Von den wahrscheinlichsten Ereignissen.

Eine Abhandlung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

L. Oettinger.

Von den wahrscheinlichsten Ereignissen.

§. 1.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt reichlichen Stoff zu Beantwortung wichtiger und anziehender Fragen. Ins Besondere führt die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitswerthe bei Wiederholungsversuchen auf manche Aufgaben, deren nähere Untersuchung nicht uninteressant seyn dürfte, und die wir deswegen zum Gegenstande einer weiteren Betrachtung machen.

Wir heben hier eine besondere Art von Fällen hervor, die wir mit dem Namen „wahrscheinlichste Ereignisse“ bezeichnen wollen. Sie erregen durch ihre Eigenthümlichkeit Aufmerksamkeit; wir versuchen daher eine nähere Erörterung nach Kräften zu geben. Die folgenden Blätter machen auf eine erschöpfende Behandlung dieses Gegenstandes, dem man eine grössere Ausdehnung geben könnte, keinen Anspruch; sie sollen nur einzelne Punkte betrachten, Unbekanntes aufsuchen und es an Bekanntes reihen.

Treten zwei oder mehrere Ereignisse, deren Eintreffen im einzelnen Falle durch besondere Grade der Wahrscheinlichkeit bedingt ist, in bestimmten Fällen in Verbindung mit einander, so können sie sich auf manchfaltige Weise entweder gleichzeitig oder in einer Zeitfolge nacheinander anreihen, oder zusammen ordnen. Jeder möglichen besonderen Verbindung wird ein besonderer Grad der Wahrscheinlichkeit entsprechen, der sich im Verhältnisse der Möglichkeit bald mehr, bald weniger steigern wird. Diejenige Verbindung unter allen möglichen der gegebenen Fälle, für deren Eintreffen der grösste Werth der Wahrscheinlichkeit spricht, soll unter dem Ausdrucke „wahrscheinlichstes Ereigniss" begriffen werden *).

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung einzelner Fälle.

I.

§. 2.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses im einzelnen Versuche sey $\frac{a}{m}$, die des Ge-

*) Der aufgestellte Begriff von den wahrscheinlichsten Ereignissen ist dem Begriffe von dem grössten Werthe (Maximum) der Wahrscheinlichkeit überhaupt untergeordnet und deswegen nicht damit zu verwechseln, indem er die Frage aufwirft, welche Verbindung von Ereignissen in bestimmten Fällen am wahrscheinlichsten eintreffen werde, also von speciellen Fällen ausgeht, und für ihn den grössten Werth unter allen möglichen Wahrscheinlichkeiten bestimmt, während der Begriff von dem Maximum der Wahrscheinlichkeit überhaupt von andern Bestimmungen ausgeht und sich die Lösung noch anderer Aufgaben unterordnet, wie z. B. den umgekehrten: welche Verhältnisse man wählen müsse, um den höchsten, oder an die Gewissheit grenzenden Grad der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Unternehmens herbei zu führen? Denn es ist klar, dass man durch anhaltend fortgesetzte Versuche das Eintreffen eines oder mehrerer Ereignisse auch bei sehr geringer Wahrscheinlichkeit des einzelnen Falls bis zur Gewissheit steigern kann, ohne zu wissen, welches bei einer bestimmten Anzahl von Versuchen dasjenige Ereigniss ist, dessen Eintreffen man am wahrscheinlichsten erwarten darf.

gentheils $\frac{b}{m}$. Es werden p Versuche gemacht, in welchen beide Ereignisse unter sich alle mögliche Verbindungen eingehen können. Welche Verbindung ist das wahrscheinlichste Ereigniss?

Das fragliche Ereigniss kann entweder p mal, oder (p — 1) mal und sein Gegentheil einmal, oder (p — 2) mal und sein Gegentheil 2mal u. s. f. eintreffen. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind

$$\frac{a^p}{m^p}, \ \frac{p}{1} \ \frac{a^{p-1}b}{m^p}, \ \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} \ \frac{a^{p-2}b^2}{m^p}, \ \ldots\ldots \ \frac{p}{1} \,.\, \frac{a\,b^{p-1}}{m^p}, \ \frac{b^p}{m^p}$$

welches die Glieder des Binomiums $\left(\frac{a+b}{m}\right)^p$ sind.

Die Beantwortung der vorliegenden Frage beruht auf folgenden zwei Punkten:

1. Wie ist das Verhältniss beschaffen, worin die Glieder des Binomiums zueinander stehen?

2. Findet ein Maximum statt? und in welchem Falle?

Zur Beantwortung der ersten Frage vergleichen wir zwei Nachbarglieder von folgender allgemeiner Form

$$\frac{p\,(p-1)\ldots\ldots(p-s+2)}{1\,.\,2\ \ldots\ldots\ (s-1)} \,.\, \frac{a^{p-s+1}b^{s-1}}{m^p} : \frac{p\,(p-1)\ldots\ldots(p-s+1)}{1\,.\,2\ \ldots\ldots\ p} \,.\, \frac{a^{p-s}.\,b^s}{m^p}$$

Sie führen zu folgendem kurz darstellbarem Verhältniss

$$1, \ \frac{a}{b} : \frac{p-s+1}{s}$$

worin a, b, p unveränderlich, s veränderlich ist; alle vier Grössen aber nach der Natur der Aufgabe ganze und bejahte Zahlen sind. Die Grösse s kann die Werthe 1, 2, 3 ..... p durchlaufen. Die Untersuchung des vorstehenden Verhältnisses ist unserm Zwecke nicht dienlich, denn es gibt keine Folgerungen für das Allgemeine, sondern nur für einzelne Fälle. Um allgemeine Resultate zu erhalten, machen wir p von a+b abhängig und setzen

$$p = m(a+b)$$

dann wird s die Werthe $1, 2, 3 \ldots . m \ldots . bm \ldots .. am \ldots .. m(a+b)$ durchlaufen müssen unter der Voraussetzung, dass $a > b$ ist. Die Einführung dieser Werthe in Nr. 1 gibt für das Verhältniss des ersten Gliedes zum zweiten, des zweiten zum dritten, des dritten zum vierten folgende Zusammenstellung bei schicklicher Anordnung

$$1 : mb + \frac{mb^2}{a}; \quad 1 : \frac{mb}{2} + \frac{mb^2}{2a} - \frac{b}{2a}; \quad 1 : \frac{mb}{3} + \frac{mb^2}{3a} - \frac{2b}{3a}$$

für das Verhältniss des m^{ten} Gliedes zum $(m+1)^{\text{ten}}$

$$1 : 1 + \frac{b(b-1)}{a} + \frac{b}{am}$$

für das Verhältniss des $(bm)^{\text{ten}}$ Gliedes zum $(bm+1)^{\text{ten}}$

$$1 : 1 + \frac{1}{am}$$

für das Verhältniss des $(am)^{\text{ten}}$ Gliedes zum $(am+1)^{\text{ten}}$ Gliede

$$1 : \frac{b}{a} \cdot \frac{bm+1}{am}$$

für das Verhältniss des $[(m-1)(a+b)]^{\text{ten}}$ Gl. zum $[(m-1)(a+b)+1]^{\text{ten}}$

$$1 : \frac{a(a+b)+b}{a(a+b)(m-1)}$$

und endlich für das Verhältniss des vorletzten zum letzten

$$1 : \frac{b}{am(a+b)}$$

Eine einfache Vergleichung zeigt, dass unter den oben angenommenen Bedingungen die Glieder des Binomiums am Anfange regelmässig steigen, und am Ende regelmässig fallen. Sie sind daher einer Curve zu vergleichen, die sich von einem Punkte einer geraden erhebt, und dann wieder zurück kehrt und an einem zweiten Punkte in sie einschneidet.

Das Gesagte gilt eigentlich vorerst nur für den Fall, wenn der Exponent gerade ein Vielfaches von der Summe der das Binomium erzeugenden Grössen ist. Die Exponenten des Binomiums, welche nicht gerade als Vielfache dieser Grössen erscheinen, sondern zwischen ihnen liegen, ordnen sich aber leicht diesem Gesetze unter, denn die Fälle, worin die Exponenten als Vielfache der Grundgrössen erscheinen, sind nichts Anderes als Träger eines allgemeinen Gesetzes, das an ihnen deutlicher als in den andern Fällen hervortritt, deswegen verbürgen die hier gemachten Schlüsse die allgemeine Giltigkeit des aufgefundenen Gesetzes.

Ein anderer hieher gehöriger Umstand ist nicht zu übersehen. Sind nämlich die Grundgrössen a und b Vielfache von einander, so dass $\frac{a}{b} = n$ und nehmen wir ferner an: der Exponent p übersteige die Grösse n nicht, wornach also s allmählig die Werthe $1, 2, 3 \ldots\ldots n$ durchlaufen kann, so stehen die Glieder des Binomiums der Reihe nach in folgenden Verhältnissen

$$1 : 1;\ 1 : \tfrac{1}{2} - \frac{1}{n};\ 1 : \tfrac{1}{3} - \frac{2}{n};\ \ldots\ldots\ 1 : \frac{1}{n}$$

und man erkennt hieraus, dass unter diesen Bedingungen die zwei ersten Glieder an Werth einander gleich sind, die folgenden aber fallen. Ist der Exponent selbst kleiner als der Quotient $\frac{a}{b}$, so fallen die Werthe vom ersten an beständig.

Aus diesen Bemerkungen ziehen wir folgende Schlüsse:

2. Ist der Exponent eines Binomiums kleiner als der Quotient, welchen die Grundgrössen des Binomiums erzeugen, so stehen die Werthe der Binomialglieder in beständiger Abnahme oder Zunahme, je

nachdem man mit der grösseren oder kleinern Grundgrösse bei der Entwicklung beginnt.

3. Ist der Quotient der Grundgrössen eine ganze Zahl, und dem Binomialexponenten gleich, so erzeugt die entwickelte Darstellung zwei an Werth einander gleiche Glieder, die zugleich ein Maximum bilden. Die Werthe der übrigen fallen in dem Verhältnisse, wie sie von ihnen entfernt liegen.

4. Ist der Exponent des Binomiums grösser, als der durch die Grundgrössen erzeugte Quotient, so wachsen die Werthe der Binomialglieder, erreichen einen höchsten Werth und fallen dann, man mag bei dieser Vergleichung von den Anfangs- oder Endgliedern des Binomiums ausgehen.

