W. J. G. Karstens
Abhandlung
von der
Archimedeischen
Wasserschraube.

Von der Archimedeischen Wasserschraube.

1. §.

Herr Leonh. Euler hat im V. Theil der Comment. Nov. Petrop. eine Theorie der Wasserschraube vorgetragen, welche auf die nunmehro bekannten neuen Erweiterungen der Hydraulik gebauet ist; er hat die Rechnungen darüber so weit getrieben, als es die Schwierigkeiten der Integrationen, die dabey vorkommen, zulassen: ist aber genöthiget gewesen, die Untersuchung abzubrechen, weil er kein Mittel fand, diejenige Differentialgleichung zu integriren, woraus die Geschwindigkeit des Wassers in der um die Spindel gewundenen Röhre gefunden werden müste. Nach der Zeit hat die königliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin die Preisfrage aufgegeben, wie eine Wasserschraube am vortheilhaftesten anzuordnen sey, und sie hat im Jahr 1766. dem Herrn Hennert den Preis zuerkannt. Der Herr Hennert gründet in der Preisschrift seine Rechnungen mit Herrn Euler auf einerley Differentialgleichung, und scheint zu glauben, daß er die erwehnte Geschwindigkeit des Wassers in der Wasserschraube der Theorie gemäß richtig gefunden habe. Herr Hennert müste demnach eine wichtige bisher noch unbekannt gewesene Methode zu integriren erfunden haben, wenn er dieses wirklich geleistet hätte: sein Vortrag aber hat meine Erwartung gar nicht erfüllet, er scheint mir vielmehr sehr wichtigen Erinnerungen ausgesetzt zu seyn, und nach meiner Ueberzeugung ist die Preisfrage in der Hauptsache unbeantwortet geblieben. Deswegen glaube ich, daß es nicht ohne Nutzen seyn werde, wenn ich in diesem Aufsatz zeige, wieweit man in der Theorie von dieser Maschine eigentlich gekommen sey; und wenn ich zugleich diejenigen Formuln entwickele, woran man sich bey der Berechnung und Anordnung einer Wasserschraube mit ziemlicher Sicherheit so lange halten kann, bis man Mittel gefunden hat, die Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden.

2. §.

Es wird nicht nöthig seyn, daß ich mich umständlich mit einer Beschreibung von der Gestalt der Wasserschraube aufhalte. Das Wesentliche davon besteht bekanntermassen darinn, daß eine hohle Röhre um einen Cylinder so geführt wird, daß ihre centrische Linie die Gestalt einer Schraubenlinie bekömmt. Uebrigens finde ich nicht undienlich zu erinnern, daß es nach Leupolds Urtheil im Theatro Machin. Hydraul. P. I. IV. Cap. 67. §. schwer sey, eine bleyerne Röhre in der Gestalt einer Schraubenlinie um die Spindel zu führen. Deswegen ist es auch wohl gewöhnlich, daß man die Wasserschraube inwendig ohngefehr wie eine Wendeltreppe zurichtet, wovon man a. a. O. Zeichnungen findet, so wie auch Vorschriften gegeben werden, wie alles aus hölzernen Stücken,

cken, die hier auch Schaufeln heissen, gehörig zusammengesetzt, und hiernächst mit eisernen Reifen verbunden werden kann. Ferner bemerke ich noch, daß um eine und eben dieselbe Spindel zwey, auch wohl drey verschiedene Röhren geführt werden können, worauf sich die Eintheilung in einfache, doppelte und dreyfache Wasserschrauben gründet. Indessen ist es nur nöthig, die einfache Schnecke zu betrachten, weil dasjenige, was von dem einem Schneckengang erwiesen wird, hiernächst ohne Schwierigkeit auf die übrigen angewandt werden kann.

3. §.

Es sey nun ABCD die Spindel (1. Fig.) in einer, wie gewöhnlich, gegen den Horizont geneigten Lage, und AETGHC sey die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre. Das Rechteck ABCD sey ein verticaler Schnitt durch die Axe Oo, und durch B sey BK in dieser Verticialfläche horizontal gezogen, so ist CBK der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont, BA ist der Durchmesser der untern Grundfläche, und der Punct A liegt unter allen Puncten im Umfang der untern Grundfläche am höchsten über eine durch B horizontal liegende Ebene. Die Figur ist nun so gezeichnet, daß der unterste Anfangspunct der Schraubenlinie ebenfalls in A fällt. Steht nun das Wasser bis an *hi*, so kann bey dieser Stellung der Spindel kein Wasser in A hinein treten, dafern die Oefnung A höher als der Wasserpaß *hi* liegt. Beym Umlauf der Spindel durchläuft die untere Oefnung A den Umfang des Kreises AαBPA, und bey jedem Umlauf wird diese untere Oefnung unter Wasser seyn, so lange sie in dem Bogen αBP*a* bleibt, wenn man annimmt, daß *aα* die Durchschnittslinie der Wasserfläche mit der Grundfläche der Spindel sey, so wie *hi* die Durchschnittslinie eben der Wasserfläche mit der Verticalfläche ABKCD ist. Weil die Wasserfläche sowohl, als auch die Ebene $A\alpha B\alpha$ beyde auf ABKCD senkrecht sind, so ist $a\alpha$ auf ABKCD senkrecht, folglich auch auf AB und *hi*, so daß die Bogen Aa und $A\alpha$, imgleichen Ba und $B\alpha$ gleich groß sind. Man stelle sich nun die Verticale Ebene DABKC unbeweglich vor, und nehme an, die Spindel drehe sich einmal so um, daß die untere Oefnung der Schnecke von A durch α, B, P bis wieder nach A laufe; so wird diese untere Oefnung unter Wasser seyn, so lange sie in dem Bogen αBPa bleibt, und es ist aus den Gesetzen der Hydrostatick schon begreiflich, daß durch die untere Oefnung, so lange sie unter Wasser bleibt, das Wasser in die Schnecke hinein dringen werde. Nur muß man hiebey zum Grunde setzen, daß die Schnecke nicht zu schnell umlaufe, damit das Wasser Zeit genug behalte, in die Röhre hinein zu treten. Wenn nun die Schnecke in die Lage gekommen ist, welche die 2. Figur vorstellt, wenn die untere Oefnung den Bogen $AbBa$ durchlaufen hat, und bey a wieder über das Wasser herauf steigt, der Bogen aMf aber sich in eben diesem Augenblick nah unter dem Wasser befindet; so ist derselbe jetzt mit Wasser angefüllt. Es muß demnach nun untersucht werden, unter welchen Umständen diejenige Menge Wasser, welche bis dahin in die Röhre hinein getreten ist, beym fernern Umlauf darinn bleiben, und nach und nach höher steigen werde.

4. §.

Es ist der Winkel gegeben, unter welchem die Schraubenlinie den Umfang der Spindel schneidet, nebst dem Neigungswinkel der Axe der Spindel gegen den Horizont, die untere Oefnung befindet sich an ihrer höchsten Stelle bey *A*: man soll die Höhe eines gegebenen Puncts *M* der Schraubenlinie über eine durch *B* horizontal gelegte Ebene finden.

Aufl.

Aufl. Es sey MP mit der Axe (1. Fig.) der Spindel parallel, und man setze den Bogen $AP = x$, den Winkel $MAP = \eta$, so ist $PM = x \tan \eta$. Ferner sey MR vertical und PT horizontal, so ist MPT der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont. Man setze diesen Winkel $= \vartheta$, so ist $MT = PM \sin \vartheta = x \tan \eta \sin \vartheta$: die durch B horizontal gelegte Ebene heisse Kürze halber die Fundamental-Ebene, und MT schneide diese Ebene in R. Wenn nun auch Pr auf eben dieser Ebene senkrecht ist, so hat man $Pr = TR$. Es sey noch PN auf AB senkrecht, so ist PN horizontal, und wenn NS auf die Fundamental-Ebene senkrecht gezogen wird, so ist auch $NS = Pr = TR$. Weil nun $NBS = 90° - \vartheta$, so wird $NS = BN \cos \vartheta = TR$, und die gesuchte Höhe $MR = x \tan \eta \sin \vartheta + BN \cos \vartheta$. Der Halbmesser AO der Spindel sey $= r$, so ist $BN = 2r - AN$ und $AN = r \sin v \frac{x}{r}$, folglich die gesuchte Höhe $MR = x \tan \eta \sin \vartheta + r (2 - \sin v \frac{x}{r} \cos \vartheta$, oder auch $MR = x \tan \eta \sin \vartheta + r (1 + \cos \frac{x}{r}) \cos \vartheta$.

5. §.

Aus dieser Gleichung fliessen folgende Sätze. Wenn $x = 0$ ist, so hat man $MR = 2r \cos \vartheta$, wie auch aus Betrachtung der Zeichnung unmittelbar erhellet. So lange als x sehr klein ist, wächst MR, wenn x wächst, denn $x \tan \eta \sin \vartheta$ wächst mit x, und $r (1 + \cos \frac{x}{r}) \cos \vartheta$ nimmt zwar ab: allein nur sehr wenig, weil $\cos \frac{x}{r}$ sehr nahe $= 1$ ist, so lange x sehr klein bleibt. Wie lange MR wachse, findet man vermittelst der Differential-Rechnung, es wird nemlich $\partial MR = \partial x \tan \eta \sin \vartheta - \partial x \sin \frac{r}{x} \cos \vartheta$. So lange dies Differential positiv bleibt, so lange wächst MR, und dies erfolgt, so lange $\sin \frac{x}{r} < \tan \eta \tan \vartheta$ bleibt. Wenn aber $\sin \frac{x}{r} = \tan \eta \tan \vartheta$ wird, so ist MR am grösten, und nimmt wieder ab,

wenn

$\sin\frac{x}{r} > \tang\,\eta\,\tang\,\vartheta$ wird. Es sey demnach $\sin\frac{AQ}{r} = \tang\,\eta\,\tang\,\vartheta$, und QL mit der Spindelaxe parallel, so liegt der Punct L in der Schraubenlinie höher, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Puncte.

Wenn $x = \frac{1}{2}\pi r$ wird, so ist $\sin\frac{x}{r} = 1$, und grösser kann dieser Sinus nicht werden. Für grössere Werthe von x nimmt $\sin\frac{x}{r}$ wieder ab, so daß aufs neue $\sin\frac{x}{r} = \tang\,\eta\,\tang\,\vartheta$ wird, wenn $x = \pi r - AQ$ ist. Für grössere Werthe von x muß also $\sin\frac{x}{r} < \tang\,\eta\,\tang\,\vartheta$ werden, und MR wieder wachsen. Wenn demnach $AP = \pi r - AQ$ genommen, und PM mit der Spindel-Axe parallel gezogen wird, so liegt M niedriger, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Puncte der Schraubenlinie. Für $x = AQ$ hat die Höhe $L\rho$ einen grösten, für $x = AP = \pi r - AQ$ aber hat MR einen kleinsten Werth: und wenn eine durch L horizontal gelegte Ebene die Schraubenlinie in l schneidet, so ist LMl derjenige Bogen, der sich auf einmal mit Wasser füllen kann, (arcus hydrophorus). Man stelle sich vor, das Wasser, worinn die Spindel steht, steige höher hinauf, als L liegt, so wird durch A Wasser in die Schnecke hinein treten, und es wird sich nicht allein der ganze Bogen ALMl mit Wasser füllen, sondern es wird auch noch über l hinaus in die Röhre hinein treten, so weit bis es in der Röhre eben so hoch, als draussen steht. Wenn hiernächst das äussere Wasser wieder bis unter L sinkt, so wird etwas durch A heraus laufen, aber der ganze Bogen LMl wird mit Wasser angefüllt bleiben.

6. §.

Dafern die Schnecke das Wasser zu heben dienen soll; so muß der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Horizont

rizont grösser seyn, als der Winkel der Schrauben-Linie mit dem Umfang der Grundfläche.

Beweis. Es sey der Winkel ABS $< \eta$, also $90° - \vartheta < \eta$, so ist $\cot\vartheta < \tan\eta$, folglich $\tan\eta \tan\vartheta > 1$. Wenn aber die Höhe $L\varrho$ einen grösten, und MR einen kleinsten Werth haben soll; so muß $\sin\frac{QA}{r} = \sin\frac{AP}{r} = \text{targ}\,\eta \tan\vartheta$ seyn. Dies würde also bey der angenommenen Voraussetzung $\sin\frac{AQ}{r}$, oder $\frac{\sin AP}{r} > 1$ geben, welches nicht möglich ist. Wäre ABS $= \eta$, also $\cot\vartheta = \tan\eta$, so hätte man $\tan\eta \tan\vartheta = 1, = \sin\frac{AQ}{r} = \frac{\sin AP}{r}$, folglich müßte $\frac{AQ}{r} = \frac{AP}{r} = \frac{1}{2}\pi$ seyn, und die Puncte L und M würden wie P und Q in einen zusammen fallen, so daß der Wasserhaltende Bogen LMl verschwände. In der Schnecke kann demnach nur alsdenn nach hydrostalischen Gesetzen Wasser stehen bleiben, wenn ABS $> \eta$ ist.

Es muß demnach auch $90° - \eta > 90° -$ ABS seyn, also $90° - \eta > \vartheta$, da dann $90° - \eta$ der Winkel ist, welchen die Schraubenlinie mit den Ordinaten PM einschliest. Dieser muß also grösser seyn, als die Neigung der Spindel gegen den Horizont.

