Johann Albrecht Eulers
Abhandlung
Von der
Bewegung ebener Flächen,
wenn sie vom Winde getrieben werden.

Abhandlung.

Die Abhandlung, in welcher ich vor einigen Jahren bestimmet hatte, wie hoch der Wind einen sogenannten **fliegenden Drachen** in der Luft zu erhalten vermag, *) gab mir Anlaß, die Bewegung einer ebenen Fläche, so der Kraft des Windes frey ausgesetzt ist, näher zu untersuchen. Ich verfiel hierdurch auf verschiedene Beobachtungen, die nicht nur in Ansehung der Mechanik, als zu welcher Wissenschaft diese Aufgabe eigentlich gehöret, sondern auch ins besondere in Ansehung der Analogie, durch deren Hülfe die Auflösung derselben verrichtet wird, sehr merkwürdig sind.

Ich nehme mir hiermit die Freyheit der **Erlauchten Churfürstlichen Akademie der Wissenschaften** diese meine Arbeit, als ein geringes Merkmaal meiner unauslöschlichen Dankbarkeit, unterthänigst vor Augen zu legen, und werde mich glücklich schätzen, wenn dieselbe ihrer Aufmerksamkeit nicht gänzlich unwürdig befunden wird.

 *) Siehe

*) Histoire de l'Academie Royale des Sciences & belles Lettres de Berlin. A. 1756. Tom. XII. pag. 322. *des Cerfs volants.*

1. Ich betrachte hier einen Körper, der, so zu reden, gänzlich in einer ebenen Fläche ausgebreitet ist: ein dünnes Brett zum Exempel, oder ein Kartenblatt, in so fern dessen Dicke nicht in Betrachtung gezogen zu werden verdienet. Ich stelle mir vor, daß eine dergleichen Fläche der Gewalt des Windes frey übergeben werde; und mein Endzweck ist, die daher entstehende Bewegung derselben zu bestimmen.

2. Es erhellet aber sogleich, daß diese Bewegung, welche theils von der Kraft des Windes, theils auch von der Schwere der Fläche, hervor gebracht wird, sehr verschieden seyn könne; je nachdem die Lage beschaffen ist, nach welcher die Fläche dem Winde anfänglich ausgesetzt worden.

3. Damit ich aber die gegenwärtige Aufgabe noch näher einschränke, so will ich hier annehmen, daß die ebene Fläche allenthalben aus einer gleichartigen Materie bestehe, oder zum wenigsten also beschaffen sey, daß die Direction der Kraft des Windes genau durch das Mittelpunct der Schwere gehe, und folglich dieses Mittelpunct der Schwere mit dem Mittelpuncte der Größe der Fläche vollkommen übereinstimme.

4. Hierdurch erlange ich nämlich diesen Vortheil, daß die beyden würkenden Kräfte keine herumdrehende Bewegung in der Fläche verursachen können, und dieselbe folglich beständig eine und eben dieselbe Lage, in Ansehung der Richtung des Windes, beybehalten muß. Denn wenn die Fläche gemeldte Eigenschaft nicht hätte; wenn das Mittelpunct der Schwere nicht mit dem Mittelpuncte der Größe überein käme: so würde sich bald eine herumdrehende Bewegung äußern, die nicht nur die Auflösung einer ungleich

schwe-

schwerern Aufgabe erfordert, sondern auch nicht einmal wohl abgehandelt werden kann, bevor nicht der hier vorgelegte Fall, in welchem die Fläche in währender ihrer ganzen Bewegung einerley Lage, in Ansehung des Windes behält, auf das sorgfältigste entwickelt worden.

5. Ich habe schon angemerket, daß die größte Mannigfaltigkeit in der Bewegung insonderheit von derjenigen Richtung abhängt, nach welcher die Fläche dem Winde anfänglich ausgesetzt worden. In diesem Gesichtspuncte aber werden vier Hauptfälle von einander unterschieden.

6. Man setze, der Wind habe eine horizontale Richtung, so in den beygefügten vier ersten Figuren durch die gerade Linie ABa b ab ab angedeutet wird, und die vier Hauptfälle werden seyn, wie folget:

Erster Fall. Wenn die Fläche AB genau nach der Richtung des Windes ausgesetzt wird. Da wir nun der Fläche keine Dicke zuschreiben, so kann dieselbe in der gegenwärtigen Lage auch keine Kraft vom Winde auffangen: sie wird folglich blos von ihrer Schwere nach des senkelrechten Richtung CP abwärts getrieben werden.

Zweyter Fall. Wenn die Fläche AB mit der Richtung des Windes ab einen spitzigen Winkel ACa macht. Hier wird also der Wind die Fläche AB nach der Richtung CQ treiben, so auf dieselbe in dem Mittelpunct ihrer Größe C aufwärts senkelrecht ist. Die Fläche wird demnach in dem ersten Augenblicke beydes von dieser Kraft CQ, als auch von der Kra,t der Schwere CP, zur Bewegung angereitzt werden.

Drit-

Dritter Fall. Wenn die Fläche AB auf die Richtung des Windes ab senkelrecht ist und folglich der Neigungswinkel ACa = 90° ist. Hier wird also die Kraft des Windes CQ horizontal und von der Richtung des Windes nicht unterschieden seyn.

Vierter und letzter Fall. Wenn die Fläche AB mit der Richtung des Windes ab einen stumpfen Winkel ACa macht. In diesem Falle wird die Kraft des Windes die Fläche abwärts nach der Richtung CQ ziehen.

7. Es wäre aber überflüßig, jeden dieser Fälle besonders abzuhandeln. Denn der erste Fall kann leicht aus dem zweyten hergeleitet werden: man darf nur den Neigungswinkel ACa = o setzen. Eben so wird auch aus eben diesem zweyten Fall der dritte herausgebracht, wenn für den Neigungswinkel ACa ein rechter Winkel (das ist 90°) geschrieben wird.

8. Hingegen wird wiederum dieser zweyte Fall, aus einem andern Gesichtspunkte betrachtet, in drey neue zertheilet, wenn man nämlich auf die erste Richtung der Bewegung Acht hat. Denn weil hier die Fläche von zweyen Kräften CP und CQ getrieben wird, und sich folglich nach der Diagonalrichtung zu bewegen anfängt: so hat man insonderheit darauf zu sehen, ob diese Diagonalrichtung zwischen den geraden Linien CB und CP oder zwischen CB und CQ falle? Zwischen diesen beyden Fällen aber wird noch ein dritter das Mittel halten, wenn nämlich die Diagonalrichtung der beyden Kräfte mit der Richtung der Fläche überein kömmt. Es muß aber jeder dieser drey Fälle, welche, wie wir eben gesehen haben, aus dem zweyten der vorher erwähnten Hauptfälle entstanden sind, besonders abgehandelt werden.

9. Der vierte der oben erwähnten Hauptfälle leidet keine weitere Eintheilung, so verdiente angeführet zu werden. Es hat aber

hin-

hinwiederum die daher entstandene Bewegung der Fläche dieses Sonderbare an sich, daß dieselbe nicht ganz durch einerley Formuln ausgedruckt werden kann. Denn sobald die Fläche einen gewissen Grad der Bewegung erlanget, so wird ihre folgende Bewegung gegen alle Gesetze des Zusammenhängens durch eine Rechnung von ganz verschiedener Gattung entwickelt. Dieser Sprung ist insonderheit aller Aufmerksamkeit würdig.

10. Was nun allen diesen erwähnten Fällen gemeinschaftlich zukömmt, will ich noch kürzlich unter folgende Benennungen begreiffen:

Es deute uns also erstlich aa den Innhalt der Fläche AB an, und P sey ihr Gewicht. Da wir hier aber dieses Gewicht mit der Schwere der Luft werden vergleichen müssen, so lasset uns annehmen aab wäre ein Luftraum von gleichem Gewichte.

Ferner sey c beständig die Höhe, so der Geschwindigkeit des Windes zukömmt: und da die Quadratwurzeln der beyden Größen b und c sehr häufig vorkommen werden, so lasset uns, um dieselben zu vermeiden, setzen $b = 66$ oder $\surd b = 6$ und $c = \gamma\gamma$ oder $\surd c = \gamma$.

Endlich werde durch v die Höhe angedeutet, welche der Geschwindigkeit unserer Fläche, nach Verlauf einer unbestimmten Zeit t, von dem Anfang der Bewegung an gerechnet, zukömmt: und man setze um einer ähnlichen Ursache willen, wie oben, $v = \omega\omega$, also daß da sey $\surd v = \omega$.

Es ist hier aber wohl zu merken, daß, ob wir der Fläche gleich ein Gewicht P oder eine Schwere, so dem Luftraum aab oder $aabb$ zukömmt, zueignen, die Dicke derselben dennoch als verschwindend angesehen werden müsse, damit die Schärfe der Fläche keine Kraft vom Winde aufzufangen im Stande sey.

Erster Fall.

Wenn die Fläche mit der Richtung des Windes einen spitzigen Winkel macht.

11. Laßt uns also mit demjenigen Hauptfall den Anfang machen, in welchem die Fläche ACB gegen die Richtung des Windes *ab* unter einem spitzigen Winkel AC*a* ausgesetzt wird. Man setze diesen Winkel $ACa = \theta$ und die Kraft des Windes wird in dem ersten Augenblick, da die Fläche noch in Ruhe ist, durch $aac \sin \theta^2$ ausgedruckt werden, das ist, sie wird gleich seyn dem Gewichte einer Menge Luft, dessen Raum $= aac \sin \theta^2$ ist. Die Richtung dieser Kraft aber CQ wird auf der Fläche AB in ihrem Mittelpunct der Größe oder Schwere senkelrecht seyn. Außerdem wird aber die Fläche auch noch von ihrer eigenen Schwere P abwärts nach CP getrieben, und wir haben eben diese Kraft dem Gewichte einer Masse Luft gleich gesetzt, dessen Raum $= aab$ ist. Da nun der Winkel $BCP = 90° - \theta$, so werde diese Kraft der Schwere aab in zwo andere zergliedert, deren erste nach CB ziehet, und dem $aab \sin \theta$ gleich ist, die letzte aber der Richtung CQ entgegen gesetzt, und durch $aab \cos \theta$ ausgedruckt wird. Wenn also $aab \cos \theta = aa c \sin \theta^2$, oder $b \cos \theta = c \sin \theta^2$, oder $\beta \cos \theta = \gamma \sin \theta$, so wird sich die Fläche nach ihrer eigenen Richtung CB zu bewegen anfangen. Wenn aber $b \cos \theta > c \sin \theta^2$ oder $\beta \surd \cos \theta > \gamma \sin \theta$, so wird die allererste Richtung der Bewegung zwischen dem Winkel BCP, und wenn $b \cos \theta < c \sin \theta^2$, oder $b \surd \cos \theta < \gamma \sin \theta$, so wird dieselbe zwischen den Winkel BCQ fallen. Daher folglich die drey oben (8) erwähnten und unter gegenwärtigen Hauptfall gehörigen Fälle genommen werden müssen.

I. Wenn die erste Richtung der Bewegung zwischen den Winkel BCP oder unter der Fläche CB fällt; und folglich $b \cos \theta > c \sin \theta^2$

Fünfte

Fünfte Figur.

12. Es sey also erstlich $b\sqrt{\cos\theta} > \gamma \sin\theta$, damit die erste Richtung der Bewegung unter der Fläche CB falle. Die Fläche wird sich alsdann jederzeit parallel verbleiben, und ihr Mittelpunct der Schwere C in einer gewissen krummen Linie CG herab steigen, dessen erste Richtung in C mit der Fläche CB einen Winkel BCG macht, so folgender Gestalt berechnet wird. Weil wir gesehen haben, daß zum Anfang der Bewegung die nach CB treibende Kraft $= aab \sin\theta$, diejenige Kraft aber, mit welcher die Fläche nach einer Richtung, so auf derselben senkelrecht ist, getrieben wird $= aab \cos\theta - aac \sin\theta^2$ sey: weil ferner die erste Bewegung sich, wie die treibenden Kräfte verhält, so wird die Tangens des verlangten Winkels

$$BCG = \frac{b\cos\theta - c\sin\theta^2}{b\sin\theta} = \frac{66\cos\theta - \gamma\gamma\sin\theta^2}{66\sin\theta}$$

Hieraus erlernen wir zugleich, daß die Natur der krummen Linie CG, die gesucht wird, am allerbequemsten in Ansehung der nach R abwärts verlängerten geraden Linie CBR, als einer Axe, bestimmt werden könne. Man ziehe also auf derselben aus einem in der krummen Linie nach Belieben angenommenen Puncte G den Perpendikel GR, und es seyn die coordinaten $CR = x$ und $RG = y$.