Da nun hieraus hervorgeht, dass unter den Binomialgliedern ein Maximum statt findet, so fragt es sich, in welchem Falle es statt finde? Stellen wir drei aufeinander folgende Glieder des Binomiums zusammen, so muss, wenn ein Maximum statt finden soll, seyn

$$\frac{p(p-1)\ldots.(p-s+2)}{1\,.\,2\;\ldots.\;(s-1)}\cdot\frac{a^{p-s+1}.\,b^{s-1}}{m^p} < \frac{p(p-1)\ldots..(p-s+1)}{1\,.\,2\;\ldots..\;s}\cdot\frac{a^{p-s}.\,b^s}{m^p}$$

$$> \frac{p(p-1)\ldots..(p-s)}{1\,.\,2\;\ldots..\,(s+1)}\cdot\frac{a^{p-s-1}.\,b^{s+1}}{m^p}$$

diess führt nach der gehörigen Reduction zu folgenden zwei Bedingungen

$$s < \frac{p\,.\,b}{a+b} + \frac{b}{a+b}$$

$$s > \frac{p\,.\,b}{a+b} - \frac{a}{a+b}$$

Nach ihnen bildet $\frac{b}{a+b}$ und $\frac{a}{a+b}$, die zusammen der Einheit gleich sind, die Grenzen, zwischen welchen sich der Werth von s bewegt. Je weiter auseinander diese Grenzen liegen, desto unbestimmter ist der Werth von s, je enger sie sich zusammen ziehen, desto genauer wird der Werth von s bestimmt seyn, und das Verhältniss des Unterschiedes in das der Gleichheit übergehen. Da s nur eine ganze Zahl bezeichnet, und die Grenzen von s zwischen die Einheit fallen, so fliesst hieraus die Gleichung

$$s = \frac{p \cdot b}{a + b}$$

woraus sich die Proportion zur Vergleichung der Exponenten

$$p - s : s = a : b$$

abgeleitet. Man entnimmt hieraus die Behauptung.

5. Unter den Gliedern des Binomiums hat dasjenige den grössten Werth, worin die Exponenten im geraden Verhältnisse mit ihren zugehörigen Grundgrössen stehen.

Ist der Exponent eine Zahl, die sich nach dem Verhältnisse der Grundgrösse nicht genau in zwei ganze Zahlen zerlegen lässt, so wird dasjenige Glied den grössten Werth erhalten, in welchem die Exponenten sich diesem Verhältnisse am meisten nähern. Ist $a = b$, und der Exponent eine ungerade Zahl, so entstehen bekanntlich zwei einander gleiche Glieder, die zugleich Maxima sind. Diess folgt aus dem angegebenen Satze. Aus dem Gesagten entnehmen wir für die oben vorgelegte Frage folgende Antwort.

6. Werden p Versuche angestellt, bei welchen nur zwei Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ sich im einzelnen Versuche gegenseitig ausschliessen, eintreffen können; so ist unter allen Verbindungen diejenige die wahrscheinlichste, worin die Anzahlen der Wiederholungsfälle im geraden Ver-

hältnisse mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten stehen.

§. 3.

Von dem Falle, worin zwei Ereignisse mit einander in Verbindung treten, gehen wir zu dem, worin drei und mehr sich miteinander verbinden, über.

Werden p Versuche angestellt, worin drei Ereignisse, mit den besondern Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$ im einzelnen Falle, die sich zur Einheit ergänzen, eintreffen können, so fragt es sich, welches ist diejenige Verbindung, in welcher diese Ereignisse am wahrscheinlichsten zusammentreten werden?

Die Beantwortung dieser Frage hängt davon ab, dass wir dasjenige Glied bestimmen, welchem unter den Gliedern des Trinomiums $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right)^p$ der grösste Werth zukommt. Wir führen zu dem Ende das Trinomium auf das Binomium zurück, wornach ist

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right)^p = \left(\frac{a}{m} + \frac{x}{m}\right)^p$$

Nun ist nach Nr. 5 §. 2 mit dem Gliede

$$\frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,......\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,....\,n\,.\,1\,.\,2\,...\,r} \cdot \frac{a^n}{m^n} \cdot \frac{x^r}{m^r}$$

der grösste Werth verbunden, wenn $n : r = a : x$ und $n + r = p$ ist, der begleitende Factor $\frac{x^r}{m^r}$ ist aber selbst ein Binomium, das $(r + 1)$ Glieder enthält, worunter selbst wieder nach den nämlichen Bestimmungen ein Grösstes auftritt. Dieses ist

$$\frac{(p-n)\,(p-n-1)\,.....\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,s\,.\,1\,.\,2\,.....\,t} \cdot \frac{b^s\,.\,c^t}{m^{p-n}}$$

wenn $s : t = b : c$ und $s + t = p - n$ ist. Führen wir diess in den vorhergehenden Ausdruck ein, so erhalten wir für dasjenige Glied, dessen Werth ein Maximum ist

$$\frac{p(p-1).(p-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots n.1.2\ldots s.1.2\ldots t} \cdot \frac{a^n.b^s.c^t}{m^p}$$

wenn $a + b + c = m$; $n + s + t = p$ und $n : s : t = a : b : c$ ist.

Auf die nämliche Weise, wie der Uebergang von dem grössten Gliede des Binomiums auf das grösste unter den Gliedern des Trinomiums gewonnen wurde, wird auch der von dem grössten Gliede des Trinomiums auf das grösste des Quadrinomiums gewonnen. Der Uebergang ist allgemein. Es hat also unter den Gliedern des Polynomiums $\left(\frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_3}{m} + \ldots + \frac{a_n}{m}\right)^p$ das Glied von der Form

$$\frac{p(p-1)(p-2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.2.1}{1.2\ldots\alpha_1.1.2.3\ldots\alpha_2\ldots 1.2\ldots\alpha_n} \cdot \frac{a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}.a_3^{\alpha_3}\ldots\ldots a_n^{\alpha_n}}{m^p}$$

den grössten Werth. Wenn $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \ldots \alpha_n = a_1 : a_2 : a_3 \ldots a_n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots \alpha_n = p$ und $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = m$ ist. Hieraus folgt das allgemeine Gesetz:

7. Unter den Gliedern des Polynomiums hat dasjenige den grössten Werth, worin die Exponenten im geraden Verhältnisse zu ihren Grundgrössen stehen.

Die vorgelegte Frage beantwortet sich hiernach so:

8. Werden p Versuche angestellt, worin n Ereignisse mit den besonderen, sich zur Einheit ergänzenden, Wahrscheinlichkeiten $\frac{a_1}{m}$, $\frac{a_2}{m}$, $\frac{a_3}{m}$, ... $\frac{a_n}{m}$ im einzelnen Falle eintreffen können, so ist diejenige Verbindung der Ereignisse das wahrscheinlichste Ereigniss, worin die Anzahl der Wiederholungsfälle der

einzelnen Ereignisse im geraden Verhältnisse mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten steht.

§. 4.

Nun vergleichen wir die wahrscheinlichsten Ereignisse selbst untereinander, und fragen: Welches Ereigniss ist unter diesen das wahrscheinlichste?

Zu dem Ende betrachten wir zuerst zwei Ereignisse. Das wahrscheinlichste Ereigniss für n m Versuche ist durch den Ausdruck

$$\frac{nm(nm-1)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots\ldots na.1.2\ldots\ldots nb} \cdot \frac{a^{na}.b^{nb}}{m^{nm}}$$

wenn die Zahl der Versuche $nm = n(a+b)$ und die Wahrscheinlichkeiten im einzelnen Falle wie oben $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = 1$ sind. Werden $nm+2$ Versuche gemacht, so ist das wahrscheinlichste Ereigniss durch

$$\frac{(nm+2)\quad(nm+1)\quad nm\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots\ldots na(na+1)1.2\ldots\ldots nb(nb+1)} \cdot \frac{a^{na+1}.b^{nb+1}}{m^{nm+2}}$$

bestimmt. Bringt man das Verhältniss zwischen beiden Ausdrücken auf die einfachste Gestalt und löst man m in seine Bestandtheile auf, so hat man für den Uebergang von irgend einer Anzahl Wiederholungsversuche auf eine um zwei grössere Anzahl folgendes Verhältniss

$$1 : 1 - \frac{a^2(an+1) + b^2(bn+1)}{(a^2+2ab+b^2)(an+1)(bn+1)}$$

da nun der begleitende Bruch ein Bruch ist, dessen Nenner offenbar grösser als der Zähler ist, so erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeiten der wahrscheinlichsten Ereignisse im Abnehmen begriffen sind, wenn die Zahl der Versuche zunimmt.

Die Schlüsse, welche das Fallen der Werthe der wahrscheinlichsten Ereignisse begründen, wenn zwei Ereignisse mit einander in

Verbindung treten, lassen sich leicht auf die Fälle übertragen, wenn drei und mehr Ereignisse sich mit einander verbinden. Sind nämlich die Wahrscheinlichkeiten für drei Ereignisse $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = 1$, ist ferner $\frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{g}{m}$ und werden die Werthe der wahrscheinlichsten Ereignisse für nm und $nm + 3$ Wiederholungsversuche verglichen, so ist nach dem Gesagten das Verhältniss der Werthe

$$\frac{nm(nm-1)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots\ldots na.1.2.3\ldots\ldots ng} \cdot \frac{a^{na}.g^{ng}}{m^{nm}} : \frac{(nm+3)(nm+2)\ldots\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots\ldots(na+1).1.2\ldots\ldots(ng+2)} \cdot \frac{a^{na+1}.g^{ng+2}}{m^{nm+3}}$$

im Fallen begriffen. Nun vertritt $\frac{g}{m}$ die Stelle zweier Wahrscheinlichkeiten, die denselben Gesetzen unterliegen, deren Werth durch

$$\frac{ng(ng-1)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots\ldots nb.1.2\ldots nc} \cdot \frac{b^{nb}.c^{nc}}{m^{ng}} : \frac{(ng+2)(ng+1)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2\ldots(nb+1).1.2\ldots\ldots(nc+1)} \cdot \frac{b^{nb+1}.c^{nc+1}}{m^{ng+2}}$$

ausgedrückt und gleichfalls im Fallen begriffen ist; demnach müssen die aus allen zusammen gesetzten Ausdrücke

$$\frac{nm\quad(nm-1)\ldots\ldots 3\;.\;2.1}{1\;.\;2\ldots\ldots na\;.\;1\;.\;2\ldots\;\;nb\;.\;1.2\ldots nc} \cdot \frac{a^{na}\;.\;b^{nb}\;.\;c^{nc}}{m^{nm}}$$
$$: \frac{(nm+3)(nm+2)\qquad(nm+1)\;\ldots\ldots\;3.2.1}{1.2\;\ldots\;(na+1).1.2\ldots\;(nb+1).1.2\ldots\ldots(nc+1)} \cdot \frac{a^{na+1}\;.\;b^{nb+1}\;.\;c^{nc+1}}{m^{nm+3}}$$

ein Verhältniss bezeichnen, das noch stärker im Fallen begriffen ist. Hiebei ist $a+b+c = m$, und also $na+nb+nc = nm$. Diesem Gesetze unterliegen auch die Fälle, worin mehrere Ereignisse sich verbinden.

