Abhandlung
über die
Theorie
der
Saugwerke.

von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten.

1768.

N

Theorie der Saugwerke.

1. §.

Es sind zweyerley Umstände in Betrachtung zu ziehen, wenn ein Saugwerk so vortheilhaft eingerichtet werden soll, als es in seiner Art seyn kann. Einmal wird erfordert, daß das Wasser in der Saugröhre nicht etwa in einer gewissen Höhe, der fernern Bewegung des Kolbens ungeachtet, hängen bleibe, sondern wirklich nach einigen Kolbenzügen bis in den Stiefel, und endlich bis zur größten Höhe des Kolbens hinauf steige. Fürs zweyte muß das Saugwerk hiernächst ohne Zeitverlust bey jedem Kolbenhub soviel Wasser geben, als der ganze Raum des Kolbenzuges im Stiefel fassen kann. Um diese beyden Stücke mit der gehörigen Deutlichkeit zu unterscheiden, muß man sich vorstellen, daß anfangs noch die ganze Saugröhre ledig sey, und das Wasser in derselben nur so hoch stehe, als in demjenigen Behälter, aus welchem es das Saugwerk herauf ziehen soll. Beym ersten Kolbenzuge wird nun das Wasser in der Saugröhre auf eine gewisse Höhe steigen: beym zweyten Kolbenzuge etwas höher: beym dritten Kolbenzuge wiederum etwas höher, und so ferner. Wenn sich die Einrichtung so machen ließe, daß der Kolben in seinem niedrigsten Stande an den Boden des Stifels, und das daselbst befindliche Ventil genau anschlösse; so würde das Wasser allemal bis in den Stiefel treten, und bis zur höchsten Stelle des Kolbens gehoben werden, dafern anders die größte Kolbenhöhe über die Oberfläche des Wassers, welches das Saugwerk heraufziehen soll, nicht über 32. rheinische Fuß beträgt. In allen andern Fällen, wo zwischen dem Kolben in seinem niedrigsten Stande, und dem Boden des Stiefels ein Zwischenraum bleibt, wird die in demselben zurück bleibende Luft dem in der Saugröhre hinauf steigenden Wasser desto mehr hinderlich seyn, je grösser dieser Zwischenraum ist. Er heißt deswegen **der schädliche Raum**, und das Saugwerk ist desto vollkommener, je kleiner dieser schädliche Raum ist. Wenn man das Pumpenventil nicht im Boden des Stiefels, sondern irgendwo in der Saugröhre anbringen wollte, so würde man hiedurch den schädlichen Raum vergrössern, und dies destomehr, je niedriger das Ventil in der Saugröhre angebracht würde. Die allerunvollkommenste Pumpe würde also diejenige seyn, welche ihr Ventil nicht am obersten, sondern am untersten Ende der Saugröhre hätte. Man kann demnach alle Arten von Saugwerken in folgende drey Classen bringen. Eine **Pumpe der vollkommensten Art** hat ihr Ventil oben an der Saugröhre, und gar keinen schädlichen Raum. Eine **Pumpe der unvollkommensten Art** hat ihr Ventil unten an der Saugröhre. Eine **Pumpe von mittlerer Art** hat zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre, aber zwischen dem Kolben und dem unten im Stiefel befindlichen Ventil einen schädlichen Raum. **Belidor** hat in der Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 913. §. ebenfalls diese drey Arten der Saugwerke von einander unterschieden.

2. §.

2. §.

Diese Betrachtungen betreffen inzwischen nur noch die nöthige Vollkommenheit des Saugwerks in Ansehung des ersten vorhin erwähnten Umstandes, nämlich in Ansehung der anfänglichen Bewegung des Wassers in der Saugröhre, bevor es den Kolben im Stiefel erreicht. Sobald es bis an denselben gelangt ist, wird es ihm hiernächst beständig folgen, und die Atmosphäre kann es bis zur größten Kolbenhöhe hinauf treiben, wenn diese nicht über 32 rheinische Fuß beträgt. Geschieht dies wirklich bey jedem Kolbenzuge, so wird die Pumpe bey jedem Hub soviel Wasser geben, als den körperlichen Raum des Kolbenzuges ausfüllen kann. Allein man siehet wohl, daß eine gewisse Zeit nöthig sey, bevor das Wasser vom niedrigsten bis zum höchsten Kolbenstande hinauf steigen kann. Wofern der Kolben von seiner niedrigsten Stelle bis zur höchsten in jedem Augenblick mit eben derselben Geschwindigkeit stiege, womit das Wasser im Stiefel hinauf steigt; so würde das Wasser demselben beständig unmittelbar nachfolgen, ohne daß zwischen beyden ein leerer Zwischenraum bliebe. Falls aber der Kolben schneller stiege, als das Wasser folgen kann, so würde zwischen beyden ein leerer Raum bleiben, und in dem Augenblick, da der Kolben in seiner höchsten Stelle schon wieder umkehret, würde der Raum des Kolbenzuges noch nicht mit Wasser angefüllet seyn: also würde auch nicht auf jeden Kolbenzug soviel Wasser gehoben werden, als die Vollkommenheit des Saugwerks erfordert. Stiege der Kolben nicht so geschwinde, als das Wasser für sich steigen kann; so würde zwar jeder Kolbenhub soviel Wasser geben, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann: allein es würde mehr Zeit darüber hingehen, als nöthig wäre, wenn der Pumpenkolben mit dem Wasser gleich schnell stiege. Nun ist leicht abzusehen, daß das Wasser nicht beständig mit gleicher

Geschwindigkeit steigen werde, und die folgenden Untersuchungen werden ergeben, daß es mit beschleunigter Bewegung bis zum höchsten Kolbenstande steige, dafern der Kolben es nicht aufhält. Vermittels der gewöhnlichen mechanischen Einrichtungen aber, welche den Kolben zu bewegen dienen, läßt sich demselben nicht wohl eine andre, als gleichförmige Bewegung mittheilen. Deßwegen muß die Einrichtung so gemacht werden, daß der Kolben in eben der Zeit die Höhe des Kolbenzuges durchlaufe, worinn das Wasser im Stiefel um eben diese Höhe steigt. Zwar wird alsdenn beym ersten Anfang der Bewegung des Kolbens zwischen demselben und dem Wasser ein leerer Raum entstehen, weil nun der Kolben anfangs schneller, als das Wasser steigt. Allein in dem Augenblick, da der Kolben seine höchste Stelle erreicht, wird das Wasser den Kolben eingeholet haben, und der ganze Raum des Kolbenzuges mit Wasser angefüllet seyn. Diese Betrachtungen ergeben, daß es bey gegenwärtiger Untersuchung über die Geschwindigkeit, womit der Kolben bewegt werden muß, vornehmlich darauf ankommen werde, zu wissen, mit welcher Geschwindigkeit das Wasser in jedem Augenblick in dem Stiefel hinauf steigen würde, wenn es sich selbst frey überlassen in dem luftleeren Raum des Stiefels hinauf stiege, ohne durch den Kolben im geringsten gehindert zu werden. Die Untersuchung sowohl hierüber, als auch die im 1 §. erwähnte sollen nun nacheinander folgen.

Untersuchung
über die anfängliche Bewegung des Wassers in der Saugröhre, und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht.

3. §.

Die Abmessungen des Stiefels (1. Fig.) und der Saugröhre einer Pumpe der vollkommensten Art (1 §.) sind gegeben, nebst der Höhe des Stiefel Ventils B über den Wasserpaß YZ, und der Höhe AB des Kolbenhubs: man fragt, wie hoch das Wasser nach dem ersten Kolbenhub in die Saugröhre hinein treten wird.

Aufl. Es sey die Höhe BZ des Stiefelventils über den Wasserpaß $= b$, so ist hier zugleich b die kleinste Höhe des Kolbens, oder die Höhe der Saugröhre, so weit sie über dem Wasserpaß YZ hervorraget. Ferner sey die Höhe des Kolbenhubs $AB = c$, die größte Höhe des Kolbens $AZ = a$, so ist $a = b + c$. Jeder Querschnitt des Stiefels sey $= m$, und jeder Querschnitt der Saugröhre $= n$; so ist der Innhalt der Saugröhre $= nb$ (so weit sie nämlich über dem Wasser YZ hervorragt, welches hier allemal verstanden wird) und diesen Raum füllt die natürliche Luft aus, bevor der Kolben das erstemal zu steigen anfängt. Der Innhalt des Stiefels bis an die höchste Stelle A, so die Grundfläche des Kolbens erreicht, ist $= mc$. Wenn also das Wasser in der Saugröhre während des ersten Kolbenzuges um die Höhe $ZX = x$ steigt; so füllt die nach dem ersten Zug noch übrige innere Luft den Raum $AB + BZ - ZX = mc + n(b - x)$ aus. Die Federkraft der in diesem Raum nunmehr ausgebreiteten Luft sey $= h'$, und die natürliche Federkraft der Atmosphäre $= h$, so daß

durch

durch jeden dieser Buchstaben die Höhe einer Wassersäule verstanden wird, der die Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält: so hat man $h' = \frac{nbh}{mc+n(b-x)}$, und $k = h' + x$, also $x = k - \frac{nbh}{mc+n(b-x)}$. Hieraus folgt $nx - (mc + nb + nh)\,x = - mck$, und $X = \frac{1}{2}.\,(\frac{m}{n}c + b + h) \pm \surd\,(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n} + b + h^2) - \frac{mch}{n})$.

Dafern Stiefel und Saugröhre gleich weit sind, also $m = n$ ist, so hat man $x = \frac{1}{2}(a + h) \pm \surd\,(\frac{1}{4}(a + h^2 - ch)$, weil $b + c = a$ ist. Man kann diese Gleichung als eine allgemeine Formul betrachten, die sich auf alle Fälle, auch wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit sind, anwenden läßt, wenn man durch C nicht die wirkliche Höhe des Kolbenzuges versteht, sondern die sogenannte auf die Mündung der Saugröhre reducirte Höhe desselben. Wenn nämlich statt des Stiefels, dessen Querschnitt $= m$ ist, ein andrer gebraucht würde, der eben so weit als die Saugröhre wäre, so müßte der Kolben um die Höhe $\frac{mc}{n}$ gehoben werden, wenn bey jedem Zuge eben soviel Luft aus der Saugröhre in den Stiefel treten sollte, als in dem vorigen Fall. Man ist gewohnt, statt des gegebenen Saugwerks das reducirte zu betrachten, und man nimmt alsdenn an, wenn beyde Saugröhren gleich hoch sind, daß das Wasser in dem reducirten Saugwerk eben so steige, wie in dem natürlichen, und wendet deßwegen die Rechnungen bloß auf das reducirte Saugwerk an. Diese Voraussetzung hat, wie man leicht siehet, ihre Richtigkeit, so lange das Wasser die Höhe der Saugröhre noch nicht überstiegen hat. Sobald dies letztere erfolgt ist, leidet sie ihre Einschränkungen, wie die folgenden Untersuchungen ergeben werden.

4. §.

4. §.

Dafern während des zweyten Kolbenzuges das Wasser von Z bis W steigt, so läßt sich auf eben die Art XW = Y finden. Was vorhin $b - x$ war, sey jetzt $= \beta$, und die Federkraft der innern Luft nach dem zweyten Zuge $= h''$; so ist $mc + n\ (\beta - y) : n\beta = h' : h''$, und $h'' = h' - y$, folglich wird $y = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{n} + \beta + h' \right) \pm \surd \left(\frac{1}{4} \left(\frac{mc}{n} + \beta + h'^2 \right) - \frac{mch'}{n} \right)$. Man wird leicht abnehmen, daß bey der wirklichen Berechnung der Werthe von X und Y vor der Wurzelgröße das Zeichen (—) genommen werden müsse, weil das Wasser stehen bleiben wird, wenn es die niedrigste von den beyden Höhen erreicht hat, die der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man ZW $= x + y = z$, so wird $\beta - y = b - z$, und $h'' = h - z$, also $mc + n\ (b - z) : n\beta = h' : h - z$, woraus $(mc + n\ (b - z)\ (h - z) = n\beta h'$ folgt, also $z = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{n} + b + h \right) - \surd \left(\frac{1}{4} \left(\frac{mc}{n} + b + h^2 \right) - \frac{mch}{n} - (6h - \beta h) \right.$ oder $z = \frac{1}{2}(a + h) - \surd \left(\frac{1}{4}(a + h^2) - ch - (bh - \beta h') \right.$, wenn $m = n$ ist.

