$$

an; er liegt bei imaginären Schnittpunkten der Hyperbel  $H_1$  mit der Linie  $\tau = t$  zwischen  $t_3$  und  $t_5$  (vgl. S. 305): es wird also:

$$(288) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau^*, t) \\ + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau^*, t) + \Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t) \\ + \frac{1}{c} [\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(t, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_4.$$

Im nächsten Intervalle ist nun die Linie  $L$  oberhalb der Linie  $\tau = t$  durch die Parabel  $L'$  zu ersetzen, die hier die Grenze zwischen Unter- und Überlichtgeschwindigkeit angibt; wir setzen entsprechend der Gleichung (280):

$$(289) \quad \tau_0^* = \frac{v}{c} t + \frac{1}{2} \frac{q}{c} t^2;$$

dann wird (wenn  $t_5$  wie oben in (190<sup>a</sup>) definiert wird):

$$(290) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t) \\ + \Phi_2'^*(\tau_0^*, t) - \Phi_2'(t, t) + \Phi_2^*(\tau_{01}, t) - \Phi_2^*(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_5.$$

Die zu Anfang bestandene Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit macht sich also nur noch in den Gliedern  $\Phi_2^*$  geltend, welche von dem Anfangszustande herrühren. Für das Intervall  $t < \tau < \tau_0^*$  kommt jetzt auch die Funktion  $\Phi_2'^*$  in Betracht, welche aus  $\Phi_2^*$  entsteht, wenn man  $T$  durch  $T_0$  ersetzt: es ist also  $\Phi_2'^*$  durch (265) gegeben, wenn dort folgende Werte für die Größen  $W^*$  eingesetzt werden:

$$W_1^* = \frac{c^2 \tau^2 - T_0^2}{8 a^2 T_0^2} [c^2 \tau^2 - T_0^2 + 4 a^2 - 4 a c \tau]$$

$$W_2^* = \frac{1}{6 a^2 T_0^2} [2(a^2 + T_0^2 + a T_0)(T_0 - a) - \{3 a^2 + 3 T_0^2 - (a + c \tau)^2\} (a + c \tau)]$$

$$W_3^* = \frac{1}{30 a^2 T_0^2} [2(a^2 + T_0^2 + 3 a T_0)(T_0 - a)^3 - (a + c \tau)^3 \{5(a^2 + T_0^2) - 3(a + c \tau)^2\}].$$

Aber auch in der Gleichung der kritischen Kurve (142) ist jetzt  $T$  durch  $T_0$  zu ersetzen; die Hyperbel  $H_3$ , welche für  $\tau < t$  zu berücksichtigen war und deren Gleichung in (189) vorlag, ist also für  $\tau > t$  durch die Parabel:

$$(291) \quad c \tau = v t + \frac{1}{2} q t^2 - 2 a$$

zu ersetzen, welche (in Figur 20 mit  $P_3$  bezeichnet) durch den Schnittpunkt der Hyperbel  $H_3$  mit der Linie  $\tau = t$  hindurchgeht. Oberhalb dieser Kurve ist  $T_0 - c \tau < 2 a$ : deshalb kommt in Gleichung (297) nun das Intervall  $\tau_0^* < \tau < \tau_5$  in Betracht, wobei  $\tau_5$  durch (291), d. h. durch die Gleichung:

$$(292) \quad \tau_3 = \frac{v}{c} t + \frac{1}{2} \frac{q}{c} t^2 - \frac{2a}{c}$$

definiert ist.

Für die nächsten Intervalle kommen als charakteristische Grenzen neben  $t_6$  nur noch die Schnittpunkte der Linie  $\tau = t + t_0$  mit den Parabeln  $P_2$ ,  $L'$  und  $P_3$  in Betracht; wir finden für den Schnittpunkt mit  $P_2$ :

$$(293) \quad t_7 = -\frac{v+c}{q} + \sqrt{\left(\frac{v+c}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q} \frac{v}{c-v}},$$

für den Schnittpunkt mit  $L'$ :

$$(294) \quad t_8 = \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q} \frac{c}{c-v}}$$

und für den Schnittpunkt mit  $P_3$ :

$$(295) \quad t_9 = -\frac{v+c}{q} + \sqrt{\left(\frac{v+c}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q} \frac{2c-v}{c-v}}.$$

Wird zunächst  $t > t_6$ , so kommen die zwei Punkte in Betracht, in denen eine Parallele zur  $\tau$ -Achse von der Hyperbel  $H_3$  getroffen wird; sie sind durch die Werte  $\tau_3$  und  $\tau_4$  in (190) gegeben: es wird also:

$$(296) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \delta_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t) + \frac{1}{c} [\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\ + \Phi_2^*(\tau_0^*, t) - \Phi_2^*(t, t) + \Phi_2^*(\tau_{01}, t) - \Phi_2^*(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_5 < t < t_6.$$

Wird  $t > t_6$ , so tritt nun die Funktion  $\Phi_2^*$  mit dem Argumente  $\tau_4$  wieder zurück, und wir finden:

$$(297) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \delta_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_0^*, t) - \Phi_2^*(\tau_3, t) + \Phi_2^*(\tau_{01}, t) - \Phi_2^*(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_6 < t < t_7,$$

wo  $t_7$  durch (293) definiert wird, und weiter:

$$(298) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \delta_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(\tau_0^*, t) - \Phi_2^*(\tau_5, t) + \Phi_2^*(t+t_0, t) - \Phi_2^*(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_7 < t < t_8,$$

wo  $t_8$  durch (294) gegeben ist; dann:

$$(299) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \delta_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \\ + \Phi_2^*(t+t_0) - \Phi_2^*(\tau_5, t) \quad \text{für } t_8 < t < t_9,$$

wenn  $t_9$  gemäß (295) bestimmt wird. Hier, also nach Ablauf der Zeit  $t_8$ , ist der Einfluß der anfänglichen Unterlichtgeschwindigkeit nicht mehr bemerkbar. Endlich wird:

$$(300) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \delta_x = \Phi_0^*(x^0, t) + \Phi_1^*(x^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(x^0, t) + \Phi_2^*(x_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(x_3, t) \quad \text{für } t > t_9.$$