Wenn man $\tan\eta \tan\vartheta = T$ setzt, so erhält man $AQ = r\,A\sin T$, und $AP = r(\pi - A\sin T)$ (5. §.) da dann diese Gleichungen dienen, die Puncte P und Q, also auch L und M zu finden.

7. §.

Man stelle sich nun (2. Fig.) die Schnecke in jeder andern willkührlichen Lage vor, ohne daß die untere Oefnung sich an ihrer höchsten Stelle bey A befindet, etwa wie in der 2. Fig. wo sich die untere Oefnung bey a in dem Halbkreise AaPB befindet. Man erweitere in Gedanken die cylindrische Fläche der Spindel unterhalb der Grundfläche AB, und stelle sich zugleich vor, die Schraubenlinie werde ebenfalls unterhalb a verlängert bis sie mit AD in A′ zusammenstößt. Man lege durch A′ eine Ebene mit der Grundfläche der Spindel parallel, so giebt ihr Schnitt mit der Cylinderfläche einen der Grundfläche gleichen Kreis A′Q′P′B′. Nimmt man nun $A'Q' = r\,A\,\sin T$, $A'P' = r(\pi - A\,\sin T)$ und zieht alsdenn Q′L und P′M mit der Cylinder-Axe parallel, so ist wie im 5. §. L der höchste und M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens: es sind aber diese Puncte mit denjenigen nicht einerley, welche im 5. §. bestimmet wurden, auch ist ihre Höhe über der Fundamentalebene von der dortigen unterschieden. Um ihre Höhe für den gegenwärtigen Fall zu finden, erwäge man folgendes. Wenn man sich durch B′ eine Horizontalfläche vorstellt, so ist die Höhe des Puncts L über diese Ebene $= A'Q' \tan\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'Q'}{r}\right)\cos\vartheta$, und die Höhe des Puncts M über dieselbe $= A'P' \tan\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'P'}{r}\right)\cos\vartheta$. Die Horizontalfläche durch B′ liegt aber um das Stück $B'B \sin\vartheta$ niedriger, als die vorige durch B, und es ist $B'B = A'A = Aa.\tan\eta$. Wenn also der Winkel $AOa = \phi$ folglich $Aa = r.\phi$ gesetzt wird; so erhellet, daß man von jeder der angegebenen Höhen das Stück $r\phi \tan\eta \sin\vartheta$ abziehen müsse, um sie in die Höhen über die Horizontalfläche durch B zu verwandeln. Demnach wird die Höhe des Puncts $M = (A'P' - r\phi)\tan\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos'\frac{A'P'}{r}\right)\cos\vartheta$.

Wäre a in dem andern Halbkreise AbB befindlich, so würde der Bogen Ma die Linie AD oberhalb A schneiden. Wenn man sich also den Durchschnittspunct A′ oberhalb A vorstellt, so sieht man wohl, daß die Höhe des Puncts $M = (A'P' + r\phi)$ $tang\,\eta\, sin\,\vartheta + r\,(1 + cos\,\frac{A'P'}{r}\; cos\,\vartheta$ werden müsse. Dasselbe ergiebt sich auch daraus, weil alsdenn der Winkel ϕ in der vorigen Gleichung das entgegen gesetzte Zeichen haben muß.

8. §.

Diese Schlüsse machen (2. Fig.) die Art und Weise begreiflich, wie das Wasser bloß wegen seines Gewichts in der Wasserschraube steigen kann. Man stelle sich nemlich vor, die niedrigste Oefnung stehe anfangs in A, da noch alles ledig ist, und die Schnecke werde nun so gedrehet, daß die untere Oefnung von A durch b, B, P, Q laufe. Erreicht sie nun beym Herabsteigen bey α' das Wasser, so tritt dasselbe nach den Gesetzen der Hydrostatick in die Röhre so hoch hinein als es draussen steht, vorausgesetzt, daß die Maschine nicht zu schnell umlaufe. In dem Augenblick nun, da A in P ankommt, ist zwar derjenige Bogen mit Wasser gefüllt, der sich von P aus bis wieder an die Wasserfläche auf der andern Seite erstreckt: allein wenn in diesem Augenblick der Umlauf gehemmet wurde, und das Wasser alsdenn tiefer herab sänke, als P liegt, so würde auch alles in die Schnecke schon hineingetretene Wasser wieder herauslaufen, weil P niedriger liegt, als die übrigen Puncte des mit Wasser angefüllten Bogens. Wäre aber die untere Oefnung schon über P hinaus bis nach a' vorgerückt, so würde unter eben den Umständen nicht mehr alles Wasser auslaufen, weil die zwischen m und a' befindlichen Puncte höher als m liegen. Gesetzt also, daß auch das Wasser nur bis an die

Horizontallinie $a'\alpha'$ stünde, und die untere Oefnung bey a' schon über dem Wasserpaß $a'\alpha'$ hervorsteige, so würde doch der Bogen $a'mb'$ sein Wasser halten, wenn auch b' in dem Wasserpaß $a'\alpha'$ liegt. Steigt nun beym fernern Umlauf der Schnecke die untere Oefnung weiter hinauf von a' bis a, so kann die hinein getretene Masse Wasser nicht in demselben Bogen $a'mb'$ bleiben: Denn es ist nun m nach m' geruckt, und M liegt nun niedriger, als m'. Also muß das Wassertheilchen was vorhin in m war, jetzt nach M gerückt seyn, und man sieht leicht, daß alle übrige Wassertheilchen, um eben soviel gehoben sind, als M höher wie m liegt. Zur Erleichterung der Sache kann man sich die ganze hineingetretene Masse im Punct m vorstellen, so erhellet, daß diese Masse in der geraden Linie PM immer weiter hinauf rücken müsse, wenn die Schnecke umzulaufen fortfährt.

9. §.

Wenn die Sehne QV auf AB senkrecht steht, (1. Fig.) so ist sie horizontal, und die bisherige Ausführung ergiebt, daß die Grundfläche der Wasserschraube bis an diese Sehne unter Wasser stehen müsse, wenn die Schnecke bey jedem Umlauf die möglichst gröste Menge Wasser schöpfen soll. Steht das Wasser niedriger, so schöpft die Schnecke nicht soviel: ja sie würde gar nichts schöpfen, wenn das Wasser noch unter der Horizontallinie PN stünde. Es ist aber $AQ = r\,A\,\mathit{sin}\,T = AV$, und dadurch werden die Puncte V und Q bestimmt. Eine grössere Tiefe unter dem Wasser ist, soviel sich aus dem bisherigen Vortrag beurtheilen läst, unnöthig. Wenn sich nun die Länge des wasserhaltenden Bogens zur Länge eines Schraubenganges wie $v : \mu$ verhält, und es ist die Menge Wasser, die der ganze Schraubengang fassen würde, $= Q$, so schöpft die Schnecke bey jedem Umlauf die Menge Was-

ser

ser $\frac{v}{\mu}$ Q. Diese Menge tritt beym zweyten Umlauf der Schnecke aus dem untern Schraubengang in den nächsthöhern, beym dritten Umlauf aus dem zweyten Schraubengang in den dritten u. s. f. bis es endlich nach soviel Umläufen, als Schraubengänge vorhanden sind, aus dem obersten Schraubengange ausläuft. Das Wasser nemlich, was nach dem ersten Umlauf in LMl stand, wird nach dem zweyten Umlauf in L'M'l' stehen, u. s. f.

10. §.

Es sey nun die Schnecke (1. Fig.) in einer gewissen willkührlichen Lage befestiget, und man nehme an, daß in einem Schraubengange der wasserhaltende Bogen mit Wasser angefüllet sey: so wird das Gewicht dieses Wassers die Schraube zu drehen streben. Wäre das Gewicht dieser ganzen Masse in dem Punct M beysammen, so würde man das Moment, womit dasselbe die Schraube und ihre Axe Oo zu drehen strebte, so finden. Dieß Gewicht sey $= p$, so ist die Richtung MT desselben vertical. Man zerlege es nach den Richtungen MP und MX, so daß MX in der Ebene PMT auf MP senkrecht steht, so wird der Druck nach MX $= p \sin$ MTX $= p \sin$ TMP $= p \cos \vartheta$. Es sey MY mit PO parallel, so ist die Ebene XMY auf PM, folglich auch auf Oo senkrecht, und das Moment des Drucks nach MX $= g \cos \vartheta\, r \sin.$ XMY. Nun sey Zz die Durchschnittslinie der Ebene XMQ mit ABCD, so ist der Winkel MYZ $=$ POB. Ferner ist die Ebene MPT mit ABCD, also MX mit YZ parallel, folglich der Winkel XMY $= 180° -$ BOP $=$ AOP, und das Moment des Drucks MX $= p \cos \vartheta\, r \sin$ AOP. Da nun AOP $= \frac{\text{AP}}{r}$, so ist $\sin$ AOP $= \sin \frac{\text{AP}}{r} = tang\, \eta\; tang\, \vartheta$ (6. §.) also wird das Moment des Drucks nach MX $=$ $p r \sin \vartheta\, tang\, \eta$.

11. §.

11. §.

Das Moment zu finden, womit das Wasser, so wie es durch den ganzen Bogen *LMl* ausgebreitet ist, die Schnecke um ihre Axe zu drehen strebt.

Aufl. Es sey M ein unbestimmter Punct des wasserhaltenden Bogens, das Stück AM der centrischen Linie $= s$, der Bogen AL $= \varepsilon$, und die Länge des wasserhaltenden Bogens LM$l = \lambda$; so sind die Kreisbogen AP $= s \cos \eta$, AQ $= \varepsilon \cos \eta$, AQPB$q = (\varepsilon + \lambda) \cos \eta$, folglich APB$q = \lambda \cos \eta$. Wenn nun LQ und lq mit der Axe der Spindel parallel, Qυ und $q\mu$ aber auf AB senkrecht sind, so ist A$\upsilon = r \sin v \frac{AQ}{r}$, und A$\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$. Wenn ferner das Gewicht der ganzen Masse Wasser $= p$ gesetzt wird, so ist das Gewicht des in M befindlichen Elements $= \frac{pds}{\lambda}$. Das Moment, womit dies Element die Schraube zu drehen strebt, ist $= \frac{pds}{\lambda} \cos \vartheta . \, r \sin AOP$ (10. §.) $= \frac{pds}{\lambda} NP \cos \vartheta$. Nun ist AP $= r A \sin v \frac{AN}{r} = r A \sin v \frac{x}{r}$, wenn man AN $= x$ setzt, folglich d. AP $= \frac{rdx}{\surd(2r, x - xx)} = \frac{rdx}{NP}$, und es war AP $= s \cos \eta$, also wird $ds = \frac{rdx}{NP \cos \eta}$. Dies statt ds gesetzt giebt das Moment, womit das in M befindliche Element die Schraube zu drehen strebt, $= \frac{r\,p\,dx \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta}$. Wird nun die Summe der Momente aller Wassertheilchen von L bis M $= \mu$ gesetzt, so hat man

man vermittelst der Integration $\mu = \frac{r p x \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta} + C$. Es ist aber $\mu = 0$, wenn $x = Av = r \sin v \frac{AQ}{r}$ ist, also wird $\mu = \frac{r p \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta}$ $(x - r \sin v \frac{AQ}{r})$; und um dasselbe für den ganzen wasserhaltenden Bogen zu haben, muß man $x = A\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$ setzen, woraus der Ausdruck

$$\mu = \frac{r p \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta} r \left(\sin v \frac{APBq}{r} - \sin v \frac{AQ}{r} \right)$$

folgt, oder auch

$$\mu = \frac{r p \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta} r \left(\cos \frac{AQ}{r} - \cos \frac{APBq}{r} \right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch auf folgende Art verkürzen. Weil L und l die äussersten Puncten des wasserhaltenden Bogens sind, so liegen sie gleich hoch über dem Horizont. Aus dem 4. §. aber ergiebt sich die Höhe des Puncts L über die durch B horizontal gelegte Ebene, wenn man AQ statt des dortigen α setzt, und die Höhe des Puncts l über eben die Ebene, wenn man APBq statt x setzt. Sucht man auf diese Art beyde Höhen, und setzt sie einander gleich, so kommt man auf die Gleichung

$$AQ \tang \eta \sin \vartheta + r \left(1 + \cos \frac{AQ}{r} \right) \cos \vartheta =$$

$$APBq \tang \eta \sin \vartheta + r \left(1 + \cos \frac{APBq}{r} \right) \cos \vartheta.$$

Daraus folgt

$AQ \tang \eta \tang \vartheta + r \cos \frac{AQ}{r} = APBq \tang \eta \tang \vartheta + r \cos \frac{APBq}{r}$, folglich $r \left(\cos \frac{AQ}{r} - \cos \frac{APBq}{r} \right) = (APBq - VQ)$

tang η

$tang\,\eta\ tang\,\vartheta = \lambda\, cos\,\eta\ tang\,\eta\ tang\,\vartheta$ (weil $APBq - AQ = QPBq = \lambda\ cos\,\eta = \lambda\ sin\,\eta\ tang\,\vartheta$. Dieß in den gefundenen Werth von μ gesetzt giebt $\mu = \frac{r\,p\,cos\,\vartheta}{\lambda\,cos\,\eta} \times \lambda\,sin\,\eta\ tang\,\vartheta = r\,p\,tang\,\eta\ sin\,\vartheta$.