Es sey $a = 16$ Fuß und $b = 12$ Fuß, also $c = 4$ Fuß, und $h = 32$ Fuß, $m = n$; so wird $x = 2,\ 834$, und $z = 5,798$. Muschenbroeck hat dies Exempel in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2124. und er bringt für den ersten Kolbenzug eben die Höhe x heraus: allein die folgenden Kolbenzüge findet er nicht so, wie sie nach gegenwärtiger Rechnung heraus kommen. Die für x gefundene Gleichung läßt sich, wenn $m = n$ ist, so ausdrücken: $\frac{b}{a - x} + \frac{x}{h} = 1$, und eben den Ausdruck hat Muschenbroeck. Hieraus schließt er, man finde die Gleichung für z, wenn in jener z statt x, und β statt b gesetzt werde. Dies giebt $\frac{\beta}{a-z} + \frac{z}{h} = 1$. Allein hiebey hat Muschenbroeck ohne Zweifel eine Pumpe der unvollkommensten Art in Gedanken gehabt, ob es gleich scheint, daß er die Pumpe der vollkommensten Art verstehe, auch seine Zeichnung grade diese letztere, oder doch wenigstens die mittlere Art vorstellig macht. Es wäre dies sonst keineswegs eine richtige Anwendung der für x gefundenen Gleichung. Wenn man diese Gleichung so ausdrückt, $\frac{b\,h}{a-x} = h - x$: so siehet man deutlicher, wie sie verändert werden muß, wenn z statt x gesetzt wird. Es ist nämlich $\frac{b\,h}{a-x}$ die Federkraft der in dem Raum $a - x$ ausgebreiteten Luft, deren Federkraft, da sie noch den Raum b füllte, $= h$ war; überdem ist $h - x$ der Druck, womit die äußere Atmosphäre die Wassersäule x aufwärts preßt, und beyde müssen gleich seyn. Nun aber ist beym Anfang des zweyten Kolbenzuges die in dem Raum β eingeschlossene Luft nicht $= h$, sondern $= h'$, und der Druck, womit die Atmosphäre die Wassersäule z aufwärts preßt, ist $= h - z$. Daher wird $\frac{\beta\,h'}{a-z} = h - z$, welches die vorhin für z gefundene Gleichung ist, wenn man $m = n$ setzt. Uebrigens ist die Gleichung $Y = \frac{1}{2}\left(\frac{m\,c}{n} + \beta + h'\right) - \surd\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m\,c}{n} + \beta + h'^2\right) - \frac{m\,c\,h'}{n}\right)$ am bequemsten, wenn man berechnen will, um wieviel das Wasser bey jedem folgenden Kolbenzug steige. Wenn nämlich jedesmal durch β die Höhe des in der Saugröhre noch mit Luft gefüllten Raums, und durch h' die Dichtigkeit dieser Luft verstanden wird, so ist y dasjenige Stück, um welches

beym

beym folgenden Kolbenzuge die Höhe des Wassers in der Saugröhre zunimmt. Das vorige Exempel giebt folgende Resultate.

Anzahl der Kolbenzüge.	Der Werth von y	Höhe des Wassers in der Saugröhre.
1	2, 838	2, 834
2	2, 964	5, 798
3	3, 152	8, 950
4	3, 462	12, 412

Daraus ergiebt sich, daß das Wasser nach dem vierten Kolbenzuge schon in den Stiefel hinein trete. Also wird es der fünfte Kolbenzug schon bis an die höchste Stelle heben können, die der Kolben erreicht: und wenn die Gußröhre nahe über diese Stelle angebracht ist; so wird es beym sechsten Kolbenzuge schon zur Gußröhre heraus laufen.

5. §.

Diese Rechnung setzte voraus, daß Stiefel und Saugröhre von gleicher Weite sind. Allein die gebrauchte Gleichung findet, wie schon erinnert worden, nur so lange ihre Anwendung, als die Höhe des heraufsteigenden Wassers die Höhe der Saugröhre nicht übertrift, wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit sind. Dies ergiebt sich sogleich, wenn man auf die zum Grunde liegende Proportion $mc + n(b - x) : nb = h : h - x$ zurück gehet. Das erste Glied drückt den Raum aus, den die Luft ausfüllt, in dem Augenblick, da der Kolben das erstemal seine höchste Stelle erreicht hat: aber in der Voraussetzung, daß das Wasser nur bis an X (1. Fig.) in der Saugröhre gestiegen sey. Wäre es, wie in der zweyten Figur bis an X in den Stiefel gestiegen, so wäre der Raum, den die verdünnte Luft einnimmt, $= mc - m.BX$. Wenn demnach nun $BX = u$ gesetzt wird, so erhält man $m(c - u) : nb = h : h - b - u$, also wird $m(c - u)(h - b - u) = nbh$. Weil nun $b + u$ das ist, was vorhin x

hieß, so hat man auch $(a-x)(h-x)=\frac{nbh}{m}$, und dies giebt $x^2-(a+h)x=\frac{nbh}{m}-ah$, woraus nun $x=\frac{1}{2}(a+h)-\sqrt{(\frac{1}{4}(a+h^2)-(a-\frac{nb}{m})h)}$ folgt. Wenn $m=n$ ist, so kömmt diese Gleichung mit der vorigen überein, wie erfordert wird. Man wendet diese Rechnung leicht auf den Fall an, wenn dies nicht der erste Kolbenzug, sondern einer der folgenden ist, wobey das Wasser in den Stiefel tritt. War die Höhe des Wassers in der Saugröhre $=z$, die Höhe ihres noch ledigen Theils $b-z=\beta$, die Dichtigkeit oder Federkraft der darinn eingeschlossenen Luft $=h'$; so hat man $m(c-u):n\beta=h':h-b-u$, oder $(a-x)(h-x)=\frac{n\beta h'}{m}$, woraus $x=\frac{1}{2}(a+h)-\sqrt{(\frac{1}{4}(a+h^2)-ah-\frac{nb}{m}h')}$ folgt.

6. §.

Die Abmessungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der unvollkommensten Art sind gegeben, nebst der Höhe des Kolbenzuges: man fragt, wie hoch das Wasser nach dem ersten sowohl, als den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Beym ersten Kolbenzuge tritt das Wasser auf einerley Höhe, es mag das Ventil oben oder unten an der Saugröhre angebracht seyn, und die Pumpe zur vollkommensten oder unvollkommensten Art gehören, dafern anders alle Abmessungen beyder Arten einerley sind. Es ist nämlich in beyden Fällen anfangs die ganze Saugröhre mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet, die also den Raum nb einnimmt. Steigt nun beym ersten Kolbenzuge das Wasser auf die Höhe (1. Fig.) $ZX = x$, so wird die Luft in den Raum $mc + n(b - x)$ ausgebreitet, so daß ihre Federkraft $= \frac{nb}{mc + n(b - x)} . h$ wird, und diese muß $= h - x$ seyn, wie im 3 §. Beym zweyten und den folgenden Kolbenzügen aber sind beyde erwähnte Fälle gar sehr verschieden. Indem nämlich der Kolben wieder bis zur niedrigsten Stelle herab steigt, drückt er die Luft bis auf ihre natürliche Dichtigkeit zusammen, uud soviel, als vorhin den Raum nx ausfüllte, tritt nur durch das Kolbenventil hinaus. Die übrige bleibt in dem Raum $BX = n(b - x) = n\beta$ eingeschlossen, und diese behält ihre natürliche Dichtigkeit, statt dessen, daß bey der Pumpe der vollkommensten Art die in diesem Raum zurück bleibende Luft nur die Federkraft $\frac{nb}{mc + n(b - x)}, h = h'$ behält. Wenn nun beym zweyten Kolbenzuge das Wasser bis W steigt, und $ZW = z$ ist; so breitet sich die in dem Raum $n\beta$ vorhin zurück gebliebene natürliche Luft in den Raum $mc + n(b - z)$ aus, und ihre Federkraft wird $= \frac{n\beta h}{mc + n(b - z)}$, die nun $= h - z$ seyn muß, so daß man die Gleichung $\frac{n\beta h}{mc + n(b - z)} = h - z$ erhält. Bey der vollkommensten Art der Pumpe hätte man $\frac{n\beta h'}{mc + n(b - z)} = h - z$, wie im 4. §. Im gegenwärtigen Falle also wird $z - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + b + h\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + b + h^2\right) - \left(\frac{mc}{n} + b - \beta\right) h\right)}$, und man darf in der für den ersten Kolbenzug gefundenen Gleichung nur z statt x und β statt b schreiben, wenn man $\frac{mc}{n} + b = a$ setzt.

Wenn man hiemit dasjenige verbindet, was im 4 §. in Absicht der Muschenbroeckischen Rechnung für die Höhen, worauf das Wasser bey wiederholten Kolbenzügen steigt, ist erinnert worden, so ergiebt sich augenscheinlich, daß die gedachten Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, und Muschenbroecks Rechnung nur für die Pumpe der unvollkommensten Art gelte. Bey dieser Art Pumpen wird also das Wasser nicht ehe bis in den Stiefel steigen können, bevor alle Luft aus der Saugröhre heraus getreten ist. Falls die Luft nicht insgesammt heraus treten kann, so wird das Wasser nur bis zu einer bestimmten Höhe in der Saugröhre gelangen, und hiernächst unbeweglich stehen bleiben, es mag die Bewegung des Kolbens, so lange man will, fortgesetzet werden.

7. §.

Die Umstände zu finden, unter welchen das Wasser entweder wirklich bis in den Stiefel treten wird, oder nur bis zu einer bestimmten Höhe in der Saugröhre gebracht werden kann, wenn die Pumpe zur unvollkommensten Art gehört.

Aufl. Es sey (1. Fig.) ZV $= x$ die größte Höhe, auf welche das Wasser gebracht werden kann, so ist beym niedrigsten Stande des Kolbens die zurückgebliebene Luft in dem Raum BV $= n\,(b - x)$ eingeschlossen, und ihre Federkraft ist so groß, als die natürliche Federkraft der Atmosphäre. Beym höchsten Kolbenstande ist eben diese Menge Luft in den Raum $mc + n\,(b - x)$ ausgebreitet, also ist in diesem Zustande ihre Federkraft $= \frac{n\,(b - x)\,h}{mc + n\,(b - x)}$. Wenn nun diese $= h - x$ ist, so kann das Wasser nicht mehr steigen, und dies erfordert die Voraussetzung, vermöge welcher x die größte Höhe seyn soll, die das Wasser erreichen kann. Diese wird demnach durch die Gleichung

chung $\frac{n(b-x)h}{mc+n(b-x)} = h - x$ bestimmt, und diese Gleichung giebt $x^2 - (\frac{mc}{n} + b)x = -\frac{mch}{n}$, also $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b) - \surd(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n} + b)^2 - \frac{mch}{n})$, da dann vor dem Wurzelzeichen das Zeichen (—) gebraucht werden muß, weil das Wasser in der kleinsten von den beyden Höhen stehen bleiben wird, die der Gleichung ein Genüge thun.