Nach Ablauf der durch Gleichung (295) bestimmten Zeit  $t_9$  ist also der Einfluß des Anfangszustandes auf die Bewegung des Elektrons ganz verschwunden; denn die Gleichung (300) ist mit (194<sup>d</sup>) vollkommen identisch. Die Parabel  $P_3$  wird hier in ähnlicher Weise benutzt, wie die Gerade  $P_2$  bei der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit in Figur 19, indem ihr Verlauf das allmähliche Verschwinden des Einflusses angibt, den der Anfangszustand auf die Bewegung ausübt.

Wenn man annimmt, daß die Linie  $\tau = t$  von der Hyperbel  $H_3$  in reellen Punkten getroffen wird, so kommen auch die in (183) gegebenen Werte  $t_1$  und  $t_4$  als Intervallgrenzen in Betracht, und die Zahl der zu unterscheidenden Fälle vermehrt sich noch außerordentlich. Es bietet die Durchführung indessen keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

### § 23. Quasistationäre Bewegung.

Obgleich die Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bei beiden naheliegenden Hypothesen über den Anfangszustand zu Beginn störenden Kräften unterworfen sind, obgleich es daher zweifelhaft ist, ob eine solche stationäre Bewegung hergestellt werden kann, möge noch untersucht werden, wie im Verhältnisse dazu eine nahezu stationäre Bewegung verläuft, d. h. eine Bewegung, bei der die höheren Potenzen der Beschleunigung  $q$  gegen die erste Potenz vernachlässigt werden dürfen. Wir führen diese Beschleunigung wieder mittels der Gleichungen:

$$(301) \quad v_x = v + q t, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0$$

ein, so daß  $v$  die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Es wird dann nach (179):

$$\xi = T = (v + q t) \tau - \frac{1}{2} q \tau^2.$$

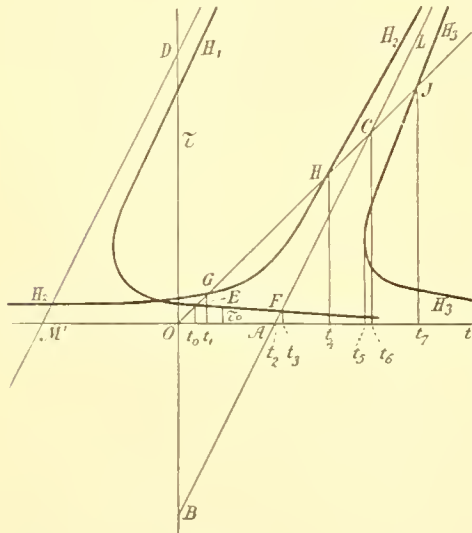


Fig. 14.

Wir hätten nun die in § 14 entwickelten Ausdrücke für die Kraft nach Potenzen von  $q$  zu entwickeln und die ersten beiden Glieder zu berechnen. Für  $q = 0$  müssen sich die Formeln von § 14 auf diejenigen von § 12, bzw. § 19 reduzieren, so daß die ersten Glieder der Entwicklungen bekannt sind.

Um zunächst festzustellen, unter welchen Bedingungen eine solche „quasistationäre“ Bewegung eintreten kann, knüpfen wir an die Figur 14 an. In ihr war die Hyperbel  $H_1$  an Stelle der bei gleichförmiger Bewegung auftretenden geraden Linie:

$$\tau = \frac{2a}{c + v}$$

getreten, und die Hyperbel  $H_2$  an Stelle der Geraden:

$$\tau = \frac{2a}{c - v}.$$

Das kann nur vorkommen, wenn die Hyperbel  $H_2$  die gerade Linie  $\tau = t$  in reellen Punkten schneidet, d. h. wenn:

$$(302) \quad (c - v)^2 > 4 a q$$

ist, wie aus den obigen Gleichungen (183) sofort hervorgeht. Sicher muß ferner  $t < t_2$  oder:

$$(303) \quad t < \frac{c - v}{q} \quad (= t_2)$$

bleiben, denn für  $t = t_2$  wird  $v + qt = c$ , so daß die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird.

Einem Punkte der Hyperbel  $H_1$  kommt nach (181°) die Ordinate:

$$\tau^0 = t + \frac{c + v}{q} - \sqrt{\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}$$

zu; wir schreiben diesen Wert in der Form:

$$\tau^0 = \left(t + \frac{c + v}{q}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a}{q\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2}}\right),$$

oder durch Potenzentwicklung der Quadratwurzel, näherungsweise:

$$(304) \quad \tau^0 = \left(t + \frac{c + v}{q}\right) \frac{2a}{q\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2} = \frac{2a}{c + v + qt} = \frac{2a}{c + v} \left(1 - \frac{qt}{c + v}\right).$$

Dieser Wert stimmt in der Tat mit dem entsprechenden der gleichförmigen Bewegung für kleine Werte von  $q$  überein; und zwar müssen, damit obige Näherungswerte gültig sind, folgende Ungleichungen bestehen:

$$(305) \quad \frac{4aq}{(qt + c + v)^2} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{qt}{c + v} < 1,$$

von denen die erstere infolge der Bedingung (302) von selbst erfüllt ist. Für die Hyperbel  $H_2$  wird nach Gleichung (184°):

$$\tau_1 = \left(t - \frac{c - v}{q}\right) \sqrt{1 + \frac{4aq}{(qt - c + v)^2}}.$$

Hier ist der positive Wert der Quadratwurzel zu wählen; wegen der zweiten Ungleichung (305) ist daher:

$$\sqrt{(qt - c + v)^2} = c - v - qt$$

zu setzen, so daß wir erhalten:

$$(306) \quad \tau_1 = \frac{2a}{c - v - qt} = \frac{2a}{c - v} \left(1 + \frac{qt}{c - v}\right),$$

wobei zu den Ungleichungen (305) noch die Bedingungen:

$$(307) \quad \frac{4aq}{(qt - c + v)^2} < 1, \quad \frac{qt}{c - v} < 1$$

hinzuzufügen sind, von denen wieder die erstere eine Folge der früheren Bedingungen ist, während die andere mit (303) zusammenfällt.

