Leonard Grubers
Benediktiners
einige
analytische Beyspiele
und
Anwendungen
der verschiedenen
Wendungen der krummen Linien,
an die churfürstliche Akademie der Wissenschaften
in München eingesendet.
1770.

Erinnerung.

Die Werke eines Krammers, dieses so grossen Meisters in der Mathematik, sind gewiß für sich wichtig und nützlich genug einen Liebhaber der mathematischen Wissenschaften und sonderlich des höhern Kalkulus zu beschäftigen. Man wird mir es also zu gut halten, wenn ich in Durchlesung dieses so vortreflichen Buches etwas mehrers gewagt habe, als selbes bloß zu durchgehen. Ich habe nämlich seine erhabenen Grundsätze besser einzusehen, und mich nach der Vorschrift dieses vollkommenen Mathematikers zu üben, einige Beyspiele gewählet, welche in sich zwar willkührlich herausgesucht sind, zu den nachgesetzten

An=

Anwendungen aber, welche meine Hauptabsicht sind, mir sehr dienlich seyn werden. — In den vorausgeschickten Begrifen zu Anfange des ersten Abschnittes wird man sich wohl einiger Klarheit halber auf des H. Krammers Werke beziehen müssen; denn ich wollte und könnte selbe weder gänzlich weglassen, noch auch ausführlich anrücken. Die angesetzten Beyspiele habe ich nach der einfachsten und willkürlichen Methode berechnet. Man wird aus einer angestellten Vergleichung sehen können, ob ich darinn glücklich war; und ein wiederhollter Versuch mag selbe bestättigen. — Die in zweenen Abschnitten gemachten Anwendungen, ob sie schon etwa der gehabten Absicht des vom Verfasser geschriebenen Werkes nicht am nächsten kommen, *) so werden sie doch derselben in dem Stücke genug thun, daß ich damit ein obschon geringes Probstück liefere, wie die analytischen Grundsätze dieses gelehrten Mannes nicht nur in ihrer Theorie erhaben sind, sondern auch auf andere Wissenschaften, als hauptsächlich auf die Mechanik und Astronomie, einen starken Einfluß haben, und mit einem ungemein grossen Vortheile mögen angewendet werden. **) Hier ist

*) Der Verfasser erkläret selbe in ihrem Umfange also: Par cette art infiniment utile de deduire d'un seul principe universel un grand nombre de verités, de les soumettre à des Regles generales, de les developper par des consequences uniformes, & de les lier les unes aux autres, de la maniere la plus propre, à faire naître de nouvelles decouvertes &c.

Preface de l'Anal.

**) On sauroit s'en passer dans les Sciences, dont la Perfection depend de la geometrie, telles, que la Mechanique, l'Astronomie, la Physique. Les Systemes modernes supposent necessairement cette connoissance.

Pref. de la même.

ist also der zureichende Grund dieser meiner Beschäftigung aufgedecket. Habe ich in der Zukunft genugsame Zeitmusse und hinreichende Kräften, so werde ich davon mehrere und etwa sehr nützliche Anwendungen nach eben diesen Gründen zu machen, mir angelegen seyn lassen. Indessen wird es mir genug seyn, wenn eine Churfürstl. Akademie dieses geringe Piece als eine mittelmäßige Nachahmung, und als ein Zeugniß meines Fleißes und Genie zur Mathematik aufzunehmen, gnädigstes Belieben trägt. Vielleicht werde ich mit der Zeit in wichtigern Gegenständen Ihren Beyfall zu erhalten im Stande seyn, wenn man mir doch für die weitere Beförderung meiner Lehrbegierde an die Hand gehen wird. Ich wünsche gewiß nichts so sehr als einer Churfürstl. Akademie meine obschon geringen Dienste ächt thätig wiedmen zu können.

Analytische Beyspiele und Anwendungen der verschiedenen Wendungen der krummen Linien.

Erster Abschnitt.

Einige Beyspiele derselben.

1. §.