Zugleich folgt hieraus für die Vergleichung der Werthe der wahrscheinlichsten Ereignisse bei gleicher Anzahl von Wiederholungsversuchen und zunehmender Zahl der Ereignisse, dass

$$\frac{nm(nm-1)\ldots.3.2.1}{1.2\ldots.na.1.2\ldots ng}\cdot\frac{a^{na}.g^{ng}}{m^{nm}} > \frac{nm\quad(nm-1)\ldots.3\ .2.1}{1.2\ldots na.1.2\ldots nb.1.2\ldots nk}$$
$$\cdot\frac{a^{na}.b^{nb}.k^{nk}}{m^{nm}} > \frac{nm\quad(nm-1)\quad\ldots\ldots.\quad 3\ .2.1}{1.2\ldots.na.1.2\ldots.nb.1.2\ldots nc.1.2\ldots nh}$$
$$\cdot\frac{a^{na}.b^{nb}.c^{nc}.h^{nb}}{m^{nm}}$$

u. s. w. ist, wenn $m = a+g = a+b+c = a+b+c+h$ u. s. w. ist. Denn es liegt vor Augen, dass $\frac{g^{ng}}{m^{ng}} > \frac{ng(ng-1)\ldots.3.2.1}{1.2..nb.1.2\ldots nk}$ $\cdot\frac{h^{nb}.k^{nk}}{m^{ng}}$, ferner dass $\frac{k^{nk}}{m^{nk}} > \frac{nk(nk-1)\ldots.3.2.1}{1.2\ldots nc.1.2\ldots nh}\cdot\frac{c^{nc}.h^{nh}}{m^{nk}}$ u. s. w. ist.

Benutzen wir hiezu die bekannte kurze Bezeichnung für Fakultäten: $1.2.3.4\ldots\ldots x = 1^{x|1} = x^{x|-1}$ so gewinnen wir folgende Zusammenstellungen

$$\frac{1^{p|1}\ .\ a^{\alpha}\ .\ b^{\beta}\ \ldots.\ n^{\nu}}{1^{\alpha|1}\ .\ 1^{\beta|1}\ldots 1^{\nu|1}\ .\ m^p} : \frac{1^{p+1|1}\ .\ a^{\alpha+1}\ .\ b^{\beta}\ \ldots.\ n^{\nu}}{1^{\alpha+1|1}\ .\ 1^{\beta|1}\ \ldots.\ 1^{\nu|1}\ .\ m^p}$$
$$: \frac{1^{p+2|1}\ .\ a^{\alpha+1}\ .\ b^{\beta+1}\ .\ c^{\gamma}\ \ldots.\ n^{\nu}}{1^{\alpha+1|1}\ .\ 1^{\beta+1|1}\ .\ 1^{\gamma|1}\ \ldots\ n^{\nu}\ .\ m^{p+2}} : \ldots.$$

und

$$\frac{1^{p|1}\ .\ a^{\alpha}\ .\ b^{\beta}}{1^{\alpha|1}\ .\ 1^{\beta|1}\ .\ m^p} : \frac{1^{p|1}\ .\ a^{\alpha}\ .\ b^{\beta}\ .\ c^{\gamma}}{1^{\alpha|1}\ .\ 1^{\beta|1}\ .\ c^{\gamma|1}\ .\ m^p} : \frac{1^{p|1}\ .\ a^{\alpha}\ .\ b^{\beta}\ .\ c^{\gamma}\ .\ d^{\delta}}{1^{\alpha|1}\ .\ 1^{\beta|1}\ .\ 1^{\gamma|1}\ .\ 1^{\delta|1}\ .\ m^p} : \ldots.$$

Die Glieder dieser Reihen convergiren. Die Bedingungsgleichungen für die erste Reihe sind $a+b+c+\ldots+n = m$ und $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu = p$. Die für die zweite sind der Reihe nach $a+b = m$ und $\alpha+\beta = p$; $a+b+c = m$ und $\alpha+\beta+\gamma = p$ u. s. w. bei unveränderlichem m und p. In beiden gilt $a : b : c : \ldots.. : n = \alpha : \beta : \gamma : \ldots. : \nu$.

Hieraus fliessen folgende Sätze.

9. Werden mehrere Versuche angestellt, worin n Ereignisse mit den besonderen, sich zur Einheit ergänzenden Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}, \ldots. \frac{n}{m}$

im einzelnen Falle eintreffen können; so wird das wahrscheinlichste Ereigniss um so eher eintreffen, je weniger Versuche, und um so weniger, je mehr Versuche angestellt werden.

10. Wird unter den nämlichen Bedingungen, wie vorhin, eine bestimmte Anzahl von Versuchen angestellt; so wird das wahrscheinlichste Ereigniss um so eher eintreffen, je kleiner die Zahl der möglichen Ereignisse ist, und um so weniger, je grösser diese ist.

Beide Sätze führen zu folgendem dritten.

11. Werden unter den genannten Bedingungen Versuche angestellt, so wird das wahrscheinlichste Ereigniss um so eher eintreffen, je geringer die Zahl der Versuche und der möglichen Ereignisse ist, und um so weniger, je grösser die Anzahl der Versuche und möglichen Ereignisse ist.

Es ist überflüssig zu erinnern, dass die Zahl der anzustellenden Versuche immer so gross wenigstens seyn muss, dass das Verhältniss $a:b:c:\ldots.\ n = \alpha:\beta:\gamma:\ldots.\ \nu$ statt finden kann *).

---

*) Von den in den §§. 2—4 aufgestellten und bewiesenen Sätzen bemerken wir den Nr. 5, von dem wir wissen, dass er schon früher aufgestellt wurde. Er erscheint in dem Traité du calcul des probb. p. S. F. Lacroix Paris 1816 §. 27 Pag. 41 und 59 mit einem Beweise, der uns unzulänglich scheint. Von den übrigen Sätzen ist uns nicht bekannt, dass sie schon von anderen Mathematikern mitgetheilt worden sind.

II.

§. 5.

In einer Urne sind an verschiedene Kugeln von einer Farbe, bn verschiedene von einer zweiten enthalten. Man nimmt $p = a + b$ Kugeln heraus. Welche Mischung wird unter den gezogenen Kugeln am wahrscheinlichsten zu erwarten seyn?

Die Beantwortung der Frage verlangt, dass die gesammte Kugelanzahl in zwei Abtheilungen gebracht werden solle, wovon die eine p, die andere aber die übrigen enthält. Unter den gezogenen seyen x Kugeln der ersten und y der andern Farbe enthalten, welche die Eigenschaft haben der Frage ein Genügen zu leisten; so ist die Zahl der hiebei möglichen Fälle durch den Ausdruck

$$\frac{an(an-1)(an-2)\ldots\ldots 3.2.1 \;.\; bn(bn-1)(bn-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots x.1.2.3\ldots\ldots(an-x)\;.\;1.2.3\ldots\ldots y.1.2.3\ldots\ldots(bn-y)}$$

den wir als bekannt voraussetzen, bestimmt. Nun ist möglich, dass die gezogenen Kugeln sämmtlich nur der einen oder der andern Farbe angehören; oder dass sich $p - 1$ von der einen und 1 von der andern Farbe u. s. w. zeigen. Jedem besonderen Falle wird ein besonderer Werth entsprechen. Es fragt sich also: Welchem unter allen Fällen entspricht der grösste Werth? Diess wird sich dadurch beantworten, dass wir bestimmen, wann der Werth der vorstehenden Formel ein Maximum wird. Da x und y alle mögliche Werthe von 0 bis p durchlaufen müssen, während sie sich immer zur Summe p ergänzen, so zieht man zur Vergleichung folgende Zusammenstellung:

$$\frac{an^{p|-1}}{1^{p|1}} : \frac{an^{p-1|-1}.bn^{1|-1}}{1^{p-1|1}.1^{1|1}} : \frac{an^{p-2|-1}.bn^{2|-1}}{1^{p-2|1}.1^{2|1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{an^{b-1|-1}.bn^{a+1|-1}}{1^{b-1|1}.1^{a+1|1}} : \frac{an^{b|-1}.bn^{a|-1}}{1^{b|1}.1^{a|1}} : \frac{an^{b+1|-1}.bn^{a-1|-1}}{1^{b+1|1}.1^{a-1|1}} \ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{an^{a-1|-1}.bn^{b+1|-1}}{1^{a-1|1}.1^{b+1|1}} : \frac{an^{a|-1}.bn^{b|-1}}{1^{a|1}.1^{b|1}} : \frac{an^{a+1|-1}.bn^{b-1|-1}}{1^{a+1|1}.1^{b-1|1}} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{an^{1|-1}.bn^{p-1|-1}}{1^{1|1}.1^{p-1|1}} : \frac{bn^{p|-1}}{1^{p|1}}$$

Die Vergleichung des ersten Gliedes mit dem zweiten, die des zweiten mit dem dritten gibt.

$$1 : 1 + \frac{na(b-1) + nb^2 + p - 1}{na - p + 1}; \quad 1 : 1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{(b-2)an + (b-1)bn + p - 3}{an - p + 2}$$

die des b^{ten} Gliedes mit dem $(b+1)^{ten}$ gibt

$$1 : 1 + \frac{(a^2 - b^2)n + (n+2)a - b + 1}{b(bn - a)}$$

die des $(b+1)^{ten}$ Gliedes mit dem $(b+2)^{ten}$ gibt

$$1 : 1 + \frac{(a^2 - (b+1)b)n + a - b - 1}{(bn - a + 1)(b+1)}$$

die des a^{ten} Gliedes mit dem $(a+1)^{ten}$ gibt

$$1 : 1 + \frac{an - (a - b - 1)}{(n-1)ab}$$

die des $(a+1)^{ten}$ Gliedes mit dem $(a+2)^{ten}$ gibt

$$1 : 1 - \frac{bn + a - b - 1}{(bn - b + 1)(a+1)}$$

die des vorletzten Gliedes mit dem letzten

$$1 : 1 - \frac{(p-1)bn + p - 1}{pan} \text{ *)}$$

Aus dieser Vergleichung geht hervor, dass unter der oben angenommenen Bedingung $a > b$ die Werthe der Glieder vom ersten beständig zunehmen, bis zu dem Gliede $\frac{a\,n^{a|-1} \cdot b\,n^{b|-1}}{1^{a|1} \cdot 1^{b|1}}$, in ihm den höchsten Werth erreichen und von ihm an bis zu dem letzten beständig fallen. Nun erkennt man leicht, dass dieses Glied derjenigen Kugelmischung zugehört, worin die Kugeln im geraden Verhältnisse wie ihre Anzahlen stehen, dass ferner die nämlichen Schlüsse gelten, wenn $2p = 2a + 2b$, oder $3p = 3a + 3b$ u. s. w. Kugeln, oder wenn auch eine Zahl r von Kugeln, die zwischen dem Vielfachen von p liegen und wobei das Verhältniss nicht mit gleicher Deutlichkeit hervortreten kann, gezogen wird. Diess führt zu dem Satze:

---

*) Die Glieder, worin $a > bn + 1$ werden sollte, fallen heraus, da sie nach der Natur der Combinationen nicht möglich sind.