Nach Ablauf der Zeit  $t_1$  ist die Bewegung nahezu stationär geworden; dann gibt Gleichung (184<sup>b</sup>) für die wirkende Kraft den Wert:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \left[ \Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c} \Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_2(\tau_1, t) \right] \quad \text{für } t_1 < t < t_2,$$

wo nun  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  durch die obigen Gleichungen (68) und (75) in § 18,  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  durch die Gleichungen (108) und (112) in § 8 gegeben werden. Wir haben diese einzelnen Integrale nach Potenzen von  $q$  zu entwickeln. Es sei:

$$(308) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1^0 + q \Phi_1', & \Psi_1 &= \Psi_1^0 + q \Psi_1', \\ \Phi_2 &= \Phi_2^0 + q \Phi_2', & \Psi_2 &= \Psi_2^0 + q \Psi_2'. \end{aligned}$$

Da sich für  $q = 0$  der stationäre Zustand der gleichförmigen Bewegung ergeben muß, so besteht für die Summe die Relation:

$$(309) \quad \Phi_1^0 + \Phi_2^0 + \frac{1}{c} \Psi_1^0 + \frac{1}{c} \Psi_2^0 = 0$$

gemäß Gleichung (169<sup>a</sup>), § 19. Diese Anfangswerte brauchen wir also nicht zu berechnen.

Die Funktionen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  wurden durch Integrale der Form:

$$J = \int_{\tau'}^{\tau''} F(T, \tau) d\tau$$

gegeben, wo  $F(T, \tau)$  eine Funktion von  $T$  und  $\tau$  bezeichnet, die aus den Gleichungen (68), (75) und (75<sup>a</sup>) in § 18 zu entnehmen ist. Die Beschleunigung  $q$  kommt in den Grenzen und in  $T$  vor; es ist also bei Vernachlässigung der zweiten Potenz von  $q$  und der höheren Potenzen:

$$J = J_0 + q(J_1 + J_2),$$

wenn:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} F(v\tau, \tau) d\tau, & J_1 &= \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial q} d\tau, \\ J_2 &= F(T_0'', \tau_0'') \left( \frac{\partial \tau''}{\partial q} \right)_0 - F(T_0', \tau_0') \left( \frac{\partial \tau'}{\partial q} \right)_0 \end{aligned}$$

gesetzt wird, und wenn mit  $\tau_0'$ ,  $\tau_0''$ ,  $T_0'$ ,  $T_0''$  die betreffenden Anfangswerte für  $q = 0$  bezeichnet werden. Wir können die nötige Rechnung indessen wesentlich durch folgende Überlegung vereinfachen. Es werde gemäß (179):

$$T = (v + qt)\tau - \frac{1}{2} \varkappa \tau^2$$

gesetzt, und zunächst nach Potenzen von  $\varkappa$  entwickelt, dann ist:

$$(310) \quad J = \int_{\tau'}^{\tau''} F(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau - \frac{\varkappa}{2} \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau,$$

wo in  $\frac{\partial F}{\partial v}$  nun  $q = 0$  zu nehmen ist; denn wir haben:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial T} \tau \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \varkappa} = -\frac{\tau^2}{2}, \quad \text{also:} \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} \tau = \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \varkappa}.$$

Nachträglich setzen wir daun  $\varkappa = q$ : in dem Faktor von  $\varkappa (= q)$  konnten die Integralgrenzen durch  $\tau_0'$  und  $\tau_0''$  ersetzt werden, da dadurch nur höhere Potenzen von  $q$  vernachlässigt sind. Das erste Glied der rechten Seite von (310) ist uns schon bekannt, wenn wir annehmen, daß die Grenzen  $\tau', \tau''$  einen der Werte:

$$0, \quad \tau_0', \quad \tau_1$$

annehmen, denn  $\tau_0'$  und  $\tau_1$  hängen von  $q$  nur in der Verbindung  $v + qt$  ab gemäß den Näherungsformeln (304) und (306). Bezeichnen wir also mit  $F_1'$  und  $F_2'$  die in den Integralen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  unter den Integralzeichen stehenden Funktionen, und setzen den Integralen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ihre Argumente ( $v$ ) bei, so wird:

$$(311) \quad \int_{\tau'}^{\tau''} F_1'(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \int_0^{\tau_0'} F_1'(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \Phi_1(v + qt),$$

$$(312) \quad \int_{\tau'}^{\tau''} F_2'(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \int_0^{\tau_1} F_2'(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau = \Phi_2(v + qt).$$

Um diese Integrale zu finden, brauchen wir also in den Formeln für  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  nur überall  $v$  durch  $v + qt$  zu ersetzen. Nun besteht die Gleichung (309) im stationären Zustande für alle Werte von  $v$  ( $0 < v < c$ ), also auch, wenn man  $v$  durch  $v + qt$  ersetzt, d. h. es ist:

$$(313) \quad \Phi_1(v + qt) + \Phi_2(v + qt) + \frac{1}{c} \Psi_1(v + qt) + \frac{1}{c} \Psi_2(v + qt) = 0.$$

Diese Ausdrücke liefern demnach keinen Beitrag zur Berechnung der Kraft  $\tilde{y}_z$ . Es ist nämlich auch (wenn man nach Potenzen von  $q$  entwickelt):

$$c(\Phi_1 + \Phi_2) + \Psi_1 + \Psi_2 + qt \left[ c \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + c \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} \right] = 0,$$

worauf es hier eigentlich ankommt.