Wir haben aber schon gefunden, daß gleich zu Anfang der Bewegung, wo nämlich beydes x und y verschwinden, seyn müsse

$$\frac{y}{x} = \frac{b\cos\theta - c\sin\theta^2}{b\sin\theta} = \frac{66\cos\theta - \gamma\gamma\sin\theta^2}{66\sin\theta}$$

13. Man stelle sich nun vor, die Fläche wäre nach einer verstrichenen Zeit t an den Ort G der krummen Linie gekommen, so wird seine Lage EGF daselbst der ersten Lage ACB parallel und folglich auf die applicata RG senkelrecht stehen. Es sey ferner v die Höhe, so derjenigen Geschwindigkeit zukömmt, mit welcher die Fläche

in G sich weiter nach Gg beweget; und damit wir hier die Wurzelzeichen vermeiden, so lasset uns setzen $v=\omega\omega$, also daß da sey $\sqrt{v}=\omega$. Hernach nenne man den Winkel $FGg=\Phi$. Wenn wir nun den unendlich kleinen Theil der krummen Linie $Gg=ds$ setzen, so werden wir haben $ds=dt\sqrt{v}=\omega dt$ und hieraus wiederum $dx=ds \cos\Phi$ und $dy=ds \sin\Phi$. Wenn wir demnach zu einer jeglichen Zeit t, so wohl die Geschwindigkeit $\omega=\sqrt{v}$, als auch den Winkel Φ werden bestimmt haben, so werden wir auch die beyden Coordinaten x und y, und mit ihnen zugleich die ganze Bewegung, anzuzeigen im Stande seyn.

Lasset uns aber nun die Bewegung des Puncts G dergestalt zergliedern, daß wir erlangen die Geschwindigkeit nach der Richtung der Abscisse $CR=\omega\cos\Phi$, und diejenige nach der Richtung der Applicate $RG=\omega\sin\Phi$. Wir erhalten hieraus die Vergeschwinderung nach $CR=\frac{2d.\,\omega\cos\Phi}{dt}$, und die Vergeschwinderung nach $RG=\frac{2d.\,\cos\Phi.}{dt}$

14. Lasset uns nun auch die wirkenden Kräfte betrachten; und da erstlich der Wind auf die Fläche EGF mit der Geschwindigkeit $\sqrt{c}=\gamma$ und unter einem Winkel θ anstößt, so wird seine Wirkung eben so groß seyn, als wenn die Fläche mit einer Geschwindigkeit $\gamma\sin\theta$ von der Luft senkelrecht fort getrieben würde.

Hernach weil sich die Fläche schon wirklich nach der Richtung Gg mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{v}=\omega$ bewegt, so wird hierdurch eine gleich große Wirkung entstehen, als wenn die Luft die Fläche senkelrecht mit der Geschwindigkeit $=\omega\sin\Phi$ anstieße. Da nun diese beyden antreibenden Kräfte nach einerley Richtung ziehen, so wird die Fläche von denenselben eben so fort getrieben werden, als wenn

der

der Wind dieselbe senkelrecht nach GQ mit einer Geschwindigkeit $\gamma \sin \theta + \omega \sin \Phi$ anstieße.

Hieraus entsteht also eine Kraft die nach GQ treibt, und durch $aa(\gamma \sin \theta + \omega \sin \Phi)^2$ abgemessen wird, oder dem Gewichte eines gleich großen Luftraums gleich ist. Nun entspringen auch zweytens aus der Kraft der Schwere $GP = aab$ zwo Kräfte, deren eine nach GF zieht und $= aab \sin \theta$ ist, die andere aber $= aab \cos \theta$ ist, und nach einer der GQ entgegen gesetzten Richtung wirket. Wir werden also insgesamt folgende zwo Kräfte erlangen. Die erste nach der Richtung $CR = aab \sin \theta$ und die andere nach der Richtung $RG = aab \cos \theta - aa(\gamma \sin \theta + \omega \sin \Phi)^2$.

Da aber die wirkenden Kräfte durch die zu bewegende Masse, das ist, durch das Gewicht von aab getheilet, die Vergeschwinderungen nach eben denselben Richtungen geben, nach welchen die Kräfte ziehen, und wie wir diese Vergeschwinderungen auch schon oben (13) gefunden haben, so werden wir folgende zwo Gleichungen erhalten:

$$\text{I.} \quad \frac{2d.\,\omega \sin \Phi}{dt} = \sin \theta$$

$$\text{II.} \quad \frac{2d.\,\omega \sin \Phi}{dt} = \cos \theta - \frac{(\gamma \sin \theta + \omega \sin \Phi)^2}{b}$$

Und die beyde integrabel sind.

Denn die erste giebt sogleich $\omega \cos \Phi = \frac{1}{2} t \sin \theta$ und die andere verwandelt sich in die folgende:

$$dt = \frac{2\,b\,d.\,\omega \sin \Phi}{b \cos \theta - (\gamma \sin \theta + \omega \sin \Phi)^2}$$ dessen Integrale ist:

$$t = \frac{\beta}{\sqrt{\cos \theta}}\, l\, \frac{\beta \sqrt{\cos \theta} + \gamma \sin \theta + \omega \sin \Phi}{\beta \sqrt{\cos \theta} - \gamma \sin \theta - \omega \sin \Phi} + Const.$$

Die Constans muß hier also beschaffen seyn, daß, wenn $\omega = 0$ gesetzt wird, auch die Zeit t verschwinde. Es wird demnach

$t =$

Raum $2\sqrt{cg}=2\gamma\sqrt{g}$ durchlaufe. Auf eine ähnliche Art wird die Geschwindigkeit, so die Fläche nach der Zeit t erlangt hat, so groß seyn, daß sie mit derselben alle Secunden einen Raum $=2\sqrt{gv}=\omega\sqrt{g}$ durchlaufen würde, wenn sie sich gleichförmig bewegete.

Ferner in Ansehung der Zeit, so wie wir dieselbe hier ausgedruckt haben, wenn da wäre $t=\frac{2g}{\sqrt{g}}=2\sqrt{g}$ so würde t die Zeit einer Secunde andeuten, und folglich wie groß wir auch die Zeit annehmen, so wird ihr Werth in Secunden seyn $=\frac{t}{2\sqrt{g}}$. Wenn wir demnach die Bewegung nach Verfluß von λ Secunden berechnen wollen, so müssen wir in unsern Formuln schreiben $t=2\lambda\sqrt{g}$. Hernach wenn der Wind vermöge seiner Geschwindigkeit alle Secunden einen Raum $=k$ durchstreicht, so ist $k=2\sqrt{cg}=2\gamma\sqrt{g}$ und folglich muß man setzen $c=\frac{kk}{4g}$ und $\gamma=\frac{k}{2\sqrt{g}}$.

19. Damit wir nun die Gattung dieser Bewegung näher und deutlicher erkennen, so laßt uns erstlich untersuchen, wie dieselbe im ersten Augenblick werde beschaffen seyn. Es sey also t sehr klein, und wir werden haben

$$T=1+\frac{t\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{c}}+\frac{tt\cos\theta}{2\mathfrak{cc}};\text{ folglich}$$

$$T-1=\frac{t\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{c}}+\frac{tt\cos\theta}{2\mathfrak{cc}}\text{ und}$$

$$mT+n=m+n+m(T-1)=m+n+\frac{mt\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{c}}+\frac{mtt\cos\theta}{2\mathfrak{cc}}$$

Hernach weil

$$\frac{1}{mT+n}=\frac{1}{m+n}-\frac{m(T-1)}{(m+n)^2}+\frac{mm(T-1)^2}{(m+n)^3}-\text{ rc.}$$

so

so wird

$$\frac{1}{mT+n} = \frac{1}{m+n}\left(1 - \frac{mt}{2\epsilon\epsilon} + m\gamma tt \sin\theta\right)$$

und folglich

$$\tang\,\phi = \frac{mn}{\epsilon\epsilon \sin\theta}\left(1 - \frac{\gamma t \sin\theta}{2\epsilon\epsilon} - \frac{tt\cos\theta}{12\,\epsilon\epsilon} + \frac{\gamma\gamma\, tt \sin\theta^2}{4\,\epsilon^4}\right)$$

Es erhellet hieraus, daß der Winkel ϕ, dessen Tangens gleich zu Anfang der Bewegung $= \frac{mn}{\epsilon\epsilon \sin\theta} = \frac{\epsilon\epsilon\cos\theta - \gamma\gamma \sin\theta^2}{\epsilon\epsilon \sin\theta}$ war, nachmals kleiner werde. Man bekömmt aber für die Geschwindigkeit

$$\omega\omega = v = \frac{(\epsilon^4 - 4\,\epsilon\epsilon\,\gamma\gamma \cos\theta \sin\theta^2 + \gamma^4 \sin\theta^4)\, tt}{4\,\epsilon^4}$$

So daß die Geschwindigkeit zur Anfang der Bewegung in Verhältniß der Zeit zunimmt.

20. Ferner, weil $x = \frac{1}{4}\, tt \sin\theta$, so erlernen wir hieraus, daß die Abscissen nicht nur von Anfang, sondern auch in währender ganzen Bewegung, wie die Quadrate der Zeiten zunehmen: also daß die Bewegung der Fläche nach der Richtung CB eine gleichförmig-vermehrte Bewegung ist.

Diese Bewegung hängt übrigens nur noch von dem sinus des Winkels $ACa = \theta$ ab; die Geschwindigkeit derselben wird sich nämlich zu der Geschwindigkeit eines frey herunter fallenden Körpers in gleichen Zeiten wie der sinus des Winkels $ACa = \theta$ zu dem Radio verhalten.