12. **Wenn aus einer Urne, welche Kugeln von zwei verschiedenen Farben enthält, irgend eine Anzahl gezogen und nicht wieder zurückgeworfen wird, so wird diejenige Kugelmischung am wahrscheinlichsten sich zeigen, worin die Kugeln im geraden Verhältnisse zu ihren bezüglichen Anzahlen stehen.**

Hiebei kann p nicht so klein werden, dass das genannte Verhältniss unmöglicher Weise eintreten kann. Sind in einer Urne Kugeln von drei verschiedenen Farben an, bn, cn enthalten, und werden $p = a + b + c$ Kugeln herausgenommen, und fragt man nach der wahrscheinlichsten Mischung, so ist der Ausdruck

$$\frac{an(an-1)\ldots\ldots(an-x+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ x} \cdot \frac{bn(bn-1)\ldots(bn-y+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ y} \cdot \frac{cn(cn-1)\ldots(cn-z+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ z}$$

welcher die Zahl der möglichen Fälle bezeichnet, so zu bestimmen, dass sein Werth ein Maximum wird. Nimmt man zu dem Ende an, die Grösse x habe gegenüber von y und z die verlangte Eigenschaft, so muss der Werth ein Maximum seyn, wenn $y:z = b:c$ ist, dasselbe gilt von x und y gegenüber von z und von x und z gegenüber von y. Daher wird ein Maximum entstehen, wenn $x:z:z = a:b:c$ ist. Diese Schlüsse tragen sich leicht in das Allgemeine über. Sind daher in einer Urne Kugeln von mehreren verschiedenen Farben q, r, s, ... z und wird daraus eine Zahl p herausgenommen; so gibt der Ausdruck

$$\frac{1^{q|1} \ . \ 1^{r|1} \ . \ 1^{s|1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ 1^{z|1}}{1^{a_1|1} \ . \ 1^{a_2|1} \ . \ 1^{b_1|1} \ . \ 1^{b_2|1} \ . \ 1^{c_1|1} \ . \ 1^{c_2|1} \ \ldots\ldots \ 1^{k_1|1} \ . \ 1^{k_2|1}}$$

ein Maximum des Werthes an, wenn $a_1:b_1:c_1\ldots\ldots:k_1 = q:r:s\ldots\ldots:z$ und $a_1+a_2 = q$, $b_1+b_2 = r$, $c_1+c_2 = t$ ...... $k_1+k_2 = z$ und $a_1+b_1+c_1+\ldots+k_1 = p$ ist.

13. Wird daher aus einer Urne, welche Kugeln von mehreren verschiedenen Farben enthält, irgend eine Zahl herausgenommen; so ist diejenige Mischung der gezogenen Kugeln die wahrscheinlichste, worin die Kugeln im geraden Verhältniss zur Anzahl der bezüglichen Farben stehen.

Geht man nun zu dem Falle über, wenn Kugeln von mehreren verschiedenen Farben, in drei und mehr Abtheilungen auf dieselbe Art, wie vorhin, gebracht werden sollen, und fragt nach der wahrscheinlichsten Mischung, welche die Kugeln in den sämmtlichen Abtheilungen zeigen werden, so beantwortet sich die Frage leicht, wenn man sich die Kugeln zuerst in zwei Abtheilungen, dann die eine dieser Abtheilungen wieder in zwei u. s. f. gebracht denkt, und für jede Vertheilung den Werth als Maximum bestimmt, und dann die Maxima mit einander verbindet. Sind die Zahlen der verschiedenfarbigen Kugeln q, r, s, ... z; die Zahl der Abtheilungen n, so ist der Ausdruck

$$\frac{1^{q|1} \quad . \quad 1^{r|1} \quad . \quad 1^{s|1} \quad .... \quad 1^{z|1}}{1^{a_1|1}.1^{a_2|1}....1^{a_n|1}.1^{b_1|1}.1^{b_2|1}....1^{b_n|1}.1^{c_1|1}.1^{c_2|1}....1^{c_n|1}....1^{k_1|1}.1^{k_2|1}....1^{k_n|1}}$$

seinem Werthe nach ein Maximum, wenn

$a_1:b_1:c_1:....:k_1 = a_2:b_2:c_2:....:k_2 = a_3:b_3:c_3:....:k_3 = ... = q:r:s:....z$ u. $a_1+a_2+a_3...+a_n=q$; $b_1+b_2+b_3+...+b_n=r$; $c_1+c_2+c_3+...c_n=s...$ $k_1+k_2+k_3+.....k_n = z$ ist. Diess führt zu dem allgemeinen Satze.

14. Werden aus einer Urne, worin Kugeln von verschiedenen Farben q, r, s, ... z enthalten sind, die Kugeln sämmtlich oder zum Theil herausgenommen und in n Abtheilungen gebracht; so wird diejenige Mischung der Kugeln die wahrscheinlichste seyn, worin die Kugeln im geraden Verhältnisse zu ihren bezüglichen Farben stehen.

Sind die Kugelanzahlen so beschaffen, dass die Verhältnisse auf ganze Zahlen führen, so wird der Satz deutlich hervortreten. Ist diess nicht der Fall, so wird diejenige Mischung als das wahrscheinlichste Ereigniss eintreten, welche sich diesem Verhältniss am meisten nähert.

Die Werthe der Wahrscheinlichkeiten, welche den wahrscheinlichsten Ereignissen zugehören, sind sämmtlich in dem allgemeinen Ausdrucke

$$W = \frac{1^{q|1} \cdot 1^{r|1} \cdot 1^{s|1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1^{z|1}}{1^{a_1|1} \cdot 1^{a_2|1} \ldots\ldots 1^{a_n|1} \cdot 1^{b_1|1} \cdot 1^{b_2|1} \ldots\ldots 1^{b_n|1} \ldots\ldots 1^{k_1|1} \cdot 1^{k_2|1} \ldots\ldots 1^{k_n|1}} \cdot \frac{1^{\alpha|1} \cdot 1^{\beta|1} \ldots\ldots 1^{\nu|1}}{1^{q+r+s+\ldots\ldots+z|1}}$$

worin ausser den zu der vorigen Formel angegebenen Bedingungsgleichungen auch noch folgende gelten $a_1+b_1+c_1+ \ldots\ldots +k_1 = \alpha$, $a_2+b_2+c_2+ \ldots\ldots +k_2 = \beta$, $a_3+b_3+c_3+ \ldots\ldots +k_3 = \gamma$, ... und $a_n+b_n+c_n+ \ldots\ldots +k_n = \nu$. Der Werth, welcher dieser Wahrscheinlichkeit entspricht, ist immer ein ächter Bruch.

§. 6.

Vergleicht man nun die Werthe der Wahrscheinlichkeiten für die wahrscheinlichsten Mischungen der gezogenen Kugeln untereinander, und geht bei unveränderlicher Kugelanzahl von der Vertheilung in zwei Abtheilungen zu der in drei und mehr über, so findet man leicht, dass die Wahrscheinlichkeiten im Fallen begriffen sind; denn setzt man den Werth der wahrscheinlichsten Mischung bei einer bestimmten, aus verschiedenen Farben zusammengesetzten Kugelanzahl, die in zwei Abtheilungen gebracht werden, und wovon die erste Abtheilung x Kugeln enthalten soll, W_1 und nimmt ferner an, dass nun auch die Kugeln der zweiten weiter in zwei Abtheilungen gebracht werden sollen, wodurch die Wahrscheinlichkeit W_2 erzeugt wird, so ist der Werth der letzten wahrscheinlichsten Mischung aus beiden Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzt und $W = W_1 . W_2$. Offenbar aber ist. $W_1 > W_1 . W_2$, wenn W_1 und W_2 ächte Brüche bedeuten. Das Gesagte gilt auch von Wahrscheinlichkeiten, die aus einer grössern Zahl Abtheilungen hervorgehen und ist allgemein. Es führt zu folgendem Satze.

15. Werden aus einer Urne, worin Kugeln von verschiedenen Farben q, r, s, ... z enthalten sind, die Kugeln sämmtlich oder zum Theil herausgenommen und in mehrere Abtheilungen gebracht; so wird die wahrscheinlichste Mischung um so eher eintreffen, je weniger, und um so weniger, je mehr Abtheilungen gemacht werden.

Vergleicht man die Werthe der Wahrscheinlichkeit für die wahrscheinlichsten Mischungen bei unveränderlicher Zahl der Abtheilungen und veränderlicher Zahl der Kugeln, so ergibt sich gleichfalls ein Fallen, wenn die Kugelzahl wächst. Diess zeigt sich schon bei den Wahrscheinlichkeiten der wahrscheinlichsten Mischungen, welche entstehen, wenn zwei verschieden farbige Kugelanzahlen $bn + an$ und $an + 1 + bn$ in zwei Abtheilungen gebracht werden. Sie führen auf folgendes Verhältniss

$$\frac{an^{a\mid -1} . bn^{b\mid -1}}{1^{a\mid 1} . 1^{b\mid 1}} . \frac{1^{a+b\mid 1}}{(an + bn)^{a+b\mid -1}} : \frac{(an+1)^{a+1\mid -1} . bn^{b\mid -1}}{1^{a+1\mid 1} . 1^{b\mid 1}}$$
$$. \frac{1^{a+b+1\mid 1}}{(an + 1 + bn^{a+b+1\mid -1}} = 1 : 1 - \frac{(n-1)b}{(a+1)(an+bn+1)}$$

welches offenbar im Fallen begriffen ist. Ein Gleiches gilt von den Wahrscheinlichkeiten, die aus den Vertheilungen in drei und mehr Abtheilungen hervor gehen. Hieraus zieht man:

16. Werden aus einer Urne, worin Kugeln von verschiedenen Farben q, r, s, ... z enthalten sind, Kugeln herausgenommen und in n Abtheilungen ge-

bracht, so wird die wahrscheinlichste Mischung um so eher eintreffen, je weniger, und um so weniger, je mehr Kugeln in jede Abtheilung aufgenommen werden.

Beide vereinigen sich in folgendem Satze.