Von den verschiedenen Wendungen der krummen Linien sich einen ächten Begrif zu machen, so darf man nur eine krumme Linie betrachten, wie selbe von einer geraden durchschnitten wird, also zwar, daß ein Theil davon auf dieser, der zweyte aber auf einer andern Seite zum Vorschein kömmt: wo es sich dann fügen kann, daß eine solche gerade Linie, welche man deßwegen die

Secans nennet, die krumme in mehrern Puncten durchschneide. Wenn nun zween solche Puncte des Durchschnittes sich einander unendlich nahe sind, daß selbe in einen einzelen Punct zusammenfließen, und man sie gar nicht mehr unterscheiden kann, so machen sie einen einzelen Berührungspunct aus. Hiemit wird die gerade Linie die krumme nicht mehr durchschneiden, sondern selbe nur in einem einzelen Puncte berühren: oder, wie man sagt, die Secans wird zur Tangente.

2. §.

Der nämliche Punct einer Linie bekömmt eine gegenseitige Wendung, wenn drey Durchschnittspuncte in einem einzelen zusammen fließen. Hiemit wird die gerade Linie, welche man durch diese 3 unendlich nahen Puncte ziehet, die krumme zugleich durchschneiden und berühren (1. §.). Es mag sich dieses aber nur fügen in jenen Gattungen der krummen Linien, welche über die zwote sogenannte Ordnung oder Klasse hinaus sind; zum Beyspiele in einer Parabole, wo man die Gleichung $y = ax^3$ annimmt. Nun in einem solchen Falle kann man wohl annehmen, daß die Tangente in dem Puncte einer entgegengesetzten Wendung drey Puncte von der krummen Linie berühre: da doch in den krummen Linien der zwoten Gattung diese Berührung nur in einem einzelen Puncte geschehen kann; in den gemeinern aber in zween Puncten, welche sich nämlich einander unendlich nahe seyn müssen: deßwegen wird man auch in diesen letztern niemals einen Punct von einer entgegengesetzten Wendung antreffen, wovon wir im analytischen Kalkulus genugsame Beyspiele haben, und welche hier anzurücken, der enge Raum nicht zuläßt.

3. §.

Ein Punct der Linie nimmt an sich eine schlangenförmige Wendung, wenn zum Beyspiele eine gerade Linie eine krumme von der 4ten oder noch höheren Klasse in dem Puncte der entgegengesetzten Wendung berührt. Deßwegen, wenn wir setzen, daß was immer für eine Secans unendlich klein werde, so wird sie die krumme Linie nicht mehr durchschneiden, sondern selbe nur berühren, allein diese Berührung geschieht in zween Punkten, welche man für 4. Durchschnittspuncte halten kann (§. 1.). Indessen, weil diese Puncte sich einander unendlich nahe sind, so wird man wohl die gegenseitige Wendung nimmermehr durch die Sinne wahrnehmen können, den der Raum, welchen sie einnehmen, ist unendlich klein. Um uns also diese schlangenförmige Wendung vorzubilden, müssen wir die Theorie des Analysis zu Hülfe nehmen, durch welche allein wir uns einen, obschon abstracten Begrif machen können.

4. §.

Es ist aber aus den gemeinern Beyspielen der Gleichungen einer Parabole schon ausgemacht, daß, wenn in selber $y = x^2$, oder $y = x^3$, oder $y \mp x^4$, oder $x = x^5$ und s. w. ist, die Tangente allzeit die krumme Linie in dem Puncte der gegenseitigen Wendung öfters als in zween Puncten berühre, als der Grad der entgegengesetzten Wendung anzeiget; also zwar, daß, wenn man für eine Parabole eine allgemeine Gleichung z. B. $y = x^m$ annim̃t, so ist es durchaus richtig, daß die Parabole in ihrem Ursprunge einen Punct der gegenseitigen Wendung hat, dessen Grad durch $m - 2$ kann ansgedrücket werden. Es wird auch dieser Punct der entgegengesetzten Wendung oder Krümmung scheinbar werden, wenn m eine ungleiche Zahl bedeutet: ist selbe aber nicht ungleich, so ist die Krümmung dieses Punctes unwahrnehmlich: und in diesem Falle, wird es eigentlich ein Punct von einer schlangenförmigen Wendung seyn.

5. §.