Die Applicate $RG = y$ wird aber zu Anfang der Bewegung seyn $y = -mt + \frac{\epsilon(m+n)}{\sqrt{\cos\theta}}\, l\left(1 + \frac{m(T-1)}{m+n}\right)$ folglich:

$$y = -mt + \frac{\epsilon}{\sqrt{\cos\theta}}\left(m(T-1) - \frac{mm(T-1)^2}{2(m+n)}\right):$$

Welche Formul sich in diese verwandelt:

$$y = -mt + \frac{mt}{2(m+n)}\left(2(m+n) + \frac{nt\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{b}}\right) = \frac{mntt\sqrt{\cos\theta}}{2(m+n)\mathfrak{b}}$$ das ist:

$$y = \frac{mntt}{4\mathfrak{b}\mathfrak{b}} = \frac{b\cos\theta - c\sin\theta^2}{4b}.\, tt.$$

21. Laßt uns nunmehro auch sehen, wie sich die Bewegung nach Verlauf einer unendlich großen Zeit verhalten werde. Es sey also $t = \infty$ und T wird eine unendlich große Zahl und zwar von einer unendlich größeren Art seyn, als t ist. Ferner $\frac{T-1}{mT+n} = \frac{1}{m}$ und $\tang\phi = \frac{2n}{t\sin\theta} = 0$. Es erhellet hieraus daß die krumme Linie CGg zuletzt der Axe CR parallel laufen, und folglich die Fläche sich nach ihrer eigenen Richtung bewegen werde. Es wird nämlich der Winkel FG$g = \phi$, dessen Tangens zum Anfang der Bewegung $= \frac{b\cos\theta - c\sin\theta^2}{b\sin\theta}$ war, beständig kleiner, bis derselbe zuletzt gar verschwindet. Ferner wird, nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit, die der Geschwindigkeit der Fläche zukommende Höhe $v = nn + \frac{1}{4}tt\sin\theta^2$: und also auch die Geschwindigkeit selbst unendlich groß: daß ist, die Geschwindigkeit der Fläche nimmt beständig zu bis zum Unendlichen. Endlich wird auch nach Verlauf einer unendlich großen Zeit die Abscisse $x = \frac{1}{4}tt\sin\theta$ unendlich groß: und weil in diesem Fall $l\frac{mT+n}{m+n} = l\frac{mT}{m+n} = lT - l\frac{m+n}{m}$ und $lT = \frac{t\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{b}}$. so wird die Applicate:

$$y = -mt + (m+n)t - \frac{\mathfrak{b}(m+n)}{\sqrt{\cos\theta}}\, l\frac{m+n}{m} = nt - 2\mathfrak{b}\mathfrak{b}\, l\frac{2\mathfrak{b}\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{b}\sqrt{\cos\theta} + \gamma\sin\theta}$$

Die krumme Linie CGg also ins Unendliche verlängert, bekömmt

zuletzt

zuletzt den Zug einer Parabel, deren Natur durch diese Gleichung ausgedruckt wird:

$$y = 2n\sqrt{\frac{x}{\sin\theta}} - 2bb\; l\,\frac{m+n}{m}$$

Es wird hier sehr dienlich seyn, wenn wir aus dieser allgemeinen Bestimmung der Bewegung, bey welcher nämlich der Winkel $ACa = \theta$ spitzig, und noch überdas $b\sqrt{\cos\theta} > \gamma \sin\theta$ oder $b\cos\theta > c \sin\theta^2$ ist, die Entwickelung einiger einzelen Fällen herleiten, welche insbesondere verdienen angemerkt zu werden.

1. Wenn die Kraft des Windes verschwindet.

22. Laßt uns also erstlich setzen, der Wind habe keine Geschwindigkeit, damit derjenige Fall entstehe, in welchem eine Fläche ACB, so mit der Horizontalfläche ab einen spitzigen Winkel $ACa = \theta$ macht, frey in der Luft herab fällt: und weil hier $\gamma = 0$ so wird $m = n = b\cos\theta$: folglich da $T = l\,\frac{t\sqrt{\cos\theta}}{b}$ so erhalten wir

$$\tang \Phi = \frac{2b(T-1)\sqrt{\cos\theta}}{(T+1)\, t \sin\theta}$$

$$v = \frac{bb(T-1)^2 \cos\theta}{(T+1)^2} + \tfrac{1}{4}\, tt \sin\theta^2$$

$x = \frac{1}{4}\, tt \sin\theta$ und $y = -bt\sqrt{\cos\theta} + 2bb\; l\,\frac{T+1}{2}$

Es wird also gleich zu Anfang der Bewegung

$\tang \Phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(1 - \frac{tt\cos\theta}{12bb}\right)$: $v = \frac{1}{4}\, tt$: $x = \frac{1}{4}\, tt \sin\theta$: und $y = \frac{1}{4}\, tt \cos\theta$

Nach Verfluß aber einer unendlich großen Zeit wird der Winkel Φ verschwinden, und

$v = bb\cos\theta + \frac{1}{4}\, tt \sin\theta^2$ werden. Es wird nämlich auch bey diesem freyen Fall die Geschwindigkeit bis ins Unendliche zunehmen: Die Coordinaten aber werden seyn:

$x = \frac{1}{4}\, tt \sin\theta$: und $y = bt\sqrt{\cos\theta} - 2bb\; l\, 2$

2. Wenn der Winkel $ACa = \theta$ verschwindet.

23. Man setze, die Fläche wäre nach der Richtung des Windes ausgesetzt, oder es wäre $\theta = 0$ also daß $\sin\theta = 0$ und $\cos\theta = 1$ sey. Da nun der Wind in diesem Fall zu der Bewegung nichts mehr beyträgt, so wird $m = n = \beta$ und $tang\, \phi = \infty$. Die Richtung der Bewegung wird also beständig auf der Fläche perpendiculair verbleiben und folglich senkelrecht seyn. Die Fläche wird nämlich senkelrecht herab fallen. Ferner bekömmt man für die Geschwindigkeit $v = \frac{\beta\beta(T-1)^2}{(T+1)^2}$

Daher weil $T = l^{\frac{t}{\beta}}$ so wird

$$\sqrt{v} = \omega = \frac{l^{\frac{t}{\beta}} - 1}{l^{\frac{t}{\beta}} + 1} \cdot \beta$$

Woraus erhellet, daß die Geschwindigkeit auch nach einer unendlich großen Zeit nicht über eine gewisse Gränze, welche ist $v = b$, anwachsen könne; welches um so viel mehr zu bewundern scheinet, da auch nur bey der kleinsten Schiefe der Fläche in Ansehung des Windes, die Geschwindigkeit derselben bis ins Unendliche zunimmt.

Es ist ferner beständig $x = 0$ und die Applicate y, so senkelrecht ist, wird die in der Zeit t durchgefallene Höhe andeuten: es wird nämlich

$$y = -\beta t + 2\beta\beta\, l\, \frac{T+1}{2} \text{ oder}$$

$$y = -\beta t + 2\beta\beta\, l \frac{1}{2}(1 + l^{\frac{t}{\beta}}$$

II. Wenn die erste Richtung der Bewegung mit der Lage der Fläche übereinkömmt, oder wenn $b \cos\theta = c \sin\theta^2$.

24. Die zweyte Gattung der Bewegung, zu welcher wir durch die Auflösung unsres ersten Falles (§. 11.) geleitet worden, entstund, wenn die Geschwindigkeit des Windes, oder der Winkel, θ so groß ist, daß da sey $\mathfrak{E}\sqrt{\cos\theta} = \gamma \sin\theta$ oder $b \cos\theta = c \sin\theta^2$. Hier ist vor allen Dingen zu merken, daß die Fläche sich von selbsten nach einer solchen Lage neigen werde, wenn dieselbe an dem einem Ende A angebunden, der Gewalt des Windes frey ausgesetzt wird.

Wenn nun die Fläche auf diese Weise die gehörige Lage erhalten, und man dieselbe darauf plötzlich fahren läßt, so wird sie nothwendiger Weise diejenige Bewegung bekommen, welche ich mir hier zu bestimmen vorgenommen habe. Es wird also $n=0$; $m = 2\mathfrak{E}\sqrt{\cos\theta}$, und also $\tang \Phi = 0$: folglich wird sich die Fläche gleich vom Anfang beständig nach ihrer eigenen Richtung CBR fort bewegen, also daß beständig $y=0$ bleibe. Denn weil $l\,T = \frac{t\sqrt{\cos\theta}}{\mathfrak{E}}$ so wird $y = -mt + \frac{\mathfrak{E}\,m}{\sqrt{\cos\theta}}\,l\,T = 0$. Die Abscisse CR$=x$ aber wird den durchlaufenen Raum anzeigen: und weil $x = \frac{1}{4}\,tt \sin\theta$, so erhellet, daß diese Bewegung der Fläche eine gleichförmig vermehrte Bewegung seyn werde. Endlich wird die Höhe, so der Geschwindigkeit der Fläche nach Verlauf einer Zeit t zukömmt, gleich seyn $v = \frac{1}{4}\,tt \sin\theta^2 = x \sin\theta$, oder gleich derjenigen Höhe, durch welche das Mittelpunct der Fläche C schon wirklich herab gefallen ist. Und also hebt sich die Gewalt des Windes mit der Wirkung des Widerstandes genau auf.

III. Wenn die erste Richtung der Bewegung zwischen dem Winkel BCQ oder über der Fläche CB fällt, und folglich $b \cos\theta < c \sin\theta^2$ ist.

Sechste Figur.

25. Da wir nunmehro auch diejenige Gattung der Bewegung entwickelt haben, in welcher $\beta \surd \cos\theta = \gamma \sin\theta$, so lasset uns jetzt zu der letzten schreiten; bey welcher $\beta \surd \cos\theta < \gamma \sin\theta$ oder $b \cos\theta < c \sin\theta^2$ ist: der Winkel $ACa = \theta$ aber sey, wie bey beyden vorigen Gattungen, spitzig.

Es kann aber die Entwickelung dieser dritten Gattung leicht aus der ersten hergeleitet werden, wenn man nur eine kleine Veränderung mit den Zeichen + und — unternimmt. Denn wenn hier erstlich, wie oben, die verlängerte Richtung der Fläche CBR für die Axe angenommen, und die Abscisse $CR = x$ gesetzt wird, so wird so wohl die Applicate $RG = y$ als auch der Winkel FGg auf der andern Seite, das ist zur rechten der Fläche, zu liegen kommen, da dieselben vorhero zur Linken gelegen. Wenn demnach alle Benennungen eben dieselben bleiben, wie sie vorhero gewesen, so haben wir hier weiter nichts zu thun, als daß wir anstatt der Buchstaben y und ϕ die Negativen derselben $-y$ und $-\phi$ schreiben. Folglich wird aus der Gewalt der Winde und der Bewegung der Fläche, nach der Richtung, Gg zusammen genommen, eine Kraft entstehen, welche die Fläche nach der Richtung GQ treibt, und dem $aa(\gamma \sin\theta - \omega \sin\phi)^2$ gleich ist. Es wird aber diese Kraft nur in so fern statt finden, in wie fern die Größe $\omega \sin\phi$ kleiner ist als $\gamma \sin\theta$: denn wenn da würde $\omega \sin\phi > \gamma \sin\theta$, so würde die Fläche nicht mehr nach der Richtung GQ, sondern nach GR, mit der Kraft $aa(\omega \sin\phi - \gamma \sin)^2$ getrieben werden. Und da dieser Umstand nicht in der Rechnung mit begriffen ist, so muß man desto sorgfältiger darauf Acht haben.

26. Weil wir hier annehmen, daß die Fläche in C noch in Ruhe gewesen, so werden wir, wie oben, zwo folgende Integralgleichungen erhalten, nachdem wir in den obigen das Zeichen von $cos\,\Phi$ behalten, und $-\,sin\,\Phi$ für $+\,sin\,\Phi$ geschrieben haben.

I. $\omega\, cos\,\Phi = \frac{1}{4}\, t\, sin\,\theta$

II. $t = \frac{6}{\sqrt{cos\,\theta}}\; l\, \frac{(\gamma\, sin\,\theta - 6\sqrt{cos\,\theta})\,(6\sqrt{cos\,\theta} + \gamma\, sin\,\theta - \omega\, sin\,\Phi)}{(\gamma\, sin\,\theta + 6\sqrt{cos\,\theta})\,(\gamma\, sin\,\theta - 6\sqrt{cos\,\theta} - \omega\, sin\,\Phi)}$

Laßt uns hier der Kürze wegen setzen:

$\gamma\, sin\,\theta + 6\sqrt{cos\,\theta} = m$ und $\gamma\, sin\,\theta - 6\sqrt{cos\,\theta} = n.$

imgleichen $\frac{t\sqrt{cos\,\theta}}{6} = l\,T$: also daß $T = l\,\frac{t\sqrt{cos\,\theta}}{6}$:

so wird $T = \frac{n\,(m - \omega\, sin\,\Phi)}{m\,(n - \omega\, sin\,\Phi)}$:

folglich erhält man $\omega\, sin\,\Phi = \frac{m\,n\,(T-1)}{m\,T - n}$

Hier merke ich sogleich an, daß, weil $\gamma\, sin\,\theta > 6\sqrt{cos\,\theta}$, allezeit nothwendiger Weise seyn müsse $\gamma\, sin\,\theta - 6\sqrt{cos\,\theta} - \omega\, sin\,\Phi > n$: denn sonsten würde t einer imaginairen Größe gleich werden. Um so viel mehr wird also beständig seyn müssen $\omega\, sin\,\Phi < \gamma\, sin\,\theta$; also daß die Fläche beständig nach der Richtung GQ durch die Gewalt des Windes und ihr eigene Bewegung getrieben werde, so wie wir es in der Rechnung angenommen haben. In diesem Stücke wird also unsere Rechnung keine Verbesserung nöthig haben.