Wenn das ganze Gewicht p indem Punct M beysammen wäre, so würde das Moment desselben eben so groß seyn. (10. §.) Deswegen wird dieß Moment leicht gefunden, wenn man p berechnen kann, und diese Rechnung setzt voraus, daß man die Länge des wasserhaltenden Bogens λ finden könne. Wenn nemlich jeder Querschnitt der um die Spindel gewundenen Röhre $= k^2$ ist, so hat man $p = \gamma k^2 \lambda$, wo λ das Gewicht eines Cubic-Fusses Wasser bedeutet.

12. §.

Die Länge des wasserhaltenden Bogens *LMl* zu finden.

Aufl. Es sey der Kreisbogen $AQ = \alpha$ der dem höchsten Punct L zugehört, so hat man $\alpha = r\,A\,sin\,T$, und $T = tang\,\eta\ tang\,\vartheta$. (6. §.) Ferner sey $APBq = \beta$, so erhält man aus dem vorigen §. die Gleichung $cos\,\frac{\alpha}{r} - cos\,\frac{\beta}{r} = \left(\frac{\beta}{r} - \frac{\alpha}{r}\right) tang\,\eta\ tang\,\vartheta$. Man setze $cos\,\frac{\beta}{r} = z$, so hat man $\frac{\beta}{r} = A\,cos\,z$ so wie $\frac{\alpha}{r} = A\,sin\,T$, und $cos\,\frac{\alpha}{r} = \surd(1 - TT)$. Dies giebt

$$\surd(1 - TT) - z = (A\,cos\,z - A\,sin\,T)\ T,$$

oder $z + T.\ A\,cos\,z = \surd(1 - TT) + T.\ A\,sin\,T$. Wenn aus dieser Gleichung z gefunden ist, so hat man zugleich $A\,cos\,z = \frac{\beta}{r}$, also auch $\frac{\beta - \alpha}{r}$ und $\beta - \alpha$. Es ist aber $\beta - \alpha = QPBq = \lambda \cos \eta$, und daraus erhält man $\lambda = \frac{\mu - \alpha}{\cos \eta} = (\beta - \alpha) \sec \eta$. Die Länge eines ganzen Schraubenganges ist $= 2 \pi \nu \sec \eta$; wird also diese $= l$ gesetzt, so hat man $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{2 \pi \nu} l$.

Aus dem 6. §. weis man, daß $\tang \eta \tang \vartheta$ nicht grösser, als 1. seyn könne. Der Werth $\tang \eta \tang \vartheta = 1$ giebt $\frac{\beta}{r} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2} \pi$. Wird $\tang \eta \tang \vartheta < 1$ angenommen, also $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2} \pi$, so muß $\frac{\beta}{r} < \frac{1}{2} \pi$ werden. Denn es ist $AP = r (\pi - \frac{\alpha}{r})$, wird also $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2} \pi$, so wird $\frac{AP}{r} > \frac{1}{2} \pi$. Aber es ist allemal $APBq > AP$, also $\frac{\beta}{r} > \frac{AP}{r}$, folglich auch $\frac{\beta}{r} > \frac{1}{2} \pi$, daß demnach $\cos \frac{\beta}{r}$ das entgegen gesetzte Zeichen bekommt. Je kleiner $\tang \eta \tang \vartheta$, also auch $\frac{\alpha}{r}$ wird, desto grösser muß $\frac{\beta}{r}$ werden. Wird $\tang \eta \tang \vartheta = 0$, also $\frac{\alpha}{r} = 0$, so wird $1 - \cos \frac{\beta}{r} = 0$, und $\cos \frac{\beta}{r} = 1$, folglich $\frac{\beta}{r} = 2 \pi$.

13. §.

Weil die völlige Auflösung der Aufgabe des vorigen §. darauf beruhet, daß man den Werth von z aus der Gleichung

$z + T. A \cos z = \surd (1 + TT) + T. A \sin T$ finden könne, so müßte man $A \cos z$ durch z ausdrücken, und sodann z auf eine Seite des Gleichheits=Zeichens bringen. Allein es ist bekannt, daß sich $A \cos z$ nicht anders, als vermittelst einer unendlichen Reihe durch z ausdrücken lasse: deswegen bedient man sich hier einer oder der andern bekannten Näherungs=Methoden. Man nimmt den Werth von z muthmaßlich an, und sucht ihn nach und nach dem wahren Werth von z so nahe zu bringen, als der jedesmal erforderlichen Schärfe gemäß ist. Wenn man die Gleichung so ausdrückt $z + T. A \cos z - \surd (1 - TT) - T. A \sin T = 0$, und den Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen $= Y$ setzt, so wird Y eine Function von z; und man weis, wenn der Werth $z = f$ den Werth $Y = F$ giebt, und beynahe $F = 0$ ist; daß alsdenn schon beynahe $z = f$ sey, und noch näher $z = f - \frac{F dz}{dy}$, also hier $z = f - \frac{F \surd (1 - ff)}{\surd (1 - ff) - T}$ gefunden werde. Dieser Methode zu schliessen haben sich schon andere Schriftsteller bedienet, die ich unten nahmhaft machen werde.

14. §.

Wenn b der Abstand der Schraubengänge ist; so hat man $\tang \eta = \frac{b}{2 \pi r}$. Demnach wird im 11. §. $\mu = r p \tang \eta \sin \vartheta = \frac{b}{2\pi} p \sin \vartheta$, und dies wäre das Moment der Kraft, welches erfordert wird, die Schraube im Gleichgewicht zu erhalten, wenn nur ein wasserhaltender Bogen angefüllet ist. Wenn demnach die Anzahl der Schraubengänge $= n$ ist, so wird dies Moment $= \frac{nb}{2\pi} p \sin \vartheta$, wenn alle Bogen gefüllt sind. Wird nun in einer

Ebene, die auf der Axe Oo senkrecht ist, in der Entfernung f von der Axe eine Kraft P angebracht, so ist ihr Moment $= Pf$; und wenn diese Kraft mit der gesammten Masse Wasser, womit die Schraube beschwert ist, im Gleichgewicht seyn soll, so erhält man $P = \frac{b \sin \vartheta}{2\pi f} n p$, da dann $n p$ das Gewicht der ganzen in der Schraube befindlichen Masse Wasser ist. Wenn diese = Q gesetzt und die Kraft P durch eine Menge Wasser ausgedrückt wird, deren Gewicht dieser Kraft gleich ist; so hat man $P = \frac{b \sin \vartheta}{2\pi f} Q$. Indem aber die Schnecke einmal herum geht, durchläuft die Kraft den Weg $2\pi f$, und die Last Q wird um die Höhe $b \sin \vartheta$ gehoben.

Ist M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens, so ist seine Höhe über eine durch B horizontal gelegte Ebene $= (AP + r\phi)\ tang\, \eta \sin \vartheta + r(1 + \cos \frac{AQ}{r}) \cos \vartheta$, wenn ϕ den Winkel AOa bedeutet, um welchen sich die Spindel gegen $AqBP$ zu gedrehet hat. (7. §.) Der veränderliche Theil $r\phi \sin \eta\, tang\, \vartheta$ dieses Ausdrucks ist dem Winkel ϕ proportional. Wenn also die Spindel gleichförmig umläuft, so steigt auch die Last mit gleichförmiger Bewegung, und weil das Moment der Last gar nicht von dem Winkel ϕ abhängt, so ist dasselbe von gleicher Grösse, was auch die Spindel durch die Umdrehung um ihre Axe für eine Lage bekommt.

15. §.

Die Wasserschraube wird durch eine Maschine umgetrieben, und an derselben ist eine veränderliche Kraft angebracht, die von der Geschwindigkeit der Maschine ab-

hängt: man sucht die Menge Wasser, welche diese Maschine bey der vortheilhaftesten Anordnung auf eine gegebene Höhe $= a$ in gegebener Zeit T haben kann.

Aufl. Man muß diejenige Geschwindigkeit des angegriffenen Theils der Maschine kennen, wobey das mechanische Moment der Kraft am größten wird. Diese Geschwindigkeit sey $= \alpha$, und die davon abhängende Kraft $=$ F. Die Umlaufszeit der Spindel sey $= t$, so steigt das Wasser binnen der Zeit t auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geschwindigkeit desselben nach der verticalen Richtung ist $= \frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechanische Moment der Last $=$ $\frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Für den Beharrungsstand der Maschine hat man also $F\alpha = \frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Wenn nun n die Anzahl der Schraubengänge ist, so hebt die Maschine in der Zeit t die Menge Wasser $\frac{1}{n} Q$ auf die Höhe $n b \sin \vartheta = a$, folglich in der Zeit T die Menge $\frac{T.Q}{n.t}$. Wenn man diese Wassermenge $=$ M setzt, und den Werth $\frac{Q}{t} =$ $\frac{F\alpha}{b \sin \vartheta}$ substituirt, so findet man $M = \frac{F\alpha T}{n b \sin \vartheta} = \frac{F\alpha T}{a}$.

16. §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Maschine, welche die Wasserschraube umtreiben soll, anzugeben.

Aufl.

Aufl. Man hat einmal die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{a}$, und hiernächst ist die in der Zeit t gehobene Menge Wasser $= \frac{1}{n} Q = \frac{Mt}{T}$; und weil eben dies diejenige Menge ist, die einen wasserhaltenden Bogen füllet; so muß $k^2 \lambda = \frac{Mt}{T}$ seyn, wenn λ die Länge des wasserhaltenden Bogens, und k^2 den flächen Innhalt seiner Querschnitte bedeutet. Aus dieser Gleichung hat man $t = \frac{K^2 \lambda T}{M}$. Die Umlaufszeit des Hauptrades sey $= \vartheta$, und der Halbmesser desselben $= \varrho$, so ist $\vartheta = \frac{2\pi\rho}{\alpha}$, da dann das Verhältniß $\frac{\vartheta}{t}$ die Einrichtung der Maschine bestimmt.

Gewöhnlich wird die Höhe a gegeben seyn, auf welche die Maschine das Wasser bringen soll, und daraus ergiebt sich $M = \frac{F\alpha T}{a}$, wenn das mechanische Moment der Kraft, $F\alpha$ bekannt ist. Die Wahl der Kraft, welche die Maschine treiben soll, wird von der Beschaffenheit des Orts, wo die Maschine angelegt werden soll, und andern eintretenden Umständen abhängen. Uebrigens sind nun in der Gleichung $t = \frac{k^2 \lambda T}{M}$ drey Grössen t, k^2 und λ vorhanden, wovon man zwey willkührlich bestimmen kann: jedoch ist man dabey an folgende Einschränkungen gebunden. Man bestimmt λ, wenn man die Winkel $\varkappa$, ϑ, und den Halbmesser r der Spindel bestimmt, von der Axe der Spindel bis an die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre genommen. Es sey nun

nun die Länge der Spindel $Oo = b$, so ist $\sin \vartheta = \frac{a}{b}$. Je kleiner demnach b genommen wird, desto grösser wird $\sin \vartheta$. Man sieht leicht, daß es vortheilhaft sey, b so klein zu nehmen, als die Umstände zulassen, weil dadurch nicht allein ein Theil der Kösten erspart, sondern auch das Gewicht der Schnecke, folglich zugleich die Friction an ihren Zapfen vermindert wird. Aber man darf auch b nicht zu klein nehmen, damit $\sin \vartheta$ nicht zu groß werde, und dies aus zweyen Ursachen. Einmal muß $tang\,\vartheta\; tang\,\eta < 1$ seyn, damit die Schnecke wirklich Wasser schöpfen könne, und fürs zweyte wird der wasserhaltende Bogen desto grösser, je kleiner $tang\,\vartheta\; tang\,\eta$ bleibt. Wenn also ϑ diesen Einschränkungen gemäß angenommen ist, so muß $\eta < 90° - \vartheta$ seyn, da dann beyde Winkel η und ϑ zusammen die Bogen $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{\beta}{r}$ bestimmen, (12. §.) wofür ich ε und ζ schreiben will, da dann $\lambda = (\zeta - \varepsilon)\, r \sec \eta$ wird, und r noch unbestimmt bleibt.

Man brauche nun diesen Werth statt λ in der Gleichung $k^2 \lambda T = \dot{M}.t$, so hat man $k^2 (\zeta - \varepsilon)\, T\, r \sec \eta = M t$, und es können nun zwey von den dreyen Grössen k^2, r, und t willkührlich genommen werden. Weil es aber nicht rathsam ist, daß die Schnecke sehr schnell umlaufe, weil sonst der unterste Schraubengang sich nicht gehörig füllen würde, so ist es am besten, die Einrichtung so zu machen, daß t nicht unter 4. Secunden ausfalle. Man kann also in Rücksicht auf diesen Umstand t willkührlich annehmen, und man erhält $k^2 r = \frac{M t}{(\zeta - \varepsilon) T \sec \eta}$, da dann k^2 oder r willkührlich angenommen werden kann. Hiebey bleibt alsdenn noch zu erwegen, daß k^2 nicht zu klein ausfallen müsse, damit das Was-

ser

ser einen völlig freyen Durchgang behalte, und sich keine Unreinigkeiten in der Röhre ansetzen.

17. §.