Dieses sind nun die Hauptbegrife, welche vorauszusetzen es nöthig war, um die nachfolgenden Beyspiele und Anwendungen in das Klare zu bringen. Will man aber von diesen Begrifen eine mehrere Erklärung oder auch Beyspiele davon haben, so kann man selbe in den analytischen Werken des Herrn Krammers und des Mr. de Gua *) finden. Uebrigens war bisher nur die Rede von den einfachen Puncten in ihren verschiedenen Wendungen; denn es giebt auch noch andere, welche sich in Rücksicht auf die nämliche krumme Linie vervielfältigen können. Also z. B. ist es ein zweyfacher Punct, wenn selber zween Bögen oder sogenannten Aesten der krummen Linie gemein ist, oder auch durch welchen man die krumme Linie zweymal ziehet. Auf gleiche Weise nennt man einen dreyfachen Punct, welcher dreyen Puncten der krummen Linie gemein ist, oder durch welchen die krumme Linie dreymal sich wälzet, und so weiters zu reden von den vier, fünffachen Puncten, von welchen gleichfalls in benennten Werken Beyspiele anzutreffen sind. Ich will also bey andern Beyspielen den Anfang machen.

6. §.

Es ist in der Theorie der verschiedenen Wendungen eines Punctes in einer krummen Linie ein Hauptgrund, daß man wisse, ob ein solcher Punct, dessen Lage wir indessen außer den Ur-

sprung

*) Usage d' Anal.

sprung der krummen Linie annehmen wollen, einfach oder vielfältig sey. Man kann solches nach der folgenden Methode ausforschen. Man übersetze vor allen den Ursprung der krummen Linie auf den gegebenen Punct; und man ziehe daselbst eine Abscisse m und eine Ordinate n. In der Gleichung selbst setze man statt x ein $m + x$ und statt y ein $n + u$. Wenn man nun diese Werthe in der gegebenen Gleichung einrücket, so kann man selbst aus der Zahl der mangelhaften Reihen, welche in der Gleichung zum Vorschein kommen, von der Natur des gegebenen Puncts ein Urtheil fählen. Doch in der Umänderung der gegebenen Gleichung richtig und bequem zu gehen, wird es gut seyn, wenn man die gegebene Gleichung in einer Reihe schreibt, und unter einem jeden Absatz derselben die Exponenten des x und y hinsetzt, welche man zwar durch einen Punct unterscheidet, ohne aber hiedurch eine Multiplication anzuzeigen, sondern nur zu erinnern, daß der erste Exponent von dem y, der zweyte von dem x geborget sey. Man ziehe sodann unter diese beyden Reihen eine Linie, und multiplicire durch den Exponenten des y alle Absätze der gegebenen Reihe ins besondere. Man soll aber das y einmal weglassen, und statt selben ein u einrücken. Auf gleiche Weise verfährt man mit dem Exponenten des x, welches man gleichfalls einmal wegläßt, und dafür ein z ansetzt. Diese Berechnungsart setzt man durch jede Absätze der gegebenen Gleichung fort; und, weil man die neu erhaltene allzeit unter die gezogene Linie herabsetzt, so bekömmt man wiederum eine neue Reihe. Den Absätzen dieser neuen Reihe setze man ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten hinzu, welcher von dem y ist übrig geblieben, wie auch ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten von x. Alsdenn fahre man mit der nämlichen Berechnungsart so lange fort, bis in keinem Absatze der gegebenen Gleichung das y oder x mehr zum Vorschein kömmt. Endlich sammle man die Absätze, welche von dem u und z in der nämlichen Potenze stehen, zusammen, und, da man statt des y ein n, und für das x ein m ansetzet, so bekömmt man eine ganz neue Gleichung, so wie wir es klärer im folgenden Beyspiele sehen werden.

7. §.

Erstes Beyspiel.

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0.$ *)

4.0. 3.0. 2. 1. 2. 0. 1.1. 0.2. 0.1. = 0.