27. Aus diesen Formuln wird auf eine ähnliche Art wie oben §. 16. gefunden $tang\,\Phi = \frac{2\,m\,n\,(T-1)}{(m\,T-n)\,t\, sin\,\theta}$ und

$$\omega\omega = v = \frac{m\,m\,n\,n\,(T-1)^2}{(m\,T-n)^2} + \frac{1}{4}\, tt\, sin\,\theta^2$$

Ferner, weil was vorhero $+n$ war jetzt $-n$ ist, so werden die Coordinaten der beschriebenen krummen Linie auf folgende Art ausgedruckt:

$x =$

$x = \frac{1}{4}\, tt\, \sin\theta$ und $y = mt - \frac{\epsilon(m-n)}{\sqrt{\cos\theta}}\; l\,\frac{mT-n}{m-n}$ oder

$y = mt - 2\epsilon\epsilon\; l\,\frac{mT-n}{m-n}$

Folglich gleich im Anfang der Bewegung, wenn die Zeit t sehr kleine gesetzt wird, so erhält man

$$\tan\phi = \frac{mn}{b\sin\theta}\left(1 - \frac{\gamma t \sin\theta}{2\epsilon\epsilon}\right)$$

$$\omega\omega = v = \frac{(\epsilon^4 + 2\epsilon^2\gamma^2\cos\theta\sin\theta^2 + \gamma^4\sin\theta^4)\; tt}{4\epsilon^4}$$

$x = \frac{1}{4}\, tt \sin\theta$: und $y = \frac{c\sin\theta^2 - b\cos\theta}{4b}\, tt$

Also ist in dem Punct C selbsten $\tan\phi = \frac{c\sin\theta^2 - b\cos\theta}{b\sin\theta}$

28. Wenn man sich also vorstellt, die Bewegung wäre nach den beyden Richtungen CR und RQ zergliedert, so wird, wie bey der ersten Gattung, die Bewegung nach CR eine gleichförmig vermehrte Bewegung seyn: und die Fläche wird sich, vermöge der andern Bewegung, nach RQ immer weiter von der geraden Linie CR entfernen. Da ferner nach Verlauf einer unendlich großen Zeit $\tan\phi = 0$ wird, so sehen wir hieraus, daß der Winkel $FGg = \phi$ beständig abnehmen, und zuletzt gar verschwinden, oder daß die Bewegung alsdann der Axe CR parallel werde.

Die Geschwindigkeit aber nimmt beständig zu, und wird zuletzt gar unendlich groß. Denn wenn $t = \omega$ so erhält man $v = nn + \frac{1}{4}\, tt \sin\theta^2$.

Endlich wird $y = nt + 2\epsilon\epsilon\; l\,\frac{m-n}{m}$: und die krumme Linie, wenn sie bis ins Unendliche verlängert wird, kömmt zuletzt mit einer Parabel überein, deren Natur durch diese Gleichheit ausgedruckt wird:

$y =$

$$\left(y = 2n\sqrt{\frac{x}{\sin\theta}} - 2\epsilon\epsilon\right)\frac{m}{m-n}.$$

Wenn $n=0$ oder $\epsilon\sqrt{\cos\theta} = \gamma\sin\theta$ wäre, so würde die krumme Linie sich in die gerade Linie CR verwandeln. Es kömmt aber dieser Fall mit demjenigen überein, welchen wir oben im 24 § entwickelt haben, und es ist derselbe gleichsam ein Mittel zwischen der ersten und dritten Gattung unsers gegenwärtigen Falles. Hier ist also so wohl gleich im Anfang als beständig $\theta = 0$, und die Fläche wird mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in einer geraden Linie dahin gerissen.

29. Weil die Tangens des Winkels $BCG = \frac{c\sin\theta^2 - b\cos\theta}{b\sin\theta}$ ist und der Winkel $BCb = \theta$, so fällt die Fläche beständig abwärts unter der Horizontallinie Cb, wenn $c\sin\theta^2\cos\theta < b$. Wenn aber $c\sin\theta^2\cos\theta = b$, so wird die Tangens der krummen Linie bey C horizontal seyn, und die Fläche selbst wird nur im ersten Augenblick nicht abwärts steigen. Wenn endlich $c\sin\theta^2\cos\theta > b$ oder $\gamma\sin\theta > \frac{\epsilon}{\sqrt{\cos\theta}}$, so wird die Fläche AB anfänglich über die Horizontallinie Cb aufsteigen und hernach, wenn dieselbe zu einer gewissen Höhe gelanget, wiederum herunter steigen, und der eben angezeigten Bewegung folgen. Da nun dieses in die Höhe steigen der Fläche besonders sehr merkwürdig ist, und in die Augen fällt, so wird es gut seyn, diesen Fall besonders aus einander zu setzen. Man wird hierbey vornehmlich auf die Höhe zu sehen haben, zu welcher die Fläche gelanget.

Es ist aber offenbar, daß hierzu eine große Geschwindigkeit des Windes erfordert werde, daß da sey $c > \frac{b}{\sin\theta^2\cos\theta}$: damit nun dieses desto leichter angehe, so wird es rathsam seyn, den Winkel θ so groß anzunehmen, daß dadurch der Werth des Nenners $\sin\theta^2 \cos\theta$ am größten werde, welches geschieht; wenn $\theta = 54^\circ\ 44'$ oder $\sin\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, und $\cos\theta = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Entwickelung desjenigen Falles, in welchem die Fläche über dem Horizonte in die Höhe steigt.

Siebente Figur.

30. Es sey also $c > \dfrac{b}{\sin\theta^2 \cos\theta}$ oder $\gamma > \dfrac{\epsilon}{\sin\theta \sqrt{\cos\theta}}$ und CGH stelle uns denjenigen Theil der krummen Linie vor, so über dem Horizonte CH liegt; die Höhe eines jeglichen Punkts G aber über dem Horizonte wird durch die senkelrechte Linie GP angedeutet. Da nun der Winkel $BCH = \theta$, und $CR = x$: $RG = y$ so wird $GP = y \cos\theta - x \sin\theta$, und $CP = y \sin\theta + x \cos\theta$: folglich werden wir hieraus erhalten:

$$PG = mt \cos\theta - 2\epsilon\epsilon \cos\theta\, l \frac{mT - n}{m - n} - \tfrac{1}{4} tt \sin\theta^2$$

Welche Höhe, außer wenn $t = 0$, noch in einem andern Fall verschwindet, wenn nämlich, wie wir hier voraus setzen, $\gamma > \dfrac{\epsilon}{\sin\theta \sqrt{\cos\theta}}$, Und aus diesem Fall wird dasjenige Punct H bestimmet werden, wo die krumme Linie die Horizontallinie CH wiederum durchschneidet, und abwärts steigt.

Wir haben aber gesetzt $T = c^{\frac{t\sqrt{\cos\theta}}{\epsilon}}$ folglich weil

$$\gamma = \frac{m+n}{2\sin\theta} \text{ und } \epsilon = \frac{m-n}{2\sqrt{\cos\theta}} \text{ so wird:}$$

$$T = c^{\frac{2t\cos\theta}{m-n}} \text{ und } l\,T = \frac{2t\cos\theta}{m-n}.$$

Als-

Alsdann aber verwandelt sich die vorgeschriebene Bedingung

$\gamma > \frac{\varepsilon}{\sin\theta \sqrt{\cos\theta}}$ in diese

$\frac{m+n}{2\sin\theta} > \frac{m-n}{2\sin\theta\cos\theta}$; folglich muß $\frac{m}{n} < \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

oder $\frac{n}{m} > \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ seyn; und wir erlangen für die Höhe eines jeglichen unbestimmten Puncts G der krummen Linie folgenden Ausdruck:

$$PG = mt\cos\theta - \tfrac{1}{2}(m-n)\ l\frac{mT-n}{m-n} - \tfrac{1}{4}tt\sin\theta^2.$$

31. Laßt uns hieraus denjenigen Ort suchen, wo die Höhe PG am größten ist, und wir werden durch die Differentiation der Formul PG auf folgende Gleichung verfallen:

$$m\cos\theta - \tfrac{1}{2}t\sin\theta\tfrac{1}{2} = \frac{(m-n)^2\ m\,dT}{2(mT-n)\,dt}$$

Da nun $t = \frac{m-n}{2\cos\theta}\ lT$ und $dt = \frac{(m-n)\ dT}{2T\cos\theta}$

so wird unsere Gleichung diese Gestalt bekommen:

$$m\cos\theta - \frac{(m-n)\sin\theta^2}{4\cos\theta}\ lT = \frac{m(m-n)\ T\cos\theta}{mT-n}$$ oder

$$\frac{mn(T-1)\cos\theta}{mT-n} = \frac{(m-n)\sin\theta^2}{4\cos\theta}\ lT$$ oder endlich

$$lT\ \frac{4mn\ (T-1)\ \cos\theta^2}{(m-n)\ (mT-n)\sin\theta^2}.$$

Nachdem aber aus dieser Gleichung der Werth von T berechnet worden, so wird auch diejenige Zeit t bekannt seyn, in welcher die Fläche am höchsten gestiegen: ist aber diese Zeit bekannt, so kann durch ihre Hülfe die gröste Höhe PG selbst bestimmt werden.

Wenn wir setzen, daß dieses gleich vom Anfange geschehen, wo nämlich die Zeit t noch sehr klein ist, und also $T=1$ und $l\,T=T-1$, so werden wir denjenigen Fall erhalten, in welchem die erste Richtung der Bewegung horizontal ist.

32. Wenn zwar die Zeit, in welcher die Fläche zur größten Höhe gelangt, nicht unendlich klein, aber dennoch klein genug ist. so daß die Größe T die Einheit nur um ein Weniges übertreffe; so laßt uns setzen $T-1=u$ und weil $l\,T=u-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}u^3-u^4+$ &c. so wird diejenige Gleichung, welche wir hier auflösen müssen, seyn

$$\frac{4\,m\,n\cot\theta^2}{(m-n)^2}=\left(1+\frac{m\,u}{m-u}\right)\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}-\frac{u^3}{4}+\text{\&c.}\right.$$

welche in folgende Form gebracht wird

$$\frac{(m+n)^2\cos\theta^2-(m-n)^2}{(m-n)^2\sin\theta^2}=\frac{(m+n)\,u}{2(m-n)}-\frac{(m+2n)u^2}{2.3(m-n)}+\frac{(m+3n)\,u^3}{3.4\,(m-n)}-\text{\&c.}$$

oder

$$\frac{(m+n)^2\cos\theta^2-(m-n)^2}{(m-n)\sin\theta^2}=\tfrac{1}{2}(m+n)\,u-\tfrac{1}{6}(m+2n)u^2+\tfrac{1}{12}(m+3n)u^3-\text{\&c.}$$

Hieraus muß nun der Werth von u bestimmt werden, und wenn derselbe gefunden, so erhält man $T=1+u$ und alsdann

$$t=\frac{m-n}{2\cos\theta}\left(u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\text{\&c.}\right)$$

Wenn demnach u so klein ist, daß die Potestäten desselben nicht in Betrachtung zu ziehen verdienen, so wird

$$u=\frac{2(m+n)}{m-n}\cot\theta^2-\frac{2\,(m-n)}{(m+n)\sin\theta^2}\text{ und}$$

$$v=\frac{(m+n)\cos\theta}{\sin\theta^2}-\frac{(m-n)^2}{(m+n)\sin\theta^2\cos\theta}.$$

33. Wenn

33. Wenn wir für $l\,T$ eine Reyhe einführen wollen, deren Glieder stärker als die vorhergehenden abnehmen, so können wir auch setzen $T = \frac{1+z}{1-z}$, also daß da sey:

$$\tfrac{1}{2}\,l\,T = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \&c.$$

Und wir werden alsdann diese Gleichung bekommen:

$$\frac{4mn\cot\theta^2}{m-n} = (m-n) + (m+n)\,z + \tfrac{1}{3}\,(m-n)z^2 + \tfrac{1}{3}\,(m+n)z^3 + \tfrac{1}{5}\,(m-)z^4 + \&c.$$

welche auch in folgende Gestalt gebracht werden kann

$$\frac{(m+n)^2\cos\theta^2 - (m-n)^2}{(m-n)\sin\theta^2} = (m+n)\,z + \tfrac{1}{3}\,(m-n)\,z^2 + \tfrac{1}{3}\,(m+n)\,z^3 + \tfrac{1}{5}\,(m-n)\,z^4 + \&c.$$

Man setze hier der Kürze halben $\frac{(m+n)^2\cos\theta^2 - (m-n)^2}{(mm-nn)\sin\theta^2} = \mathrm{A}$

so wird, wenn wir die Wurzel z durch Annäherung ausziehen:

$$z = \mathrm{A} - \frac{(m-n)\mathrm{A}^2}{3\,(m+n)} - \frac{(m^2+10mn+n^2)\mathrm{A}^3}{9\,(m+n)^2} - \&c.$$

und dann ferner $\mathrm{T} = \frac{1+z}{1-z}$ und

$$t = \frac{(m-n)\,2}{\cos\theta}\,(1 + \tfrac{1}{3}\,2^2 + \tfrac{1}{5}\,2^4 + \tfrac{1}{7}\,2^6 + \&c.$$

Es erhellet auch hieraus, daß, wenn nicht $\cos\theta > \frac{m-n}{m+n}$, die Tangens der krummen Linie nirgends horizontal seyn könne.