Im folgenden kommt es also nur auf das zweite Glied der rechten Seite von (310) an. Wir können dabei die schon ausgeführten Integrationen verwenden, wenn wir folgendes beachten. Es gelte für das unbestimmte Integral die Gleichung:

$$(314) \quad \int F(v\tau, \tau) d\tau = \frac{c}{\tau} + c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \dots,$$

so ist:

$$F(v\tau, \tau) = -\frac{c}{\tau^2} + c_1 + 2c_2\tau + 3c_3\tau^2 + \dots,$$

also offenbar:

$$(315) \quad \int \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = -\frac{\partial c}{\partial v} \log \tau + \frac{\partial c_1}{\partial v} \frac{\tau^2}{2} + \frac{\partial c_2}{\partial v} \frac{2\tau^3}{3} + \frac{\partial c_3}{\partial v} \frac{3\tau^4}{4} + \dots$$

Für  $\Phi_1$  ist nun nach (68), § 19 zu setzen:

$$\int F_1' d\tau = \left[ (v^3 + 5vc^2) \frac{\tau^4}{4} - 5a^2 v \tau^2 \right] \frac{\varepsilon c}{20 a^3}.$$

Wir haben also:

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial v} \tau d\tau = \left[ -5a^2 \frac{2\tau^3}{3} + (3v^2 + 5c^2) \frac{\tau^5}{5} \right] \frac{\varepsilon c}{20a^3}$$

und:

$$(316) \quad \int_0^{\tau_0} \frac{\partial F_1}{\partial v} \tau d\tau = \frac{a^5}{(c+v)^3} \left[ -\frac{5 \cdot 16}{3} + \frac{32}{5} \frac{3v^2 + 5c^2}{(c+v)^2} \right] \frac{\varepsilon c}{20a^3} \\ = \frac{a^2}{(c+v)^5} \frac{16}{15 \cdot 20} (5c^2 - 50vc - 7v^2) = \frac{16 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{300c^2(1+\omega)^5} (5 - 50\omega - 7\omega^2).$$

Für das Integral  $\Phi_2$  ist nach (167<sup>a</sup>), § 19:

$$(317) \quad \int F_2 d\tau = \frac{\varepsilon a}{40\omega^2} \left[ \frac{8a}{c\tau} + 20(1-\omega^2) \frac{c\tau}{2a} - 10(1-\omega)^2(1+2\omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 \right. \\ \left. + (1-\omega)^4(1+4\omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^4 \right];$$

also wird gemäß (314) und (315):

$$(317^a) \quad \int \frac{\partial F_2}{\partial v} \tau d\tau = -\frac{2 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \left[ -8 \log \tau + 20(1-\omega^2) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 - \frac{40}{3} (1-\omega)^2 (1+2\omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^3 \right. \\ \left. + \frac{8}{5} (1-\omega)^4 (1+4\omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right] \\ + \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^2} \left[ -40\omega \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 + 80\omega(1-\omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^3 - 32\omega(1-\omega)^3 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right],$$

oder, wenn man auf gemeinsamen Nenner bringt:

$$(317^b) \quad = \frac{\varepsilon a^2}{40 c^2 \omega^3} \left[ 16 \log \tau - 40 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 + \frac{80}{3} (1-\omega)(1+\omega+\omega^2) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^3 \right. \\ \left. - \frac{16}{5} (1-\omega)^3 (1+3\omega+6\omega^2) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right].$$

Hierin hat man als obere und untere Grenze für  $\tau$  bzw. die Werte:

$$(318) \quad \frac{2a}{c-v} \quad \text{und} \quad \frac{2a}{c+v}$$

einzusetzen; dann ergibt sich:

$$(319) \quad \int_0^{\tau_1} \frac{\partial F_2}{\partial v} \tau d\tau = \frac{16 \varepsilon a^2}{15 \cdot 40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \left[ 15 \log \frac{1+\omega}{1-\omega} - 150 \frac{\omega}{(1-\omega^2)^2} \right. \\ \left. + 50(1+\omega+\omega^2) \frac{3\omega+\omega^3}{(1-\omega)^2(1+\omega)^3} - 3(10\omega+20\omega^3+2\omega^5) \frac{1+3\omega+6\omega^2}{(1-\omega)^2(1+\omega)^5} \right]$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(320) \quad = \frac{16 \varepsilon a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \\ - \frac{16 \varepsilon a^2}{600 c^2 \cdot \omega^2 (1+\omega)^5 (1-\omega)^2} (30 + 90\omega + 40\omega^2 - 270\omega^3 + 16\omega^4 - 132\omega^5 - 14\omega^6).$$



Für das folgende ist es wichtig, das Verhalten dieses Ausdrucks in seiner Abhängigkeit von  $\omega$  zu prüfen; um dasselbe in der Nähe von  $\omega = 0$ , d. h. für kleine Werte von  $\omega$  zu erkennen, müssen wir nach Potenzen von  $\omega$  entwickeln. Es ist:

$$\frac{1}{\omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{3} + \frac{2\omega^2}{5} + \frac{2\omega^4}{7} + \dots = \frac{30 + 10\omega^2 + 6\omega^4}{15\omega^2} + \dots$$

Multiplizieren wir mit:

$$\begin{aligned} 15(1+\omega)^5(1-\omega)^2 &= 15(1+5\omega+10\omega^2+10\omega^3+\dots)(1-2\omega+\omega^2) \\ &= 15(1+3\omega+\omega^2-5\omega^3+\dots), \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{15}{\omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \cdot (1+\omega)^5(1-\omega)^2 = (30+90\omega+40\omega^2-120\omega^3+\dots) \frac{1}{\omega^2}.$$

Man erkennt hieraus, daß die rechte Seite der Gleichung (320) bei Entwicklung nach Potenzen von  $\omega$  mit dem Gliede:

$$(321) \quad \frac{16 \varepsilon a^2 \omega}{40 c^2} \cdot \frac{-120+270}{15} = \frac{4 \varepsilon a^2}{c^2} \omega$$

beginnt, also für  $\omega = 0$  verschwindet.