17. Werden aus einer Urne, worin Kugeln von verschiedenen Farben q, r, s, ... z enthalten sind, Kugeln herausgenommen und in n Abtheilungen gebracht, so wird die wahrscheinlichste Mischung um so eher eintreffen, je weniger Abtheilungen gemacht und je weniger Kugeln in sie genommen, und um so weniger, je mehr Abtheilungen gemacht und je mehr Kugeln in sie aufgenommen werden.

§. 7.

Wir wenden uns nun zu einigen Anwendungen, und benutzen die Formel in §. 5 nach Nr. 13. Sind nämlich in einer Urne q verschiedene Kugeln von **einerlei** Farbe enthalten, und werden sie herausgenommen und in n verschiedene Abtheilungen gesondert, und fragt man: wie muss die Zahl der in den Abtheilungen enthaltenen Kugeln beschaffen seyn um die grösstmögliche Zahl der Fälle zu erhalten, so hat man $r = s \ldots . = z = \ldots . 0$ wodurch auch $b_1, b_2, \ldots b_n$; $c_1, c_2, c_3, \ldots . c_n$; ..... $k_1, k_2, \ldots . k_n$ in 0 übergeht, und ferner zu berücksichtigen, dass $1^{0|1} = 1$ ist. Hiernach erhält man folgenden Ausdruck für die grösstmögliche Anzahl

$$\frac{q \ (q-1)\ (q-2) \quad \ldots\ldots \quad 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2 \ldots a_1\,.\,1\,.\,2 \ldots a_2\,.\,1\,.\,2 \ldots a_3 \ldots\ldots 1\,.\,2 \ldots a_n}.$$

Unter der Bedingung, dass $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n$ und $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = q$ ist. Die zweite Bedingungsgleichung ist immer möglich; die erste nur wenn q ein Vielfaches von a oder

$n a = q$ ist. Betrachtet man die Zahlen als n fache voneinander, so erzeugen sie die Rest $0, 1, 2, \ldots n - 1$; und demnach hat man zu bestimmen, welchem Gesetze die Maxima, die hiedurch erzeugt werden, unterliegen. Geht man nun zuerst von der Abtheilung von q Kugeln in zwei Abtheilungen aus, so sind die in den Abtheilungen enthaltenen Kugeln entweder gleich, oder um die Einheit verschieden, je nachdem q eine gerade oder ungerade Zahl ist. Geht man hievon auf die Vertheilung der q Kugeln in drei Abtheilungen über, so ergibt sich leicht für Auffindung des grösstmöglichen Werthes, dass immer zwei Abtheilungen gleiche, oder um die Einheit verschiedene Anzahlen von Kugeln haben müssen. Dasselbe folgert sich leicht für die Vertheilung in vier und mehr Abtheilungen. Diess führt zu der allgemeinen Behauptung.

18. Werden q unter sich verschiedene Kugeln einerlei Art in n Abtheilungen gebracht, so wird diejenige Vertheilung den grössten Werth bieten, worin die Kugelzahlen in den einzelnen Abtheilungen entweder gleich, oder nur sämmtlich nur die Einheit verschieden sind.

Halten wir nun die so eben gefundene Formel

$$\frac{q (q - 1) (q - 2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 \ldots a_1 . 1 . 2 \ldots a_2 . 1 . 2 \ldots a_3 \ldots . 1 . 2 \ldots a_n}$$

mit dem Satze 18 fest, so kann die Formel nur dann einen grössten Werth liefern, wenn der Nenner $1^{a_1|1} . 1^{a_2|1} . 1^{a_3|1} \ldots . 1^{a_n|1}$ ein Minimum ist. Jede andere Gestaltung in den Fakultäten des Nenners muss einen kleineren Werth in der Formel und also einen grössern durch sich selbst erzeugen. Sind nun die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ unter sich veränderlich, so darf diess nur in so ferne geschehen als immer $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = q$ ist.

Geht man daher von dem Gesichtspunkte der Zerfällung der Zahlen in ihre Bestandtheile, wie dieses von Euler im 16 Kap. seiner

Einleitung in die Analysis des Unendlichen und Nov. Comment. Acad. Scient. imp. petropol. Tom III. 1750 und 1751 pag. 125 seqq. u. a. geschehen, und von mir in der ersten Untersuchung meiner Forschungen in der höheren Analysis (Heidelberg bei Osswald 1831) weiter verfolgt wurde, so zieht man hieraus folgende merkwürdige Sätze.

19. Wenn Zahlen in ihre Bestandtheile zerlegt und letztere als höchste Factoren von Fakultäten betrachtet werden, so bilden die Producte der zugehörigen Fakultäten ein Maximum, wenn die Unterschiede der höchsten Factoren ein Maximum sind; ein Minimum aber, wenn diese Unterschiede ein Minimum sind (die Einheit oder 0).

20. Wenn Zahlen in ihre Bestandtheile zerlegt und letztere als höchste Factoren von Fakultäten betrachtet werden; so findet unter den Maximis, welche die Producte der Fakultäten erzeugen, ein Maximum statt, wenn die Zerfällungsklasse ein Minimum ist, ein Minimum aber, wenn die Zerfällungsklasse ein Maximum ist.

Der gleiche Satz gilt von den Maximis.

Der Vollständigkeit und Vergleichung wegen stellen wir folgende zwei, mit ihnen in Verbindung stehende, zur Seite, die wir in unsern Forschungen p. 67 u. f. schon mitgetheilt haben.

21. Wenn Zahlen in ihre Bestandtheile zerlegt und die hiedurch erhaltenen Bestandtheile als Faktoren betrachtet werden, so erzeugen ihre Producte ein Maximum, wenn die Unterschiede der Faktoren ein Minimum; ein Minimum aber, wenn die Unterschiede ein Maximum sind.

22. Wenn Zahlen in ihre Bestandtheile zerfällt und letztere als Faktoren betrachtet werden, so findet ein Maximum unter den Maximis statt, wenn in einem Produkte nur die Zahl 3 oder die grösstmögliche Anzahl der 3 vorkommt; ein Minimum aber, wenn die Zerfällungsklasse ein Maximum ist. Dagegen findet unter den Minimis ein Maximum statt, wenn die Zerfällungsklasse ein Maximum; ein Minimum aber, wenn die Zerfällungsklasse ein Maximum ist.

Zur Verdeutlichung diene folgendes Beispiel:

Klasse.	Maxima und Minima für die Zerfällungen der Zahl 9 in Fakultäten nach den verschiedenen Klassen.			
	Maxima.		Minima.	
1.	$1^{9\|1}$	$= 362880$	$1^{9\|1}$	$= 362880$
2.	$1^{8\|1} . 1^{1\|1}$	$= 40320$	$1^{4\|1} . 1^{5\|1}$	$= 2880$
3.	$1^{7\|1} . 1^{1\|1} . 1^{1\|1}$	$= 5040$	$1^{3\|1} . 1^{3\|1} . 1^{3\|1}$	$= 216$
4.	$1^{6\|1} . 1^{1\|1} . 1^{1\|1} . 1^{1\|1}$	$= 720$	$1^{2\|1} . 1^{2\|1} . 1^{2\|1} . 1^{3\|1}$	$= 48$
5.	$1^{5\|1} . 1^{1\|1} . 1^{1\|1} . 1^{1\|1} . 1^{1\|1}$	$= 120$	$1^{2\|1} . 1^{2\|1} . 1^{2\|1} . 1^{2\|1} . 1^{1\|1}$	$= 16$
6.	1.2.3.4 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 24	1.2 . 1.2 . 1.2 . 1 . 1 . 1	= 8
7.	1.2.3 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 6	1.2 . 1.2 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 4
8.	1.2 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 2	1.2 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 2
9.	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 1	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 1

Klasse.	Maxima und Minima für die Zerfällungen der Zahl 9 in Faktoren nach den verschiedenen Klassen.			
	Maxima.		Minima.	
1.	9	= 9	9	= 9
2.	4 . 5	= 20	1 . 8	= 8
3.	3 . 3 . 3	= 27	1 . 1 . 7	= 7
4.	2 . 2 . 2 . 3	= 24	1 . 1 . 1 . 6	= 6
5.	1 . 2 . 2 . 2 . 2	= 16	1 . 1 . 1 . 1 . 5	= 5
6.	1 . 1 . 1 . 2 . 2 . 2	= 8	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 4	= 4
7.	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 2 . 2	= 4	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 3	= 3
8.	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 2	= 2	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 2	= 2
9.	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 1	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1	= 1

§. 8.

Die Vertheilungen der Karten bei den gewöhnlichen Spielen unterliegen den in §. 5—7 aufgefundenen Gesetzen.

Im Lombre-Spiele werden 40 Karten unter drei Spieler so vertheilt, dass jeder Spieler 9 bekommt und 13 Karten bis zur zweiten Vertheilung (Kauf) zurückbehalten werden. Diese Vertheilungsart ist nicht die günstigste, denn sie gibt nicht die grösstmögliche Anzahl von Combinationen. Um diese zu erhalten, müssten jedem Spieler 10 Karten gegeben und 10 im Rückstand behalten werden. Die Zahl der Fälle, welche das Lombre bei der gewöhnlichen Vertheilung bietet, verhält sich zu der grösstmöglichen Anzahl wie

$$\frac{1^{40|1}}{1^{9|1} \cdot 1^{9|1} \cdot 1^{9|1} \cdot 1^{13|1}} : \frac{1^{40|1}}{(1^{10|1})^4} = 1000 : 1716$$

so dass durch diese veränderte Vertheilungsart die Zahl der wirklichen Fälle noch nicht $\frac{2}{3}$ von der grösstmöglichen Anzahl erreicht. Da nun die Zahl der Fälle im Lombre-Spiele schon so ausserordentlich gross ist (sie beträgt 5484‴103579″339825′440000), so hat dadurch das gesellige Vergnügen keinen Verlust erlitten, denn, wenn auch drei Spieler täglich 3 Stunden Zeit diesem Spiele widmeten und bei sehr schnellem Spiele 200 Spiele täglich spielten (wobei auf ein jedes Spiel noch nicht eine Minute Zeit gerechnet ist), so müssten sie 75124″706566′298979 Jahre leben, wenn sie ihren Zweck erreichen wollten. Wenn nun die gewöhnliche Vertheilungsart an Zahl der angegebenen Fälle nachsteht, so erhöht sie doch durch möglichen Kauf und besondere Spielnüancen sehr das Interesse und den Reiz bei dem Spiele.