Wenn endlich die Zeit, welche vom Anfang bis zur größten Höhe verflossen ist, größer wäre, als daß die eben gegebenen Formuln mit Vortheil gebraucht werden könnten, so muß der Werth von T durch andere Regeln der Annäherung also bestimmt werden, daß da sey:

$$l\,T = \frac{4\,mn\,(T-1)\,cos\,\theta^2}{(m-n)\,(m\,T-n)\,sin\,\theta^2}$$

Und wenn dieser Werth von T gefunden, so wird

$t = \frac{m-n}{2\,cos\,\theta}\;l\,T = \frac{2\,mn\,(T-1)\,cos\,\theta}{(m\,T-n)\,sin\,\theta^2}$; folglich, weil

$m\,cos\,\theta - \frac{1}{4}\,t\,sin\,\theta^2 = \frac{m\,((2m-n)\,T-n)\,cos\,\theta}{2\,(m\,T-n)}$ so wird die verlangte Höhe

$$PG = \frac{mm\,n\,(T-1)\,((2\,m-n)\,T-n)\,cos\,\theta^2}{(m\,T-n)^2\,sin\,\theta^2} - (m-n)^2\;l\,\frac{m\,T-n}{m-n}.$$

Hernach, weil $\frac{1}{2}\,t\,sin\,\theta = \frac{mn\,(T-1)\,cos\,\theta}{(m\,T-n)\,sin\,\theta}$; so wird man für die Geschwindigkeit der Fläche am höchsten Orte finden.

$$\sqrt{v} = \frac{mn\,(T-1)}{(m\,T-n)\,sin\,\theta} = \frac{1}{2}\,t\,tang\,\theta$$

und endlich $\phi = \theta$.

Man hätte aber aus eben dieser Eigenschaft $\phi = \theta$ alle diese Formuln für den höchsten Ort der Fläche leicht finden können.

35. Ich habe schon oben § 29 angemerkt, daß, wenn die Fläche von einem so schwachen Wind, als es nur sonsten die übrigen Umstände erlauben wollen, in die Höhe getrieben werden soll, nothwendiger Weise erfordert werde, daß da sey $sin\,\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und folglich $cos\,\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Es ist aber eine ganz andere Frage, wenn verlangt wird, unter welchem Winkel θ die Fläche dem Winde ausgesetzt werden muß? damit dieselbe gleich zu Anfang ihre höchste Höhe über den Horizont erreiche, oder daß der Winkel HCG am größten sey.

Denn weil $tang\,BCG = \frac{c\,sin\,\theta^2 - b\,cos\,\theta}{b\,sin\,\theta}$ und der Winkel

$BCH = \theta$; so wird $tang\ HCG = \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta} - \frac{b}{c\,sin\,\theta^3}$;
Es wird aber dieser Winkel am größten, wenn

$-\frac{1}{sin\,\theta^2} + \frac{3\,b\,cos\,\theta}{c\,sin\,\theta^4} = 0$ oder $c\,sin\,\theta^2 = 3\,b\,cos\,\theta$.

Damit aber der Winkel HCG positiv sey, haben wir schon oben gesehen, daß da seyn müsse $c\,sin\,\theta^2\,cos\,\theta \vee b$; folglich, weil nun $c\,sin\,\theta^2 = 3\,b\,cos\,\theta$, so erfordert diese Bedingung, daß $3\,cos\,\theta^2 >$ sey, als I und also $cos\,\theta > \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ oder θ 54°, 44'. Es wird also rathsam seyn, den Neigungswinkel ACa kleiner als 54°, 44' anzunehmen. Wenn aber b und c gegeben sind, so wird der Winkel θ aus dieser Gleichung $c - c\,cos\,\theta^2 = 3\,b\,cos\,\theta^2$ völlig bestimmt; es wird nämlich

$$cos\,\theta = -\frac{3\,b}{2\,c} + \sqrt{(1 + \frac{9\,bb}{4\,cc})}$$

folglich, damit $3\,cos\,\theta^2 > 1$, so muß nothwendig $c > \frac{3\,b\sqrt{3}}{2}$ oder $c > \frac{21}{8}\,b$ seyn; sonsten würde die Gewalt des Windes die Fläche nicht über den Horizont zu erheben im Stande seyn.

Einige Exempel sollen den Gebrauch der hier gegebenen Formuln zeigen.

Erstes Exempel.

36. Es sey die der Geschwindigkeit des Windes zukommende Höhe $c = 16$ Fuß und $b = 4$ Fuß. Damit nun der Winkel HCG am größten werde, so nehme man den Winkel AC$a = \theta = 46°, 8'$ an, und wir werden erhalten BCG = 62° 31' folglich den Höhenwinkel HCG = 16°, 23'.

Da ferner $\epsilon = 2$ und $\gamma = 4$ so wird $\gamma\,sin\,\theta = 2{,}88381$

$\epsilon\sqrt{cos\,\theta} = 1{,}66491$

Und also $m = 4{,}54872$

$n = 1{,}21890$

Wenn

Wenn man demnach diese gefundenen Werthe in der Gleichung setzt, welche für die größte Höhe der Fläche aufgelöst werden muß, so erhalten wir:

$$(T - 0,26796)\ l\,T = 1,35281\ (T - 1)$$

Wo aber $l\,T$ den natürlichen oder hyperbolischen Logarithmum der Größe T andeutet, und folglich, wie bekannt, gefunden wird, wenn der gemeine Logarithmus von T mit 2,302585.1 vermehret wird.

Wenn wir uns also der gemeinen Logarithmen bedienen wollen, so müssen wir folgende Gleichung auflösen:

$$(T - 0,26796)\ Log.\,T = \frac{1,35281}{2,30258}\,(T - 1) = 0,58752\ (T - 1)$$

Einige wenige Versuche aber werden uns hier bald überführen, daß der Werth von T erstlich zwischen 2 und 3, hernach zwischen 2,4 und 2,5; und endlich zwischen 2,46 und 2,47 enthalten seyn müsse. Daher man dann den wahren Werth von T durch die Interpolation also findet: $T = 2,46435$.

Da nun ferner $t = \frac{m - n}{2\ cos\ \theta}\ l\,T = \frac{m - n}{2\ cos\ \theta} + 2,30258.\ Log.\ T$ so wird $t = 2,1669$ daß macht 0,2741 Secunden.

Unsere Fläche wird folglich in diesem Exempel schon nach Verlauf von 17 Tertien die größte Höhe erreichen.

Um nun weiters diese größte Höhe selbst zu bestimmen, so können wir hier sicher annehmen: $x = \frac{1}{4}\,tt\ sin\ \theta$, und $y = \frac{1}{2}\,tt\ cos\ \theta$, folglich $PG = \frac{1}{4}\,tt\,(2\ cos\ \theta^2 - sin\ \theta^2) = 0,5174$ Fuß. Und also wird unsere Fläche kaum über einen halben Fuß in die Höhe steigen. Was endlich die der Geschwindigkeit der Fläche am höchsten Orte zukommende Höhe betrift, so wird dieselbe, weil $\Phi = \theta$, und also $v = \frac{1}{4}\,tt\ tang\ \theta^2$, gleich seyn 1,2705 Fuß. Hier wird also die Fläche wiederum abwärts getrieben werden, mit einer beschleunigten Kraft,

$fo = 0,5086$, und folglich die halbe Schwere der Fläche kaum übertrift.

Zweytes Exempel.

37. Wenn wir $c = 16$ und $b = 1$ annehmen, so wird der Winkel $\theta = 24^\circ, 24'$ und HCG $= 52^\circ, 49'$. Es wird aber alsdann durch eine der vorhergehenden ähnliche Annäherung gefunden werden, daß da sey $T = 1219, 375$ und dann ferner $t = 7, 4464$; welcher Zahl aber $0,9419''$ oder 56 Tertien zukommen. Man kann hieraus abnehmen, daß die Fläche allemal ihre größte Höhe sehr geschwinde erreichen müsse. Laßt uns also hier wiederum um diese Höhe PG selbsten zu finden annehmen, $x = \frac{1}{4}\, tt \sin\theta$ und $y = \frac{1}{2}\, tt \cos\theta$ und wir werden erhalten:

$$PG = \tfrac{1}{4}\, tt\, (2 \cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 20,638 \text{ Fus.}$$

Wenn also die Oberfläche der Fläche, die der Kraft des Windes ausgesetzt ist, einerley bleibt, so erlernen wir hieraus, daß die Verminderung ihrer Schwere sehr viel beytrage, die größte Höhe derselben zu vermehren; da in diesem letztern Exempel, in welchem das Gewicht der Fläche nur viermal leichter angenommen werden, die Fläche über 40 mal höher steigen müsse, als in dem vorhergehenden; die der Geschwindigkeit der Fläche an diesem Orte zukommende Höhe wird aber seyn 2,8524 Fus.

Zweyter Fall.

Wenn die Fläche mit der Richtung des Winkels einen rechten Winkel macht.

Achte Figur.

38. Der zweyte Fall, zu dessen Entwickelung uns die Auflösung des ersten leicht führen wird, ist, wenn die Fläche AB in einer senkel-

kelrechten Lage dem Winde übergeben wird. Also ist hier der Winkel $ACa = \theta$ ein rechter Winkel, und folglich $\sin\theta = 1$ und $\cos\theta = 0$. Es ist aber dieser Fall in so fern merkwürdig, weil ein Theil der Berechnung desselben algebraisch verrichtet werden kann. Denn wir erhalten sogleich $\omega\cos\Phi = \frac{1}{2}t$, und die zweyte Differentialgleichung bekömmt folgende Gestalt: $dt = \frac{2bd.\omega\sin\Phi}{(\gamma - \omega\sin\theta)^2}$, so daß ihr Integrale uns auf eine algebraische Art giebt: $t = \frac{2b}{\gamma - \omega\sin\Phi} - \frac{2b}{\gamma} =$

$$\frac{2b\omega\sin\Phi}{\gamma(\gamma - \omega\sin\Phi)}.$$

Daraus wir dann ferner erhalten:

$$\omega\sin\Phi = \frac{ct}{2b + \gamma t}, \text{ und folglich } \tang\Phi = \frac{2c}{2b + \gamma t}$$

$$\text{und } \omega\omega = v = \frac{cc\,tt}{(2b + \gamma t)^2} + \tfrac{1}{4}tt.$$

Hernach aber, weil $dx = \frac{1}{2}tdt$, und $dy = \frac{ct\,dt}{2b + \gamma t} = \gamma dt - \frac{2b\gamma dt}{2b + \gamma t}$,

so giebt die Integration:

$$x = \tfrac{1}{4}tt, \text{ und } y = \gamma t - 2b\, l\frac{2b + \gamma t}{2b} \text{ oder}$$

$$y = 2\sqrt{cx} - 2bl\left(1 + \frac{\sqrt{cx}}{b}\right)$$

welche letzte Gleichung die Natur der beschriebenen krummen Linie CGg ausdrückt.