$+ 4y^3u - 24y^2u - (24xyu - 12y^2z) + 32yu +$

$\frac{3}{2}.0.$ $\frac{2}{2}.0$ $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.$ $\frac{2}{2}.0.$ $\frac{1}{2}.0.$

$(48xu + 48yz) + 8xz - 64z$

$0.\frac{1}{2}.$ $\frac{1}{2}.0.$ $0.\frac{1}{2}.$ $0.0.$

$+ 6y^2u^2 - 24yu^2 - (12xu^2 - 12yuz) - 12yuz]$

$\frac{3}{3}.0.$ $\frac{1}{3}.0.$ $0.\frac{1}{3}.$ $\frac{1}{3}.0.$ $\frac{1}{3}.0.$

$+ 16u^2 + 24zu + 24zu + uz^2$

0.0. 0.0. 0.0. 0.0

$+ 2yu^3 - 8u^3 - 4u^2z - 4u^2z - 4^2z.$

$\frac{1}{4}.0.$ 0.0. 0.0. 0.0. 0 0

Die Abänderung der gegebenen Gleichung wird also folgende seyn

$$n^4 - 8n^3 - 12mn^2 + 48mn + 4m^2 - 64m + (4n^3 - 24n^2 - 24mn + 32n + 40m)u + (-12n^2 + 48n + 8m - 64)z + (22n^2 - 24n - 12m)u^2 + 4z^2 + (24n + 24)zu + (2n - 8)u^3 - 12u^2z - \frac{u^4}{2} = 0.$$

8. §.

---

*) Diese Gleichung, welche ich zur Ausführung dieses Beyspieles angenommen, ist wirklich die Gleichung einer krummen Linie, (siehe weiter zurück 14. §.) und man kann selbe auch in des Krammers analytischem Werke angesetzt finden: allein er beziehet sich in diesem Stücke auf des Saurins Abhandlungen, welche in den memoires de l'Academie 1716. Pag. 61. nachzusuchen sind.

8. §.

Wenn man auf die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung und auf ihre nacheinander angesetzten Reihen aufmerksam ist, so wird man leicht wahrnehmen, daß, weil m und n als bestimmte Quantitäten angenommen werden, die ganze erste Reihe der abgeänderten Gleichung bestimmt sey, und wenn man selbe auf ein analytisches Dreyeck beziehet, so wird sie in dessen Gipfel zu stehen kommen. Deßwegen, wenn diese erste Reihe nach eingerücktem Werthe des x und y, dem m nämlich und den n (6. §.) nicht gänzlich getilget wird, so gehört der zum Ursprunge einer Linie angenommene Punct nicht zu einer krummen Linie: löset sich aber diese Reihe in ein O auf, so ist es ein Zeichen, daß dieser Punct zur krummen Linie gehöre.

9. §.

Wenn man nun einmal diesen Punct bestimmt hat, daß selber zur krummen Linie gehöre, so kann man untersuchen, ob selber einfach oder vielfältig sey (5. §.) Man muß also die zwote abgeänderte Reihe der gegebenen Gleichung hernehmen, und in selber die Werthe von m und n einrücken. Es ist aber klar, daß in dieser Reihe das u und z als die einfachsten Potenzen enthalten sind; hiemit alle diese Absätze in einem analytischen Dreyecke die erste Horizontalreihe von dem Gipfel an einnähmen. Wenn nun besagte abgeänderte Reihe sich selbst nicht gänzlich tilget, sondern ein oder andrer Absatz übrig bleibt, in welchem ein u oder z enthalten sind, so ist es gewiß, daß auch in einem Dreyecke die erste Horizontalreihe von der Spitze desselben schon eingenommen sey: hingegen tilget sich diese Reihe, das ist, ist die Spitze des analytischen Dreyeckes noch leer, so kann man schließen, daß daß der angenommene Punct nur einfach sey. Tilget sich nun

ferners

ferners auch die zwote abgeänderte Reihe, so hat man sich an die dritte zu halten, und in selber die Werthe des m und n einzurücken. Wenn diese sich nicht tilget, so wird in einem analytischen Dreyecke die zwote Horizontalreihe von der Spitze an eingenommen seyn, weil nämlich in selber Absätze enthalten sind, in welchen man das u^2, uz, und z^2 antrift (7. §.). Und also wird der Punct zweyfach seyn. Gehet man noch weiters, und tilget sich gleichfalls die dritte Reihe, so wird man in der vierten die nämlichen Werthe des m und n einrücken müssen, und dieses so lang, bis man weis, ob der Punct dreyfach, vierfach ꝛc. sey. Ich setze hievon Beyspiele an.