So wie ich bisher die Theorie von der Wasserschraube vorgetragen habe, eben so ist sie von den meisten mir bekannten Schriftstellern betrachtet worden. Es gehört dahin ein Aufsatz des Herrn Pitot in den Memoires de l' Academie de Paris A. 1736. p.238. ed. Bat. und des Herrn Daniel Bernoulli Commentationes speciales de cochlea Archimedis in der Hydrodynamica Sect. IX. p. 183. sqq. Der Verfasser der Dissertation sur ces questions: comment l' eau s' éléve t — elle dans la vis d' Archimede, & quels seroient les moyens de porter cette machine a sa perfection, welcher die berlinische Academie der Wissenschaften nächst der Hennertschen Preisschrift das accessit zuerkannt hat, bleibt bey demselben Vortrag dieser Theorie. Ich habe in den beyden letzten §§. eben diese Theorie mit der Ausübung in Verbindung zu bringen gesucht, und ich glaube, daß man sich in der Ausübung an die hieselbst gegebenen Vorschriften noch immer am sichersten halten könne. Von demjenigen, was die oben schon erwehnten Aufsätze der Herrn Euler und Hennert enthalten, werde ich bald mehr Nachricht ertheilen, und damit ich das neueste hieher gehörige Werk: Theoria cochleæ Archimedis ab observationibus, experimentis & analyticis rationibus ducta, auctore Jacobo Bellogrado Soc. Jesu. Parmæ 1767. nicht ganz mit Stillschweigen übergehe, so muß ich sagen, daß ich es nur aus Recensionen kenne, und das Buch selbst bisher noch nicht habe erhalten können.

18. §.

Man nimmt nach der bisher vorgetragenen Theorie an, es trete bey jedem Umlauf der Spindel soviel Wasser in die Schnecke hinein, als der wasserhaltende Bogen fassen kann, vorausgesetzt, daß die Schnecke grade so tief unter Wasser stehe, als die im 9. §. vorgetragene Rechnung erfordert. Diesen Umstand, vermöge dessen die Grundfläche der Schnecke nicht ganz unter Wasser stehen muß, schreibt Bernoulli ausdrücklich vor, und ihm folgt darin der Verfasser des Aufsatzes, welchem die Academie zu Berlin das accessit zuerkannt hat. Andere Schriftsteller, dahin Pfitet gehört, schreiben es zwar nicht ausdrücklich vor, daß die Grundfläche nicht ganz unter Wasser stehen müsse, sie berechnen aber doch die Würkung so, daß sie keinen ununterbrochenen Guß des Wassers aus der obern Mündung der Schraube annehmen, sondern nur bey jedem Umlauf soviel, als der wasserhaltende Bogen fasset. Man wird demnach nun natürlich auf die Frage kommen: ob denn die Wasserschraube ihre Dienste nicht leiste, wenn ihre Grundfläche ganz unter Wasser stehet, und ob nicht vielmehr alsdenn das Wasser ununterbrochen durch die Röhre fliessen, folglich diese Einrichtung noch vortheilhafter als die vorige seyn werde? Auf die Beantwortung dieser Frage zielen Herrn Eulers Untersuchungen ab in der Abhandlung: De cochlea Archimedis in den Comment. Nov. Petrop. T. V. pag. 259. sqq. Dieselbe Theorie legt Herr Hennert zum Grunde iu der Dissertation sur la vis d' Archimede, qui a remporté le prix de Mathematique adjugé par l' Académie Royale des sciences & belles lettres de Prusse en 1766. Ich werde demnach nun die Resultate, welche beyde Schriftsteller heraus bringen, mit einander vergleichen.

19. §.

Die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel (2. Fig.) nebst der relativen Geschwindigkeit des Wassers in der umwundenen Röhre sind gegeben: man sucht die Beschleunigung des Elements *M* nach der Richtung der relativen Bewegung *Mv*.

Aufl. Es sey die relative Geschwindigkeit des Wassers nach der Richtung $Mv = \surd v$, so ist wegen dieser Bewegung die Beschleunigung des Elements M nach dieser Richtung $= \frac{dv}{dt \surd v}$. Dieser Ausdruck gilt unbestimmt für jedes Element, weil alle Querschnitte gleich groß angenommen werden. Ferner sey die Geschwindigkeit eines jeden Elements, womit es in seinem Kreise nach der Richtung Mu herum läuft, $= \surd u$, so entsteht daraus nach der Richtung Mv die Geschwindigkeit $cos\,\eta \surd u$, die aber der vorigen $\surd v$ entgegen gesetzt ist. Setzt man also die gesamte Beschleunigung des Elements M nach der Richtung $Mv = V$, so hat man $V = \frac{dv}{dt \surd v} - \frac{du}{dt \surd u} cos\,\eta$, wenn angenommen wird, daß die Spindel nach der Richtung BPA umläuft. Liefe sie gegen APB zu, so müßte $\surd u$ das entgegen gesetzte Zeichen haben, und es wäre $V = \frac{dv}{dt \surd u} + \frac{du}{dt \surd u} cos\,\eta$. M. s. Herrn Eulers Aufsatz a. a. O. im 9. §. woselbst eben diese Formul aus Herrn Eulers Rechnungen fließt.

Nun setze man die Kreisbogen $Ba = \alpha$, $aP = A$, also $BP = \alpha - A$, so ist $aM = \frac{A}{cos\,\eta}$: und wenn eben dies Stück

H der

der Schraubenlinie $= s$ gesetzt wird, so ist $\sqrt{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt\ cos\ \eta}$, folglich $\frac{2}{dt}\ d.\ \sqrt{v} = \frac{2}{dt\ cos\ \eta}\ d.\ \frac{dA}{dt}$. Ferner wird $\sqrt{u} = \frac{d\alpha}{dt}$, also $\frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \sqrt{u} = \frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{d\alpha}{dt}$, und man erhält $V = \frac{2}{dt\ cos\ \eta}\ d.\ \frac{dA}{dt} - \frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{d\alpha}{dt}$. Das positive Glied in diesem Ausdruck kann man noch mit $sin\ \eta^2 + cos\ \eta^2 = 1$ multipliciren; so erhält man Herrn Hennerts Formul $V = -\frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ (\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}) + \frac{2\ sin\ \eta\ tang\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{dA}{dt}$. M. s. die Preisschrift §. 10. pag. 71.

20. §.

Die von der Schwere abhängende Beschleunigung des Elements *M* nach der Richtung der relativen Bewegung *Mv* zu finden.

Aufl. Wenn dM das Gewicht des Elements bezeichnet, so entsteht daher der Druck nach der Richtung $MX = dM\ cos\ \vartheta$. Diese Richtung schließt mit (1. Fig.) der Tangente des Kreises ZMx, die durch M gehet, einen Winkel $= 90° - ZYM = 90° - BOP$ ein, und es ist $BOP = \frac{\alpha - A}{a}$, wenn a den Halbmesser der Spindel bezeichnet. Zerlegt man also die Kraft MX nach der Richtung der Tangente, und auf ihr senkrecht, so wird jene $= dM\ cos\ \vartheta\ cos(90° - BOP) = dM\ cos\ \vartheta\ sin\ \frac{\alpha - A}{a}$. Mit der Richtung dieser Tangente schließt Mv den Winkel η ein; also entspringt hieraus nach der Richtung Mv die Kraft $dM \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta$. Ferner entspringt aus dem Gewicht dM nach der Richtung MP der Druck $dM \cos MTP = dM \sin\vartheta$, und dieser giebt nach der Richtung Mv den Druck $- dM \sin\vartheta \sin\eta$. Daher ist der gesammte Druck nach der Richtung $Mv = dM$ $(\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta)$, und dieser Druck durch die Masse dM dividirt giebt die gesuchte Beschleunigung.

21. §.

Den Druck zu finden, welchen jedes Element *M* wegen der Zusammenpressung des Wassers leidet.

Aufl. Wenn h^2 jeden Querschnitt der Röhre bezeichnet, und $h^2 p$ der Druck ist, den das Element M nach der Richtung Mv leidet, so wird eben dasselbe Element nach entgegen gesetzter Richtung den Druck $h^2 (p + dp)$ leiden, und daraus entsteht nach der Richtung Mv die Beschleunigung $- \frac{h^2\, dp}{dM} = - \frac{dp \cos\eta}{dA}$, weil $dM = \frac{h^2\, dA}{\cos\eta}$ ist. Hiezu addire man die im vorigen §. gefundene vom Gewicht des Elements herrührende Beschleunigung, und setze die Summe dem im 19. §. gefundenen Ausdruck gleich, so erhält man folgende Gleichung $\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{dA} = - \frac{2 \cos\eta}{dt} d. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 \sin\eta \,\mathrm{tang}\,\eta}{dt} d. \frac{dA}{dt}$. Wofern man diese Gleichung integriren kann, so ist p gefunden. Weil man aber nur für einen gegebenen

Augenblick der Zeit t den Druck p sucht, so muß t, also auch der davon abhängende Bogen α als eine beständige Grösse betrachtet werden. Man siehet sogleich, wie das Integral gefunden werde, wenn man den Ausdruck $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ aus dem 19. §. für V gebraucht. Dies giebt $\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ woraus

$$dp\cos\eta = dA\sin\frac{\alpha - A}{a}\cos d\cos\eta - dA\sin\vartheta\sin\eta + \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}dA - \frac{da}{dt\sqrt{v}}dA$$

folgt, und die Integration giebt $p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - A\sin\vartheta \sin\eta + \frac{A\,du\cos\eta}{dt\sqrt{u}} - \frac{A\,dv}{dt\sqrt{v}}$. Eben die Gleichung findet Herr Euler a. a. O. 12. §. 271. S. Bey ihm das q, was hier p heißt, $\sqrt{u}$ hat das entgegengesetzte Zeichen, weil er die Spindel nach APB umlaufen läßt, und s ist bey ihm, was hier A heißt. Ueberdem ist bey ihm der Bogen $Aa = p$, also $AP = p + s$, hier aber ist $BP = \alpha - A$, und man hat $\sin\frac{\alpha - A}{a} = \sin\frac{p + s}{a}$, $\cos\frac{\alpha - A}{a} = - \cos\frac{p + s}{a}$.

Herr Hennert a. a. O. 14. §. 74. S. schreibt statt $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}$ den Ausdruck durch α und A aus dem 19. §. und dies giebt

$$p \cos \eta = C + a \cos \frac{\alpha - A}{a} \cos \vartheta \cos \eta - A \sin \vartheta \sin \eta$$

$$+ \frac{2 A \cos \eta}{dt} d \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) - \frac{2 A \sin \eta \tang \eta}{dt} d. \frac{d. A}{dt}.$$

Man darf nämlich die erwähnte Formul nur in der schon gefundenen Integralgleichung substituiren, und so müßte nun diese Gleichung auch mit der Hennertschen Integralgleichung a. a. O. einerley seyn. Aber Herrn Hennerts Gleichung ist hievon gänzlich verschieden. Er multiplicirt seine Differentialgleichung, die mit der obenstehenden nach völlig einerley ist, mit $d\alpha - dA$ und erhält

$$(d\alpha - dA) \cos \vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos \eta - (d\alpha - dA) \sin \vartheta \sin \eta -$$

$$\frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA} + dp \cos \eta = - \frac{2 (d\alpha - dA) \cos \eta}{dt} d.$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 (d\alpha - dA) \sin \eta \tang \eta}{dt} d. \frac{dA}{dt}.$$

Nun integrirt er so, daß nicht allein A sondern auch α, ja $\frac{d\alpha}{dt}$ sowohl als auch $\frac{dA}{dt}$ veränderlich angenommen werden, und dies giebt $- a \cos \frac{\alpha - A}{a} \cos \vartheta \cos \eta - (\alpha - A) \sin \vartheta \sin \eta - \int$

$$\frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA} + p \cos \eta + C = - \cos \eta . \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 +$$

$2 \sin \eta \tang \eta \left\{ \int \frac{1}{dt} d\alpha\, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dt}\right)^2 \right\}$. Dies Verfahren ist der richtigen Theorie ganz entgegen, und es verleiten den Herrn Hennert zu einer ganz falschen Auflösung seiner Hauptaufgabe. Man muß nicht mit $d\alpha - dA$, sondern mit dA multipliciren, so erhält man

$$dA \cos\vartheta \sin\frac{\alpha-A}{a}\cos\eta - dA\sin\vartheta\sin\eta - dp\cos\eta =$$

$$-2dA\cos\eta \times \frac{1}{dt}d.\left(\frac{d\alpha}{dt}-\frac{dA}{dt}\right) + 2dA\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\eta \times \frac{1}{dt}$$

$d.\frac{dA}{dt}$. Was von t abhängt, also auch α, muß nun bey der Integration unveränderlich bleiben, es muß sich nur A und p ändern, und dies vorausgesetzt, erhält man

$$a\cos\vartheta\cos\frac{\alpha-A}{a}\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta - p\cos\eta + C =$$

$$-\frac{2A\cos\eta}{dt}d.\left(\frac{d\alpha}{dt}-\frac{dA}{dt}\right)+\frac{2A\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\eta}{dt}d.\frac{dA}{dt},$$ welches völlig die vorhin herausgebrachte richtige Gleichung ist, so wie sie mit Herrn Eulers Gleichung überein kömmt.

22. §.