Es ist demnach diese größte Höhe allemal kleiner als $\frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b)$, also kleiner als die halbe Summe der Höhe der Saugröhre, und der auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhe des Kolbenzuges. Nur in dem Fall, wenn $\frac{1}{4}\frac{mc}{n} + b)^2 = \frac{mch}{n}$ ist, erreicht das Wasser völlig die Höhe $= \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b)$, welches also die halbe größte Höhe des Kolbens in dem Fall ist, wenn Stiefel und Saugröhre gleich weit sind. Setzt man Kürze halber $\frac{mc}{n} + b = a$, und $\frac{nc}{m} = \mathrm{C}$, so hat man $x = \frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 - \mathrm{C}h)$.

Wenn $\mathrm{C}h > \frac{1}{4}a^2$ ist, so giebt es für x keinen möglichen Werth, also giebt es auch gar keine Stelle in der Saugröhre, wo das Wasser stehen bleiben könnte. Dies ist folglich der Fall, wo das Wasser bis in den Stiefel treten wird, und der Ausdruck $2\surd\mathrm{C}h > a$, oder $2\surd\mathrm{C}h > \mathrm{C} + b$ bestimmt die Umstände, unter welcher dies erfolgen muß. Wenn demnach von den beyden Stücken b und C des Saugwerks eins gegeben ist, so ergiebt der gefundene Ausdruck, wie groß das andre genommen werden müsse,

damit

damit das Wasser bis in den Stiefel steige, und hiernächst vermittels des Kolbens bis zur Gußröhre gehoben werden könne. Man erhält nämlich $b < 2\sqrt{Ch} - C$, und $C > \frac{aa}{4h}$. Wenn also b gegeben ist, so muß C so genommen werden, daß $\varrho' > (\frac{\varrho' + b}{4h})^2$ bleibt. Falls dieser Bedingung kein Genüge geschehen kann, so muß b kleiner genommen werden.

Man findet beym Muschenbroek a. a. O. im 2131 — 2134. §. auf der 870 und 871 S. eben diese Sätze: sie sind aber bey ihm zu allgemein ausgedrückt, so daß es scheint, er wolle sie auch auf Pumpen der mittlern Art angewandt wissen, welches aber keineswegs geschehen darf, wie die folgenden Untersuchungen ergeben werden.

8. §.

Die Grösse des schädlichen Raums, nebst den übrigen Abmessungen einer Pumpe der mittlern Art sind gegeben; man sucht, wie hoch das Wasser sowohl nach dem ersten, als auch den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Es sey (1. Fig.) A die höchste, und C die niedrigste Stelle des Kolbens. Die größte Höhe des Kolbens über die Fläche des Wassers YZ sey $= a$, die Höhe der Saugröhre $= b$, die Höhe des schädlichen Raums BC $= f$, und sein körperlicher Innhalt $= k^3$, so ist $b + f + c = a$. Die Querschnitte des Stiefels und der Saugröhre bleiben m und n. Nun erhellet, daß beym ersten Kolbenzuge die in dem schädlichen Raum befindliche Luft sich ausbreiten, also auch der in der Saugröhre befindlichen Luft, die anfangs noch die natürliche Federkraft h besitzt, gestatten werde, de, die Klappe B aufzustossen, und zum Theil in den Stiefel zu treten. Es sey $ZX = x$ die Höhe, worauf das Wasser bey diesem ersten Kolbenzuge steigt, so breitet sich diejenige Luft, welche vorhin den Raum $nb + k^3$ füllte, nun in den Raum $mc + k^3 + n(b - x)$ aus, also wird ihre Federkraft $= \frac{nb + k^3}{mc + k^3 + n(b - x)} . h$, und diese muß $= h - x$ seyn. Hieraus folgt $x^2 - (\frac{mc + k^3}{n} + b + h)\, x = - \frac{mch}{n}$, und man erhält $x = \frac{1}{2} (\frac{mc + k^3}{n} + b + h) - \sqrt{(\frac{1}{4}.(\frac{mc + k^3}{n} + b + h)^2 - \frac{mch}{n})}$.

Wird nun der Kolben niedergedrückt, und dadurch die im Stiefel befindliche Luft verdichtet, so drückt diese Luft zwar sogleich das Stiefel-Ventil zu: sie kann aber das Kolben-Ventil nicht aufstossen, bevor ihre Federkraft anfängt, die Federkraft der äußern Luft zu übertreffen. Gesetzt dies erfolgt allererst, wenn der Kolben bis in M zurück getreten ist; so wird derjenige Theil Luft, der zwischen C und M enthalten ist, und mit der äußern gleiche Dichtigkeit hat, bey der noch übrigen Bewegung des Kolbens durch das Kolben-Ventil hinaus treten. Der schädliche Raum wird mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet bleiben, da im Gegentheil die Federkraft der in der Saugröhre zurückgebliebenen und in den Raum $n(b - x)$ ausgebreiteten Luft $= h - x = h'$ ist. Demnach wird sich beym zweyten Kolbenzuge das Ventil B nicht sogleich öfnen, sondern alsdann allererst, wenn die Federkraft der im Raum BC zurückgebliebenen, und sich nun wieder ausdehnenden Luft anfängt, kleiner als h' zu werden. Gesetzt dies erfolgt, wenn der Kolben bis L gestiegen ist, so wird der Raum zwischen B und $L = \frac{h}{h'} k^3$ seyn. Um also $XW = Y$ zu finden, d. i. die Höhe, um welche das Wasser in der Saugröhre beym zweyten Kolbenzuge steigt, muß man die Proportion zum Grunde legen: $mc + k^3 + n(\beta = Y) : n\beta + \frac{h}{h'} k^3 = h' : h' - Y$, da dann wie im §. $\beta = b - x$ ist. Es folgt hieraus die Gleichung

$$Y^2 - \left(\frac{mc + k^3}{n} + \beta + h'\right) Y = \frac{(h - h')k^3}{n} - \frac{mch'}{n}.$$

Daraus wird der Werth von Y leicht gefunden, und man kann hiernächst auf ähnliche Art suchen, um wieviel das Wasser beym dritten, und den folgenden Kolbenzügen steigt.

9. §.

Wenn die Grösse des schädlichen Raums k^3, nebst den übrigen Abmessungen der Pumpe gegeben ist; die größte Höhe zu finden, worauf das Wasser in der Saugröhre steigen kann.

Aufl. Wäre gar kein schädlicher Raum vorhanden, so müßte das Wasser so hoch steigen können, als die Atmosphäre es zu tragen vermag, also ohngefehr 32. rheinische Fuß hoch. Diese Höhe aber wird das Wasser nicht erreichen können, wenn ein schädlicher Raum vorhanden ist. Das Wasser wird nur so lange zu steigen fortfahren, bis die in der Saugröhre darüber stehende Luft so weit verdünnet ist, daß der Kolben bis zu seiner größten Höhe hinauf gezogen werden müßte, wenn die im schädlichen Raum befindliche Luft auf eben den Grad verdünnet werden sollte. Sobald nämlich die Luft in diesen Zustand gekommen ist, kann aus der Saugröhre keine Luft mehr in den Stiefel, auch aus dem Stiefel nichts mehr durch das Kolbenventil in die freye Luft treten. In diesem Zustande ist also die Federkraft der innern Luft $= \frac{k^3}{mc + k^3} h$. Wenn demnach x die größte Höhe ist, die das

Wasser

Wasser erreichen kann, so muß $\frac{k^3}{mc+k^3}.h = h - x$ seyn, folglich ist $x = \frac{mc}{mc+k^3}.h$. Eben die Gleichung läßt sich auch so ausdrücken $x = \frac{mc:n}{mc:n+k^3:n}.h$, da dann $mc:n$, und $k^3:n$ die auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des schädlichen Raums sind. Verstehet man also durch C und F diese reducirten Höhen, so hat man $x = \frac{C}{C+F}.h$. Dieser Ausdruck kömmt alsdenn völlig mit Belidors Auflösung überein. Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 928. §.

Ich muß hiebey eine ähnliche Erinnerung, wie im 3. §. machen. Belidor und andre Schriftsteller reduciren auch hier allemal die Höhen des schädlichen Raums und des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre, und betrachten statt des eigentlich gegebenen Saugwerks das auf solche Art reducirte. So lange die Höhe des Wassers die Höhe der Saugröhre selbst nicht übertrift, steigt das Wasser in dem einen Saugwerk so hoch als in dem andern, und was für das reducirte Saugwerk gefunden ist, läßt sich ohne Einschränkung auf das andre anwenden. Allein, sobald das Wasser über die Saugröhre weg in den Stiefel getreten ist, leidet dies seine Ausnahmen.

Dafern die Saugröhre grade die Höhe hätte, welche die Gleichung $x = \frac{C}{C+F}h$ bestimmt, so würde das Wasser zwar bis an das Stiefel-Ventil gehoben werden, keineswegs aber bis in den Stiefel hineintreten können. Weil aus der erwähnten Gleichung jede von den dreyen Größen x, C, F, gefunden werden kann, wenn zwey davon gegeben sind, so läßt sich die Einrichtung allemal so machen, daß der erwähnten Bedingung ein Genüge geschehe, daß nämlich das Wasser endlich bis an das Stiefel-Ventil gehoben werde.

Nimmt man die Höhe der Saugröhre kleiner als $x = \frac{mc}{mc + k^3} \cdot h$, so wird das Wasser endlich in den Stiefel treten, und sobald dies erfolgt ist, wird bey fortwährendem Spielen des Kolbens wenigstens ein Theil der in dem schädlichen Raum bisher zurückgebliebenen Luft durch das Kolben-Ventil heraus treten. Indessen kann doch das Wasser nicht bis an die niedrigste Stelle des Kolbens steigen, also auch nicht durchs Kolben-Ventil treten, uud bis zur Guß-Röhre gehoben werden, bevor alle Luft aus dem schädlichen Raum herausgetreten ist. Dafern dies nicht endlich erfolgen kann, so wird das Wasser nur bis zu einer bestimmten Höhe im Stiefel gelangen, und in dieser Höhe unbeweglich stehen bleiben, es mag hiernächst die Bewegung des Kolbens, so lange man will, fortgesetzt werden.

10. §.

Die größte Höhe zu finden, auf welche das Wasser in dem Stiefel steigen kann, falls nicht endlich alle Luft aus dem schädlichen Raum heraustritt.

Aufl. Es sey (1. Fig.) ZN die größte Höhe, die das Wasser erreichen kann, von der untern Wasserfläche ZY angerechnet, und $BN = s$ die Höhe desselben über das Stiefel-Ventil. Wenn nun der schädliche Raum die Gestalt eines Cylinders hat, dessen Höhe $= f$, und jeder Querschnitt $= r$ ist; so wird $k^3 = rf$, und beym niedrigsten Stande des Kolbens ist der Raum $CN = r(f - s)$ mit Luft von natürlicher Dichtigkeit ausgefüllt. Diese

breitet

breitet sich, indem der Kolben bis A steigt, in den Raum $AN = mc + r(f - s)$ aus, folglich wird in diesem verdünnten Zustande ihre Federkraft $= \frac{r(f-s)}{mc + r(f-s)} h$. Diese muß nun $= h - b - s$ seyn. Beyde Werthe gleich gesetzt geben die Gleichung

$s^2 + (b - f - (\frac{mc}{r}) s = (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mc}{r} h$, also $s = \frac{1}{2}$

$(\frac{mc}{r} + f - b) \pm \surd (\frac{1}{4} \frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r})$,

oder $s = \frac{1}{2} (\frac{mc}{r} + f - b) \pm \surd \frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f + b)^2 - \frac{mch}{n}$.

Vermöge der Voraussetzung ist das Wasser schon bis in den Stiefel getreten, deswegen ist nothwendig $b < \frac{mch}{mc + k^3}$ (9. §.) oder $b < \frac{mch : r}{mc : r + f}$, weil hier $k^3 : r = f$ ist. Demnach ist auch $(\frac{mc}{r} + f) b < \frac{mch : r}{r}$, folglich $\surd (\frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r}) < (\frac{1}{2} \frac{mc}{r} + f - b)$. Wenn also $\frac{mc}{r} + f > b$ ist, so sind beyde Werthe von s positiv, und der kleinste von beyden muß hier gebraucht werden, wie leicht in die Augen fällt. Dafern aber $\frac{mc}{r} + f < b$ ist, so werden alle beyde Werthe von s negativ, und davon kann keiner statt haben. Denn das Wasser ist nun über alle beyde Stellen, wo es hängen bleiben könnte, schon hinüber.