39. Es wird also gleich im Anfange der Bewegung

$$\tang\Phi = \frac{c}{b} - \frac{c\gamma t}{2bb} \text{ und } \omega\omega = v = \tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{cc}{bb}\right)tt - \frac{cc\gamma t^3}{4b^3}.$$

$$\text{Ferner: } x = \tfrac{1}{4}tt, \text{ und } y = \frac{\gamma\gamma tt}{4b} - \frac{\gamma^3 t^3}{12bb} = \frac{c\,tt}{4b} - \frac{c\gamma t^3}{12bb}$$

und

und folglich $y = \frac{cx}{b} - \frac{2cx\sqrt{cx}}{3bb}$.
Nach Verlauf aber einer unendlich großen Zeit wird der Winkel $P=0$: daraus wir also schließen, daß die Fläche sich alsdann nach ihrer eigenen Richtung bewegen, und folglich die Tangens der krummen Linie senkelrecht seyn werde. Der Winkel Φ nimmt beständig je mehr und mehr ab, bis derselbe endlich ganz und gar verschwindet. Ferner wird nach Verlauf einer unendlich großen Zeit $v = c + \frac{1}{4}tt$, und also wächst die Geschwindigkeit der Fläche bis ins Unendliche. Endlich, weil alsdann $x = \frac{1}{4}tt$; $y = \gamma' t$, und folglich $yy = 4\,o\,x$: so sehen wir hieraus, daß die krumme Linie CG bis ins Unendliche verlängert, zuletzt mit einer Parabel überein kommen müsse, die auf der Axe CR beschrieben, und einen Parameter $=4\,o$ hat. Im übrigen weil hier $\omega . \sin \Phi$ allezeit kleiner ist als γ, und nur in einer unendlich großen Zeit $\omega . \sin \Phi = \gamma$ wird, so werden wir auch hier nicht nöthig haben, auf die oben erwähnte Behutsamkeit §. 25. Achtung zu geben. Wir werden aber hingegen bey dem folgenden und letzten Falle, in welchem der Winkel θ stumpf angenommen wird, wohl darauf zu sehen haben, ob nämlich $\omega . \sin \Phi$ grösser oder kleiner als $\gamma . \sin \theta$ ist.

Dritter Fall.

Wenn die Fläche mit der Richtung des Winkels einen stumpfen Winkel macht.

Neunte Figur.

40. Es sey nun ACa ein stumpfer Winkel, und da sein *Cosinus negativ* ist, so lasset uns an seiner Statt das Complementum zu zweyen rechten Winkeln aCB in der Rechnung einführen, und setzen $aCB = \eta$: Die der Geschwindigkeit des Windes zukommende Höhe

sey wie bishero $=c$ und die Oberfläche unserer Fläche $=aa$; ihr Gewicht $P=aab$, und $\sqrt{c}=\gamma$; $\sqrt{b}=\beta$. Das Mittelpunct der Schwere oder Größe C der Fläche beschreibe nun die krumme Linie CG, und welche wir hier, in Ansehung der verlängerten geraden Linie CB, als eine Axe bestimmen wollen. Nun sey die Fläche nach Verlauf einer Zeit t an den Ort G gekommen, für welchen wir setzen $CR=x$; $RG=y$, und den Winkel $FGg=\phi$. Wenn man also daselbst die senkelrechte Linie GP ziehet, so wird $FGP=90'-y$. Endlich sey die der Geschwindigkeit der Fläche an dem Orte G zukommende Höhe $=v$ und $\sqrt{v}=\omega$. Dieses nun vorausgesetzt, so wird die Geschwindigkeit des Windes mit dem Sinus der Neigung multipliciret $=\gamma \sin \eta$, und die Geschwindigkeit der Fläche durch den Sinus der Neigung vermehret $=\omega \sin \phi$ seyn. Folglich wird aus diesen beyden Geschwindigkeiten, zusammen genommen, eine Kraft entstehen, so die Fläche nach der Richtung GQ treibt, und $=aa$ $(\gamma \sin y-\omega \sin \phi)^2$ ist; so lange nämlich $\gamma \sin \eta>\omega \sin \phi$ und welches im Anfang der Bewegung, wenn $\omega=0$ ist, gewiß statt findet. Wenn aber hernach währender Bewegung irgendwo $\omega \sin \phi>\gamma \sin \eta$ werden sollte, so würde die Fläche nach der entgegen gesetzten Richtung GR durch eine Kraft getrieben werden, so alsdenn $=aa$ $(\omega \sin \phi-\gamma \sin \eta)^2$ wäre. Hernach entsteht aber, von der Kraft der Schwere nach $GP=P=aab$, erstlich eine Kraft nach $GQ=aab \cos \eta$ und dann zweytens eine Kraft nach $GF=aab \sin \eta$.

41. Nun werde auch die Bewegung nach den Richtungen GF und GQ zergliedert, und die Geschwindigkeit nach GF wird seyn $=\omega \cos \phi$; die Geschwindigkeit nach GQ aber $=\omega \sin \phi$, folglich $dx=\omega\, dt \cos \phi$, und $dy=\omega\, dt \sin \phi$.

Wir werden aber durch die Würkung der Kräften folgende beyde Gleichheiten erhalten:

I. 2 d.

I. $\frac{2d.\omega\cos\phi}{dt} = \sin\eta$, und II. $\frac{2d.\omega\sin\phi}{dt} = \cos\eta + \frac{(\gamma\sin\eta - \omega\sin\phi)^2}{\epsilon\epsilon}$

Deren letztere aber nur so lange statt hat, so lange nämlich $\gamma\sin\eta > \omega\sin\phi$. Sobald aber $\omega\sin\phi > \gamma\sin\eta$ werden sollte, so müßten wir an ihrer Stelle diese Gleichheit setzen:

$$\frac{2d.\omega\sin\phi}{dt} = \cos\eta - \frac{(\omega\sin\phi - \gamma\sin\eta)^2}{\epsilon\epsilon}$$

Laßt uns erstlich diejenige Bewegung entwickeln, welche die Fläche vom Anfange an, bis zu dem Augenblicke, wo $\omega\sin\phi = \gamma\sin\eta$ verfolgen wird. Es giebt aber die erste Gleichung, nachdem sie integriret worden, $\omega\cos\phi = \frac{1}{2}t\sin\eta$ und die andere erhält folgende Gestalt: $dt = \frac{2\epsilon\epsilon\, d.\omega\sin\phi}{\epsilon\epsilon\cos\eta + (\gamma\sin\eta - \omega\sin\phi)^2}$

Deren Integrale ist:

$$t = \frac{-2\epsilon}{\sqrt{\cos\eta}}\, Ang.\,tang.\, \frac{\gamma\sin\eta - \sin\phi}{\epsilon\sqrt{\cos\eta}} + \frac{2\epsilon}{\sqrt{\cos\eta}}\, Ang.\,tang.\, \frac{\gamma\sin\eta}{\epsilon\sqrt{\cos\eta}}.$$

42. Es sey der Kürze halben $T = tang\, \frac{t\sqrt{\cos\eta}}{2\epsilon}$ oder $t = \frac{2\epsilon}{\sqrt{\cos\eta}}\, Ang.\ tang\ T.$

Damit wir haben $Ang.\,tang.\, \frac{\gamma\sin\eta - \omega\sin\phi}{\epsilon\sqrt{\cos\eta}} = Ang.\,tang.\, \frac{\gamma\sin\eta}{\epsilon\sqrt{\cos\eta}} - Ang.\ tang\ T.$

oder $= Ang.\ tang.\ \frac{\gamma\sin\eta - \epsilon T\sqrt{\cos\eta}}{\epsilon\sqrt{\cos\eta} + \gamma T\sin\eta}$ folglich:

$\frac{\gamma\sin\eta - \omega\sin\phi}{\epsilon\sqrt{\cos\eta}} = \frac{\gamma\sin\eta - \epsilon T\sqrt{\cos\eta}}{\epsilon\sqrt{\cos\eta} + \gamma T\sin\eta}$ und also

$$\omega\sin\phi = \frac{(\epsilon\epsilon\cos\eta + \gamma\gamma\sin\eta^2)T}{\epsilon\sqrt{\cos\eta} + \gamma T\sin\eta}$$

Dieser Ausdruck aber wird nur so lange gelten, bis $\omega\sin\phi = \gamma\sin\eta$ wird, oder so lange noch $\omega\sin\phi < \gamma\sin\eta$ ist. Es geschieht dieses, wenn

$T = \frac{\gamma\,sin\,\eta}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta}}$ folglich nach einer Zeit $t = \frac{2\,\mathfrak{E}}{\sqrt{cos\,\eta}}\,Ang.\,tang\,\frac{\gamma\,sin\,\eta}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta}}$; und wenn dieselbe Zeit verflossen, so wird man die andere Formul

$$dt = \frac{2\,\mathfrak{E}\mathfrak{E}\,d.\,\omega\,sin\,\Phi}{\mathfrak{E}\mathfrak{E}\,cos\,\eta - (\omega\,sin\,\Phi - \gamma\,sin\,\eta)^2}$$

gebrauchen müssen.

43. Also wird vom Anfang der Bewegung an, bis nach Verlauf der Zeit $t = \frac{2\,\mathfrak{E}}{\sqrt{cos\,\eta}}\,Ang.\,tang\,\frac{\gamma\,sin\,\eta}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta}}$ außer dem gefundenen Werth von $\omega\,cos\,\Phi = \frac{1}{2}\,t\,sin\,\eta$ noch diese Gleichung statt finden:

$$\omega\,sin\,\Phi = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{E}\,cos\,\eta + \gamma\gamma\,sin\,\eta^2)\,tang\,\frac{t\sqrt{cos\,\eta}}{2\,\mathfrak{E}}}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta} + \gamma\,sin\,\eta\,tang\,\frac{t\sqrt{cos\,\eta}}{2\,\mathfrak{E}}}.$$

Nach dieser Zeit aber wird die andere Gleichheit zur Hülfe genommen werden, dessen Integral also gefunden wird:

$$t = \frac{2\,\mathfrak{E}}{\sqrt{cos\,\eta}}\,l\,\frac{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta} - \gamma\,sin\,\eta + \omega\,sin\,\Phi}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta} + \gamma\,sin\,\eta - \omega\,sin\,\Phi} + C.$$

Diese beständige Größe C aber muß dergestalt bestimmt werden, daß der eben gefundene Werth von t mit dem Vorhergehenden vollkommen übereinkomme, wenn $\omega\,sin\,\Phi = \gamma\,sin\,\eta$ gemacht wird; in welchem Augenblicke sich nämlich die beyden verschiedenen Bewegungen abwechseln. Man wird also setzen müssen:

$$C = \frac{2\,\mathfrak{E}}{\sqrt{cos\,\eta}}\,Ang.\,tang\,\frac{\gamma\,sin\,\eta}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta}}.$$

Wenn folglich die verflossene Zeit t größer als $\frac{2\,\mathfrak{E}}{\sqrt{cos\,\eta}}\,Ang.\,tang\,\frac{\gamma\,sin\,\eta}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta}}$ wird, so muß man sich dieser Gleichheit bedienen: $l\,\frac{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta} - \gamma\,sin\,\eta + \omega\,sin\,\Phi}{\mathfrak{E}\sqrt{cos\,\eta} + \gamma\,sin\,\eta - \omega\,sin\,\Phi} = \frac{t\sqrt{cos\,\eta}}{2\,\mathfrak{E}} - Ang.\,tang$

$\gamma\,sin$

$\frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}$. Daher dann der Werth von $\omega \sin \phi$ also bestimmt wird:

$$\omega \sin \phi = \frac{(\varepsilon \sqrt{\cos \eta} + \gamma \sin \eta)\; l\, \frac{t \sqrt{\cos \eta}}{2 \varepsilon} - Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}} - \varepsilon \sqrt{\cos \eta} + \gamma \sin \eta}{1 + l\, \frac{t \sqrt{\cos \eta}}{2 \varepsilon} - Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}}$$

44 Da nun diese Bewegung aus einer Gattung in eine andere und ganz verschiedene übergeht, so lasset uns diese Abwechslung etwas sorgfältiger untersuchen. Wir haben aber schon gezeiget, daß dieser Sprung oder diese Abwechslung nach Verlauf der Zeit $t = \frac{2 \varepsilon}{\sqrt{\cos \eta}}\, Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}$ geschehe, in welchem Augenblick zugleich $\omega \sin \phi = \gamma \sin \eta$ wird. In diesem Augenblick hebt sich nämlich die Gewalt des Windes mit dem Widerstande der Luft, so durch die Bewegung der Fläche entstanden ist, vollkommen auf: also, daß die Fläche nur allein von ihrer Schwere getrieben wird, und nicht die geringste Kraft von der Luft empfängt. Der Winkel FGg aber wird noch alsdann den Winkel FGR, dessen Tangens $= \frac{\cos \eta}{\sin \eta}$ ist, übertreffen. Denn weil $\omega \cos \phi = \frac{1}{2} t \sin \eta$, so wird zur Zeit der Abwechslung $\omega \cos \phi = \frac{\varepsilon \sin \eta}{\sqrt{\cos \eta}}\, Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}$.