Ich werde demnach berechtiget seyn, diese richtige Gleichung in der Folge zu gebrauchen, da dann vor allen Dingen nun erfordert wird, die beständige Grösse C zu bestimmen. Wenn dies geschehen soll, so muß man zuforderst festsetzen, ob die Wasserschnecke während des ganzen Umlaufs beständig mit Wasser angefüllt angenommen werden soll, oder ob man annehmen will, daß von jedem Schraubengange nur ein Theil angefüllt sey. Herr Hennert setzt das erste voraus, und Herr Euler berechnet beyde Fälle besonders. Nimmt man die erste Voraussetzung an, daß die Schnecke beständig ganz mit Wasser angefüllet sey, welches in die untere Oefnung ununterbrochen hinein, und aus der obern wieder herausfließt; so muß man auch zum Grunde setzen, daß die ganze Grundfläche sich beständig unter Wasser befinde, damit die untere Oefnung nie über dem Wasser herauf steige. Dies widerspricht der Vorschrift des 9. §. nicht, denn dort ward vorausgesetzt, daß sich bey jedem Umlauf nur der wasserhaltende Bogen füllen, und die Schnecke nicht ununterbrochen fliessen sollte. Ist nun $PM = Y$, so hat man $Y = A \times tang\,\eta$, und $A = Y \cot \eta$. Wenn demnach die ganze Länge der Spindel $Oo = b$ ist, so gehört der obern Oefnung bey C die Ordinate $Y = b$, und der Bogen $A = b \cot \eta$ zu. Weil nun oben das Wasser ausfließt, so muß $p = o$ seyn, wenn $A = b \cot \eta$ ist. (Der Druck der Atmosphäre wird beyseit gesetzt.) Setzt man diese Werthe in die für p gefundene Gleichung, so erhält man $C = - a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta +$

$$b \sin \vartheta \cos \eta - \frac{b\,du \cot \eta \cos \eta}{dt \surd u} + \frac{b\,dv \cot \eta}{dt \surd v}.$$

Wenn man hiemit noch die Voraussetzung verbindet, daß die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel einmal gleichförmig werde, und man sucht die Bewegung des Wassers in der Schnecke für diesen Zustand der Maschine; so kann man das, was in du multiplicirt ist, weglassen; weil für diesen Zustand $du = o$ wird.

23. §.

Die Geschwindigkeit des Wassers in der Schnecke zu finden, vorausgesetzt, daß die untere Oefnung beständig unter Wasser bleibe, und die Umlaufsgeschwindigkeit schon unveränderlich sey.

Aufl. Für die untere Oefnung bey a, wo das Wasser hineintritt, sey $p = \pi$, so ist zugleich $A = o$, und dies in die Gleichung des vorigen §. gesetzt giebt

$$\pi \cos \eta = C + a \cos \frac{\alpha}{a} \cos \vartheta \cos \eta.$$

Setzt

Setzt man hier statt C den vorhin gefundenen Werth, und dividirt durch $cos\,\eta$, so wird

$$\pi = a\,cos\frac{\alpha}{a}\,cos\,\vartheta - a\,cos\frac{\alpha - b\,cot\,\eta}{a}\,cos\,\vartheta + b\,sin\,\vartheta + \frac{b\,d\,v}{sin\,\eta\,dt\sqrt{v}}.$$

Um π zu finden, muß man zuerst einen Ausdruck für die Tiefe der untern Oefnung unter Wasser suchen, der sich aus den Formuln des §. ergiebt. Es ist nämlich die Höhe eines jeden Puncts M über eine durch B horizontal gelegte Ebene $=$ $(AP - Aa)\,tang\,\eta\,sin\,\vartheta + a\,(1 + cos\frac{AP}{a})\,cos\,\vartheta$, weil das dortige r hier a heißt. Für den Punct a, oder die untere Oefnung ist $AP = Aa = a.\pi - \alpha$, also wird des Puncts a Höhe über die durch B horizontal gelegte Ebene $= a\,(1 + cos\frac{a.\pi - \alpha}{a})$ $cos\,\vartheta$. Ist nun die Höhe des Wassers über den Mittelpunct der Grundfläche $= c$, so ist die Höhe des Wassers über B $= c + a\,cos\,\vartheta$, folglich die Tiefe des Puncts a unter Wasser $= c - a\,cos\frac{a\pi - \alpha}{a}$ $cos\,\vartheta$, oder $= c + a\,cos\frac{\alpha}{a}\,cos\,\vartheta$. Weil nun das Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ in a hinein fließt, so gehört der Druck für diese Stelle der Höhe $c + a\,cos\frac{\alpha}{a}\,cos\,\vartheta - v$. zu, und dies statt π gesetzt, giebt die Gleichung

$$c = -\,a\,cos\frac{\alpha - b\,cot\,\eta}{a}\,cos\,\vartheta + b\,sin\,\vartheta + \frac{b\,d\,v}{sin\,\eta\,d\,t\sqrt{v}} + v.$$

Eben diese Gleichung findet Herr Euler a. a. O. §. 40. *p.* 295. Um die Vergleichung anzustellen, muß man sich aus dem §. erinnern, daß das hiesige α beym Herrn Euler $a\,\pi - p$, also

$\alpha - b\,cot\,\eta$

$\alpha - b\cot\eta = a\pi - p - b\cot\eta$, folglich $\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} = -$

$\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}$ sey. Dies giebt Herrn Eulers Ausdruck $c = a\cos$

$\frac{p + b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\,dt\sqrt{v}} + v$. Hiebey möchte nun nachfolgendes zu erinnern seyn. Der Werth von π scheinet wegen der Umlaufsbewegung noch einer Verbesserung zu bedürfen. Wenigstens alsdenn, wenn die Schraube nach BPA zu umläuft, scheint der Druck gegen die untere Oefnung größer zu seyn. Wenn die Umlaufsbewegung schon gleichförmig geworden ist, und man setzt alsdenn die Geschwindigkeit der Oefnung a, womit sie jetzt im Kreise umläuft $= \sqrt{k}$; so scheint es, daß man $\pi = c + a\cos$

$\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta + k - v$ setzen müße. Dies würde indessen auf die folgenden Rechnungen weiter keinen Einfluß haben, als daß man allenthalben $c + k$ statt c schreiben müßte. Ich will mich hierüber bald noch etwas näher erklären.

24. §.

Setzt man den Winkel $AOa = \phi$, also $Aa = a\pi - \alpha$

$= p = a\phi$; so wird $d\alpha = -a d\phi$: und weil nun $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ ist,

so erhält man $dt = -\frac{a\,d\phi}{\sqrt{k}}$. Setzt man ferner $\frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$,

oder $b\cot\eta = a\gamma$, und $b = a\gamma\tang\eta$; so erhält man $\frac{b}{\sin\eta\,dt}$

$= -\frac{\gamma\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi}$, folglich $c = a\cos(\phi + \gamma)\cos\vartheta + a\gamma\tang\eta$

$\sin\vartheta - \frac{\gamma\,dv\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi\sqrt{v}} + v$. Noch setze man $2\sqrt{kv} = x$, also v

$= \frac{zz}{4k}$, und $dv = \frac{z\,dz}{2k}$, $dv\sqrt{k} = \frac{z\,dz}{2\sqrt{k}}$ folglich $\frac{dv\sqrt{k}}{\sqrt{v}} = dz$.
Diese Werthe in die gefundene Gleichung gesetzt geben $c\cos\eta$
$d\phi = a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta\,d\phi + a\gamma\sin\eta\sin\vartheta\,d\phi$

$$- \gamma\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi\cos\eta, \text{ oder}$$

$$- \gamma\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi\cos\eta + a\,d\phi\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta$$

$$= (c.\cos\eta - a\gamma\sin\eta\sin\vartheta)\,d\phi.$$

Die bisher bekannten Kunstgriffe der Integralrechnung reichen nicht hin, das Integral dieser Gleichung zu finden, ohne nur in dem besondern Fall, wenn die Spindel vertical steht, also $\sin\vartheta = 1$, und $\cos\vartheta = 0$ ist. Alsdenn hat man

$- \gamma\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi\cos\eta = (c.\cos\eta - a\gamma\sin\eta)\,\vartheta\phi$; oder wenn $\frac{b\cot\eta}{a}$ statt γ wieder gesetzt wird

$$- \frac{b}{a\sin\eta}\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi = (c - b)\,d\phi,$$

woraus $\frac{a\sin\eta}{b}\,d\phi = - \frac{4k\,dz}{4k(c-b) - zz}$ folgt, oder auch

$$\frac{a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,d\phi = - \frac{dz:\sqrt{4k(c-b)}}{1 - zz:(4k(c-b))}.$$

Das Integral hievon ist

$\frac{a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,\phi = C - \frac{1}{2}l\,\frac{1 + z:\sqrt{4k(c-b)}}{1 - z:\sqrt{4k}(c-b)}$; und weil $\frac{z}{\sqrt{4k}} = \sqrt{v}$ war, so erhält man $\frac{a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,\phi = C - \frac{1}{2}l$ $\frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}}$. Die beständige Größe C muß aus dem anfänglichen Zustande der Bewegung bestimmt werden. Nimmt man an, daß $\sqrt{v} = 0$ sey, wenn $\phi = 0$ ist, so wird $C = 0$, und

$\frac{2a\,\sin\eta\,\surd(c-b)}{b\surd 4k}\,\Phi = -\,l\,\frac{\surd(c-b)+\surd v}{\surd(c-b)-\surd v}$. Beym Fortgang der Bewegung, wenn die untere Oefnung von A durch $\alpha, b, \beta,$ u. s. f. umläuft, wird nun Φ negativ, und dies giebt

$\frac{\surd(c-b)+\surd v}{\surd(c-b)-\surd v} = \varrho^{\frac{2a\sin\eta\surd(c-b)}{b\surd 4k}\Phi}$, woraus $\surd v =$

$\frac{\varrho^{\psi}-1}{\varrho^{\psi}+1}\surd(c-b)$ folgt, wenn der Kürze wegen ψ statt

$\frac{2a\sin\eta\surd(c-b)}{b\surd 4k}\,\Phi$ geschrieben wird.

25. §.

Wenn man nun aus dieser Gleichung Schlüße ziehen wollte, so wäre vornehmlich zu erwägen, in wie weit die angenommenen Bestimmungen für den anfänglichen Zustand der Bewegung bestehen können. Es ist angenommen worden, daß dem Werth $\Phi = 0$ der Werth $v = 0$ zugehöre, und diese Voraussetzung würde ihre Anwendung finden, wenn man annähme, die Schnecke sey anfangs ganz mit Wasser angefüllt und die untere Oefnung verschlossen gewesen, hierauf aber, nachdem die Schnecke beym Umlauf um ihre Axe, und mit ihr das Wasser in der Röhre, schon die Geschwindigkeit $\surd k$ erreicht hatte, die untere Mündung plötzlich eröfnet worden. In solchen Fällen also, wo es mit der Bewegung der Wasserschraube diese Bewandniß hätte, würde die Gleichung $\surd v = \frac{\varrho^{\psi}-1}{\varrho^{\psi}+1}\surd(c-b)$ ihre Anwendung finden, und weil der Werth von ϱ^{ψ} mit Φ sehr schnell wächst, so würde die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre sehr bald unveränderlich und $\surd v = \surd(c-b)$ werden. Diese beständige Geschwindigkeit würde man auch aus der Differential-Gleichung finden, wenn man $d\Phi = 0$ setzte. Ueberhaupt aber ergeben diese Schlüsse, daß das Wasser nur unter der Bedingung in der Röhre würde hinauf steigen können, wenn $c > b$ wäre, oder vielmehr der am Ende des

23. §. beygefügten Erinnerung gemäß, wenn $c+k>b$ wäre. Eigentlich wird allemal $b>c$ seyn, wenn es also mit der eben erwehnten Erinnerung seine Richtigkeit hat, so kann das Wasser nur alsdenn in der Röhre steigen, wenn $k>c-b$ ist. Wenn $b>c$ ist, (man kann $c+k$ statt c verstehen) und man setzt nun

$\rho \frac{2a \sin \eta \sqrt{(b-c)}}{b\sqrt{4k}} \phi = \psi$, so hat man $\sqrt{v} = \frac{\rho \psi \sqrt{-1}-1}{\rho \psi \sqrt{-1}+1}$

$\sqrt{(b-c)}\sqrt{-1}$, also $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}} = -\frac{\rho \psi \sqrt{-1}-1}{(\rho \psi \sqrt{-1}+1)\sqrt{-1}}$

$= -\tang \frac{1}{2}\psi$. Dieser Ausdruck giebt die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, falls die Spindel nach BPA zu umläuft, gleich vom ersten Augenblick der Bewegung negativ, und daraus erhellet, daß das Wasser gar nicht steigen könne, sondern sogleich anfangen müße, zurück nach unten zu fließen. Uebrigens aber kann die Gleichung nicht dienen, beym Fortgang der Bewegung die Geschwindigkeit des zurückfließenden Wassers daraus zu berechnen, weil die Rechnung im 22. §. voraussetzt, daß die Röhre beständig voll Wasser bleibe.

26. §.