11. §.

Hieraus lassen sich zugleich die Umstände schließen, unter welchen das Wasser entweder einmal über das Kolbenventil hinauf treten, oder nur bis zu einer bestimmten Höhe im schädlichen Raum gehoben werden kann, wenn das Saugwerk zur mittlern Art gehört. Unter den beyden Bedingungen, daß $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ und zugleich $\frac{mc}{r} + f < b$ sey, wird die Pumpe, falls sonst kein Fehler vorhanden ist, das Wasser sicher bis zur Gußröhre heben. Hieher gehört auch noch der Fall, wenn $\frac{mc}{r} + f = b$ ist, und zugleich $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$, weil alsdenn beyde Werthe von s unmöglich werden. Demnach kann nur in dem einzigen Fall das Wasser im schädlichen Raum auf einer bestimmten Höhe stehen bleiben, wenn $\frac{mc}{r} + f > b$ ist, wenn gleich die andre Bedingung $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ statt hätte. Sollten aber auch in diesem Fall beyde Werthe von s möglich bleiben, so muß nicht $\frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$ seyn. Sind diese beyden Ausdrücke einander gleich, so bleibt das Wasser in der Höhe $\frac{1}{2} (\frac{mc}{r} + f - b)$ hängen. In allen Fällen aber, wenn $\frac{mc}{n} + f > b$, und $\frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$, also $\frac{mc}{r} + f + b < 2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ ist, wird das Wasser nirgend stehen bleiben, sondern das Saugwerk seine gehörige Vollkommenheit haben.

12. §.

Herr Parent hat in seinen Recherches de Physique & de Mathematique 1700 acht Aufgaben vorgetragen, welche die Theorie der Saugwerke betreffen, und sie damals als neue Lehren bekannt gemacht, ohne die Beweise seiner Auflösungen beyzufügen, mit einer Aufforderung an die damaligen Kunstverständige, die Beweise zu suchen. Herr Belidor trägt diese Aufgaben des Herrn Parent mit desselben eigenen Worten vor in der Architect. Hydraul. III Buch III Cap. 919 — 926 §. und entwickelt hiernächst die Theorie, worauf die Auflösungen dieser Aufgaben beruhen. Sein Vortrag beruhet mit dem gegenwärtigen auf einerley Gründen: allein seine Regeln weichen von den hier vorgetragenen, was die Pumpen der mittlern Art betrift, in einigen Stücken ab, und überhaupt hat er die ganze Theorie nicht in ihr völliges Licht gesetzet. Es kömmt nämlich das Resultat der ganzen bisherigen Untersuchung über die Saugwerke der mittlern Art, auf folgende Sätze an.

Wenn $b < \frac{mc}{mc+rf} h$, also die Höhe der Saugröhre kleiner ist, als die vierte Proportionallinie zur Summe des Raums, worinn der Kolben spielt, und des schädlichen Raums, zum Raum worinn der Kolben spielt, und zur Höhe einer Wasser-Säule, deren Gewicht dem Druck der Atmosphäre gleich ist; so hat das Saugwerk seine gehörige Vollkommenheit, falls auch überdem $\frac{mc}{r} + f$ nicht grösser, als b ist. Wenn die erwähnte vierte Proportionallinie z heißt, so hat man $mc + rf : mc = h : z$, und da ließe sich das erste Verhältniß auch so ausdrücken $\frac{mc + rf}{n} : \frac{mc}{n}$, so daß statt des schädlichen Raums, und desje-

nigen

nigen Raums, worinn der Kolben spielt, auch ihre auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen gebraucht werden können, vorhin im 10. §. ward eben dies Verhältniß so ausgedrückt $\frac{mc}{r} + f :$ $\frac{mc}{r}$, also ward die Höhe des schädlichen Raums selbst, und die auf die Weite des schädlichen Raums reducirte Höhe des Kolbenzuges gebraucht. In Ansehung dieser ersten Bedingung ist es also einerley, ob man beyde Räume auf die Weite der Saugröhre oder des schädlichen Raums reducirt. In Ansehung der zweyten Bedingung aber ist es nicht einerley. Zwar kann man diese zweyte Bedingung auch so ausdrücken $\frac{mc}{r} + \frac{rf}{n} < \frac{rb}{n}$, aber man siehet wohl, daß die Saugröhre alsdenn so betrachtet werden müßte, als ob sie mit dem schädlichen Raum einerley Weite hätte.

Dafern außer der ersten Bedingung überdem $\frac{mc}{r} + f > b$ ist; so hat das Saugwerk nur alsdenn seine Vollkommenheit, wenn auch $\frac{mc}{r} + b + f < 2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ ist. Diese letzte Bedingung liesse sich nun auch so ausdrücken $\frac{mc}{n} + \frac{rb}{n} + \frac{rf}{n} < 2\sqrt{\frac{mc}{n} : \frac{rh}{n}}$, so daß wiederum die auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des schädlichen Raums in Rechnung gebracht würden; allein alsdenn erhält man nicht allein $\frac{rb}{n}$ statt b, wie vorhin, sondern überdem auch $\frac{rh}{n}$ statt h. Also ist es bey diesen Untersuchungen nicht allgemein verstattet, statt eines Saugwerks ein andres zu betrachten, das aus dem vorigen entstehet, wenn man die Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums

auf

auf die Mündung der Saugröhre reducirt. Dies hat **Parent** allemal gethan, und **Belidor** thut es auch: allein eben deßwegen bedarf ihr Vortrag einiger Verbesserung. Wenn der schädliche Raum mit der Saugröhre allemal einerley Weite hätte; so hätte es seine Richtigkeit, daß die Höhe des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre reducirt werden müßte: allein dieser Fall kömmt in der Anwendung gar nicht vor. Gewöhnlich ist die Weite des schädlichen Raums und des Kolbenzuges einerley, und alsdenn bedarf es gar keiner Reduction, weil beyde Räume sich nun wie ihre Höhen verhalten. Der körperliche Raum der Saugröhre kömmt bey dieser Rechnung gar nicht, sondern allein ihre Höhe in Betrachtung, weil bey gleicher Federkraft der im schädlichen Raum und im Raum des Kolbenzuges ausgebreiteten Luft das Wasser auf einerley Höhe stehen bleibt, die Saugröhre mag weit oder eng seyn. Die Federkraft dieser Luft aber hängt bloß von dem Verhältniß des noch leeren Theils im schädlichen Raum gegen den Raum des Kolbenzuges ab, und gar nicht von der Größe des körperlichen Raums der Saugröhre.

13. §.

Es scheint, daß beyde angeführte Schriftsteller, **Parent** sowohl, als **Belidor**, diesen Umstand übersehen haben: sie könnten sonst nicht die allgemeine Regel geben, daß die Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums allemal auf die Mündung der Saugröhre reducirt werden müßten. Statt dessen, daß hier im 10. §. die Höhe BN gesucht ist, berechnet **Belidor** a. a. O. 933 §. die Höhe ZN, da denn, wenn die Rechnung richtig ist, beyde Wege auf einerley Resultat führen müssen. Er setzt die Proportion an $z + c - x : z - x = a : a - x$, und bey ihm ist a das, was hier h heißt, z ist die Summe der Höhen der Saugröhre und des schädlichen Raums, x=ZN. Allein eigentlich verhält sich der körperliche Raum AN zum körperlichen Raum CN $= a : a-x$, und nach der bisherigen Bezeichnung wäre der körperliche Raum AN $= nb + fr + mc - nb - r(x-b) = mc + rf - r(x-b)$, und der Raum CN $= rf - r(x-b)$, also $mc + rf - r(x-b) : rf - r(x-b) = h : h - x$, oder $\frac{mc}{r} + f + b - x : f + b - x = h \cdot h - x$. Vergleicht man diese Proportion mit der belidorischen, so siehet man wohl, daß beyde überein kommen, wenn man x statt $f + b$, c statt $\frac{mc}{r}$, und a statt h schreibt: allein auf solche Art muß x die Summe der Höhe der Saugröhre, und der wahren nicht der reducirten Höhe des schädlichen Raums, und c die auf die Weite des schädlichen Raums nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges bedeuten, also die wahre Höhe desselben, wenn der Raum des Kolbenzuges und der schädliche Raum gleich weit sind, die Saugröhre mag eben so weit, oder enger seyn. Die erwähnte Proportion giebt die Gleichung $(mc + r(b+f-x)(h-x) = r(b+f-x)h$, woraus $x^2 - (\frac{mc}{r} + b + f)x = -\frac{mch}{r}$, also $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + b + f) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + b + f^2) - \frac{mch}{r}}$ folgt. Im 10. §. war BN $= s$, also ist nun $x = b + s$, und $s = x - b$. Setzt man aber $x - b$ statt s in der für s gefundenen Gleichung des 10. §., so kömmt die jetzt gefundene Gleichung heraus, daß also beyde Rechnungen richtig überein treffen. Wird x statt $b + f$, c statt $\frac{mc}{r}$, und a statt h gesetzt, so hat man $x = \frac{1}{2}(x + c) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(x + c^2) - ac)}$, eben so wie Belidor a. a. O. den Werth für x findet, obgleich der-

derselbe vermöge der eben vorgetragenen Erinnerungen davon eine unrichtige Anwendung macht. Weil allemal $x > b$ seyn muß vermöge der Voraussetzung, so muß vor der Wurzelgröße das Zeichen (+) gebraucht werden, wenn $\frac{1}{2}(z + c) < b$ ist, obgleich Belidor sagt, man müsse allemal das Zeichen (—) brauchen, so lange die Wurzelgröße möglich ist. Diese und die übrigen schon erwähnten Unrichtigkeiten haben daher ihren Ursprung, weil Belidor sich durch die Aehnlichkeit dieser Pumpe der mittlern Art, mit der Pumpe der unvollkommensten Art hat verführen lassen, was von der letztern gilt, ohne die nöthige Einschränkung auf die erste anzuwenden, und weil er nicht bedacht hat, daß hier bey gegenwärtiger Untersuchung der schädliche Raum eigentlich das werde, was bey der Untersuchung über die Pumpe der unvollkommensten Art die Saugröhre war. Parent und Belidor unterscheiden übrigens ganz richtig die beyden Fälle voneinander, wenn $c + f > b$ ist, oder nicht, und geben für den letztern Fall die Vorschrift, daß wenn von diesen dreyen Stücken c, f, b, zwey gegeben seyn, und das dritte gesucht werde, die Rechnung nach den Regeln des 9. §. angestellt werden müsse. Belidor sagt a. a. O. 927. §. daß in der Verschiedenheit dieser Fälle eben der Knoten der parentischen Theorie stecke: allein er selbst erkläret sich nicht mit der nöthigen Deutlichkeit über den Grund der Verschiedenheit dieser Fälle, der hier im 10. §. deutlich vor Augen gelegt ist. Beyde geben indessen auch für den Fall, wenn $c + f > b$ ist, die an sich richtige Regel, daß das Saugwerk alsdenn nur seine Vollkommenheit habe, wenn die Wurzelgröße in der zuletzt gefundenen Gleichung unmöglich, also $c + f + b > 2\sqrt{ch}$ sey.

14. §.

Die Höhen des schädlichen Raums f und des Kolbenzuges c sind gegeben, beyde sollen gleich weit seyn, und man sucht die Höhe der Saugröhre b.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{ch}{c+f}$, und vergleiche denselben mit der Summe $c+f$. Wenn der erwähnte Quotient nicht kleiner als $c+f$ ist, so wird erfordert, daß $b < \frac{ch}{c+f}$ sey. (9. §.) Dafern aber der gedachte Quotient kleiner als $c+f$ ist, so muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, seyn, also muß man $b < 2\sqrt{ch} - c - f$ nehmen.