Eine bedeutendere Beschränkung hat das Piquet-Spiel erlitten, bei welchem unter zwei Spieler die Karten so vertheilt werden, dass jedem zwölf, und die übrigen in zwei Haufen zu 5 und 3 (der erste zum Kaufe des ersten, der zweite zum Kaufe des zweiten Spielers) zurückgelegt werden. Würden die Karten in vier Abtheilungen, jede zu 8 Karten, gebracht; so würden sich die verschiedenen Fälle wie

$$\frac{1^{32|1}}{(1^{12|1})^2 \cdot 1^{5-1} \cdot 1^{3|1}} : \frac{1^{32|1}}{(1^{8|1})^4}. = 784 : 49005$$

verhalten, und die Zahl der Fälle würde sich um das 61fache steigern.

Das Whistspiel ist dasjenige, welche die grösstmögliche Anzahl verschiedener Spielfälle, die bei einer Vertheilung von 52 Karten unter vier Spieler vorkommen können, aufweist, denn die Karten werden zu gleichen Anzahlen vertheilt *).

III.

§. 9.

Von zwei Urnen enthalte jede irgend eine Anzahl Kugeln von zweierlei Farben (weisse und schwarze). Zu gleicher Zeit wird aus jeder Urne eine Kugel herausgenommen und in die andere geworfen, und diess p mal wiederholt. Es fragt sich, wie wird nach p Wiederholungen das Verhältniss der verschieden farbigen Kugeln am Wahrscheinlichsten beschaffen seyn?

Wir beantworten diese Frage auf folgende allgemeine Art. Die erste Urne enthalte m, die andere n Kugeln. Die Zahl der weissen Kugeln, welche nach der x^{ten} Ziehung in der ersten Urne enthalten sind, werde durch A_1, x; die, welche nach derselben Ziehung in der zweiten Urne enthalten sind, durch A_2, x bezeichnet, so bezeichnen $A_1, x-1$ und $A_2, x-1$ die Zahl der Kugeln von derselben Farbe, welche durch die vorhergehende Ziehung herbeigeführt wurde. Ist

*) Von den in §. 5—8 mitgetheilten Sätzen ist uns nicht bekannt, dass sie schon früher aufgestellt wurden, weswegen keine historische Nachweisung erscheint.

das Verhältniss unter den Kugeln der weissen Farbe bekannt, so ist auch mittelbar das der andern Farbe gegeben; denn die Kugeln von beiden Farben unterliegen gleichen Veränderungen in der Mischung, nicht nur in ihrem Gegensatze zu einander, sondern auch bei dem Uebergang von jeder Ziehung zu der nachfolgenden. Ist nun die $(x-1)^{te}$ Ziehung geschehen, so fragt sich: Welche Veränderung führt die nachfolgende Ziehung in der Mischung der weissen Kugeln wahrscheinlicher Weise herbei?

Wird eine Kugel aus der ersten Urne genommen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade eine weisse unter den m Kugeln gezogen werde $\frac{1}{m} A_{1}, x-1$ und demnach ist die muthmassliche Zahl der darin zurückgebliebenen weissen

$$A_{1}, x-1 - \frac{1}{m} A_{1}, x-1 = \frac{m-1}{m} . A_{1}, x-1.$$

Diese Zahl vergrössert sich um eine Kugel, die aus der zweiten Urne in die erste hat übergehen können. Der Werth dieser Möglichkeit ist, da die zweite Urne n Kugeln enthält, $\frac{1}{n} A_{2}, x-1$, und demnach für die muthmasliche Anzahl der weissen Kugeln, welche durch die x^{te} Ziehung in die erste Urne gekommen sind

$$23. \quad A_{1}, x = \frac{m-1}{m} A_{1}, x-1 + \frac{1}{n} A_{2}, x-2$$

Auf dieselbe Weise bestimmt sich die muthmasliche Anzahl der weissen Kugeln in der zweiten Urne. Diejenige Zahl, welche zurückgeblieben ist, wird seyn

$$A_{2}, x-1 - \frac{1}{n} A_{2}, x-1 = \frac{n-1}{n} A_{2}, x-1$$

die Zahl, welche hat dazu kommen können, ist ihrem Werthe nach $\frac{1}{m} A_{1}, x-1$, demnach ist

24. $A_2, x = \frac{n-1}{n} A_2, x-1 + \frac{1}{m} A_1, x-1$

Diese zwei Gleichungen sind zurücklaufend. Daher muss man die Zahl der vorhergehenden Ziehung kennen, um die der nachfolgenden zu finden. Keine ist bekannt, als die der ersten oder ursprünglichen Mischung. Daher muss man von dieser ausgehen, und alle spätern durchlaufen, um ein unabhängiges Gesetz zu finden. Nehmen wir nun an, die erste Urne enthalte a weisse (folglich $m-a$ schwarze) und die zweite b weisse (folglich $n-b$ schwarze) und führen die hieraus resultirenden Werthe für die erste, zweite, dritte u. s. w. Ziehung ein, so ergibt sich für die muthmaslichen Anzahlen der weissen Kugeln in den beiden Urnen, und zwar für die erste Ziehung

$$A_1, 1 = \frac{m-1}{m} \cdot a + \frac{b}{n}$$

$$A_2, 1 = \frac{n-1}{n} \cdot b + \frac{a}{n}$$

für die zweite Ziehung

$$A_1, 2 = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 a + \left(\frac{m-1}{m} + \frac{n-1}{n}\right) \frac{b}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{m}$$

$$A_2, 2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 b + \left(\frac{n-1}{n} + \frac{m-1}{m}\right) \frac{a}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{b}{n}$$

für die dritte Ziehung

$$A_1, 3 = \left(\frac{m-1}{m}\right)^3 a + \left[\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 + \frac{(m-1)(n-1)}{m \cdot n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \frac{b}{n}$$
$$+ \frac{1}{n} \left[2 \frac{m-1}{m} + \frac{n-1}{n}\right] \frac{a}{m} + \frac{1}{n \cdot m} \cdot \frac{b}{n}$$

$$A_2, 3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 b + \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)(m-1)}{n \cdot m} + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right] \frac{a}{m}$$
$$+ \frac{1}{m} \left[2 \frac{n-1}{n} + \frac{m-1}{m}\right] \frac{b}{n} + \frac{1}{n \cdot m} \cdot \frac{a}{m}$$

u. s. w. Das Gesetz, welches diesen Gleichungen zu Grunde liegt, ist ziemlich verwickelt, und führt bei grösserer Anzahl der Ziehungen zu äusserst weitläufigen Formen, weswegen wir es nicht weiter verfolgen, besonders da wir bei zweckmässiger Annahme der Kugelanzahlen sehr leicht auf allgemeine Gesetze kommen, aus denen wieder allgemeinere Schlüsse fliessen, die hieraus nur mühsam oder vielleicht gar nicht abzuleiten wären.

Nehmen wir nun die Gesammtzahl der Kugeln in jeder Urne gleich, also $m = n$, die weissen und schwarzen aber, wie vorher, verschieden an, so resultiren für die vorgelegten Fälle folgende Bestimmungen für die erste Ziehung

$$A_1, 1 = \frac{n-1}{n} a + \frac{b}{n}$$

$$A_2, 1 = \frac{n-1}{n} b + \frac{a}{n}$$

für die zweite Ziehung

$$A_1, 2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 a + 2 \frac{n-1}{n^2} b + \frac{a}{n^2}$$

$$A_2, 2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 b + 2 \frac{n-1}{n} a + \frac{b}{n^2}$$

für die dritte Ziehung

$$A_1, 3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 a + 3 \frac{(n-1)^2}{n^3} b + 3 \frac{n-1}{n^3} a + \frac{b}{n^3}$$

$$A_2, 3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 b + 3 \frac{(n-1)^2}{n^3} a + 3 \frac{n-1}{n^3} b + \frac{a}{n^3}$$

u. s. w. woraus sich leicht das allgemeine Gesetz für die Anzahl der Kugeln, welche die p^{te} Ziehung herbeiführt, ergibt.

$$25. \quad A_1, p = \frac{1}{n^p} \Big((n-1)^p a + \frac{p}{1} (n-1)^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 1} (n-1)^{p-2} a + \frac{p(p-1(p-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (n-1)^{p-3} b + \ldots\ldots \Big)$$

$$A_2, p = \frac{1}{n^p} \Big((n-1)^p b + \frac{p}{1} (n-1)^{p-1} a + \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 2} (n-1)^{p-2} b + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (n-1)^{p-3} a + \ldots\ldots \Big)$$

§. 10.

Von drei in einen Kreis gestellten Urnen enthält jede n Kugeln; die erste a, die zweite b, die dritte c weisse, die übrigen schwarze. Es wird zu gleicher Zeit aus jeder Urne eine genommen und in die nächstfolgende geworfen, und diess p mal fortgesetzt. Es fragt sich: Wie wird nach p Wiederholungen das Verhältniss der weissen Kugeln muthmaslich beschaffen seyn?

Die Bestimmung der muthmaslichen Anzahl der in jeder Urne enthaltenen Kugeln beruht darauf, dass man die Zahl der weissen Kugeln, welche nach einer Ziehung zurückgebliebenen sind, um diejenige, welche möglicher Weise dazu gekommen ist, vergrössert. Für die x^{te} Ziehung hat man daher folgende Gleichungen

$$A_1, x = \frac{n-1}{n} A_1, x-1 + \frac{1}{n} A_3, x-1$$

$$A_2, x = \frac{n-1}{n} A_2, x-1 + \frac{1}{n} A_1, x-1$$

$$A_3, x = \frac{n-1}{n} A_3, x-1 + \frac{1}{n} A_2, x-1$$

Geht man auch hier von dem ursprünglichen Verhältniss der Kugelanzahlen aus und zu dem, welches aus den späteren Ziehungen erwachsen wird, über, so hat man für die erste Ziehung

$$A_1, 1 = \frac{n-1}{n} a + \frac{c}{n}; \quad A_2, 1 = \frac{n-1}{n} b + \frac{a}{n}; \quad A_3, 1 = \frac{n-1}{n} c + \frac{b}{n}$$

für das der zweiten Ziehung

$$A_1, 2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 a + 2\frac{n-1}{n^2} c + \frac{b}{n^2}$$

$$A_2, 2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 b + 2\frac{n-1}{n^2} a + \frac{c}{n^2}$$

$$A_3, 2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 c + 2\frac{n-1}{n^2} b + \frac{a}{n^2}$$

für das der dritten Ziehung

$$A_1, 3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 a + 3\,\frac{(n-1)^2}{n^3}\,c + 3\,\frac{n-1}{n^3}\,b + \frac{a}{n^3}$$
$$A_2, 3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 b + 3\,\frac{(n-1)^2}{n^3}\,a + 3\,\frac{n-1}{n^3}\,c + \frac{b}{n^3}$$
$$A_3, 3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 c + 3\,\frac{(n-1)^2}{n^3}\,b + 3\,\frac{n-1}{n^3}\,a + \frac{c}{n^3}$$

u. s. w. Auch hieraus erkennt man leicht das allgemeine Gesetz. Es ist

26. $$A_1, p = \frac{1}{n^p}\left((n-1)^p a + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} c + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2} b + \ldots\ldots\right)$$
$$A_2, p = \frac{1}{n^p}\left((n-1)^p b + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} a + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2} c + \ldots\ldots\right)$$
$$A_3, p = \frac{1}{n^p}\left((n-1)^p c + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2} a + \ldots\ldots\right)$$