10. §.

Zweytes Beyspiel.

Man nehme die vorige Gleichung, welche schon §. 7. in eine andere ist abgeändert worden. Man kann also davon zum ersten untersuchen, ob der Punct, dessen ordinate wir n die Abscisse aber m geheißen haben (§. 8.) und davon ich eine jede $= 2$ annehme, zur krummen Linie gehöre. Dieses auszuforschen, so darf man nur in der gegebenen Gleichung: $y^4 = 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ sowohl für y als x den 2 einrücken, und man wird folgende Gleichung überkommen; nämlich: $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 128 = 0$. Weil nun diese erste Reihe sich selbst tilget, so gehört nach dem erst gesagten (§. 8.) der angenommene Punct zur krummen Linie.

11. §.

Nachdem man nun weis, daß dieser Punct zur krummen Linie gehöre, so läßt weiters die Frage, ob selber unter die einfachen oder vielfältigen zu zählen sey (§. 5.). Man nehme also von der gegebenen und schon abgeänderten Gleichung die zwote Reihe für sich, nämlich

$$\begin{array}{ccccccc} y^4 - 8y^3 & - 12xy^2 & + 16y^2 & + 48xy & + 4x^2 & - 64x & (\text{§. 7.}) \\ 4.0 \quad 3.0. & 2.0. & 2.0. & 1.1. & 0.2. & 0.1 & \\ \hline \end{array}$$

$$4y^3u - 24y^2u - 24xyu - 12y^2z + 32yu + 48xu$$
$$+ 48yz + 8xz - 64z$$

Setzt man nun für das x und y den bestimmten Werth von m und n, nämlich $= 2$ und 2 an (§. 10.), so überkömmt man folgende Reihe:

$$(4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x)\,u +$$
$$(32 - 96 - 96 + 64 + 96)\,u +$$
$$(-12y^2 + 48y + 8x - 64)\,z.$$
$$(-48 + 96 + 16 - 64)\,z.$$

Weil nun auch die buchstäbliche Quantitäten nämlich u und z einander aufgehoben werden, so verbleibt die andere Horizontalreihe eines analytischen Dreyeckes leer, und hiemit ist der angenommene Punct wenigst zweyfach (§. 9.)

12. §.

Nach dem erstgesagten tilget sich also auch die zwote Reihe, und daher kann man mit der dritten Reihe einen ferneren Versuch machen, um nämlich zu sehen, ob der angenommene Punct etwa nicht dreyfach sey (§. 9.). Man nehme also von der gegebenen und schon abgeänderten Gleichung die dritte Reihe (§. 7.), und, wenn man damit nach der vorigen Methode (§. 9.) verfährt, so überkömmt man folgendes.

$$4y^3 - 24y^2u - 24xyu - 12y^2z + 32yu + 48xu$$
$$\tfrac{3}{2}.\,0. \quad \tfrac{2}{2}.\,0. \quad \tfrac{1}{2}.\,\tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{2}{2}.\,0 \quad \tfrac{1}{2}.\,0. \quad 0.\,\tfrac{1}{2}.$$
$$+ 48yz + 8xz - 64z.$$
$$\tfrac{1}{2}.\,0. \quad 0.\,\tfrac{1}{2}. \quad 0.\,0$$

$$6y^2u^2 - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yuz - 12yuz + 16u^2 + 24uz + 24uz + 4z^2.$$

oder: $(6y^2 - 24y - 12x + 16)u^2 + (-12y - 12y + 48)uz + 4z^2$,

13. §.

In der zwoten vorher angesetzten Reihe (§. 11.) haben wir statt des x und y ihren Werth m und $n = 2$ und 2 angesetzt, wodurch dann die letzte Reihe sich selbst aufgehoben hat. Doch dieses wurde niemals in der dritten Reihe (§. 12.) angehen, wenn man es versuchen sollte; denn dadurch würde doch niemals der Absatz der letzten Reihe, nämlich $4z^2$, in welchem nämlich kein x oder y zum Vorschein kömmt, können getilget werden. Aus der Aufhebung also einer ferneren Operation ist es klar, daß der untersuchte Punct nur zweyfach sey (§. 9.).

14. §.