Parent giebt folgendes Exempel. Es sey die Höhe des reducirten Kolbenzuges 8 Fuß, des schädlichen Raums 12 Fuß. Das Verhältniß zwischen der Weite des Stiefels und der Saugröhre ist nicht angegeben. Nimmt man an, es sey wie 2 : 1, so sind die wahren Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums 4 Fuß und 6 Fuß. Nun wird der Quotient $\frac{ch}{c+f} = 12\frac{4}{5}$, und diese Zahl ist größer als $c+f = 10$. Daher genügt es, die Höhe der Saugröhre etwas kürzer als $12\frac{4}{5}$ Fuß zu nehmen. **Parent** und **Belidor** sehen dies Exempel so an, als wenn es zum zweyten Fall gehöre, weil die Summe beyder reducirten Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums 20 ist, und diese Zahl den Quotienten $12\frac{4}{5}$ übertrift. Deßwegen suchen sie b aus der Formul $b < 2\sqrt{ch} - c - f$, welcher Ausdruck $= 12$ wird. Dies Resultat ist nun zwar von dem vorigen nicht sonderlich verschieden, indessen war die fernere Rechnung nicht nöthig. In dem reducirducirten Saugwerk muß die Saugröhre kleiner als 12 Fuß seyn. Denn wenn sie 12 Fuß wäre, so würde das Wasser in der Höhe von $\frac{1}{2}(c+f+b) = 16$ Fuß, also vier Fuß hoch über dem Ventil hängen bleiben. In dem natürlichen Saugwerk kann die Saugröhre volle 12 Fuß hoch seyn, weil $\frac{1}{2}(c+f+b) = 11$ ist, und im 10. §. das dortige $s = \frac{1}{2}(c+f-b) = -1$ negativ seyn würde.

15. §.

Die Höhen der Saugröhre b, und des Kolbenzuges c sind gegeben, man sucht die Höhe des schädlichen Raums, wenn derselbe eben soweit als der Stiefel seyn soll.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b}$, addire dazu die Höhe des Kolbenzuges c, und vergleiche die Summe mit der Höhe der Saugröhre b. Dafern diese Summe nicht größer als b ist; so ist der gefundene Quotient $\frac{c(h-b)}{b}$ die Gränze, welche f nicht übertreffen darf: widrigenfalls muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, also $f < 2\sqrt{ch} - b - c$ seyn.

Es sey z. E. $c = 4$ Fuß, $b = 12\frac{4}{5}$ Fuß, so wird $\frac{c(h-b)}{b} = 6$. Hiezu $C = 4$ addirt kömmt 10 und dies ist weniger, als $12\frac{4}{5} = b$. Also muß $f < 6$ seyn, und weiter bedarf es keiner Rechnung. Wenn aber $\frac{m}{n} = 2$ wäre, und man wollte nach Belidors Vorschrift rechnen, so müßte man $c = 8$ Fuß nehmen, und dies würde den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b} = 12$ Fuß geben, da dann $12 + 8 > 12\frac{4}{5}$ ist. Also würde die Aufgabe zum zweyten

Fall gehören, und man fände $f < 11\frac{1}{3}$. Dies wäre denn die Gränze, welche die reducirte Höhe des schädlichen Raums nicht übertreffen müßte. Die wahre Höhe müßte kleiner als $5\frac{6}{10}$ seyn.

16. §.

Die Höhe der Saugröhre b und des schädlichen Raums f sind gegeben: man sucht die Höhe des Kolbenzuges c, noch in der Voraussetzung, daß Stiefel und schädlicher Raum gleich weit sind.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{fb}{h-b}$, addire dazu f und vergleiche die Summe mit b, falls diese Summe nicht größer als b ist, so muß $c > \frac{fb}{h-b}$ genommen werden. Dafern aber das Gegentheil statt hat, so muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$ seyn, also $c^2+2(f+b)c+(f+b^2) < 4hc$, und $c^2-(4h-2f-2b)c < -(f+b^2)$. Dies giebt $c < 2h-f-b \pm \sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$, oder $c < 2h-f-b \pm \sqrt{2h.}\sqrt{2(h-f-b)}$. Weil nun allemal $f+b < h$ ist, so ist die Wurzelgröße allemal möglich: und weil eben diese Wurzelgröße kleiner ist, als $2h-f-b$, so sind beyde gefundene Gränzen von c positiv. Mit diesen beyden Gränzen hat es nun eigentlich folgende Bewandniß. Es muß

$c-(2h-f-b) < \pm\sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$ seyn. Das sind zwey Sätze, und der eine ist dieser

$c-(2h-f-b) < -\sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$. Da nun allemal $c < h$ ist, und $f+b < h$, so sind diese beyden Werthe negativ, wie erfordert wird, aber eben deßwegen ist wirklich

$$(2h - f - b) - c > \sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))},$$

Also $c > 2h - f - b - \sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}$.

Der andre von den obgedachten Sätzen ist

$$c - (2h - f - b) < + \sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}.$$

Hier mag die voranstehende Größe positiv, oder negativ seyn, so folgt allemal daraus, es sey

$$c < 2h - f - b + \sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}.$$

Demnach giebt diese Rechnung zwo Gränzen, zwischen welchen c genommen werden muß, und **Parent** hat ganz recht, wenn er sagt, daß jede Zahl, die zwischen diesen Gränzen fällt, der Frage ein Genüge leiste, obgleich **Belidor a. a. O.** 938. §. das Gegentheil sagt, und nur den kleinsten von beyden Werthen, als den eigentlich gesuchten gelten lassen will. Es hat zwar seine Richtigkeit, daß wegen andrer Ursachen, die von der übrigen mechanischen Einrichtung der Pumpe abhängen, gewöhnlich ein Werth genommen wird, welcher der kleinsten Gränze am nächsten kömmt: allein davon ist hier die Frage nicht, und beyde Gränzen geben eigentlich die vollständige Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe: ja man darf schlechterdings nicht die Höhe des Kolbenzuges der kleinsten Gränze gleich setzen, dafern das Saugwerk nicht stecken soll, und **Belidor** hätte nicht sagen sollen, daß man **wohl thue**, wenn man c etwas größer nehme, sondern vielmehr, daß man c etwas größer nehmen müsse. Uebrigens aber behält es hier ebenfalls bey den gegen alle beyde schon verschiedenemal gemachten Erinnerungen sein Bewenden. Durch c und f müssen nicht auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhen, sondern die wahren Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums verstanden werden, wenn beyde gleich weit sind. Wären beyde ungleich weit, so müßte man durch c die auf die Weite des schädlichen Raums, nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges verstehen.

Es

Es sey z. E. die Höhe des schädlichen Raums 6 Fuß, die Höhe der Saugröhre $12\frac{4}{5}$ Fuß, so findet man den Quotienten $\frac{fb}{h-b}=4$. Da nun $b+4<12\frac{4}{5}$, so bedarf es keiner weitern Rechnung, und man weis, daß $c>4$ Fuß seyn müsse. Wäre $\frac{m}{n}=2$, so müßte man nach Parents und Belidors Regel $f=12$ Fuß nehmen, also $\frac{fb}{h-b}=8\,f$. Da nun $12+8>12\frac{4}{5}$ ist, so müßte man mit Parent so rechnen

$$2(h-f-b)=14,4 \qquad\qquad h-f-b=\ 7,2$$
$$\sqrt{2(h-f-b)}=\ 3.8 \qquad\qquad h=32$$
$$\sqrt{2h}=\ 8. \qquad\qquad 2h-f-b=39,2$$
$$\sqrt{2h}\sqrt{2(h-f-b)}=30,4. \qquad\qquad \pm\ 30$$

die eine Gränze 8, 8

die andre Gränze 69, 6.

Die Gränzen der wahren Höhe des Kolbenzuges wären also 4, 4, und 34, 8 Fuß. Daß übrigens jede zwischen den Gränzen 8, 8, und 69, 6 fallende Zahl der Bedingung $c+f+b<2\sqrt{ch}$ ein Genüge thue, davon kann man sich durch Versuche überzeugen, wenn man eine willkührliche Zahl, die zwischen diesen Gränzen fällt, statt c setzt, z. E. $c=40$. Dies giebt $c+f+b=64\frac{4}{5}$, und $2\sqrt{ch}=75,3$, also $c+f+b<2\sqrt{ch}$. Jede andre Zahl aber, die außerhalb dieser Gränzen fällt, giebt, wenn man sie statt c setzt, $c+f+b>2\sqrt{ch}$. Setzt man z. E. $c=70$, so wird $c+f+b=94,8$, und $2\sqrt{ch}=94,6$. Setzt man $c=8$, so findet man $c+f+b=32,8$, und $2\sqrt{ch}=31,9$.

Untersuchung

Ueber die Bewegung des Wassers im Stiefel, nachdem schon alle Luft aus dem schädlichen Raum ausgetreten ist.

---

17. §.

Die bisherigen Untersuchungen betrafen die Vollkommenheit eines Saugwerks in Ansehung der anfänglichen Bewegung des Wassers in der Saugröhre und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht: und nunmehr soll die im 2. §. vorläufig überhaupt erwähnte Untersuchung darüber angestellet werden, mit welcher Geschwindigkeit der Kolben bewegt werden müsse, damit die Pumpe bey jedem Hub ohne Zeitverlust soviel Wasser gebe, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann. Um diese Untersuchung zu erleichtern, stelle man sich vorläufig eine gerade vertical stehende cylindrische Röhre vor, die mit ihrem untern offenen Ende x im Wasser steht. Sie kann übrigens entweder durchgängig von gleicher Weite, oder auch aus mehrern Stücken von verschiedener Weite zusammengesetzet seyn. Diese sey etwa 32 Fuß hoch, oben bey Q verschlossen, und in derselben keine Luft befindlich; so erhellet, daß der Druck der Atmosphäre das Wasser in diese Röhre hinauf treiben werde. Es sey in der Röhre irgendwo bey C eine Klappe, oder sonst ein Hindernis befindlich, welches das Wasser über C hinauf zu steigen verhindert, und solchergestalt nunmehr in Ruhe erhält. Wird nun in einem gewissen Augenblick die Klappe C geöfnet, so fängt das Wasser sogleich an, höher zu steigen, und man kann nun fragen: mit welcher Geschwindigkeit es in dem Augenblick steige, da es eine gegebene Höhe ZM erreicht. Wenn OB und BQ Stiefel und Saugröhre eines Saugwerks sind, so befindet sich das Wasser in dem Stiefel bey jedem neuen Kolbenzuge unter eben den Umständen. Indem der Kolben herab steigt, und sich das Stiefel-Ventil schließet, wird alles Wasser unter dem Kolben zur Ruhe gebracht, und bis in den Augenblick, da er seine niedrigste Stelle C erreicht, ist er das, was eine Klappe bey C wäre, die das Wasser weiter hinauf zu steigen hinderte. So wie der Kolben aber wieder hinauf zu steigen anfängt, gestattet er auch dem unter ihm befindlichen Wasser nachzufolgen.

18. §.