Es ließ sich voraus sehen, daß die Rechnung dies Resultat geben müße, wofern aus dem beständigen Anstoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Wassertheilchen nicht ein solcher Druck entsteht, der das Wasser hinauf zu treiben im Stande ist. Aus der Schwungbewegung um die Axe der Spindel können hier gar keine Kräfte entstehen, die das Wasser hinauf treiben, weil die Richtung aller Schwungkräfte hier auf der centrischen Linie der Röhre senkrecht ist, und die gesammte Wirkung der Schwungkräfte hier von der Röhre selbst völlig aufgehalten wird. Mit der Maschine des Herrn de Mour, worüber Herr Euler in der Histoire de l'Academie de Berlin A. 1751. pag. 303. seqq.

seqq. eine umständliche Untersuchung angestellet hat, wird das Wasser deswegen zum Steigen gebracht, weil die Richtung der Schwungkräfte auf der centrischen Linie der Röhre nicht senkrecht ist, und daher ihre Wirkung von der Röhre nicht ganz aufgehoben werden kann. Was übrigens den Druck gegen die untere Mündung der um die Spindel gewundenen Röhre betrift, so müßte man bey einer genauern Rechnung noch erwegen, daß dieser Druck beym Fortgang der Bewegung nicht unveränderlich bleiben würde. Durch den Umlauf der Spindel wird auch dem Wasser an der Stelle, wo die Schraube steht, eine wirbelförmige Bewegung ebenfalls nach BPA zu mitgetheilt. Wegen dieser eigenen Bewegung der Wassertheilchen, welche der untern Mündung unterweges aufstossen, hängt die Wirkung des Stosses nur von der respectiven Geschwindigkeit der untern Mündung in Ansehung der Geschwindigkeit des Wassers selbst ab, die also so lange veränderlich bleiben würde, als sich noch die Geschwindigkeit des Wassers ändert. Wenn alles so weit in den Beharrungsstand gekommen wäre, daß das Wasser in demselben Kreise, den die untere Mündung durchläuft, ebenfalls mit der Geschwindigkeit $\sqrt{k}$ umliefe, so würde weiter kein Druck gegen die Mündung wegen des Anstosses entstehen, weil nun eigentlich gar kein Anstoß weiter erfolgen könnte. Demnach könnte das Wasser in der Schnecke gar nicht steigen.

27. §.

Ob nun gleich der bisher betrachtete Fall, wenn die Spindel der Wasserschraube vertical stehet, in der Ausübung nicht vorkömmt, weil sie allemal gegen den Horizont schief gelegt wird; so dienen doch die bisherigen Schlüße dazu, auch ohne weitere Rechnung zu übersehen, was bey der geneigten Lage der Spindel erfolgen müsse. Auch in diesem Falle können die Schwungkräfte dazu nichts beytragen, daß das Wasser in der Röhre zu steigen genöthiget werde. Wenn dies erfolgen sollte, so müßte der von dem Anstoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Wassertheilchen herrührende Druck dies zuwege bringen, der jedoch veränderlich seyn, mit dem Fortgang der Bewegung abnehmen, und zuletzt gar aufhören würde. Es scheinet also, daß man hieraus mit ziemlicher Sicherheit schließen könne, die Wasserschraube könne das Wasser nie ununterbrochen heben, was man ihr auch für eine Lage gegen den Horizont geben wollte. Herr Euler entscheidet hierüber nichts, er bricht hier seine Untersuchungen ab, erklärt die Theorie der Wasserschraube für höchst schwer, und fodert andere Geometer auf, ihre Kräfte bey dieser Aufgabe gleichfalls zu versuchen. Eben dies hat auch wohl veranlasset, daß von der Berlinischen Academie der Wissenschaften im Jahre 1765. diese Aufgabe ist zur Preisfrage aufgegeben worden, und ich werde nun näher prüfen, wie weit H. Hennert die Preisaufgabe aufgelöst habe.

28. §.

Er nimmt an, die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ des Wassers in der Röhre werde beym Fortgang der Bewegung unveränderlich: eine Voraussetzung, die, wie man leicht siehet, bewiesen werden muß, bevor sie als ausgemacht angenommen werden kann. Ist sie wahr, so muß aus der Differentialgleichung, wenn in derselben $dz = o$ gesetzt wird, eine Gleichung folgen, die $z = 2\sqrt{kv}$ allein durch beständige Grössen bestimmt. Aber die Differentialgleichung (24. §.) giebt $\frac{zz}{4k} \cos\eta + a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta = c.(\cos\eta -$ $a\gamma \sin\eta \sin\vartheta)$, wenn $dz = o$ gesetzt wird, woraus $\frac{zz}{4k} = v = c -$ $a\gamma \tang\eta \sin\vartheta - a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta$ folgen würde. Weil dieser

ser Ausdruck offenbar von der veränderlichen Größe ϕ abhängt, so widerspricht die Folge der Voraussetzung, und es ergiebt sich, daß die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ nie unveränderlich werden könne. Diese Gleichung würde also nur nach Beschaffenheit der Umstände einen größten oder kleinsten Werth geben. Ja wenn c nichts weiter als die Tiefe bedeutet, um welche der Mittelpunct der Grundfläche unter Wasser steht, so würde sogar $\sqrt{v}$ unmöglich werden. Es war nämlich $a\gamma = b \cot \eta$ (24. §.) also würde $v = c - b \sin \vartheta - a \cos(\phi + \gamma) \cos \vartheta$ negativ werden, weil $b \sin \vartheta > c$ ist.

29. §.

Man wird sich aber aus dem 21. §. erinnern, daß H. Hennert wegen eines Versehens bey der Integration eine unrichtige Differentialgleichung herausgebracht habe, und deswegen wird man vermuthen, daß aus seiner Differentialgleichung eine solche unveränderliche Geschwindigkeit folge. Ich will versuchen, ob ich ihm in seinen Schlüssen folgen kann. In der Gleichung für p, (21. §.) so wie sie H. Hennert heraus bringt, setze man $A = b \cot \eta$, und $p = 0$, dem 22. §. gemäß, das Integral $\int \frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA}$ nehme man so, daß es mit p zugleich verschwindet, und bey eben dieser Voraussetzung $A = b \cot \eta$, sey $-\cos \eta . \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = M$, so wie $2 \sin \eta \tan g \eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha\, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right) = N$. (Ich muß so nachrechnen, wie H. Hennert mir vorrechnet, sonst müßte hier alles, was von t abhängt, unveränderlich bleiben.) Dies giebt $- a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta - (\alpha - b \cot \eta) \sin \vartheta \sin \eta + C = M + N$, und es wird die beständige Größe $C = M + N +$

$= \cos\frac{\alpha - b \cot\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta + (\alpha - b \cot\eta) \sin\vartheta \sin\eta$. Setzt man diesen Werth statt C in die Hennertsche Integralgleichung im 21. §. so müßte nun eine Gleichung kommen, woraus sich p finden ließe, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{u}$, und $\frac{dA}{dt} = \cos\eta \sqrt{v}$ (19. §.) als bekannt angesehen werden. Nach H. Hennerts Rechnung würde das nun noch nicht angehen, weil in seiner Gleichung noch das Integral $\int \frac{dp\, d\alpha \cos\eta}{dA}$ vorkömmt, und bey ihm α sowohl als A veränderlich ist. Mit diesem Integral aber wird H. Hennert so fertig. Er nimmt gleich an, nach Verlauf einiger Zeit werde nicht allein die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel, sondern auch die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre $\sqrt{v}$ unveränderlich, also sey alsdenn $\frac{d\alpha}{dA} = \frac{\sqrt{u}}{\cos\eta \sqrt{v}}$ unveränderlich, und findet dieser Voraussetzung gemäß $\int \frac{dp\, d\alpha \cos\eta}{dA} = \frac{p\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, da er denn k statt des hiesigen u schreibt, so wie auch oben im 23. statt u der Buchstab k gebraucht ist, für den Fall, wenn die Umlaufsbewegung gleichförmig wird. Nach H. Hennert ist aber von nun an auch $\sqrt{v}$ unveränderlich. Hiernächst nimmt er nun dem 23. §. gemäß in so weit ganz richtig an, für die untere Mündung der Röhre gehöre der Druck der Höhe $c + a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\vartheta - v$ zu; setzt in seiner Gleichung für p den eben erwehnten Werth statt p, und zugleich $A = o$. So müßte nun freylich eine Gleichung heraus kommen, woraus v gefunden werden könnte: weil aber nach seiner Voraussetzung nun $\sqrt{v}$ schon unveränderlich seyn soll; so muß man auch $d.\sqrt{v} = o$, also $d.\frac{dA}{dt} = o$, oder $ddA = o$ setzen, und dies

müßte

müßte eine Gleichung zwischen v oder $\sqrt{v}$ und lauter beständigen Größen geben. Es wird mir in der That schwer, dem H. Hennert in seinen Schlüssen weiter nachzufolgen. Entweder ich verstehe den 15. §. der Preisschrift gar nicht, oder H. Hennert versieht sich hier nochmal, wenn er schließt: für die untere Mündung ist $A = o$, also auch $dA = o$ und $ddA = o$. Soviel ist wahr, daß nach seiner Voraussetzung $ddA = o$ sey, weil er $\sqrt{v} = \frac{dA}{dt\, cos\, \eta}$ unveränderlich annimmt: aber $dA = o$ setzen, heißt das hier nicht eben soviel, als $\sqrt{v} = o$ setzen? Gesetzt auch, H. Hennert wollte antworten, man müße bey dieser Rechnung A nicht als eine Function von t betrachten, sondern nur als eine veränderliche Größe, wovon die Gestalt der Röhre abhängt; so ist es ja doch falsch geschlossen: wenn eine **veränderliche Größe** in einem bestimmten Fall $= o$ wird, so wird auch ihr Differential $= o$. Herrn Hennerts Schluß wäre richtig, wenn A den **unveränderlichen** Werth $= o$ haben müßte, und das ist hier der Fall gar nicht. Ich muß indessen mit H. Hennert weiter rechnen, und seinen Schlüssen gemäß $cos\, \eta. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = \frac{cos\, \eta.\, d\alpha^2}{dt^2} = cos\, \eta.k$, und überdem $2\, fin\, \eta\, tang\, \eta \left(\int \frac{1}{dt}\, d\alpha\, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}. \frac{dA^2}{dt^2}\right) = o$ setzen. Wenn ich alsdenn Kürze halber π statt $c + a\, cos\frac{\alpha}{a}\, cos\, \vartheta - v$ schreibe, so verwandelt sich H. Hennerts Gleichung (21. §.) in folgende:

$$- a\, cos\frac{\alpha}{a}\, cos\, \vartheta\, cos\, \eta - \alpha\, fin\, \vartheta\, fin\, \eta - \frac{\pi\sqrt{k}}{\sqrt{v}} + \pi\, cos\, \eta$$
$$+ M + N + a\, cos\frac{\alpha - b\, cot\, \eta}{a}\, cos\, \vartheta\, cos\, \eta + (\alpha - b\, cot\, \eta)\, fin\, \vartheta$$
$$fin\, \eta = - k\, cos\, \eta.$$

Nun sollte $M = -\cos\eta \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2$, und $N = 2\sin\eta$ $\tan\eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha\, d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}.\frac{dA^2}{dt^2}\right)$ seyn, in der Voraussetzung, daß $A = b\cot\eta$ genommen werde. Ich wüßte nicht, wie ich das machen sollte, diese Werthe herauszubringen: mit H. Hennert aber setzt man $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$, $\frac{dA}{dt} = \cos\eta\sqrt{v}$, $= \int d.\frac{dA}{dt}$, und man findet $M = -\cos\eta(\sqrt{k} - \cos\eta\sqrt{v})^2$, $N = 2\sin\eta \tan\eta \times (\cos\eta\sqrt{kv} - \frac{1}{2}v\cos\eta^2) = 2\sin\eta^2\sqrt{kv} - \sin\eta^2\cos\eta\, v$. Man wird leicht sehen, wenn diese Werthe statt M und N gesetzt werden, was die Gleichung für eine Gestalt annimmt, es wird völlig diejenige, die H. Hennert selbst herausbringt auf der 76. S. der Preisschrift. Um die Vergleichung desto besser anzustellen, bemerke ich nur, daß das hiesige η, ϑ, b, beym H. Hennert ϕ, $90° - \vartheta$, und c heiße, und was hier c heißt, ist bey ihm $h - a\sin\vartheta$. Die gefundene Gleichung müßte nun außer v keine andre als beständige Größen enthalten, $\sqrt{k}$ auch für eine beständige Größe genommen. Aber ein einziger Blick auf die Gleichung ergiebt ja, daß noch außerdeme der Bogen α darinn vorkomme. Wenn man z statt $\sqrt{v}$ schreibt und die Gleichung nach den Potenzen von z ordnet, so wird sie cubisch. H. Hennert rechnet weiter, und bringt heraus, daß diese cubische Gleichung zwey unmögliche Wurzeln, und eine negative Wurzel habe, also $z = \sqrt{v}$ allemal negativ sey. Uebrigens hängt doch seine Formul für diese negative Wurzel noch immer von dem veränderlichen Bogen α ab, und ich begreife nicht, wie dies mit der Voraussetzung bestehen könne, daß nun $\sqrt{v}$ unveränderlich sey. Ferner würde ja der negative Werth von $\sqrt{v}$ anzeigen, daß das Wasser in der Röhre nicht gegen die obere Oefnung zu, wie während der Rechnung vorausgesetzt ist, sondern gegen die untere Oefnung zu laufe, und das hieße: die Schnecke kann gar kein Was-

ser

ser heben. H. Hennert erklärt sich über seinen negativen Werth von $\sqrt{v}$ ganz anders. Er sagt, dies komme daher, weil das Wasser steigend in die Schnecke hineindringe, und fallend heraus trete, Steigen und Fallen aber entgegengesetzte Bewegungen seyn. Wie doch ein Irrthum immer mehrere nach sich zieht! Bezeichnet denn nicht $\sqrt{v}$ unbestimmt die Geschwindigkeit des durch einen jeden Querschnitt der Röhre laufenden Wassers, sowohl dessen, was oben ausläuft, als auch dessen, was unten eintritt?

30. §.