Die Schlüsse bleiben unverändert, wenn man vier und mehr Urnen auf die genannte Art mit einander in Verbindung bringt. Sind daher m Urnen in einen Kreis gestellt, wovon jede n Kugeln enthält und zwar der Reihe nach $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_m$ weisse, die übrigen schwarze, zieht man dann aus jeder eine Kugel und wirft sie in die folgende, und fragt, wie wird nach p Ziehung die Mischung am Wahrscheinlichsten beschaffen seyn, so geben folgende Gleichungen die Antwort:

27. $$A_1, p = \frac{1}{n^p}\left[(n-1)^p r_1 + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} r_m + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2} r_{m-1} + \ldots\ldots\right]$$
$$A_2, p = \frac{1}{n^p}\left[(n-1)^p r_2 + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} r_1 + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2} r_m + \ldots\ldots\right].$$

$$A_3, p = \frac{1}{n^p}\Big[(n-1)^p r_3 + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} r_2 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(n-1)^{p-2} r_1 + \ldots\ldots\Big]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_m, p = \frac{1}{n^p}\Big[(n-1)^p r_m + \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} r_{m-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(n-1)^{p-2} r_{m-2} + \ldots\ldots\Big]$$

Zugleich erkennt man leicht, dass die Gleichungen 23—26 nicht allein gelten, wenn in jeder Urne Kugeln von zwei verschiedenen Farben enthalten sind, sondern dass sie auch gelten, wenn Kugeln von drei und vier verschiedenen Farben darin enthalten sind, denn die Kugeln jeder Farbe werden sich nach gleichen Gesetzen muthmaslich vertheilen.

§. 11.

Die in den vorhergehenden §§. aufgefundenen Gleichungen lassen sich zweckmässiger nach den begleitenden Grössen a, b, c, ordnen. Hiernach hat man aus den Gleichungen 25 folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned} A_1, p = \; & \frac{a}{n^p}\Big[(n-1)^p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(n-1)^{p-2} \\ & \quad + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(n-1)^{p-4} \ldots\ldots\Big] \\ & + \frac{b}{n^p}\Big[\frac{p}{1}(n-1)^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)^{p-3} \\ & \quad + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(n-1)^{p-5} \ldots\ldots\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2, p = \; & \frac{b}{n^p}\Big[(n-1)^p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(n-1)^{p-2} + \ldots\ldots\Big] \\ & + \frac{a}{n^p}\Big[\frac{p}{1}(n-1)^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)^{p-3} + \ldots\ldots\Big] \end{aligned}$$

Die in den eckigen Klammern eingeschlossenen Glieder erscheinen als Glieder des Binomiums. Vervollständigt man sie und zieht die zur Vervollständigung nöthigen Glieder wieder ab, so lassen sie sich in folgende sehr kurze Ausdrücke zurückbringen.

28. $$A_1, p = \frac{a}{2n^p}\left[n^p + (n-2)^p\right] + \frac{b}{2n^p}\left[n^p - (n-2)^p\right]$$
$$= \frac{a}{2}\left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p\right] + \frac{b}{2}\left[1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p\right]$$
$$A_2, p = \frac{b}{2n^p}\left[n^p + (n-2)^p\right] + \frac{a}{2n^p}\left[n^p - (n-2)^p\right]$$
$$= \frac{b}{2}\left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p\right] + \frac{a}{2}\left[1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p\right]$$

die sich sehr gut zur Bestimmung der Grössen A_1, p, A_2, p, benützen lassen. Berücksichtigen wir nun, dass, wenn p eine sehr grosse, oder gar unendlich grosse Zahl bedeutet, $\left(\frac{n-2}{n}\right)^p = 0$ zu setzen ist, so hat man

$$A_1, p = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad A_2, p = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

Diess führt zu dem merkwürdigen Satze:

29. Sind in jeder von zwei Urnen n Kugeln, zum Theil weisse zum Theil schwarze, enthalten, und wird aus jeder gleichzeitig eine Kugel herausgenommen und in die andere geworfen, und diess lange fortgesetzt; so nähern sich die verschieden farbigen Kugeln immer mehr der Gleichheit, je länger diese Mischung fortgesetzt wird, oder die wahrscheinlichste Mischung der Kugeln ist die gleichheitliche.

Ordnen wir die Gleichungen 2 b auf dieselbe Weise, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
A_{1,p} = \frac{a}{n^p}\Big[& (n-1)^p + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(n-1)^{p-3} \\
& + \frac{p\,(p-1)\ldots\ldots(p-5)}{1\,.\,2\ldots\ldots6}(n-1)^{p-6} + \ldots\ldots \Big] \\
+ \frac{c}{n^p}\Big[& \frac{p}{1}(n-1)^{p-1} + \frac{p\,\ldots\,(p-3)}{1\,\ldots\,4}(n-1)^{p-4} \\
& + \frac{p\ldots\ldots(p-6)}{1.2\ldots7}(n-1)^{p-7} + \ldots\ldots\ldots \Big] \\
+ \frac{b}{n^p}\Big[& \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2} + \frac{p\ldots(p-4)}{1.2\ldots5}(n-1)^{p-5} \\
& + \ldots\frac{p\ldots(p-7)}{1.2\ldots8}(n-1)^{p-8} + \ldots\ldots \Big]
\end{aligned}
$$

Nennen wir nun die in den Klammern eingeschlossenen Reihen der Folge nach M_1, M_2, M_3, so erhalten wir folgende Darstellungen

$$A_{2,p} = \frac{b}{n^p} M_1 + \frac{a}{n^p} M_2 + \frac{c}{n^p} M_3$$

$$A_{3,p} = \frac{c}{n^p} M_1 + \frac{b}{n^p} M_2 + \frac{a}{n^p} M_3$$

Letztere sind nur durch die begleitenden Vorzahlen von ersteren verschieden; die Veränderungen, die sich an den eingeklammerten Horizontalreihen machen lassen, werden auch von letzteren gelten. Die Reihen brechen sämmtlich ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Auch hier suchen wir eine elegantere Darstellung. In der ersten Horizontalreihe fehlt das zweite und dritte, fünfte und sechste u. s. w. Glied der Binomialdarstellung. Wir nehmen sie vollständig an und eine Grösse φx zu Hülfe und fragen: Wie muss diese Hülfsgrösse beschaffen seyn, dass sie die genannten Glieder in der Reihe

$$
\begin{aligned}
(n-1+\varphi x)^p = (n-1)^p(\varphi x)^0 + \frac{p}{1}(n-)^{p-1}\varphi x + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p-2}(\varphi x)^2 \\
+ \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(n-1)^{p-3}(\varphi x)^3 + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

verschwinden macht? Sie muss die Eigenschaft haben, dass φx

$= (\varphi x)^2 = (\varphi x)^4 = \varphi x^5 = \ldots\ldots = 0$ und $(\varphi x)^3 = 1$, oder was dasselbe ist, $(\varphi x)^6 = (\varphi x)^9 = \ldots\ldots = 1$ wird. Die Auflösung der cubischen Gleichung $\varphi x^3 - 1 = 0$ gibt die Bedingungen an. Ihre Wurzeln sind bekanntlich $1, -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, und die 0^{te}, 3^{te}, 6^{te} .... Potenz jeder dieser Wurzeln erzeugt die Einheit, während die übrigen durch ihre Vereinigung, auch in Verbindung mit andern Grössen, 0 erzeugen oder verschwinden. Führt man nun diese Werthe der Reihe nach statt φx ein, so gewinnt man drei Reihen, die durch Vereinigung die fraglichen Glieder verschwinden machen, zugleich aber die Eigenschaft haben, dass das 0^{te}, 3^{te}, 6^{te}, 9^{te} ..... Glied dreimal statt einmal erscheint. Benutzen wir diese Bemerkung, so entsteht hieraus die Darstellung

$$\frac{a}{3\,n^p}\left[n^p + \left(n - 1 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^p + \left(n - 1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^p\right]$$

Soll die zweite Horizontalreihe nach derselben Weise behandelt werden, so muss in ihr das 2^{te}, 5^{te}, 8^{te} .... Glied erscheinen, die übrigen verschwinden. Diess geschieht, wenn wir der vollständigen Reihe folgende Form geben

$$(\varphi x)^2 (n - 1 + \varphi x)^p = (n - 1)^p (\varphi x)^2 + \frac{p}{1} (n - 1)^{p-1} (\varphi x)^3 + \frac{p\,(p - 1)}{1\,.\,2} (n - 1)^{p-2} (\varphi x)^4 + \ldots\ldots$$

und so fort für φx die entsprechenden Werthe einführen. Dadurch wird

$$\frac{c}{3\,n^p}\left[n^p + \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \left[n - 1 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right]^p + \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \left[n - 1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]^p\right]$$

Aehnliche Schlüsse führen für die dritte Horizontalreihe zu folgender Darstellung

$$\frac{b}{3\,n^p}\left[n - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\left(n-1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^p - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\left(n-1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^p\right]$$

Die Summe dieser drei Ausdrücke gibt die muthmasliche Anzahl der weissen Kugeln, welche durch p Zichungen in die erste Urne gekommen ist; sie ist

$$30.\quad A_{1,p} = \frac{a}{3}\left[1 + \left(\frac{2n-3+\sqrt{-3}}{2n}\right)^p + \left(\frac{2n-3-\sqrt{-3}}{2n}\right)^p\right]$$

$$+ \frac{b}{3}\left[1 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\left(\frac{2n-3+\sqrt{-3}}{2n}\right)^p - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\left(\frac{2n-3-\sqrt{-3}}{2n}\right)^p\right]$$

$$+ \frac{c}{3}\left[1 + \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2\left(\frac{2n-3+\sqrt{-3}}{2n}\right)^p + \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2\left(\frac{2n-3-\sqrt{-3}}{2n}\right)^p\right]$$

und die für die beiden andern Urnen, wenn wir der Reihe nach diese Ausdrücke durch N_1, N_2, N_3 bezeichnen

$$A_{2,p} = \frac{b}{3}N_1 + \frac{c}{3}N_2 + \frac{a}{3}N_3$$

$$A_{3,p} = \frac{c}{3}N_1 + \frac{a}{3}N_2 + \frac{b}{3}N_3$$

Kommen vier Urnen in Frage, worin beziehlich a_1, a_2, a_3, a_4 weisse Kugeln enthalten sind, so hat man bei Ausführung ähnlicher Geschäfte folgende Zusammenstellung:

31. $$A_{1,p} = \frac{a_1}{4}\left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p + \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p + \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p\right]$$

$$\frac{a_2}{4}\left[1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p + \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p \sqrt{-1} - \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p \sqrt{-1}\right]$$

$$\frac{a_3}{4}\left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p - \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p - \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p\right]$$

$$\frac{a_4}{4}\left[1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p - \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p \sqrt{-1} + \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p \sqrt{-1}\right]$$

für die übrigen, wenn N_1, N_2, N_3, N_4 der Kürze wegen die eingeschlossenen Ausdrücke bezeichnen

$$A_{2,p} = \frac{a_2}{4} N_1 + \frac{a_3}{4} N_2 + \frac{a_4}{4} N_3 + \frac{a_1}{4} N_4$$

$$A_{3,p} = \frac{a_3}{4} N_1 + \frac{a_4}{4} N_2 + \frac{a_1}{4} N_3 + \frac{a_2}{4} N_4$$

$$A_{4,p} = \frac{a_4}{4} N_1 + \frac{a_1}{4} N_2 + \frac{a_2}{4} N_3 + \frac{a_3}{4} N_4$$

Man erkennt leicht, dass diese Schlüsse ganz allgemein gelten, und die Auflösung des allgemeinsten Falles von der Auflösung der Gleichung $(\varphi x)^m - 1 = 0$ abhängt. In diesen allgemeinen Entwicklungen erscheinen imaginäre Grössen; sie stören aber die Gültigkeit der

Schlüsse nicht. Nehmen wir nämlich auch hier p als eine sehr grosse oder unendlich grosse Anzahl über, so gehen die Grundgrössen von p, die sämmtlich ächte Brüche sind, ins Verschwindend-Kleine oder 0 über und dann hat man für diese Fälle aus 30

$$A_1, p = \frac{a+b+c}{3}; \quad A_2, p = \frac{b+c+a}{3}; \quad A_3, p = \frac{c+a+b}{3}$$

aus 31

$$A_1, p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}; \quad A_2, p = \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_1}{4}$$

$$A_3, p = \frac{a_3 + a_4 + a_1 + a_2}{4}; \quad A_4, p = \frac{a_4 + a_1 + a_2 + a_3}{4}$$

Hieraus folgt der merkwürdige allgemeinere Satz:

32. Sind mehrere Urnen in einen Kreis gestellt, davon jede eine gleiche Anzahl Kugeln, die selbst aus zwei Farben willkührlich gemischt sind, enthält, und wird aus jeder gleichzeitig eine Kugel genommen und in die folgende geworfen, und diess hinlänglich lange fortgesetzt; so werden die Kugeln von einerlei Farbe durch sämmtliche Urnen hindurch am Wahrscheinlichsten gleich vertheilt seyn.

Nehmen wir in diese Behauptung die Bemerkung auf, dass die in 23—31 gefundenen Gesetze für jede Farbenart von Kugeln gelten, so schliessen wir hieraus:

33. Die gleiche Mischung tritt ein, wenn auch in den verschiedenen Urnen Kugeln von drei und mehr Farben enthalten sind.

§. 12.

Einfacher werden alle diese Sätze, wenn man zu dem besondern Fall übergeht, den Dan. Bernoulli „Nov. Commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop. pro Anno 1769 Pg. 3 u. ff.“ behandelt hat, welcher annimmt, dass jede von den aufgestellten Urnen nur Kugeln von einerlei, aber eigenthümlicher, Farbe enthält. Man sieht, dass die Gleichungen der vorhergehenden §§. sogleich die Aufgabe Bernoulli's lösen, zugleich aber, dass man nicht umgekehrt durch die Auflösung des specielleren Falles die bisher vorgelegten Fragen beantworten kann; so wie denn auch Bernoulli nur den Fall von drei Urnen betrachtet hat.

Die Mischungen der Kugeln in zwei Urnen, wovon jede n Kugeln, aber nur von einerlei, jedoch besondern Farbe enthält, welche die p^{te} Ziehung herbeiführt, werden aus 28 erhalten, wenn man dort $a = n$ und $b = 0$ setzt. Hiedurch wird

$$34.\quad A_1, p = \frac{n}{2}\left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p\right] \text{ und}$$

$$A_2, p = \frac{n}{2}\left[1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p\right]$$

Die der schwarzen werden erhalten, wenn man $b = n$ und $a = 0$ setzt.

Sind drei Urnen vorhanden, so hat man aus 30, wenn $a = n$, $b = 0$, $c = 0$ gesetzt wird

$$35.\quad A_1, p = \frac{n}{3}\left[1 + \left(\frac{2n-3+\sqrt{-3}}{2n}\right)^p + \left(\frac{2n-3-\sqrt{-3}}{2n}\right)^p\right]$$

$$A_2, p = \frac{n}{3}\left\{1 + \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2\left(\frac{2n-3+\sqrt{-3}}{2n}\right)^p + \left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2\left(\frac{2n-3-\sqrt{-3}}{2n}\right)^p\right\}$$

$$A_3, p = \frac{n}{3}\left\{1 - \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{2n-3+\sqrt{-3}}{2n}\right)^p - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\left(\frac{2n-3-\sqrt{-3}}{2n}\right)^p\right\}$$

Gleiche Formeln gelten, nur in anderer Ordnung, von den Kugeln der beiden andern Farben in den Urnen.

Sind vier Urnen in Frage, so hat man aus 31, wenn $a_1 = n$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ gesetzt wird.

36. $$A_1, p = \frac{n}{4}\left\{1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p + \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p + \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p\right\}$$

$$A_2, p = \frac{n}{4}\left\{1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p - \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p\sqrt{-1} + \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p\sqrt{-1}\right\}$$

$$A_3, p = \frac{n}{4}\left\{1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^p - \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p - \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p\right\}$$

$$A_4, p = \frac{n}{4}\left\{1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^p + \left(\frac{n-1+\sqrt{-1}}{n}\right)^p\sqrt{-1} - \left(\frac{n-1-\sqrt{-1}}{n}\right)^p\sqrt{-1}\right\}$$

u. s. w. Wird auch hier p sehr gross oder unendlich gross, so wird aus 34, 35, 36,

37. $A_1, p = \frac{n}{2}$; $A_2, p = \frac{n}{2}$

$A_1, p = \frac{n}{3}$; $A_2, p = \frac{n}{3}$; $A_3, p = \frac{n}{3}$

$A_1, p = \frac{n}{4}$; $A_2, p = \frac{n}{4}$; $A_3, p = \frac{n}{4}$; $A_4, p = \frac{n}{4}$

Hieraus fliesst folgender Satz:

38. Werden mehrere Urnen in einen Kreis gestellt, von denen eine jede gleiche Anzahl (n) Kugeln von einer besondern Farbe enthält, wird dann aus jeder Urne gleichzeitig eine Kugel genommen und in die folgende geworfen, und diess hinlänglich lange fortgesetzt; so werden die Kugeln jeder Farbe am Wahrscheinlichsten gleich durch alle Urnen vertheilt seyn.

Die Gleichungen 34 und 35 hat Bernoulli nicht angegeben. Da Bernoulli andere Ableitungen hat, so hat er auch statt der Gleichungen 35 andere, die dem Werth näherungsweise entsprechen, angegeben.

§. 13.

Stellen wir endlich, unter den in §§. 9—11 gegebenen Bedingungen eine Urne allen andern entgegen, so ist es bei hinlänglich fortgesetzter Anzahl der Ziehungen einerlei, aus welcher von den übrigen Urnen eine Kugel genommen und in die bezeichnete geworfen wird. Die Mischung der Farben wird sich immer der Gleichheit nähern. Es können sogar einige Urnen übergangen, oder neue dazu genommen werden; die Rechnung führt immer auf das gleiche Resultat. Es zeigt sich hieraus, dass es für den Erfolg einerlei ist, ob die Kugeln einen kurzen oder längern Kreislauf machen, ob sie sich durch eine grössere oder kleinere Masse hindurch bewegen. Die Sache wird deswegen unverändert bleiben, ob sich die Kugeln getrennt, oder in einer einzigen vereinigt, bewegen und so in die bezeichnete übergehen. Man hat daher bei hinlänglich fortgesetzter Zahl der Ziehungen als Verhältniss für die Mischung der Kugeln gleicher Farbe in der Urne, welche den übrigen als Gesammtheit gegenüber gestellt wird:

$$\frac{1}{m}\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_m) : (m-1)\,\frac{(a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_m)}{m} = 1 : m-1$$

Gehen wir von der ursprünglichen Bedingung, dass in jeder Urne gleich viel Kugeln enthalten sind, aus, so sind also in den übrigen $(m-1)$ Urnen, auch $(m-1)$mal so viel von derselben Farbe, als in der bezeichneten enthalten. Wären die Kugeln aller dieser Urnen in einer einzigen enthalten, so fände dasselbe statt. Hieraus folgt, dass sich die endliche, wahrscheinlichste Vertheilung nach den in jeder Urne enthaltenen Anzahlen richtet, und mit ihnen in gleichem Verhältnisse steht. Was von einer Trennung sämmtlicher Urnen in zwei Abtheilungen gilt, gilt auch von einer in drei, vier, u. s. w. Diess begründet folgenden Satz, der alle früheren umfasst:

39. Werden mehrere Urnen in einen Kreis gestellt, in denen ungleiche Anzahlen von Kugeln, willkührlich aus verschiedenen Farben gemischt, enthalten sind, wird dann gleichzeitig aus jeder Urne eine Kugel genommen und in die nächstfolgende Urne geworfen; so wird nach hinlänglicher Zahl der Ziehungen diejenige Vertheilung der Kugeln von den verschiedenen Farben am Wahrscheinlichsten seyn,

welche im Verhältnisse zu den in jeder Urne enthaltenen Kugelanzahlen steht.

Merkwürdig ist die Beziehung, worin die drei Sätze 8, 14 und 39 stehen*).

---

*) Ausser Dan. Bernoulli hat auch Trembley, der im Wesentlichen Bernoulli folgte, einige hierher gehörige Fälle in Commentat. Soc. Reg. Scient. Goetting. Vol. XII. p. 129 betrachtet. Laplace hat in seiner Théorie anal. des probab. p. 302 den Fall des §. 12 behandelt und Lagrange eine Formel mit Hülfe der recurrirenden Reihen in Comment. Acad. Reg. Berol. 1775 p. 270 Probl. VII. mitgetheilt. Wir haben uns nach Kräften bemüht, hier einige weitere Sätze nach unserer Ansicht mitzutheilen.