Lehnsatz. **Das Gefäß (3. Fig.) *ABEO* ist bis auf eine gewisse Höhe mit Wasser gefüllt, und hängt mit einer Röhre *OpqR* zusammen, so daß das Wasser aus dem Gefäß in die Röhre treten kann. Außer der Schwere drückt noch auf die Oberfläche desselben *AB* eine gegebene Kraft, und treibt es aus dem Gefäß in die Röhre hinein, die hier von unbestimmter Länge angenommen wird. Man setze, im Gefäß habe anfangs das Wasser bis an *AB*, in der Röhre aber bis an den Querschnitt *ab* gestanden, und es habe um im Gefäß den Weg $G\gamma$, in der Röhre aber den Weg *cg* durchlaufen: man sucht die Geschwindigkeit der vordern Fläche *PQ*.**

Aufl. Wenn GSKcg die centrische Linie derjenigen Querschnitte CD, HI, MN, u. s. f. des Wassers ist, welche die Eigenschaft haben, daß alle in denselben liegende Wassertheilchen mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen nach Richtungen, die mit der jedesmaligen Lage der centrischen Linie übereinkommen, und die centrische Linie selbst sowohl auf diesen Querschnitten, als auch auf den äußern Flächen CD, PQ, senkrecht ist, so sey $CD = Y$, $PQ = w$, ein unbestimmter Querschnitt $MN = z$, das zugehörige

Stück

Stück der centrischen Linie $cKS = s$, und $cg = w$. Wenn ferner K der niedrigste Punct der centrischen Linie, und HI durch diesen Punct horizontal gezogen ist, $\gamma\delta$ und gd aber vertical sind; so sey $\gamma\delta = x$, $gd = u$. Wenn überdem der Druck auf CD so groß ist, als das Gewicht einer Wasser-Säule auf eben dieser Grundfläche in der Höhe p, und der gesuchten Geschwindigkeit die Höhe q zugehört, so hat man nach den Grundsätzen der Hydraulik $\frac{y^2 - w^2}{y^2}\, q + \frac{w\,dq + 2q\,dw}{dw} \int \frac{ds}{z} = p + x - u.$

Das Integral $\int \frac{ds}{z}$ muß so genommen werden, daß es für $s = -w$ verschwindet, und man muß nach der Integration statt s die Länge der ganzen centrischen Linie $CKS\gamma$ setzen.

19. §.

Es sey das Gefäß (4. Fig.) $ABEO$ ein grades vertical stehendes Prisma oder ein grader Cylinder, und jeder Querschnitt desselben $= k$. Die Röhre $Opq R$ sey aus zweenen graden Cylindern $OmnR$ und $opqr$ zusammengesetzt, deren Axen Kk und kg in grader Linie liegen, und deren Querschnitte n und m sind: man sucht die Geschwindigkeit der Fläche pq, wenn alles übrige so bleibt, wie es im vorigen §. angenommen worden.

Aufl. Bey diesen Voraussetzungen hat man $Y = k$, $w = m$, $dw = dm = 0$, weil m constant ist. Ferner sey $Kk = \beta$, $kc = f$, der Winkel $gkd = \eta$, so ist $gd = u = (\beta + f + w)\sin\eta$. Um nun das Integral $\int \frac{ds}{z}$ zu finden, suche man es zuerst für die Röhre $opqr$, so hat man $\int \frac{ds}{z} = \frac{s+w}{m}$. Man setze $s = ck = f$, so ist dies Integral $= \frac{f+w}{m}$ für die Röhre $opqr$. Für beyde

Röhren zusammen wird es $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n}$, und weil hier $\delta\,\gamma = x$ ist, so wird es für die ganze Masse des Wassers $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{x}{k}$. Es sey $\delta\,G = a$, so ist $x = a - G\gamma = a - \frac{mw}{k}$, also $\int \frac{ds}{z} = \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2}$. Alle diese Werthe setze man in die Gleichung des vorigen §. so wird $\frac{k^2 - m^2}{k^2}\, q + \frac{m\,dq}{dw} \left(\frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2}\right) = p + a - \frac{mw}{k} - (\beta + f + w)\, \sin \eta$.

20. §.

Alle übrige Stücke bleiben so wie im vorigen §. angenommen ist, nur ist das Gefäß *ABEO* in Vergleichung mit der Röhre *O p q R.* sehr weit, und der Druck auf *CD* beständig von einerley Größe: man soll die Gleichung zwischen q und w finden.

Aufl. Vermöge der Voraussetzung kann man $\frac{m}{k} = o$ setzen. Weil überdem p eine beständige Größe ist; so setze man $p + a = A$, und man erhält die Gleichung $q\,dw + (f + w + \frac{m\beta}{n})\, dq = A\,dw - (\beta + f + w)\, dw \sin \eta = (A - (\beta + f) \sin \eta)\, dw - w\,dw \sin \eta$. Um das Integral zu finden, setze man $f + w + \frac{m\beta}{n} = u$, also $w = u - f - \frac{m\beta}{n}$, und $dw = du$, so erhält man $q\,du + u\,dq = (A - (\beta + f) \sin \eta)\, du - (u - f - \frac{m\beta}{n})\, du \sin \eta$.

oder

oder $q\,du + u\,dq = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta) \sin\eta)\,du - u\,du \sin\eta$.

Kürze halber sey $A + (\frac{m\beta}{n} - \beta) \sin\eta = B$, so giebt die Integration $uq = Bu - \frac{1}{2} uu \sin\eta + C$. Wenn nun $w = o$ ist, so wird $u = f + \frac{m\beta}{n}$, und zugleich $q = o$. Dies giebt die beständige Größe $C = \frac{1}{2} (f + \frac{m\beta}{n})^2 \sin\eta - B(f + \frac{m\beta}{n})$, folglich ist $u.q = B(u - f - \frac{m\beta}{n} + \frac{1}{2}((f + \frac{m\beta}{n})^2 - uu) \sin\eta$. Da nun $u - f - \frac{m\beta}{n} = vv$ ist, so wird $B(u - f - \frac{m\beta}{n}) = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta) \sin\eta)\,vv$. Ferner wird $uu = (f + \frac{m\beta}{n})^2 + 2(f + \frac{m\beta}{n})vv + vvvv$, und wenn man diese Werthe gehörig substituirt, so ist die gesuchte Gleichung zwischen q und vv gefunden.

21. §.

Weil bey dieser Auflösung die Größe des Winkels $gkd = \eta$ noch unbestimmt geblieben ist, so siehet man wohl, daß auch der Fall darunter begriffen sey, wenn die Röhre OpqR vertical steht. Aber alsdenn ist es gleichviel, ob diese Röhre außerhalb des Gefässes befindlich ist, und unmittelbar an demselben anliegt, so daß das Wasser unten bey O hinein treten kann, oder, ob die Röhre innerhalb des Gefässes im Wasser steht, wie in der 5. Figur. Man hat nun $\sin\eta = 1$, und dieser Voraussetzung gemäß wird $u.\,q = (A + \frac{m\beta}{n} - \beta)vv - (f + \frac{m\beta}{n})\,vv - \frac{1}{2} vv\,vv = (A - \beta - f)\,vv - \frac{1}{2} vv\,vv$; also $q = \frac{(A - \beta - f)\,nvv - \frac{1}{2} nvv^2}{n(f + vv) + m\beta}$.

Man setze $\beta + f = b$, also $f = b - \beta$, so erhält man $q = \frac{(A - b)\, nvv - \frac{1}{2} n\, vv^2}{n(b - \beta + vv) + m\beta}$, oder $q = \frac{(A - b)\, vv - \frac{1}{2} vv^2}{b + \frac{m - n}{n} \beta + vv}$.

Dafern aber $b + vv = x$, also $vv = x - b$ gesetzt wird, so hat man $q = \frac{A(x - b) - \frac{1}{2}(xx - bb)}{x + (m - n)\beta : n}$, oder $q = \frac{nA(x - b) - \frac{1}{2} n (xx - bb)}{nx + (m - n)\beta}$.

Wenn beyde Stücke der Röhre OpqR gleich weit sind, also zusammen nur eine einzige Röhre ausmachen, so hat man $m = n$, also $q = \frac{(A - b)\, vv - \frac{1}{2} vv^2}{b + vv}$, oder auch $q = \frac{nA(x - b) - \frac{1}{2} n (xx - bb)}{nx} = A - \frac{1}{2} x - \frac{(A - \frac{1}{2} b) b}{x}$.

22. §.

Die ganze Länge der Saugröhre, (5. Fig.) nebst den Höhen des schädlichen Raums, und des Kolbenzuges eines Saugwerks sind gegeben, nebst den Querschnitten des Stiefels und der Saugröhre: man sucht die Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel, nachdem es um eine gegebene Höhe CM über den niedrigsten Kolbenstand gestiegen ist. Vorausgesetzt, daß der Kolben der Bewegung des Wassers gar nicht hinderlich sey.

Aufl. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall der vorigen. Gewöhnlich steht die Saugröhre in einem Wasserbehälter, der in Vergleichung mit der Röhre sehr weit ist. Die Atmosphäre drückt auf die Oberfläche des Wassers in diesem Behälter, und treibt das Wasser über die niedrigste Stelle des Kolbens im Stiefel

fel hinauf, sobald der Kolben hinauf gezogen wird. Man setze also die Länge der ganzen Saugröhre $= \beta$, die Höhe des schädlichen Raums $= f$, die Tiefe, um welche die Saugröhre im Wasser steht, $OZ = a$, die Federkraft der Atmosphäre $= h$, die Höhe, um welche das Wasser im Stiefel gestiegen ist, $CM = w$, die Querschnitte des Stiefels $= m$, und der Saugröhre $= n$, die gesuchte Geschwindigkeit $= \sqrt{q}$, so ist $q = \frac{(a+h-\beta-f)w - \frac{1}{2}vv^2}{f+w+\frac{m}{n}\beta}$;

oder auch $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+\frac{m-n}{n}\beta+w}$, wenn man A statt $a+h$, und

b statt $\beta+f$ schreibt: oder $q = \frac{A(x-b) - \frac{1}{2}(xx-bb)}{\frac{m-n}{n}\beta+x}$, wenn

man $b+w = x$ setzt. In dem Fall, wenn Stiefel und Saugröhre gleiche Weite hätten, also $m = n$ wäre, erhielte man $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+w}$, oder $q = A - \frac{1}{2}x - \frac{(A-\frac{1}{2}b)\,b}{x}$.

23. §.

Belidor stellt in der Architectura Hydraul. im III Kap. des III Buchs 906. u. f. §. §. eben diese Untersuchung an: allein er bringt ein ganz andres Resultat heraus. Man hatte sonst gewöhnlich $q = \frac{n^2}{m^2}(h-x)$ angenommen, wenn durch x die Höhe ZM des Wassers über die untere Wasserfläche YZ verstanden wird, und Belidor meldet a. a. O. im 907. §., daß er selbst diese Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel für die richtige gehalten habe, bis er endlich bey Berechnung einer von ihm erfundenen Maschine den Fehler eingesehen, und verbessert hätte. Allein ihm sind bey Verfertigung seines vortreflichen Werks, welches im Jahr 1737. zu Paris herausgegeben

ist,

ist, die von den beyden Herrn Bernoulli um eben die Zeit gemachten neuen Entdeckungen in der Hydraulik noch nicht bekannt gewesen, und seine Auflösung dieser Aufgabe ist eben so wenig richtig, als die alte von ihm getadelte Auflösung. Er findet $\sqrt{q} = \frac{n}{m}(\sqrt{h} - \sqrt{x})$, also $q = \frac{n^2}{m^2}(h - 2\sqrt{hx} + x)$, und **Muschenbroeck** trägt in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2148 - 2152. p. 878 - 880. ebenfalls diese belidorische Theorie vor. Beyde verstehen alsdenn durch h die Höhe einer Wassersäule, deren Gewicht dem Druck der Atmosphäre gleich ist, und durch x die Höhe ZM des Wassers über den Wasserpaß YZ. Aber diese Bestimmung hat mit der vom Herrn **Belidor** getadelten ältern Bestimmung verschiedene Hauptfehler gemein. Einmal hängt keine derselben vom niedrigsten Kolbenstande ab, da es doch gewiß nicht einerley ist, in welcher Höhe das Wasser seine Bewegung von der Ruhe anfängt. Fürs zweyte müßte nach beyden Bestimmungen $q = 0$ seyn, wenn $x = h$ ist, oder das Wasser müßte nur etwa 32 Fuß hoch steigen können, welches wiederum falsch ist. Endlich müßte noch fürs dritte die Geschwindigkeit des steigenden Wassers im ersten Anfang des Kolbenhubs am größten seyn, und hiernächst beständig abnehmen. Daß auch dies fehlerhaft sey, werden die folgenden Untersuchungen mit mehrern ergeben. Ich habe beym Nachschlagen niemand gefunden, der diese Theorie von den Pumpen aus den nunmehr richtig erwiesenen Gesetzen der Hydraulik hergeleitet hätte. Die Herrn **Johann** und **Daniel Bernoulli** haben die Gründe davon erfunden. Beyde aber haben davon keine weitere Anwendung auf die Saugwerke gemacht. Ihre Untersuchungen über die Geschwindigkeit, womit das Wasser in einer verticalen durchaus gleich weiten cylindrischen Röhre aufwärts steigt, wenn die Röhre in einem sehr weiten Wasserbehälter steht, und anfangs die Höhe des Wassers

in

en der Röhre kleiner ist, als die Höhe des Wassers im Behälter, haben mit der gegenwärtigen Theorie die nächste Verwandschaft. M. s. Jo. Bernoulli Hydraul. P. I. §. 24. Oper. T. IV. pag. 419. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. VII. §. 16. p. 136. Wenn man die Vergleichung anstellen will, so wird man finden, daß die Resultate ihrer Rechnungen mit den hieselbst im 21. §. heraus gebrachten Gleichungen überein kommen, in wie weit die beyderseitigen Voraussetzungen einerley sind.