So unnütz es nun seyn würde wegen der fernern Untersuchung des angenommenen Puncts weiter zu gehen, und eine fernere Abänderung der letzt erhaltenen Reihe vorzunehmen (12. §.), so würde man doch ein solches thun können um die Natur der krummen Linie, für welche diese Gleichung gegeben wurde (7. §. *) vollkommen auszuforschen. Wenn man also in der ganzen abgeänderten Finalgleichung, welche wir oben (§. cit.) angesetzt haben, für das m und n ihren Werth nämlich 2 einrücken (§. 10.), so wird die angeführte Finalgleichung sich in folgende verwandeln:

u^4

$u^4 - 12u^2 z - 32u^2 + uz^2 = 0$. Diese Gleichung hat nun 4 Wurzel davon I. $u = \sqrt{(8z + 16 + 4\sqrt{(2z^2 + 12z + 6)})}$ II. $u = -\sqrt{(6z + 16 + 4\sqrt{(2z^2 + 12z + 6)})}$. III. $u = +\sqrt{(6z + 16 - 4\sqrt{(2z^2 + 12z + 6)})}$. IV. $u = -\sqrt{(6z + 16 - 4\sqrt{(2z + 1 + 16)})}$. Oder aber, wenn wir sie abkürzen, bekommen wir folgende Ausdrücke: I. $+\sqrt{(4z+8)} + \sqrt{(2z+8)}$. II. $-\sqrt{(4z+8)} - \sqrt{(2z+8)}$. III. $+\sqrt{(4z+8)} - \sqrt{(2z+8.)}$ IV. $-\sqrt{(4z+8)} + \sqrt{(2z+8)}$. Wollen wir nun nach des Krammers Beyspiele * diese Ausdrücke wirklich auf eine krumme Linie beziehen, und für die Figur, welche auf die gegebene Gleichung paßt (§. 7.) einige Anwendung machen, so werden wir sehen, daß jeder Ausdruck einen parabolischen Ast in der beygesetzten Figur anzeige. Also beziehet sich der erste Ausdruck $u = \sqrt{(4z+8)} + \sqrt{(2z+8)}$ auf dem Ast f D; der zweyte, $u = -\sqrt{(4z+8)} - \sqrt{(2z+8)}$ auf F d; der dritte $u = +\sqrt{(4z+8)} - \sqrt{(2z+8)}$ auf F A E; der vierte $u = -\sqrt{(4z+8)} + \sqrt{(2z+8)}$ auf f A e. Die letztern zween haben zum Asymptote die Parabole e A E, wovon die Gleichung ist $u^2 = (6 - 4\sqrt{2})z$; die ersteren aber die Parabole d A D, unter der Gleichung $u^2 = (6 + 4\sqrt{2})z$. Endlich wird die gegebene Gleichung: $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ (§. 7.) durch eben diese Figur vorgestellt, nämlich durch die krumme Linie, welche man auf den Punct F als ihren Ursprung beziehet, und deßwegen der Punct A für einen zweyfachen (§. 5.) muß angesehen werden, dessen Abscisse nämlich F G, und die Ordinate G A ist, deren eine jede = 2 (§. 11.).

15. §.

Die ganze Berechnung und Ausführung dieses gegebenen Beyspieles (§. 10.) hat für sich vorausgesetzt, daß der ange-

*) Siehe desselben Analyse auf der 419. Seite.

nommene Punct zur krummen Linie gehöre, so wie wir dieses schon vorher (§. 11.) bestimmet haben. Setze man nun, daß der angenommene Punct außer dem Ursprunge der krummen Linie in einer deren zwoen Axen anzutreffen sey, so wird die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung viel leichter ausfallen; denn ist der gegebene Punct in der Axe der Abscissen, so muß man eben darum das $y = o$ und das $x = n$ (welches in diesem Falle eine unabänderliche Quantität anzeiget) annehmen: hiemit werden sich alle Absätze der gegebenen Gleichung, welche nämlich mit dem y multipliciret sind, von selbst aufheben; und also die Abänderung nur mit jenen vorzunehmen seyn, in welchen das x zum Vorschein kömmt. Auf gleiche Weise, wenn man den angenommenen Punct in die Axe der Ordinaten übersetzet, so wird das x getilget, das y aber einer unabänderlichen Quantität müssen gleich gehalten werden.