Und folglich:

$$tang\ \phi = \frac{\gamma \sqrt{\cos \eta}}{\varepsilon\, Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}} = \frac{\cos \eta}{\sin \eta} + \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}} : Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}.$$

Da nun die Tangens eines jeglichen Winkels größer ist, als der Winkel oder der ihm zukommende Bogen, so wird:

$\frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}} > Ang.\,tang\, \frac{\gamma \sin \eta}{\varepsilon \sqrt{\cos \eta}}$ und also $tang\ \phi > \frac{\cos \eta}{\sin \eta}$

das ist: FGg > FGP.

45.

45. Es war aber im Anfang der Bewegung:

$$\omega \sin \Phi = \frac{\epsilon\epsilon \cos \eta + \gamma\gamma \sin \eta^2}{\epsilon \surd \cos \eta} \times \frac{t \surd \cos \eta}{2\epsilon} = \frac{\epsilon\epsilon \cos \eta + \gamma\gamma \sin \eta^2}{2\epsilon\epsilon} t$$

und folglich, weil $\omega \cos \Phi = \frac{1}{2} t \sin \eta$,

$$tang.\ \Phi = \frac{\epsilon\epsilon \cos \eta + \gamma\gamma \sin \eta^2}{\epsilon\epsilon \sin \eta} = \frac{\cos \eta}{\sin \eta} \left(1 + \frac{\gamma\gamma \sin \eta^2}{\epsilon\epsilon \cos \eta}\right).$$

Nun sage ich, daß damals, nämlich im Anfang, der Winkel Φ größer gewesen, als bey der Verwechslung der Bewegung; denn

$$1 + \frac{\gamma\gamma \sin \eta^2}{\epsilon \cos \eta} > \frac{\gamma \sin \eta}{\epsilon \surd \cos \eta} : Ang.\ tang\ \frac{\gamma \sin \eta}{\epsilon \surd \cos \eta}.$$

Um dieses deutlich zu zeigen, so setze man $Ang.\ tang\ \frac{\gamma \sin \eta}{\epsilon \surd \cos \eta} = \xi$; also daß da sey $\frac{\gamma \sin \eta}{\epsilon \surd \cos \eta} = tang\ \xi$, und es soll bewiesen werden, daß $1 + tang\ \xi^2 > \frac{tang\ \xi}{\xi}$ oder $\xi \sec \xi^2 > tang\ \xi$. Es folgt aber hieraus daß da wäre $\xi > \sin \xi \cos \xi$, das ist: $2\xi > \sin 2\xi$, welches von sich selbst erhellet, da ein jeglicher Bogen allemal größer ist, als sein Sinus.

Es nimmt also der Winkel Φ vom Anfang an bis zur Verwechslung der Bewegung ab. Nach dieser Zeit aber fährt dieser Winkel fort, je länger je stärker abzunehmen, bis derselbe endlich nach Verlauf einer unendlich großen Zeit gar verschwindet.

Denn wenn $t = \infty$: so wird $\omega \sin \Phi = \epsilon \surd \cos \eta + \gamma \sin \eta$, und $\omega \cos \Phi = \infty$; folglich $tang\ \Phi = 0$, und $\omega\omega = \infty$.

46. Damit wir aber diese besondere Bewegung noch genauer entwickeln, so laßt uns der Kürze halben setzen:

$$Ang.\ tang\ \frac{\gamma \sin \eta}{\epsilon \surd \cos \eta} = \xi, \text{ so daß } \epsilon \surd \cos \eta = \frac{\gamma \sin \eta}{tang\ \xi} = \gamma \sin \eta \cot \xi.$$

Wenn

Wenn wir nun diese Werthe in der Rechnung einführen, so werden wir zwar erstlich für die ganze Bewegung haben $\omega \cos \phi = \frac{1}{2} t \sin \eta$; überdas aber wird vom Anfang an bis zur Abwechslung der Bewegung diese Gleichheit statt finden:

$$\omega \sin \phi = \frac{\gamma \sin \eta\, (\mathrm{tang}\, \xi + \cot \xi)\, \mathrm{tang}\, (\frac{t}{2\gamma} . \cot \eta . \mathrm{tang}\, \xi)}{1 + \mathrm{tang}\, \xi . \mathrm{tang}\, (\frac{t}{2\gamma} . \cot \eta . \mathrm{tang}\, \xi)}.$$

Nach der Abwechslung aber wird beständig bis ins Unendliche folgende Gleichung statt haben,

$$\omega \sin \phi = \frac{\gamma \sin \eta\, (1 - \cot \xi + (1 + \cot \xi)\, l^{\frac{t}{2\gamma} \cot \eta\, \mathrm{tang}\, \xi - \xi})}{1 + l^{\frac{t}{2\gamma} \cot \eta\, \mathrm{tang}\, \xi - \xi}}.$$

Ferner wird in dem Augenblicke der Abwechslung $\omega \sin \phi = \gamma \sin \eta$. Es geschieht aber diese Abwechslung nach einer verflossenen Zeit $t = 2 \gamma \xi\, \mathrm{tang}\, \eta \cot \xi$. Endlich wird nach Verlauf einer unendlich großen Zeit $\omega \sin \phi = \gamma \sin \eta\, (1 + \cot \xi)$; und der Winkel ϕ, wie wir gesehen haben, $= 0$, die Geschwindigkeit $\omega = \sqrt{v}$ aber unendlich groß. Und auf diese Weise wird man durch Hülfe dieser beyden auf einander folgenden Werthe von $\omega \sin \phi$ auf eine jegliche Zeit, so wohl den Winkel ϕ, als auch die Geschwindigkeit ω berechnen können. So lange nämlich die Zeit $t > 2 \gamma \xi\, \mathrm{tang}\, \eta \cot \xi$ ist, so lange muß man sich des ersten Werths, hernach aber beständig des letzten bedienen.

47. Um nun diese Formuln kürzer zusammen zu ziehen, so laßt uns setzen: $\frac{t}{2\gamma} \cot \eta\, \mathrm{tang}\, \xi = \tau$, also daß $t = 2\gamma\, \tau\, \mathrm{tang}\, \eta \cot \xi$, und die Bewegung sich ändere, wenn $\tau = \xi$ wird. Wir werden sol-

chergestalt haben: $\omega \cos\phi = \gamma\tau \sin\eta \, \mathrm{tang}\,\eta \cot\xi$, und dann zweytens vor der Verwechslung der Bewegung, so lange nämlich $\tau < \xi$ ist

$$\omega \sin\phi = \frac{\gamma \sin\eta \,(\mathrm{tang}\,\xi + \cot\xi)\ \mathrm{tang}\,\tau}{1 + \mathrm{tang}\,\xi \,\mathrm{tang}\,\tau}.$$

Nach der Abwechslung aber wenn $\tau > \xi$ wird:

$$\omega \sin\phi = \frac{\gamma \sin\eta \,(1 - \cot\xi + l^{\tau - \xi}\,(1 + \cot\xi))}{1 + l^{\tau - \xi}}.$$

Da nun $dx = \omega\, dt \cos\phi = \frac{1}{2}\, t\, dt \sin\eta$ so giebt die Integration:

$$x = \tfrac{1}{4}\, tt \sin\eta = \gamma\gamma\,\tau\tau \sin\eta\ \mathrm{tang}\,\eta^2 \cot\xi^2.$$

Daraus erhellet, daß auch in dem gegenwärtigen letzten Falle die Bewegung der Fläche nach der Richtung CR eine gleichförmig beschleunigte Bewegung sey.

48. Diese Formuln können noch kürzer eingekleidet werden: denn da $\mathrm{tang}\,\xi + \cot\xi = \frac{1}{\sin\xi . \cos\xi}$ und $1 + \mathrm{tang}\,\xi\, \mathrm{tang}\,\tau = \frac{\cos(\xi - \tau)}{\cos\xi \cos\tau}$, so erhält die erste folgende Gestalt: $\omega \sin\phi = \frac{\gamma \sin\eta}{\sin\xi} . \frac{\sin\tau}{\cos(\xi - \tau)}$ oder, weil $\sin\tau = \sin\xi \cos(\xi - \tau) - \cos\xi \sin(\xi - \tau)$ diese:

$$\omega \sin\phi = \frac{\gamma \sin\eta}{\sin\xi}\,(\sin\xi - \cos\xi\ \mathrm{tang}\,(\xi - \tau)).$$

Die andere Gleichheit aber, welche nach der Veränderung der Bewegung Statt hat, wird erstlich in diese Gestalt gebracht:

$$\omega \sin\phi = \frac{\gamma \sin\eta}{\sin\xi} \times \frac{\sin\xi - \cos\xi + l^{\tau - \xi}\,(\sin\xi + \cos\xi)}{l^{\tau - \xi} + 1},$$

und dann ferner in dieser: $\omega \sin\phi = \frac{\gamma \sin\eta}{\sin\xi}\,(\sin\xi - \cos\xi + \frac{2\cos\xi\, l^{\tau - \xi}}{l^{\tau - \xi} + 1})$.