Bezeichnen wir mit  $\Delta \Phi_i$  den Teil des Zuwachses der Funktion  $\Phi_i$ , welcher auf das Resultat von Einfluß ist, d. h. welcher sich nicht infolge der Beziehung (313) schließlich heraushebt, so ist also nach (310), (316) und (320):

$$(322) \quad \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = - (I_1(\omega) + I_2(\omega)) \frac{q}{2},$$

wenn  $I_1$  und  $I_2$  bzw. die in (316) und (320) rechts stehenden Funktionen von  $\omega$  bedeuten, die bis auf das Glied  $\log \frac{1+\omega}{1-\omega}$  rational von  $\omega$  abhängen. Die Entwicklung nach Potenzen von  $\omega$  ergibt:

$$(323) \quad \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = - \frac{2 \varepsilon a^2 q}{15 c^2} \left( 1 + \frac{18}{5} \omega^2 + \dots \right).$$

Etwas anders muß man bei Berechnung von  $\Delta \Psi_1$  und  $\Delta \Psi_2$  verfahren, denn in  $\Psi$  kommt die Geschwindigkeit  $v$  auch außerhalb der Funktion  $T$  unter dem Integralzeichen vor. Es sei gemäß (108) und (112):

$$\Psi = \int_{\tau}^{\tau''} v_x(t-\tau) F(T, \tau) d\tau;$$

dann wird, da  $v_x(t-\tau) = v + q(t-\tau)$  zu setzen ist, analog zu (310) und (312):

$$(324) \quad \begin{aligned} \Psi &= \int_{\tau_0}^{\tau_0''} (v + qt) F(v\tau + qt\tau, \tau) d\tau \\ &\quad - q \int_{\tau_0}^{\tau_0''} \tau F(v\tau, \tau) d\tau - \frac{q}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0''} v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Formel haben wir  $\Delta \Psi_1$  und  $\Delta \Psi_2$  zu berechnen. Für  $\Psi_1$  erhalten wir nach Gleichung (108), § 8:

$$\begin{aligned} \int \tau F(v, \tau) d\tau &= \frac{\varepsilon c}{4 a^3} \left[ 2 a^3 \tau^2 - 2 a^3 c \tau^3 + \frac{1}{5} (c^3 + v^2 c) \tau^5 \right] \\ &= \frac{\varepsilon a^2}{c} \left[ 2 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 - 4 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^3 + \frac{8}{5} (1 + \omega^2) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right], \end{aligned}$$

also durch Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{\tau_0} \tau F(v, \tau) d\tau = \frac{2 \varepsilon a^2}{c (1 + \omega)^2} \left[ 1 - \frac{2}{1 + \omega} + \frac{4}{5} \frac{1 + \omega^2}{(1 + \omega)^3} \right].$$

Es wird ferner für  $\Psi_1$ :

$$\int v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = \frac{\varepsilon c}{4 a^3} v \int [c\tau \cdot 2 \cdot v\tau \cdot \tau \cdot \tau] d\tau = \frac{\varepsilon c^2 v^2 \tau^5}{2 a^3 \cdot 5} = \frac{16 \cdot \varepsilon a^2 \omega^2}{5 c} \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5$$

und nach Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{\tau_0} v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = \frac{16 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{5 c} \frac{\omega^2}{(1 + \omega)^5}.$$

In Rücksicht auf (324) wird also, wenn das Zeichen  $\Delta$  so definiert wird, wie es für die Gleichung (322) geschah:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_1 &= -\frac{q}{2} \frac{\varepsilon a^2}{c (1 + \omega)^2} \left[ 4 - \frac{8}{1 + \omega} + \frac{16}{5} \frac{1 + 2\omega^2}{(1 + \omega)^3} \right] \\ (325) \quad &= -\frac{q}{2} \cdot \frac{4 \cdot \varepsilon a^2}{5 \cdot c (1 + \omega)^5} (-1 - 5\omega + 13\omega^2 + 5\omega^3) \\ &= -\frac{q}{2} \frac{4 \cdot \varepsilon a^2}{5 \cdot c} (-1 + 23\omega^2 + \dots). \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir für  $\Psi_2$  nach (112), § 8, wenn dort der oben in § 18 angegebene Wert von  $G(v, c, \tau)$  eingesetzt wird, unter Benutzung von (167<sup>b</sup>), § 19:

$$\int F(v, \tau) \tau \cdot d\tau = \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c} \left[ -40 (1 - \omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 + 40 (1 - \omega)^2 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^3 - 8 (1 - \omega)^4 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right]$$

und durch Einsetzen der Grenzen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} F(v, \tau) \cdot \tau \cdot d\tau &= \frac{\varepsilon a^2 (1 - \omega)}{40 c (1 + \omega)^2} \left[ -40 + 40 \frac{1 - \omega}{1 + \omega} - 8 \left( \frac{1 - \omega}{1 + \omega} \right)^3 \right] \\ (326) \quad &= \frac{\varepsilon a^2}{5 c} (-1 - \omega + \omega^2 \dots). \end{aligned}$$