24. §.

Die Höhe zu finden, worauf das Wasser im Stiefel steigen könnte, wenn der Stiefel von unbestimmter Höhe wäre, und der Kolben so schnell stiege, daß derselbe die Bewegung des Wassers nicht hinderte.

Aufl. Das Wasser wird so lange steigen, bis $q = o$ wird. Man setze demnach $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b + \frac{m-n}{n}\beta + w} = o$, so erhält man $w^2 - 2\,(A-b)\,w = o$, und beyde Wurzeln dieser Gleichung sind $w = o$, und $w = 2\,(A-b)$. Es mußte aber vermöge der Voraussetzung im Anfang der Bewegung $q = o$ seyn, und daher kömmt der eine Werth $q = o$. Der andre $w = 2\,(A-b)$ ergiebt, daß das Wasser bis auf die Höhe $2\,(A-b)$ über die niedrigste Stelle des Kolbens hinauf steigen würde, wenn es der Kolben nicht hinderte.

So lange w zwischen diesen beyden Gränzen o und $2\,(A-b)$ bleibt, so lange ist q positiv, und q wächst anfangs mit w, nimmt aber hiernächst wieder ab. Dies ergiebt sich am deutlichsten aus der Differentialgleichung $dq = \frac{A-(b+w)-q}{f+w+\frac{m}{n}\beta}$, (20. §.) wo nun $fin\,\varkappa = 1$ ist. Dieser Ausdruck ist positiv, so lange

$A-(b+w)>q$ ist, folglich wächst q so lange, als diese Voraussetzung statt hat, und nimmt wieder ab, wenn $q>A-(b+w)$ wird. Die Geschwindigkeit des Wassers muß also am größten seyn, wenn $A-(b+w)=q$ ist, denn nun ist $dq=0$.

25. §.

Die größte Geschwindigkeit zu finden, die das im Stiefel hinauf steigende Wasser erreichen kann, nebst der Höhe, auf welche es steigen muß, bevor die Geschwindigkeit am größten wird.

Aufl. Es ist die der größten Geschwindigkeit zugehörige Höhe $q=A-(b+w)$, und der unbestimmte Werth von q ist $=\frac{(A-b)w-\frac{1}{2}w^2}{b+\lambda\beta+vv}$, wenn man Kürze halber $\frac{m-n}{n}=\lambda$ setzt. Beyde Werthe einander gleich gesetzt geben die Gleichung $A(b+vv)-(b+vv^2)+A\lambda\beta-\lambda\beta(b+vv)=(A-b)vv-\frac{1}{2}vv^2$, und daraus folgt

$$vv^2+(b+\lambda\beta)vv=2(A-b)\lambda\beta+2(A-b)b,$$

folglich $vv=-(b+\lambda\beta)\pm\surd(\lambda^2\beta^2+2A\lambda\beta+2(A-b)b)$.

Der negative Werth kann hier nicht gebraucht werden, sondern der positive ist der gesuchte. Und wenn derselbe statt vv in die Gleichung $\surd q=\surd(A-b-vv)$ gesetzt wird, so ergiebt sich die gesuchte größte Geschwindigkeit.

Weil sich der gefundene Werth von vv auch so ausdrücken läßt: $vv=\surd((b+\lambda\beta^2)+2(A-b)(b+\lambda\beta))-b+\lambda\beta$, so erhellet, daß allemal $vv<A-b$ sey, weil die Wurzelgröße kleiner als $b+\lambda\beta+(A-b)$ ist. Je kleiner indessen $A-b$ selbst in Vergleichung mit $b+\lambda\beta$ ist, desto näher kömmt die Wurzelgröße diesem Werth $b+\lambda\beta+(A-b)$ folglich kömmt zugleich

vv dem Werth $A - b$ desto näher. Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Saugwerke findet diese Voraussetzung allemal statt, daß $b + \lambda\beta$ in Vergleichung mit $A - b$ ziemlich groß ist. Daher wird das in dem Stiefel hinauf steigende Wasser auch gewöhnlich so lange mit zunehmender Geschwindigkeit steigen, bis es mehrentheils 31 bis 32 Fuß hoch über die Oberfläche desjenigen Wassers erhaben ist, worinn die Saugröhre steht.

26. §.

Hiedurch wird also dasjenige bestättiget, was am Ende des 23. §. behauptet worden. Es ist falsch, daß das Wasser gleich vom Anfange mit abnehmender Geschwindigkeit steige: vielmehr erfolgt grade das Gegentheil, es steigt mit zunehmender Geschwindigkeit. Nur in dem einzigen Fall, wenn der Stiefel und die ganze Saugröhre gleich anfangs von Luft und Wasser leer wären, so würde die Geschwindigkeit des hinein tretenden Wassers aufs schnelleste, und fast augenblicklich bis zur größten anwachsen, und hiernächst wieder beständig abnehmen. Die größte Geschwindigkeit selbst wäre alsdenn $= \sqrt{A}$. Man müßte nämlich für diesen Fall $b = o$ und $\beta = o$ setzen. Dies giebt den Werth von $vv = o$, welcher der größten Geschwindigkeit zugehört, und die größte Geschwindigkeit selbst $\sqrt{q} = \sqrt{A}$. Dies scheint den vorigen Voraussetzungen entgegen zu seyn, vermöge welcher $q = o$ seyn mußte, wenn $vv = o$ ist. Allein man muß sich hiebey erinnern, daß die bisherigen Rechnungen in der That nur Näherungen sind, und daß im 20. §. $\frac{m}{k} = o$ gesetzt sey. Dafern man in der dortigen Differentialgleichung nur die in $\frac{m^2}{k^2}$ multiplicirten Glieder wegläßt, und $\sin \eta = 1$ setzt, wie hier erfordert wird, so hat man $q\,dvv + (f + vv + \frac{m\beta}{n} + \frac{ma}{k})\,dq = (A - \beta - f)\,dvv - (\frac{m}{k} + 1)\,vvdvv$. Man setze überdem der jetzigen Voraussetzung gemäß $\beta = 0$, $f = 0$, $m = n$, so wird $qdvv + (\frac{na}{k} + vv)\,dq = A dvv - (\frac{n}{k} + 1)\,vv\,dvv$. Ferner sey $\frac{na}{k} + vv = u$, also $vv = u - \frac{na}{k}$, und $dvv = du$, so erhält $qdu + udq = (A + \frac{na}{k})\,du - (\frac{n}{k} + 1)\,udu$, und dies giebt $uq = (A + \frac{na}{k})\,u - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,u^2 + C$. Für $vv = o$ ist $u = \frac{na}{k}$, und $q = o$, also $C = -\frac{na.A}{k}$. Wenn man nun den Werth $u = \frac{na}{k} + vv$ wieder herstellt, und die höhern Potenzen von $\frac{n}{k}$ wegläßt, so erhält man $q\,(\frac{na}{k} + vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(n + k)\,vv^2$, folglich $q = \frac{A\,k\,vv - \frac{1}{2}(n + k)\,vv^2}{na + kvv}$. Diese Gleichung giebt $q = o$ für $vv = o$, wie erfordert wird: so bald aber nur ein sehr kleiner Werth statt vv gesetzt wird, ist sehr nahe $q = A$.

Wenn nun ferner, um die größte Geschwindigkeit zu finden, $dq = o$ gesetzt wird, so hat man $q = A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv$, und dieser Werth dem vorigen gleich gesetzt giebt $(\frac{na}{k} + vv)\,(A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,vv^2$, also $\frac{1}{2}(n + k)\,vv^2 +$

$navv$

$n\,a\,vv = n\,a\,A$, woraus $vv^2 + \frac{2\,n\,a}{n+k} vv = \frac{2\,n\,a\,A}{n+k}$, also $vv =$ $\frac{\sqrt{(n^2\,a^2\,(n+k) + 2\,n\,a\,A)} - n\,a}{n+k}$ folgt. Demnach ist vv ungemein klein, wenn k sehr groß ist, und für $k = \infty$, würde $vv = 0$ seyn. Eigentlich ist also in dem jetzt betrachteten Fall die der größten Geschwindigkeit zugehörige Höhe $= A - \frac{1}{k}(\sqrt{(n^2\,a^2\,(n+k) + 2\,n\,a\,A)} - n\,a)$.

27. §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, (5. Fig.) wie im 22. §. man sucht die Zeit, worinn das Wasser im Stiefel um eine gegebene Höhe $CM = vv$ steigt.

Aufl. Es ist $d\,t = \frac{dvv}{\sqrt{q}}$, wenn also der Werth von q aus dem 22. §. gebraucht wird, so erhält man $d\,t =$ $\frac{dvv\sqrt{(b + \lambda\beta + vv)}}{\sqrt{(A - b)\,vv - \frac{1}{2}vv^2)}}$. Um das Integral hievon ohne weitläuftige Rechnung so genau zu finden, als bey dergleichen practischen Untersuchungen genügen kann, darf man nur erwägen, daß in der Anwendung auf das Saugwerk allemal $b + \lambda\beta$ beträchtlich größer sey, als vv, weil vv nicht leicht über 4 Fuß seyn wird, b und β aber gewöhnlich einige 20 Fuß groß sind, auch meistentheils $\lambda > 1$ ist. Setzt man nun Kürze halber $b + \lambda\beta = B$, so ist beynahe $\sqrt{(B + vv)} = \sqrt{B}$. Eigentlich ist $\sqrt{(B + vv)} > \sqrt{B}$, und $\sqrt{(B + vv)} < \sqrt{B} + \frac{vv}{2\sqrt{B}}$, da denn diese letztere Betrachtung dazu dienet, ein paar Gränzen zu finden, zwischen welchen t fällt, die sehr wenig voneinander werden unterschieden seyn.