49. Da nun ferner $dt = 2\gamma\, d\tau\, \mathrm{tang}\,\eta\, \cot\xi$, so wird $dy = 2\gamma\, \mathrm{tang}\,\eta\, \cot\xi \times \omega\, d\tau \sin\Phi$, folglich wird für die erste Bewegung, wo $\tau < \xi$, $y = \frac{2\gamma\gamma \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\eta}{\sin\xi\, \mathrm{tang}\,\xi} \left(\tau \sin\xi - \cos\xi\, l \frac{\cos(\xi - \tau)}{\cos\xi}\right)$

Und in dem Augenblick, da sich die Bewegung ändert, und $\tau = \xi$

$$y = \frac{2\gamma\gamma \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\eta}{\sin\xi\, \mathrm{tang}\,\xi} \left(\xi \sin\xi - \cos\xi .\, l \frac{1}{\cos\xi}\right)$$

Und endlich für die letztere Bewegung wo $\tau > \xi$

$$y = \frac{2\gamma\gamma \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\eta}{\sin\xi\, \mathrm{tang}\,\xi} \left(\xi \sin\xi - \cos\xi\, l \frac{1}{\cos\xi} + (\sin\xi - \cos\xi)(\tau - \xi)\right.$$
$$\left. + 2\cos\xi\, l \frac{l^{\tau - \xi} + 1}{2}\right).$$

Nachdem nämlich bey der Integration eine beständige Größe hinzugethan worden, die also bestimmt wird, damit in dem Fall, wo $\tau = \xi$, der vorige Werth für y heraus komme. Folglich werden wir erstlich für die ganze Bewegung erhalten die Abscisse:

$x = \gamma\gamma\tau\tau \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\eta^2 \cot\xi^2$,

und dann zweytens für die erstere Bewegung, so lange nämlich $\tau > \xi$, die Applicate $y = \frac{2\gamma\gamma \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\eta}{\sin\xi\, \mathrm{tang}\,\xi} \left(\tau \sin\xi - \cos\xi\, l \frac{\cos(\xi - \tau)}{\cos\xi}\right)$

für die letztere Bewegung aber, wenn $\tau > \xi$ ist:

die Applicate $y = \frac{2\gamma\gamma \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\eta}{\sin\xi\, \mathrm{tang}\,\xi} \left(\xi \cos\xi + \tau (\sin\xi - \cos\xi)\right.$

$$\left. + 2\cos\xi\, l \frac{(l^{\tau - \xi} + 1)\sqrt{\cos\xi}}{2}\right).$$

50. Folglich wird im Anfang der Bewegung, wenn die Zeit t und also auch der Bogen τ noch sehr klein ist, seyn:

$\cos(\xi - \tau) = \cos\xi\,(1 - \frac{1}{2}\tau\tau) + \sin\xi\,(\tau - \frac{1}{6}\tau^3)$: ferner

$l \frac{\cos(\xi - \tau)}{\cos\xi}\; l(1 + \tau\, \mathrm{tang}\,\xi - \frac{1}{2}\tau\tau - \frac{1}{6}\tau^3\, \mathrm{tang}\,\xi)$, oder durch die

 An-

Annäherung: $l\frac{cos(\xi-\tau)}{cos\,\xi} = \tau\,tang\,\xi - \frac{\tau\tau}{2\,cos\,\xi\,2} + \frac{\tau^3\,tang\,\xi}{2\,cos\,\xi\,2}$

folglich die Applicate:

$$y = \frac{2\gamma\gamma\,sin\,\eta\,tang\,\eta}{sin\,\xi\,tang\,\xi}\left(\frac{\tau\tau}{2\,cos\,\xi^2} - \frac{\tau^3\,tang\,\xi}{3\,cos\,\xi^2}\right) = \frac{\gamma\gamma\,\tau\tau\,sin\,\eta\,tang\,\eta}{sin\,\xi^2\,cos\,\xi}$$
$$(1 - \tfrac{2}{3}\,\tau\,tang\,\xi).$$

Bey der letzten Bewegung aber, und nach Verlauf einer unendlich großen Zeit, weil alsdenn $l\,(l^{\tau-\xi}+1) = \tau-\xi$, so wird die Applicate $y = \frac{2\gamma\gamma\,sin\,\eta\,tang\,\eta}{sin\,\xi\,tang\,\xi}\,\tau\,(sin\,\xi + cos\,\xi)$

Die beschriebene krumme Linie wird also zuletzt mit einer Parabel überein kommen, die auf der Axe CR beschrieben worden, und deren Parameter $= \frac{4\,c\,sin\,\eta\,(1+2\,sin\,\xi\,cos\,\xi)}{sin\,\xi^2}$ ist.

51. Weil sich die Bewegung nach einer verflossenen Zeit $t = c\gamma\xi\,tang\,\eta\,cot\,\xi$ ändert, und $tang\,\xi = \frac{\gamma\,sin\,\eta}{\zeta\sqrt{cos\,\eta}}$ gesetzt worden, so erhellet, daß in demjenigen Fall, wo der Winkel $aCB=\eta$ ein rechter Winkel ist, seyn müsse $tang\,\xi = \infty$ und folglich auch ξ ein rechter Winkel. Weil aber in diesem Falle $tang\,\eta\,cot\,\xi = \frac{\zeta\,tang\,\eta\sqrt{cos\,\eta}}{\gamma\,sin\,\eta}$ $= \frac{\zeta}{\gamma\sqrt{cos\,\eta}} = \infty$, so wird hier die Veränderung erst nach Verlauf einer unendlich großen Zeit Statt finden. Die ganze Bewegung der Fläche wird nämlich nur allein zur ersten Gattung gehören, wo $\tau<\xi$. Die Grösse τ aber wird während der ganzen Bewegung $=0$ seyn.

Und unsere Formuln werden vollkommen eben diejenige Bewegung anzeigen, so wir oben für diesen nämlichen Fall bestimmet haben, §. 38.

Wenn

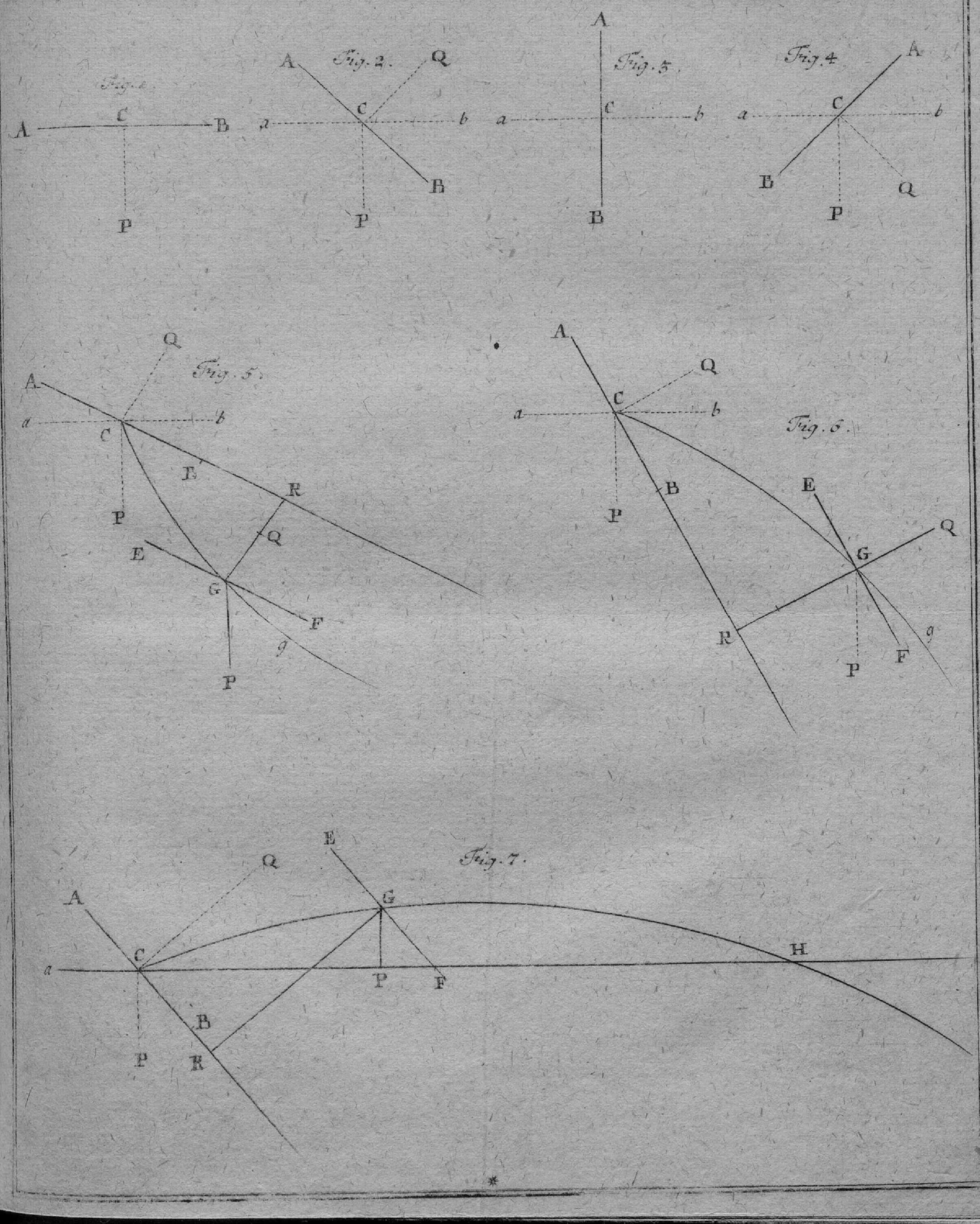


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

Fig. 8.

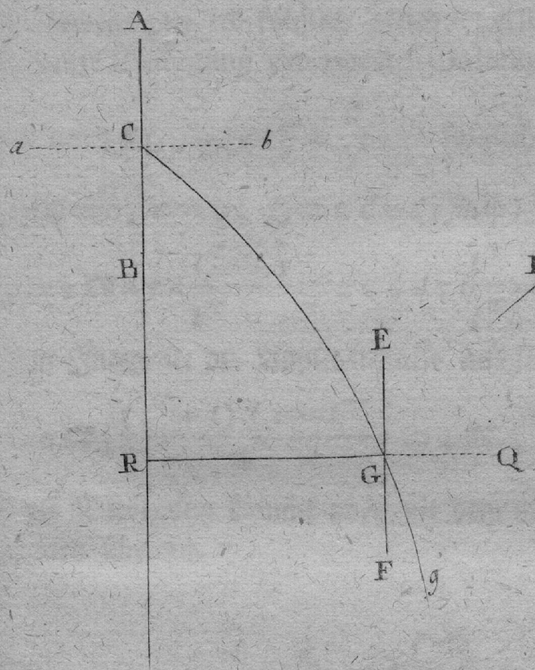
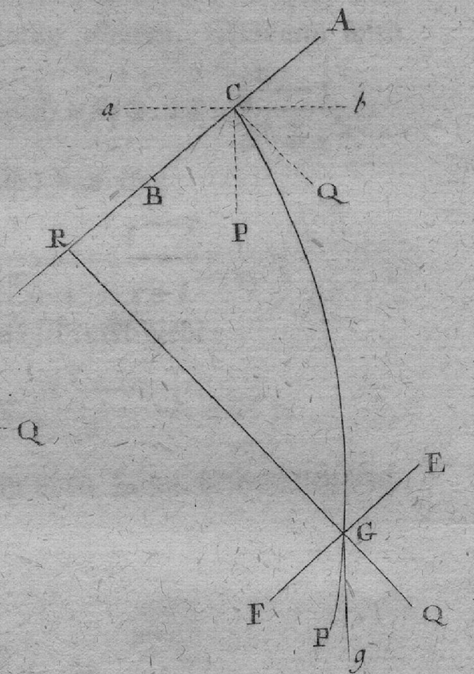


Fig. 9.



Wenn endlich der Winkel $aCB = \eta$ verschwindet, und der Fläche eine horizontale Lage gegeben wird, so erhalten wir $tang\, \xi = 0$ und also auch $\xi = 0$, folglich $tang\, \eta\, cot\, \xi = \frac{\zeta}{\gamma}$. Die Veränderung der Bewegung wird folglich gleich im ersten Anfang geschehen, und die ganze Bewegung zur zweyten Gattung gehören. Alsdann wird aber $t = 2\zeta\tau$, $sin\, \eta\, cot\, \xi = \frac{\zeta}{\gamma}$, und folglich $\omega\, sin\, \phi = \zeta \times \frac{l^\tau - 1}{l^\tau + 1}$; $\omega\, cos\, \phi = 0$, $x = 0$; $dy = 2\zeta\omega\, d\tau\, sin\, \phi$, das ist:

$$dy = 2\zeta\zeta\, d\tau \times \frac{l^\tau - 1}{l^\tau + 1} = 2\zeta\zeta\, d\tau \left(\frac{l^\tau}{l^\tau + 1} - \frac{l^{-\tau}}{1 + l^{-\tau}}\right);$$

dessen Integrale die Applicate also ausgedruckt giebt:

$$y = 2\zeta\zeta\, l\, \frac{(l^\tau + 1)(1 - l^{-\tau})}{4} = 4\zeta\zeta\, l\, \frac{l^\tau - 1}{2} - 2\zeta\zeta\tau.$$

Diese Bewegung kömmt aber mit dem oben §. 23. bestimmten vollkommen überein.