Am meisten wundre ich mich darüber, daß dasjenige, was H. Hennert im 16. §. 78. S. der Preisschrift vorträgt, ihn nicht auf das fehlsame seiner Theorie aufmerksam gemacht hat. Hier soll die Menge Wasser bestimmt werden, welche die Schnecke in gegebener Zeit t heben wird. Diese müßte $= f^2 t \sqrt{v}$ seyn, wenn f^2 den Querschnitt der Röhre bedeutet. Aber, heißt es hier, man muß bemerken, **daß das Wasser nicht ununterbrochen durch die Schnecke fließe.** Dies lehrt die Erfahrung nach H. Hennerts Bericht bey den in Holland jetzt üblichen Wasserschnecken, deren Grundflächen ganz unter Wasser stehen. Das Wasser hört auf zu fließen, noch ehe die Spindel den halben Umlauf vollendet hat: während des übrigen Theils eines Umlaufs fließt nichts heraus. Fließt es denn nicht etwa während dieser Zeit erstlich um eine gute Strecke zurück, und kehrt nachher wieder um? oder bleibt es während dieser Zeit in der Röhre ruhig? darüber erklärt sich H. Hennert nicht. Aber dem sey, wie ihm wolle, wenn das Wasser während eines jeden Umlaufs zu fließen aufhört, und eine zeitlang nachher wieder anfängt zu fließen, wie läßt sich denn in aller Welt die Voraussetzung rechtfertigen, daß $\sqrt{v}$ unveränderlich werde? Hier muß H. Hennert doch wirklich die Schwäche seiner Theorie gefühlt haben. Denn gegen das Ende des 16. §. wo er die Wassermenge bloß aus einigen Beobachtungen bestimmt, und ohngefehr ein Mittel genommen, auf $\frac{2}{3} f^2 t \sqrt{v}$ schätzt, setzt er hinzu: les remarques, que nous venons de faire, sont tres importantes pour la theorie de cette machine. Elles ont echappé aux Mechaniciens (das denke ich eben nicht, denn die meisten, welche ich habe nachschlagen können, sagen, daß das Wasser aus der Schnecke nicht ununterbrochen fließe.) Cependant elles ne laissent pas que de rendre la theorie un peu incertaine.

31. §.

Weil Erfahrungen, die man mit der Theorie vergleichen kann, vorzüglich interessant sind, so will ich noch diejenigen hersetzen, welche H. Hennert im 17 bis 20 §. vom Effect einiger Wasserschrauben erzählt. Die in Holland ehedem üblich gewesenen Wasser-Schrauben, welche Waater-Mooler hießen, und zur Austrockung der Wiesen gebraucht wurden, lagen fast horizontal, und hoben das Wasser auf eine sehr geringe Höhe. Wenn sie das Wasser 4 Fuß hoch heben, so heißen sie Sheprad-Moolen, und in der Herrschaft Hazerswoude nahe bey Leiden hat man vier dergleichen Schrauben über einander gestellt, um das Wasser 16 Fuß hoch zu heben. Ohngefehr um das Jahr 1754. ward von einigen Kunstverständigen in Vorschlag gebracht, den Neigungswinkel gegen den Horizont 60° groß zu machen, um das Wasser auf größere Höhen zu bringen. Vieleicht verfiel man daher darauf, weil Daniel Bernoulli diesen Winkel angegeben hat. Man zog H. Lulofs zu Rath, und auf dessen Empfehlung wurden dergleichen Maschinen mit Wasserschrauben unter dem Winkel von 60° erbauet, die den Namen Vyzel-Moolen erhalten haben. Alle werden durch Windflügel getrieben.

Mit

Mit dreyen Vyzel-Moolen, die, wie es scheint, nicht weit von einander angelegt sind, und welche H. Hennert durch die Namen der nordlichen, der mittlern und der südlichen nach ihrer Lage unterscheidet, hat man Erfahrungen angestellet. Um jede Spindel sind drey Röhren gewunden, deren viereckte Oefnungen um gleiche Bogen von einander abstehen. Die Oefnung der Gänge an der nordlichen Schraube beträgt 1, 36 Quadr. Fuß, an der mittlere 1, 46 Q. F. und an der südlichen 1, 41 Q. F. die Halbmesser ihrer Spindeln sind 35, 37, 36 Zoll, die Winkel η sind 11° 55′, 14° 42′, 11° 54′, diese findet man aus den Entfernungen der Schraubengänge, welche 23, 29, 24 Zoll betragen. Der Winkel ϑ ist für alle = 60 Grad, die ganze Länge der Spindel $14\frac{1}{2}$ Fuß, und sie stehen ohngefehr 4 Fuß tief unter Wasser. (Ich setze diese Zahlen alle so her, wie sie auf der 81. S. der Preisschrift stehen, werde aber unten verschiedenes dabey erinnern müßen.) Man hat jede dieser Mühlen eine Zeitlang arbeiten lassen, und die in dieser Zeit gehobene Menge Wasser gemessen; auch hat man die Anzahl der Umläufe der Windflügel bemerkt, und daraus die Zahl der Umläufe der Schrauben geschlossen, wovon vermöge der Einrichtung der Maschine beynahe anderthalb auf einen Umlauf der Windflügel kammen.

32. §.

Der Erfahrungen selbst sind an der Zahl 17, die alle auf der 82 Seite der oft erwehnten Preisschrift stehen. H. Hennert verwirft aber die erste, vierte, zehnte, dreyzehnte, vierzehnte, und sechszehnte, als solche, die zu weit von seiner Theorie abweichen. Die übrigen stehen auf der 84 S. nochmal, aber die dortigen Zahlen kommen mit den auf der 82 S. befindlichen nicht alle überein. H. Hennert hat aus der Anzahl der Umläufe die Winkelgeschwindigkeit der Spindel, und daraus die Geschwindigkeit der in der centrischen Linie der Röhre liegenden Puncte geschlossen, welches hier $2\sqrt{gk}$ wäre. Diese letztern Geschwindigkeiten sind größtentheils auf der 84 S. anders als auf der 82 S. angegeben. Ich setze sie so her, wie sie auf der 84 Seite stehen.

Erfahrungen.	Winkelgeschwindigkeit der Spindel.	Werth von $2\sqrt{gk}$.	Wassermenge in Cub. Fußen für 1. Minute	Namen der Schrauben.
2 3 5	81° 98°30′ 117°	4, 10 4, 95 5, 93	181 227 273	nordliche Schraube.
7 8 9 11	79° 85° 30′ 108° 130°	4, 50 4, 60 6, 94 7, 00	217 228 294 356	mittlere Schraube.
12	124°	6, 59	367	südliche Schraube.
15	121°30′	6, 52 6, 35	beyde zus. 648	die mittlere u. südliche.
17	187° 15′	9, 46 10, 00 9, 77	alle drey Schrauben zusammen 1140.	

Diese Erfahrungen vergleicht nun H. Hennert mit seiner Theorie, aber ich weis in der That selbst nicht recht auf welche Art. Seine Gleichung für $\sqrt{v}$ hängt von α ab, und weil $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ ist, so ist $\alpha = t\sqrt{k}$. Dies ist nämlich der Weg, den die untere Mündung der Röhre in der Zeit t durchläuft. Setzte nun H. Hennert $t\sqrt{k}$ statt α in die Gleichung, so würde $\sqrt{v}$ von t abhängen, und sich folglich mit t ändern. Aber es soll $\sqrt{v}$ unveränderlich seyn, und diese einmal zum Grunde gesetzte Voraus-

setzung

setzung bringt H. Hennert dahin, daß er den Bogen α für das ansieht, was sonst Geschwindigkeit heißt. Daher setzt er auf der 81. S. $\alpha = \sqrt{60\,k}$, und nimmt also α für die Geschwindigkeit, die der Höhe k zugehört. Dies ist ein neuer Irrthum, der zu den vorigen noch hinzu kömmt, also ist es wohl nicht zu verwundern, daß die von ihm angeführten Erfahrungen so wenig mit seiner Theorie zusammen treffen wollen. Alle Wasserschrauben haben sehr viel weniger Wasser in einer Minute gegeben, als sie nach Herrn Hennerts Rechnung thun sollten, und der Fehler hat bald ein Drittel bald die Hälfte der ganzen berechneten Wassermenge betragen: gewöhnlich ist er zwischen diese Gränzen gefallen. Das meint nun zwar H. Hennert nicht: nach ihm beträgt die gröste Abweichung der beobachteten Wassermengen etwa nur den 9ten oder 10ten Theil der nach seiner vermeintlichen Theorie berechneten, und zwey Beobachtungen geben fast gerade eben das, was er nach der Theorie gefunden zu haben angiebt. Allein H. Hennert verbirgt hier die grössere Abweichung seiner Theorie von der Erfahrung auf eine ganz künstliche Art. Er reducirt erstlich das eigentliche Resultat seiner Theorie auf denjenigen Theil, worauf er ihn nach einer andern aus der **Erfahrung geschlossenen Regel** reducirt wissen will, die auf der 78. und 79. S. der Preisschrift stehet, und hier schon im §. angeführt ist. Diese reducirte Wassermenge vergleicht er nun wieder mit derjenigen, welche die im Anfang dieses §. angeführten Erfahrungen gegeben haben. Die Zahlen, welche er angiebt, sind folgende.

Erfah-

Erfahrungen.	berechnete Wassermenge.	reducirte Wassermenge.	beobachtete Wassermenge.	Diff.
2	273 C. Fuß	182	181	1
3	386	258	227	31
5	529	252	273	80
7	406	271	217	54
8	365	243	228	25
9	487	325	294	31
19	659	430	356	74
12	557	371	367	4
15	1068	712	648	64
17	2183	1453	1140	313

Ob nun gleich bey der ersten Erfahrung die beobachtete Wassermenge von der berechneten um ein Drittel der letztern abweicht, so sagt H. Hennert doch, sie weiche gar nicht ab, weil die beobachtete Wassermenge mit der reducirten übereinkömmt, und obgleich bey der letzten Erfahrung die beobachtete Wassermenge wenig mehr als die Hälfte der berechneten ausmacht, und selbst die Differenz von der reducirten Wassermenge nicht viel weniger als $\frac{1}{4}$ der letztern ausmacht; so will H. Hennert doch nicht, daß der Fehler mehr als ohngefehr $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{9}$ betrage, denn, sagt er, man muß hier nur $\frac{7}{12}$ der berechneten Wassermenge bey der Reduction nehmen, und alsdenn beträgt der Fehler nur $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{10}$. So künstlich vergleicht man sonst keine Erfahrungen mit der Theorie, und H. Hennert legt seiner Theorie doch wohl zuviel Lob bey. Die Differenzen der beobachteten, von seiner sogenannten reducirten Wassermenge sind ja keine Differenzen von der nach seiner Theorie berechneten Menge: also sind die von ihm angegebenen Abweichungen nicht **Abweichungen von der Theorie**, sondern Abweichungen von seinen aus Beobachtungen geschlossenen Regeln.

33. §.

Wenn es nun mit den bisherigen Erinnerungen gegen des H. Hennerts Vortrag seine Richtigkeit hat, so werde ich auch berechtiget seyn, zu behaupten, daß H. Hennerts Regeln, die Wassermenge zu berechnen, welche die Wasserschraube in gegebener Zeit heben soll, für die Ausübung ganz unbrauchbar sind. Es fehlet sehr viel, daß H. Hennert das Haupt-Problem von der Wasserschraube sollte aufgelöst haben, dessen Auflösung H. Euler unvollständig lassen mußte. Wollte man auf dem richtigen Wege, den H. Euler betreten hat, weiter gehen; so müßte man bey der Differentialgleichung des 24. §. die Methode durch Reihen zu integriren anwenden: man würde auf solche Art eine Reihe finden, welche z durch Φ ausdrückte. Ich denke, man hat nicht nöthig, die Mühe dieser Rechnung zu übernehmen; man kann sich ohnehin überzeugen, daß das Wasser bey der geneigten Lage der Schnecke so wenig, als bey ihrem senkrechten Stande (§.) durch die obere Mündung ununterbrochen durchfließen könne. Wenn in jedem Schraubengange nur die wasserhaltenden Bogen voll Wasser sind, so läßt sich begreifen, daß das Wasser beym Umlauf der Spindel höher steigen könne. Wenn aber die ganze Röhre von unten bis oben voll Wasser ist; so ist offenbar, daß alles unten auslaufen würde, wenn die Schraube nicht umliefe, und man die untere Mündung öfnete. Beym Umlauf der Spindel entstehen keine Kräfte, die das Wasser nach der Richtung der Röhre gegen die obere Mündung zu treiben können, es wäre denn, daß aus dem Anstoß der untern Mündung gegen die im Wege liegenden Wassertheilchen ein so starker Druck entstünde, der dies ausrichten könnte. Im 26. §. sind aber die Ursachen schon angegeben, weswegen dieser Druck beym Fortgang der Bewegung schwächer werden müßte, wenn er gleich beym Anfang der Umlaufsbewegung noch beträchtlich genug wäre. Man begreift auch leicht, daß die Umlaufslaufsbewegung schon ziemlich schnell seyn müßte, wenn der Druck gegen die untere Mündung stark genug werden sollte, das Wasser hinauf zu treiben.

34. §.