Zur Auswertung des zweiten Bestandteiles der Änderung von  $\Psi_2$  haben wir die in (314) und (315) enthaltene Regel anzuwenden, und zwar auf die rechte Seite der Gleichung (167<sup>b</sup>), § 19; wir finden dadurch:

$$\int v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau = \frac{\varepsilon a^2 \omega}{40 c} \left[ 40 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^2 - 80 (1 - \omega) \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^3 + 32 (1 - \omega)^3 \left( \frac{c\tau}{2a} \right)^5 \right].$$

Nach (324) haben wir die Summe:

$$2 \int F(v\tau, \tau) \tau d\tau + \int v \frac{\partial F}{\partial v} \tau d\tau$$

zu bilden; sie wird:

$$= \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c} \left[ -40 (2 - 3\omega) \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^2 + 80 (1 - \omega)(1 - 2\omega) \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^3 - 16 (1 - \omega)^3 (1 - 3\omega) \left(\frac{c\tau}{2a}\right)^5 \right],$$

und nach Einsetzen der Grenzen:

$$(327) = \frac{\varepsilon a^2}{5c} \frac{1}{(1 + \omega)^5} [-2 - 13\omega - 39\omega^2 + 65\omega^3 + 29\omega^4] = \frac{\varepsilon a^2}{5c} (-2 - 3\omega - 4\omega^2 \dots).$$

Bezeichnen wir also die in (325) und (327) rechts stehenden rationalen Funktionen von  $\omega$  mit  $-\frac{q}{2}\Gamma_3$  und  $\Gamma_4$ , so wird:

$$(328) \quad \Delta(\Psi_1 + \Psi_2) = -\frac{q}{2}(\Gamma_3 + \Gamma_4) = -\frac{q}{2}\Gamma_5,$$

wo das Zeichen  $\Delta$  dieselbe Bedeutung hat, wie in (322). In erster Annäherung wird:

$$(329) \quad \Delta(\Psi_1 + \Psi_2) = -\frac{q}{2} \frac{\varepsilon a^2}{5c} (-6 - 3\omega + 88\omega^2 + \dots).$$

Die auf das Elektron bei quasistationärer Bewegung wirkende Kraft wird hiernach:

$$(330) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \Delta \left( \Phi_1 + \Phi_2 + \frac{1}{c} \Psi_1 + \frac{1}{c} \Psi_2 \right) \\ &= +\frac{3\varepsilon q}{8\pi a^3} \left( \Gamma_1 + \Gamma_2 + \frac{1}{c} \Gamma_5 \right), \end{aligned}$$

wo  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5$  die soeben definierten Funktionen von  $\omega$  bedeuten, oder für kleine Werte von  $\omega$ :

$$(330^a) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{7\varepsilon^2 q}{20\pi a c^2} \left( 1 + \frac{27}{14}\omega - \frac{396}{35}\omega^2 + \dots \right).$$

Dieses Resultat ist von dem bisherigen verschieden; nach Sommerfeld und Abraham sollte die Kraft durch den Ausdruck:

$$(330^b) \quad \frac{3\varepsilon^2 q}{20\pi a c^2} \left[ -\frac{2}{\omega^2(1-\omega^2)} + \frac{1}{\omega^3} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \right] = -\frac{\varepsilon^2 q}{5\pi a c^2} [1 + \frac{6}{5}\omega^2 + \dots]$$

dargestellt sein. Es ist bemerkenswert, daß das Glied mit  $\log \frac{1+\omega}{1-\omega}$  hier in derselben Weise (und mit demselben Zahlenfaktor) auftritt, wie in unserer Gleichung (320); aber die hinzutretende rationale Funktion von  $\omega$  ist eine andere.

Die Anwendbarkeit der Formel für die quasistationäre Bewegung ist durch die Ungleichungen (302), (303), (305) und (307) begrenzt. Wir haben also:

$$4a q < (c - v)^2, \quad q t < c - v.$$

Hierzu tritt aber noch eine weitere Beschränkung. Die Gleichung (330<sup>a</sup>) wurde durch Entwicklung der früheren Ausdrücke nach Potenzen von  $q$  gewonnen; hierbei trat in dem Integrale  $\Phi_2 T$  im Nenner auf, wo nach (179):

$$T = v\tau + qt\tau - \frac{1}{2}q\tau^2.$$

Auch der reziproke Wert von  $T$  mußte also nach positiven Potenzen von  $q$  entwickelt werden, und das ist nur möglich, wenn innerhalb der Integrationsgrenzen:

$$v > qt - \frac{1}{2}q\tau \quad \text{oder} \quad qt < v + \frac{1}{2}q\tau$$

ist. Der kleinste Wert, welchen  $\tau$  (als untere Grenze) im Integrale  $\Phi_2$  annimmt, ist gleich  $\frac{2a}{c+v}$ ; wir haben also:

$$(331) \quad qt < v + \frac{aq}{c+v};$$

das zweite Glied der rechten Seite ist sehr klein; es kann also näherungsweise:

$$(331^a) \quad qt < v$$

verlangt werden, d. h. die Zunahme der Geschwindigkeit darf nie gleich der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  werden. Für kleine Werte von  $v$  ist daher das Gebiet der quasistationären Bewegung ein sehr beschränktes. Für  $v=0$  muß auch  $q=0$  werden, wie es natürlich ist, denn bei der Anfangsgeschwindigkeit Null kann überhaupt keine Bewegung zustande kommen.