Man nehme also zuerst $\surd(B + vv) = \surd B$ an, und setze $dt = \frac{d\,vv \surd 2B}{\surd(2cvv - vv^2)}$, wo $c = a - b$ ist; so giebt die Integration $t = A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{c} \times \surd 2B$, wo keine Constans nöthig ist, weil t und vv zugleich verschwinden müssen. Ist also g die Höhe, wovon ein schwerer Körper in der ersten Secunde frey herab fällt, so hat man $t = \frac{\surd 2B}{2\surd g} A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{A - b}$, und dieser Ausdruck giebt die gesuchte Zeit in Secunden, jedoch nicht ganz genau, sondern etwas sehr weniges zu klein. Will man finden, wieviel der Fehler höchstens betragen kann, so setze man $dt = \frac{d\,vv \surd 2B}{\surd(2cvv - vv^2)} + \frac{vv\,d\,vv}{\surd 2B \surd(2cvv - vv^2)}$, und man erhält durch die Integration $\int \frac{vv\,d\,vv}{\surd(2cvv - vv^2)} = c.\,A\int v\frac{vv}{c} - \surd(2cvv - vv^2)$. Weil nun $\surd(2cvv - vv^2) = c\,\mathit{sin}\,A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{c}$, so wird dies Integral $= c\,(A\,\mathit{sin}\,v\frac{vv}{c} - \mathit{sin}\,A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{c})$, folglich $t = \frac{\surd B}{\surd^2 g} A\,\mathit{sin}\,v\frac{vv}{c} + \frac{c}{2\surd 2gB}(A\int v.\frac{vv}{c} - \mathit{sin}\,A\int v\frac{vv}{c})$. Da nun dieser Werth von t schon etwas weniges zu groß ist, so hat man zwo Gränzen, zwischen welchen der eigentliche Werth von t enthalten ist.

28. §.

Bey eben den gegebenen Stücken, wie im vorigen §. die Geschwindigkeit zu finden, womit der Kolben bewegt wer-

werden muß, damit das Saugwerk ohne Zeitverlust bey jedem Kolben-Zub soviel Wasser gebe, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann.

Aufl. Die Geschwindigkeit des Kolbens muß so groß seyn, daß derselbe in eben der Zeit um die Höhe des Kolbenzuges steigt, binnen der das Wasser im Stiefel eben diese Höhe erreicht. Man suche also nach dem vorigen §. die Zeit, binnen der das Wasser vom niedrigsten bis zum höchsten Kolbenstande steigt, und setze diese $= t$. Ist nun die Höhe des Kolbenzuges $= vv$, die Geschwindigkeit des Kolbens $= v$, so ist die Zeit, binnen der derselbe den Weg $= vv$ zurück legt, $= \frac{vv}{v}$, weil er mit gleichförmiger Bewegung steigt. Diese Zeit muß $= t$ seyn; also hat man $v = \frac{vv}{t}$.

Es sey z. E. $\beta = 21\frac{1}{2}$ Fuß, $f = \frac{1}{2}$ Fuß, also $b = 22$ Fuß $vv = 2$ Fuß, der Durchmesser der Mündung des Stiefels $= 6$ Zoll, der Mündung der Saugröhre $= 2\frac{1}{6}$ Zoll, also $m : n = 36 : \frac{169}{36} = 1296 : 169$, und $\frac{m-n}{n} = \frac{1127}{169} = 6,668639$; so wird $b + \frac{m-n}{n}\beta = 165,375738 = B$, und $\sqrt{2B} = 18,1865$. Wenn man nun $h = 31$ Fuß setzt, und $a = 6$ Fuß ist, so wird $A = a + h = 37$ Fuß, also $A - b = c = 15$ Fuß, und $\frac{vv}{c} = \frac{2}{15} = 0,1333333$. Dieser Quersinus gehört zum Winkel von $29°56'$, und man erhält $A. 29°56' = 0,522427$. Setzt man nun voraus, daß das gebrauchte Maaß das französische sey, so ist $g = 15,1$ Fuß, und $2\sqrt{g} = 7,7716$. Demnach wird $t = \frac{\sqrt{2B}}{2\sqrt{g}} A \mathit{fv} \frac{vv}{c} = 1,223$ Secunden, so daß diese Zeit noch nicht völlig $1\frac{1}{4}$ Secuncunde beträgt. Wollte man sich davon versichern, daß die Zeit genau genug gefunden sey, so müßte man noch den Ausdruck $\frac{e}{2\sqrt{g}\sqrt{2B}}\left(A\,\mathit{f}v\,\frac{vv}{c} - \mathit{fin}\ A\ \mathit{fin}\ v\,\frac{vv}{c}\right)$ berechnen. Man findet aber

$$A\,\mathit{fin}\,v\,\frac{vv}{c} = 0,\ 522427$$

$$\mathit{fin}\ A\ \mathit{fin}\ v\,\frac{vv}{c} = \underline{0.\ 498992}$$

die Differenz $= 0.\ 023435$

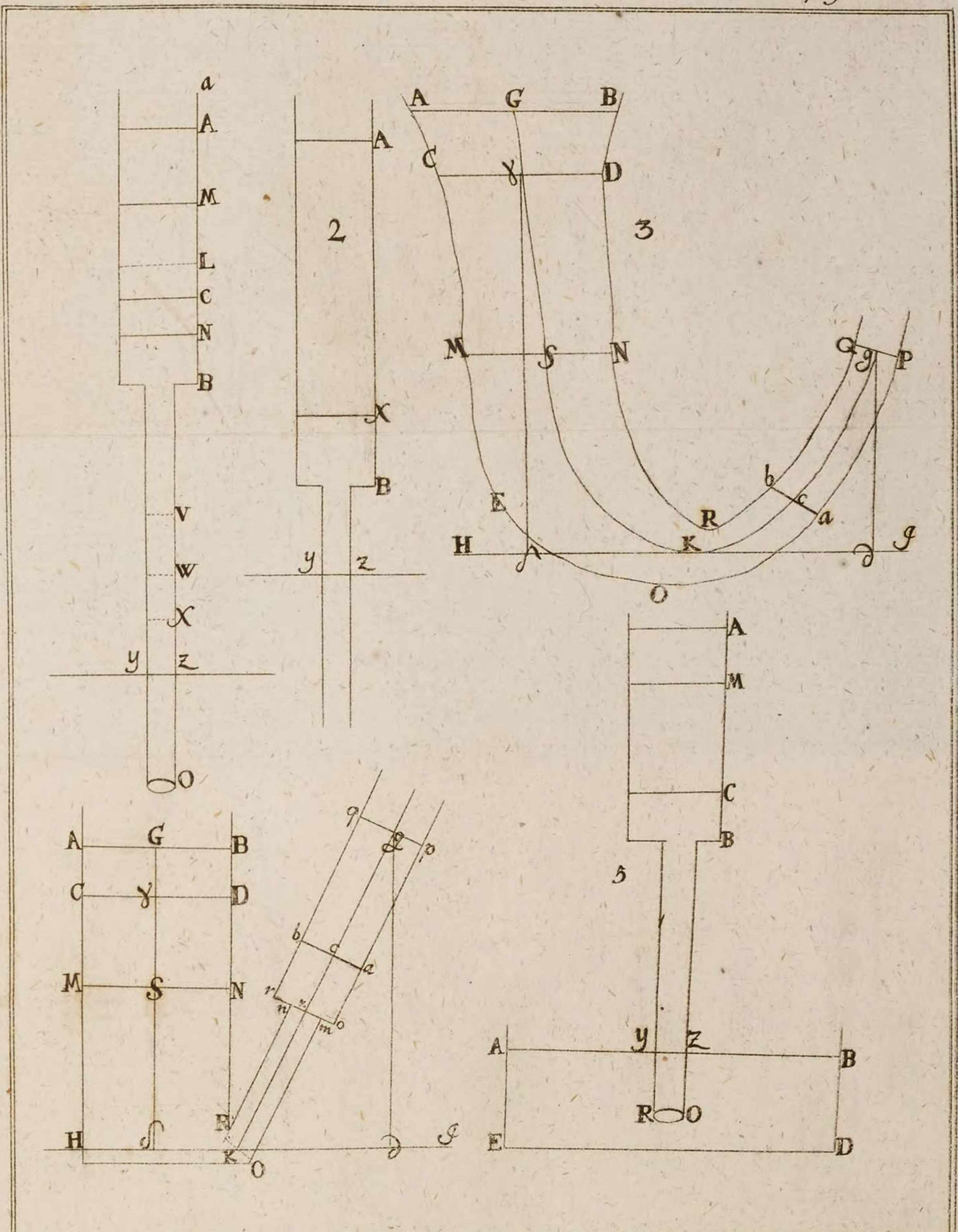
und die übrige Rechnung ergiebt für den erwähnten Ausdruck 0, 00248 Sec. Da nun der Fehler in Bestimmung der Zeit nach der ersten Formul nicht so groß ist, als diese Zahl; so ist jene Rechnung so weit es hier erfordert wird, zulänglich richtig. Man muß indessen wegen der Friction und andrer Hindernisse der Bewegung diese Zeit etwas weniges größer annehmen, als die Rechnung giebt, und man kann sie im gegenwärtigen Exempel auf $\frac{1}{4}$ Secunden schätzen. Dies würde also für die Geschwindigkeit des Kolbens $1\frac{3}{5}$ Fuß oder 1 Fuß $7\frac{1}{5}$ Zoll in einer Secunde geben.

29. §.

Dies Exempel ist aus Belidors Architectura Hydraulica III Buch, III Cap. 911. §. genommen, woselbst aber außer den Querschnitten des Stiefels, und der Saugröhre keine andre data angegeben sind, als die größte Kolbenhöhe von der Oberfläche des Wassers, welches das Saugwerk herauf ziehen soll = 18 Fuß, und die Höhe des Kolbenzuges = 2 Fuß. Die Tiefe, um welche die Saugröhre unter Wasser steht, ist hier 6 Fuß groß angenommen, daher kommen die Höhen über dem Wasser mit den Belidorschen überein. Belidor braucht nach seiner Theorie nicht mehr

data,

data, und nach derselben wäre die Geschwindigkeit des Wassers in der Saugröhre in dem Augenblick, da es die Höhe von 18 Fuß erreicht = 10, 2979 Fuß in einer Secunde, und die Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel = $\frac{10,2979 \times 169}{1296}$ = 1, 34 Fuß, also 1 Fuß 4 Zoll. Nach der alten von H. Belidor getadelten Regel würden auf 28 Fuß für diese Geschwindigkeit heraus kommen, welches also eine ungemein fehlerhafte Regel ist. Wollte man aber nach der richtigen Formul des 22. §. $q = \frac{(A -- b)vv -- \frac{1}{2}vv^2}{b + \frac{m -- n}{n}\beta + vv}$ die Geschwindigkeit berechnen, womit das Wasser den höchsten Kolbenstand erreicht; so würde man 3, 18 Fuß finden. Hieraus ergiebt sich, daß Belidor jene sonst gebräuchlich gewesene Regel für die Bestimmung der Geschwindigkeit des Kolbens mit Recht tadle, weil sich wirklich bey einer so grossen Geschwindigkeit des Kolbens der Raum des Kolbenzuges nicht ganz mit Wasser würde anfüllen können. Seine eigene Regel giebt zwar auch eine unrichtige Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel. In Absicht der andern Anwendung aber, welche er davon macht, um die Geschwindigkeit des Kolbens zu finden, kömmt sie der Sache ungemein viel näher. Sie giebt gewöhnlich die Geschwindigkeit des Kolbens noch etwas kleiner als nöthig ist, da sie im Gegentheil nach der andern Regel sehr viel zu groß würde gefunden werden. Wie sehr übrigens beyde Regeln von der richtigen Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers abweichen, fällt am meisten in die Augen, wenn man nach dem 25. §. die größte Geschwindigkeit desselben berechnet, und die Höhe vv, um welche es steigen müßte, wenn es bis zu dieser Geschwindigkeit gelangen sollte. Man findet diese größte Geschwindigkeit im gegenwärtigen Exempel von 6, 14 Fuß in einer Secunde, und das Wasser müßte 14, 375 Fuß hoch über den niedrigsten Kolbenstand steigen, wenn es zu dieser Geschwindigkeit gelangen sollte. Für diesen einzigen Fall giebt die vormalige Regel die Geschwindigkeit des Wassers richtig, Belidors Regel aber giebt sie viel zu klein.



a
A
M
L
C
N
B
V
W
X
y z
O
2
A
X
B
y z
A G B
C γ D
3
M S N
Q g P
b c a
E
R
K
H
O
A
M
C
B
5
A y z B
R O
E D
A G B
C γ D
M S N
H
q p
b c a
r n m o
K O