Gesetzt aber, daß das Wasser bey hinlänglicher Schnelligkeit der Umlaufsbewegung, wenigstens auf eine Zeitlang zum ununterbrochenen durchfließen gebracht werden könnte; gesetzt die Integration der Differentialgleichung, welche die Geschwindigkeit des Wassers zu finden diente, hätte keine große Schwierigkeit, und führte auch nicht auf sehr verwickelte Formuln: so dünkt mich doch, daß hiebey noch wichtige Mängel übrig bleiben würden, die keine sonderliche Uebereinstimmung der Resultate der Theorie mit dem wirklichen Erfolg würden erwarten lassen. Die Differentialgleichung gründet sich auf die Voraussetzung, daß alle Wassertheilchen, die in einerley auf der centrischen Linie senkrechten Querschnitt liegen, von einerley Kräften beschleuniget werden, und daß die Schwungkräfte insgesammt von der Röhre aufgehalten werden, ohne auf die Bewegung des Wassers Einfluß zu haben. Eigentlich aber würde dies alles, so wie überhaupt diejenigen Grundsätze von der Bewegung des Wassers in Röhren, worauf die Rechnung gebauet ist, nur in völliger Schärfe gelten, wenn die Querschnitte der Röhre unendlich klein wären. Also würde eine völlige Entwickelung der aus diesen Grundsätzen geschlossenen Gleichungen alsdenn nur für die Ausübung einen erheblichen Nutzen versprechen, wenn die um die Spindel gewundene Röhre eine sehr geringe Weite hätte. Wenn man aber weis, daß es eine gewöhnliche Maxime sey, diesen Röhren eine beträchtliche Weite zu geben, damit desto mehr Wasser zur Zeit durchfließen könne, so wird man alle Hofnung aufgeben, daß die auf sehr enge Röhren eingeschränkte Theorie hier mit erheblichem Nutzen angewandt werden könne.

Wenn die Wasserschraube inwendig nach Art einer Wendeltreppe eingerichtet ist, so etwa, wie man beym Leupold Zeichnungen davon antrift; so weicht ihre ganze inwendige Gestalt von derjenigen, welche die obige Rechnung voraussetzt, so sehr ab, daß ich gar keine Uebereinstimmung der auf sehr enge Röhren eingeschränkten Theorie erwarten würde, wenn auch alle Schwierigkeiten der Rechnung überwunden wären.

35. §.

Eben diese gewöhnliche Gestalt der Wasserschrauben, die von derjenigen, welche die obige Rechnung voraussetzt, so sehr abweicht, macht es mir begreiflich, woher er kömmt, daß eine solche Wasserschraube das Wasser zum Steigen bringen kann, wenn gleich die untere Mündung beym Umlauf beständig unter dem Wasser bleibt. Wenn eine enge Röhre schraubenförmig um die Spindel gewunden wäre, so würde nimmermehr das Wasser darinn in die Höhe steigen, weil Luft und Wasser in der engen Röhre einander nicht würden ausweichen können. Dies geschieht in weiten Röhren. Wenn das Wasser in der Röhre schon soweit gestiegen ist, daß es sich beym fernern Umlauf der Spindel über dem Wasserpaß desjenigen, woraus die Schraube schöpft, schon heben muß; so läuft es zwar weiter gegen die obere Mündung zu, aber nicht so, daß es bis an seine äußere Gränze den ganzen innern Raum der Röhre ausfüllt. Die vorderste Fläche desselben ist nicht auf der centrischen Röhre senkrecht, sondern horizontal, oder doch wenigstens beynahe horizontal. Es fließt so vorwärts, wie es in einer Rinne vorwärts fließen würde, und macht über sich der Luft Platz in die Röhre hineinzudringen. Auf solche Art söndert sich von dem beym ersten Umlauf hineingetretenen Wasser beym zweyten Umlauf soviel ab, als ohngefehr den wasserhaltenden Bogen im zweyten Schraubengang füllet. Eine solche Absönderung erfolgt bey jedem Umlauf, bis endlich das Wasser zur obern Mündung ausläuft. Demnach ist nie die ganze Schnecke voll Wasser, sondern von jedem Schraubengange nur soviel, als ohngefehr den wasserhaltenden Bogen ausmacht, und die Zwischenräume sind mit Luft angefüllt.

36. §.

Wenn ich nun dies alles erwäge, so dünkt mich, daß man immer mit der im Anfang dieses Aufsatzes vorgetragenen auf die Gesetze des Gleichgewichts gebaueten Pitotschen und bernoullischen Theorie von der Wasserschraube in der Ausübung zufrieden seyn könne. Wenn die Wasserschraube nur langsam umläuft, (und eine solche Einrichtung kann man der Maschine nach Vorschrift des 16. §. allemal geben) so denke ich, daß der Erfolg von dem Resultat, was die erwehnte Theorie giebt, so sehr nicht abweichen werde. Hierüber wären nun allerdings noch Versuche zu wünschen. Wenn ich Gelegenheit hätte, sie anzustellen, so würde ich es auf beyde Arten versuchen, sowohl bey einer gänzlichen Tiefe dec Grundfläche unter Wasser, wobey die untere Mündung beständig unter Wasser bleibt, als auch bey einer solchen Tiefe der Grundfläche unter Wasser, welche des H. Bernoulli Regel gemäß ist. Ich würde hauptsächlich auf den Umstand aufmerksam seyn, ob nicht bey sonst unveränderter Anordnung der Schraube, und einerley Umlaufsgeschwindigkeit, eine größere Wassermenge bey Beobachtung der bernoullischen Regel gehoben würde. Es scheint sehr natürlich zu seyn, daß nicht so viel Wasser bey jedem Umlauf in einerley Zeit aus einem Schraubengange in den andern hinüber treten kann, wenn Luft und Wasser einander ausweichen müssen, als in dem Fall, wenn die Luft durch die untere Mündung eintreten kann. Die Erfahrungen, welche ich aus des Herrn Hennerts Preisschrift oben im 31 und 32 §. schon angeführet

führet habe, sind, wie es scheint, bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter dem Wasser angestellt. Ich würde indessen zur Probe einige dieser Erfahrungen mit des H. Bernoulli Theorie vergleichen, wenn mir nicht verschiedene Zweifel entgegen stünden, ob auch wohl die im 31 §. angegebenen Zahlen für die Abmessungen der Schrauben alle richtig sind. Es kann vieleicht ein unrichtiger Abdruck meine Zweifel veranlassen: es können auch andre Ursachen hie und da ein Versehen bey der Angabe dieser Abmessungen zuwege gebracht haben. Einmal scheinen die Zahlen 35, 37, 36 Zoll, wofern sie wirklich die Halbmesser des Umfangs der Schraube bedeuten sollen, sehr groß zu seyn. Die Durchmesser hätten also auf 6 Fuß betragen, da doch Leupold im Theatro Machin. Hydraul. I Th. 72 §. 40 S. berichtet, daß man den größten Wasserschrauben in Holland nur 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser gebe. Das statische Moment des Widerstandes wird bey einem so grossen Durchmesser ungemein groß, zumal da die hennertischen Schrauben drey Schraubengänge von sehr beträchtlicher Weite gehabt haben. Ueberdem stimmen die erwähnten Zahlen auch nicht mit denjenigen überein, die Herr Hennert für die Winkel η, und die Entfernungen der Schraubengänge voneinander angiebt. Jene Winkel sollen $11°\ 55'$, $14°\ 42'$, und $11°\ 54'$, diese Entfernungen aber 23, 29, 24 Zoll betragen haben. Wenn aber a den Halbmesser, und e die Weite der Schraubengänge voneinander bedeutet, so wird $tang\ \eta = \frac{e}{2\pi a}$, also wäre für die erste Schraube $tang\ \eta = \frac{23}{220} = 0,1045$, und $\eta = 5°\ 58'$. Nehme ich dagegen $2a = 35$ Zoll an, so wird $tang\ \eta = 0,2091$, und $\eta = 11°\ 49'$, welches doch mit Herrn Hennerts Zahl beynahe übereinkömmt. Ich würde also dafür halten, daß nur aus einem Versehen rayons statt diametres geschrieben wäre:

allein alsdenn stimmen in der Tafel des 32 §. die ich dort aus der hennertischen Schrift mitgetheilet habe, die Winkelgeschwindigkeiten, und die Werthe von $2\sqrt{gk}$, oder α, welche H. Hennert für gleichgültig annimmt, nicht überein: also scheint es, daß man durch die Zahlen 23, 29, 24 Zoll nicht die ganze, sondern die halbe Entfernung der Schraubengänge voneinander verstehen müsse. Dies letztere scheint auch mit der Weite der Schraubengänge mehr überein zu kommen, deren drey um jede Schraube befindlich gewesen sind, und deren viereckte Oefnungen 1, 36; 1, 46; und 1, 41 Quadrat-Fuß weit angegeben werden. Für so weite Gänge wäre kein Platz gewesen, wenn die ganze Höhe eines Schraubenganges ohngefehr 2 Fuß bis $2\frac{1}{2}$ Fuß betragen hätte: oder man müßte die angegebenen Zahlen für die Summe aller dreyer Oefnungen an jeder Schraube verstehen. Wofern wirklich die Halbmesser der Schrauben 35, 37, 36 Zoll betragen haben, so muß ich voraussetzen, daß H. Hennert von der Axe der Spindel bis an die Mitte der Oefnungen der viereckten Gänge gemessen habe, wenn die Zahlen zur Rechnung brauchbar seyn sollen. Wäre dieses geschehen, so hätten die Schrauben bis an ihre äußere Gränze gemessen, mehr denn 7 Fuß im Durchmesser betragen, und dies ist doch wirklich eine sehr ungewöhnliche Weite. Bey dieser Ungewißheit scheint mir eine nähere Vergleichung der angegebenen Effecte mit der bernoullischen Theorie ohne Nutzen zu seyn. Der eigentliche Bau der bey diesen Erfahrungen gebrauchten Wasserschrauben müßte auch noch genauer beschrieben seyn, wenn man die Rechnung mit einiger Zuverläßigkeit darauf anwenden wollte. Vorjetzt schließe ich diese Abhandlung mit dem Vorsatz, die Untersuchung künftig wieder vorzunehmen, wenn ich andre meinem Wunsch gemässere Erfahrungen werde gesammelt haben.

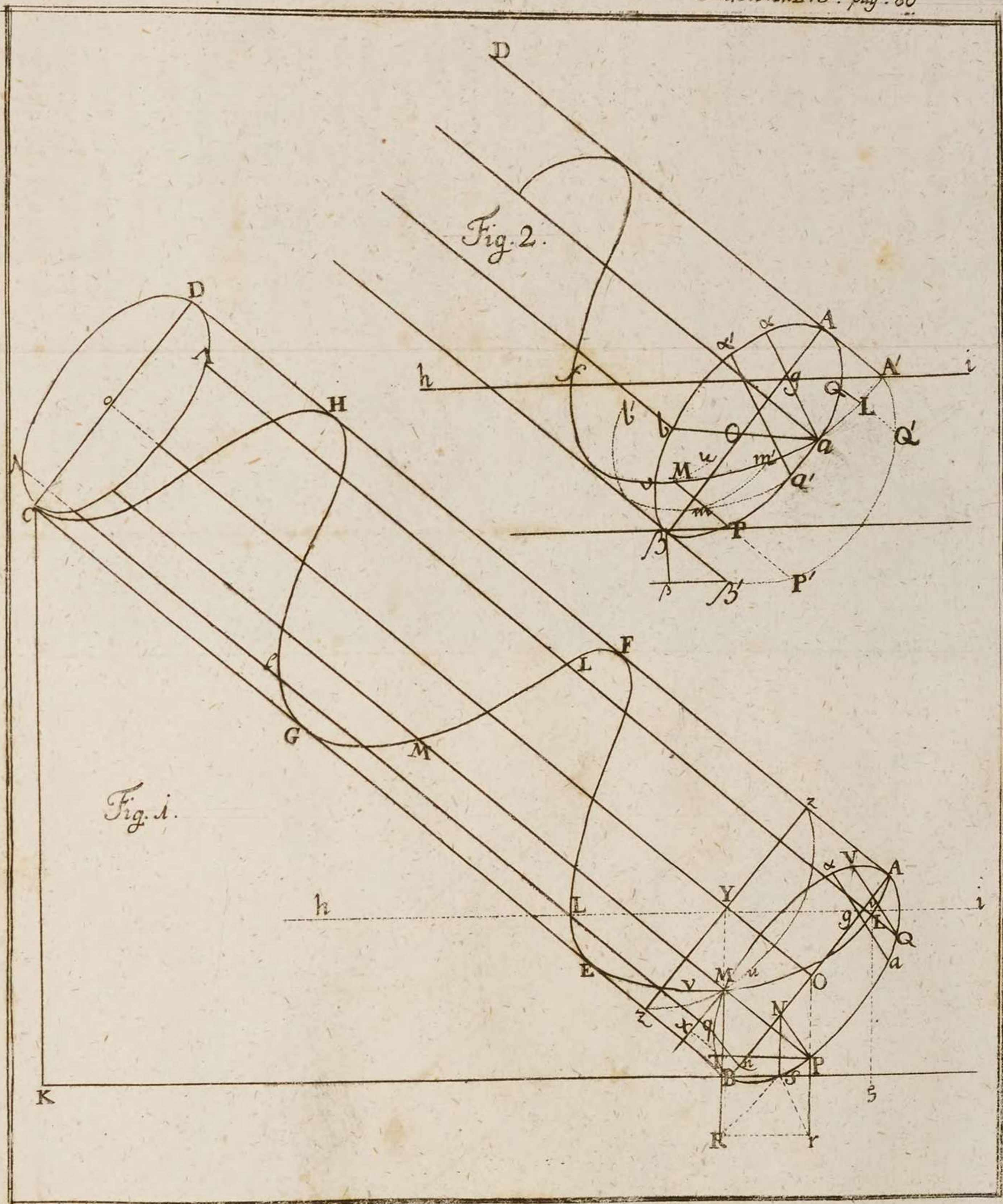
Fig. 2
Fig. 1