Der Umstand, daß die Größe  $v$  in Gleichung (330) die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, erhöht die Schwierigkeit ihrer Anwendung; denn der Zeitpunkt  $t=0$  fällt außerhalb des Zeitraums, für welchen die Bewegung als quasistationär betrachtet werden darf. Während dieses Zeitraums ist die Geschwindigkeit gleich  $v+qt$  zu setzen. Führt man aber diese Größe  $v+qt$  an Stelle von  $v$  in die rechte Seite von (330) ein, so unterscheidet sich der neue Ausdruck (mit  $v+qt$ ) von dem alten (mit  $v$ ) bei Entwicklung nach Potenzen von  $q$  um Glieder zweiter und höherer Ordnung in  $q$ . Wenn man aber solche Glieder benutzen will, so hätte man alle vorkommenden Integrale von vornherein bis auf die entsprechenden Potenzen von  $q$  entwickeln müssen. Es ist daher nicht erlaubt, bei den Anwendungen in Gleichung (330) die Anfangsgeschwindigkeit  $v$  durch eine spätere Geschwindigkeit  $v+qt$  zu ersetzen. Bei Benutzung<sup>1)</sup> des Ausdrucks (330<sup>b</sup>) dagegen pflegt man unter  $v(=\omega \cdot c)$  die Geschwindigkeit der Zeit  $t$  zu verstehen: man bezeichnet den Faktor von  $q$  als longitudinale elektromagnetische Masse, und diese ist dann als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit definiert; unsere Formel (330) dagegen gibt diese Masse als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit; als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit kann man sie nach den vorstehenden Erörterungen nur angeben, wenn man von vornherein bei allen Entwicklungen auch die zweite Potenz von  $q$  berücksichtigt.

<sup>1)</sup> Z. B. bei der Berechnung der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen; vgl. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig 1905, S. 195.

Die aufgestellten Formeln für die quasistationäre Bewegung sind zunächst nur für unsere erste Voraussetzung über den Anfangszustand abgeleitet, behalten aber bei unserer zweiten Voraussetzung (§ 15 und § 22) ihre Gültigkeit.

Um dies einzusehen, muß man sich die obige Figur 20 für unseren zweiten Zustand gezeichnet denken; es geschieht dies, indem man die Hyperbel  $H_2$ , welche in Figur 14 (S. 364) auftritt, einzeichnet und die Parabel  $P_2$  gleichzeitig so deformiert, daß sie die Linie  $\tau = t$  in denselben reellen Punkten trifft, wie die Hyperbel  $H_2$ . Alsdann gilt für  $0 < t < t^0$  unverändert die Gleichung (282); die Gleichung (286) aber hat jetzt nur in dem Intervalle  $t^0 < t < t_1$  Gültigkeit, wenn  $t_1$  (ebenso wie in Figur 14) den ersten Schnittpunkt der Hyperbel  $H_2$  mit der Linie  $\tau = t$  bezeichnet und wieder durch die erste Gleichung (183) definiert ist. Für  $t > t_1$  ist jetzt die Hyperbel  $H_2$  ebenso anzuwenden, wie früher bei der ersten Voraussetzung über den Anfangszustand; für das Intervall  $t_1 < t < t_2$  gilt demnach die frühere Gleichung (184<sup>b</sup>) unverändert. Da nun nach obigem der quasistationäre Zustand eintritt, wenn  $t_2$  sehr groß wird und wenn die Hyperbel  $H_2$  sehr nahe mit einer Parallelen zur  $t$ -Achse zusammenfällt, so gelten auch obige Gleichungen (310), . . . (330<sup>a</sup>) unverändert für die zweite Voraussetzung über den Anfangszustand.

Soll bei Überlichtgeschwindigkeit das Eintreten einer sogenannten quasistationären Bewegung untersucht werden, so sind die Gleichungen von § 14 nicht ohne weiteres anwendbar, denn in ihnen ist die Anfangsgeschwindigkeit  $v$  kleiner als  $c$  vorausgesetzt. Wählen wir aber jetzt  $v > c$ , so wird in Figur 14 die Strecke  $0A$  negativ,  $0B$  dagegen positiv. Der Mittelpunkt der durch Gleichung (182) dargestellten Hyperbel  $H_2$  liegt also links vom Anfangspunkte  $0$ ; sie schneidet die Linie  $\tau = t$  nicht und kommt also nicht in Betracht: die Hyperbel  $H_1$ , dargestellt durch Gleichung (181<sup>b</sup>), behält ihre Bedeutung; die Hyperbel  $H_3$  in Figur 14 ist weit nach links zu verschieben; ihr Schnittpunkt  $J$  mit der Linie  $\tau = t$  ist durch die Abszisse  $t_7$  in Gleichung (191) dargestellt. Wir erhalten jetzt:

$$(332) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \tilde{\delta}_x = \Phi_0^*(t, t) + \Phi_1^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(t, t) \quad \text{für } 0 < t < t^0$$

und weiter, wenn auch  $t_5$  negativ wird:

$$(333) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \tilde{\delta}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(t, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(t, t)$$

$$\text{für } t^0 < t < t_7,$$

endlich:

$$(334) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon} \tilde{\delta}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c} \Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c} \Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t_7 < t.$$

Dabei sind  $\tau^0$  und  $\tau_3$  ebenso wie früher durch die Gleichungen (181<sup>c</sup>) und (190) definiert. Diese Gleichung (334) bleibt für alle größeren Werte von  $t$  gültig. Die Bewegung wird quasistationär, wenn die Hyperbeln  $H_1$  und  $H_3$  sich von zwei Parallelen zur  $t$ -Achse nur wenig unterscheiden. Es muß also  $\tau^0$  mit  $\frac{2a}{c+v}$  nahe zusammenfallen; das gibt wieder die obigen Bedingungen (305); und es darf  $\tau_3$  sich von  $\frac{2a}{v-c}$  nur wenig unterscheiden, und das führt auf die Bedingungen:

$$(335) \quad 4 a q < (q t + v - c)^2, \quad q t < v - c,$$

welche zu (307) analog sind. Außerdem muß  $t > t_\gamma$  sein, also:

$$(q t + v - c)^2 > 4 a q + (c - v)^2,$$

wodurch dann die erste Bedingung (335) von selbst erfüllt ist. Entwickelt man nun nach Potenzen von  $q$ , so ist zu beachten, daß für Überlichtgeschwindigkeit keine Relation der Form (313) besteht, daß vielmehr die linke Seite dieser Gleichung eine Funktion von  $v + q t$  wird, ferner daß in den Funktionen  $\Phi^*$  und  $\Psi^*$  die Größe  $T = (v + q t) \tau - \frac{1}{2} q \tau^2$  im Nenner auftritt, so daß auch wieder die Bedingung (331). bzw. (331<sup>a</sup>) erfüllt sein muß.