Drittes Beyspiel.

16. §.

Ich nehme hier wiederum eine Gleichung: $y^3 - 2ay^2 + a^2 y + x^2 y - 2ax^2 = o$, welche sich auf die beygesetzte Figur beziehet, und die krumme Linie P A M zum Gegenstand hat, wovon der Ursprungspunct in P gesetzet wird.* Es ist also der gegebene Punct außer der krummen Linie, so wie wir es vorher verlangt haben (§. 15.). Nun untersuche man, ob der Punct A einfach oder vielfach sey. Weil man hier $PA = a$, und $x = o$ annehmen muß, so kann man in der gegebenen Gleichung die Absätze $x^2 y - 2ax^2$ weglassen. In den übrigen aber statt des y das a ein-

*) Die Construction dieser krummen Linie, wie auch den Beweis ihrer Gleichung kann man in dem angezogenen analytischen Werke des Kramers pag. 411. finden.

einrücken. Hiemit bekömmt man statt der gegebenen folgende Gleichung: $a^3 - 2\,a^3 + a^3 = o$. Der Punct A gehört also zur krummen Linie (§. 8.). Nun mache man einmal mit der gegebenen Gleichung eine Abänderung nämlich:

$$\begin{array}{l} y^3 - 2\,a\,y^2 + a^2\,y \\ 3 \qquad\; 2 \qquad\; 1 \\ \hline \end{array}$$

$(3y^2 - 4ay + a^2)\,u$ (§. 6.); und wenn man für das a ein y einrückt, so ist $(3\,a^2 - 4\,a^2 + a^2)\,u = o$. Es tilget sich also die erste Horizontalreihe, und der Punct ist wenigst dreyfach (§. 9.). Nehmen wir aber von der gegebenen abgeänderten Gleichung die dritte Reihe, nämlich:

$$\begin{array}{l} 3\,y^2\,u - 4\,a\,y\,u + a^2\,u \\ \tfrac{3}{2} \qquad\quad \tfrac{1}{2} \qquad\quad 0 \\ \hline \end{array}$$

$3\,u^2\,y - 2\,a\,u^2$, so sehen wir sogleich, daß, wenn wir auch statt des y das a einrücken, dennoch diese Reihe nicht getilget werde. Deßwegen kann man schließen, daß der untersuchte Punct A nur allein zweyfach sey. (§. cit.)

17. §.

Alles, was bisher ist angeführt worden, zielet ab, theils die ganze Abänderung einer gegebenen Gleichung zu finden (§. 8.), theils die Vielfältigkeit des gegebenen Puncts zu bestimmen (§§. 9. 12.) theils selben auf die krumme Linie zu beziehen (§. 10.), und endlich die Natur der krummen Linie für die gegebene Gleichung auszuforschen (§. 14.): dieses aber sind nur sonderliche Fälle. Man kann aber auch allgemeine setzen, wo dann sowohl die Beyspiele als die Methode selbst sich unter einem anderen Gesichtspuncte darstellen wird. Ein solcher allgemeiner Fall ist es, wenn man insgemein fraget, ob die gegebene Gleichung, welche sich auf eine krumme Linie beziehet, einen Punct habe, welcher vielfältig sey. Item: was für eine Lage ein solcher Punct in der krummen Linie der gegebenen Gleichung habe. Der ersten allgemeinen Aufgabe kann man zwar durch die obenangeführte Methode der Abänderung der gegebenen Gleichung genug thun (§. 6.). Man setzt nämlich die erste Reihe, in welcher ein u und x zum Vorschein kömmt, mit einer o in eine Gleichung, und also wird man drey Gleichungen überkommen; nämlich eine, welche für die krumme Linie ist gegeben worden; wiederum eine andere, in welcher die Conficienten von u; und endlich eine dritte, wo die Conficienten von x enthalten sind. Aus diesen 3 Gleichungen kann man nun eine heraus nehmen, welche zur Bestimmung des Werthes des x, oder auch des y die geschickteste zu seyn scheint. Den überkommenen Werth hat man hernach in die übrigen zwo Gleichungen einzurücken, damit man hernach auch von der anderen unbekannten Quantität, z. E. von dem y seinen Werth überkomme, welcher, wenn er nicht negative und überall der nämliche ist, so wird auch der Werth des x der ächte und bestimmte seyn. Kömmt man aber in der Untersuchung dieses Werthes auf eine falsche Folge, so hat man selben aus anderen Gleichungen zu untersuchen.