Bei Abraham und Sommerfeld wird das oben in (330<sup>b</sup>) angegebene Resultat auf Grund der Annahme abgeleitet, daß die quasistationäre Bewegung schon unendlich lange Zeit angedauert habe. Da nun die Geschwindigkeit bei jeder (auch noch so kleinen) Beschleunigung nach unendlich langer Zeit beliebig groß wird, so scheint mir diese Ableitung (abgesehen von sonstigen Bedenken) einen Widerspruch in sich zu enthalten.

#### Berichtigungen und Zusätze.

- Seite 232 In Gleichung (1) muß es heißen:  $c^2 Q$  statt  $\tau^2 Q$ .
- „ 237 Zeile 10 v. o. „ „ „ : das Vektorpotential dient zur Darstellung der durch die Bewegung erzeugten magnetischen Kräfte.
- „ 238 „ 11 v. o. muß es heißen:  $\frac{d v_x}{d t}$  statt  $\frac{d x_x}{d t}$ .
- „ 244 In Gleichung (32) „ „ „ :  $3 \varepsilon c$  statt  $3 \varepsilon$ .
- „ 247 „ „ (40<sup>a</sup>) „ „ „ :  $S_0 = \frac{\pi}{2} \beta \gamma$ .
- „ „ „ (41<sup>a</sup>) „ „ „ :  $S_0 = \frac{\pi}{2} \beta \gamma$ .
- „ 249 „ „ (49<sup>a</sup>) „ „ „ :  $3 \beta + \gamma$  statt  $\beta - \gamma$ .
- „ 251 Zeile 14 v. o. „ „ „ :  $P$  statt  $P_4$ .
- „ 254 Zu § 6 vgl. die Bemerkung S. 340, Zeile 16 v. o.
- „ 259 ff. Vgl. hierzu S. 340—342.
- „ 262 Zeile 7 v. u. muß es heißen:  $2 a$  statt  $a$ .
- „ 276 „ 7 und 1 v. u. muß es heißen:  $+ 2 c \tau T$  statt  $- 2 c \tau T$ , so daß die daran geknüpfte Bemerkung über das Vorzeichen zu streichen ist.
- „ 278 ff. Zu den Gleichungen (123) bis (135) vgl. die Bemerkung S. 342, Z. 9 v. o. ff.
- „ 291 Zu § 12 vgl. § 19, S. 342 ff.
- „ 295 Zu § 13 vgl. § 21, S. 354.
- „ 298 Zeile 10 v. o. muß es heißen:  $\Psi_{2xt}^*$  statt  $\Psi_{2xt}$ .
- „ 301 „ 5 v. o. „ „ „ :  $v - c$  statt  $c - v$ .

- Seite 307 In Gleichung (194) muß es heißen:  $\Psi_2^*$  statt  $\Psi_2$  und  $\Psi_2$  statt  $\Psi_1$ .
- „ 307 Auf der linken Seite der Gleichung (194<sup>c</sup>) ist  $+$  durch  $-$  zu ersetzen.
- „ 310 ff. Zu § 15 vgl. § 20, S. 347 ff. und § 21, S. 355 ff., sowie § 22, S. 358 ff.
- „ 312 Gleichung (204), im Zähler rechts muß es heißen:  $4\omega$  statt 4.
- „ 322 Zu § 16 vgl. die weiteren Entwicklungen in meinem Aufsätze „Zur Elektronentheorie“, Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. d. W., math.-phys. Klasse, Sitzung vom 6. Juli 1907. In dieser Abhandlung werden die Einwürfe widerlegt, die Herr Sommerfeld in einer am 8. Juni der Akademie vorgelegten Abhandlung gegen die von mir befolgte Methode erhoben hatte. Nur in einem nebensächlichen Punkte, wo es sich um Auswertung eines bei ihm vorkommenden Integrals (in § 16 mit  $\Omega$  bezeichnet) handelte, konnte ich ihm recht geben. Insbesondere habe ich a. a. O. untersucht, welcher partiellen Gleichung die in meiner Gleichung (34) definierte Funktion genügt, wenn man die obere Grenze  $t$  des Integrals durch  $\infty$  ersetzt.
- „ 332 Zeile 10 v. u. muß es heißen:  $S \int_x^a S \int_x^a$  statt  $S \int_x^a S \int_x^a$ .
- „ 342 Auf der rechten Seite der zweiten Gleichung (128) ist unter dem Integralzeichen der Faktor  $(T^2 - c^2 \tau^2)$  hinzuzufügen.
- „ 343 Zeile 6 v. u. muß es heißen:  $5 + 3\omega^2$  statt  $3 + 5\omega^2$ .
- „ 344 „ 1 v. o. „ „ „ : (75) statt (78).
- „ „ 3 v. o. „ „ „ : 480 „ 540.
- „ 348 „ 3 v. u. „ „ „ : (241) statt (240).
- In Figur 18 ist  $t_1$  durch  $t'$  zu ersetzen.
- „ 350 In Gleichung (247) ist rechts der Faktor  $a$  hinzuzufügen.
- „ 365 Zeile 10 v. u. muß es heißen:  $(1 + \sqrt{\quad})$  statt  $\sqrt{\quad}$ .

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: [23](#)

Autor(en)/Author(s): Lindemann F.

Artikel/Article: [Ueber die Bewegung der Elektronen. Zweiter Teil: Stationäre Bewegung. 337-375](#)