18. §.

In dem Falle, daß der Punct dreyfach ist, so hat man noch die zwote Reihe, in welcher nämlich; das u^2, $u\,x$, x^2 sich einfinden (§. 7.), hinzuzusetzen, wo man dann wiederum ihre conficienten mit einer o zu vergleichen hat, und also hat man den Werth der unbestimmten Größen durch 6 Gleichungen auszurechnen. Auf gleiche Weise wird man in der Untersuchung eines Punctes, welcher vierfach ist, mehrmal eine neue Reihe hinzufügen müssen, in welcher nämlich u^3, $u^2\,x$, $u\,x^2$, x^3 würden enthal-

ten

ten seyn; zugleich wurden auch zu den vorigen 6 Gleichungen 4 neue hinzukommen ꝛc. Die Aufgabe wird also mehr als bestimmt, und öfters auch nicht einmal auflößlich seyn. Ich will davon wiederum ein Beyspiel geben.

19. §.

Viertes Beyspiel.

Ich nehme die schon einmal angesetzte Gleichung; nämlich

$$\begin{array}{ccccc} y^3 - 2ay^2 & + \; a^2 y & + \; x^2 y & - \; 2ax^2 = 0 \text{ (16. §.)} \\ 3.0. \quad 2.0. & 1.0. & 1.2. & 0.2. \\ \hline \end{array}$$

$$(3y^2 - 4ay + a^2 + x^2)\, u + (2xy - 4ax)\, z.$$

Man erhält also folgende 3 Gleichungen (17. §.) I. $y^3 - 2ay^2 + ay^2 + x^2 y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. Diese letzte Gleichung wird nun die bequemste seyn, hiedurch den Werth des x zu bestimmen. Doch, weil selbe sich nicht aufhebt, als in dem Falle, daß man das $y = 2a$ oder das $x = 0$ annehme, so setzen wir einmal, weil man doch den Werth des x untersuchen soll, daß $y = 2a$: hiemit verwandelt sich die gegebene Gleichung (16. §.) in folgende: $12a^2 - 8a^2 + a^2 + x^2 = 5a^2 + x^2 = 0$; und also wird $x = \pm a\sqrt{-5}$, welche Auflösung denn wegen der negativen Wurzel unter die Reihe der unmöglichen gehört. Man muß sich also zu einer andern wenden, und nach dem gesagten das $x = 0$ annehmen. In diesem Falle wird die vorgesetzte zwote Gleichung nämlich $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$ in $3y^2 - 4ay + a^2 = 0$ abgeändert werden, wo denn $y^2 - \frac{4}{3}ay = -\frac{1}{3}a^2$ und nach vollkommen ersetzten Quadrate und ausgezogener Wurzel bekömmt man endlich das $y = \frac{2a}{3} \pm \frac{a}{3}$; das ist: $y = a$, $y = \frac{a}{3}$. Rücke

man

man nun in der ersten Gleichung statt des y die erste Wurzel a ein, und nehme man zugleich $x = 0$ an, so wird seyn $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Es hat also die krumme Linie, welche zu dieser Gleichung gehört (16. §.), einen vielfachen und zwar einen zweyfachen Punct (9. §.), wovon die Abscisse $= 0$, die Ordinate $= a$ ist. Die andere Wurzel nämlich $\frac{a}{3}$ ist, wie man sieht, zur weitern Berechnung unbrauchbar. Allein man könnte weiters fragen, ob dieser Punct etwa nicht dreyfach sey. Man untersuche also die zwote Reihe der abgeänderten Gleichung (16. §.).

$$\begin{array}{l} 3y^2u - 4ayu + a^2u + 2xyz + 4axz + x^2u \\ \underline{\tfrac{2}{2}.\ 0.\quad \tfrac{1}{2}.0.\quad 0.0.\quad \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\quad 0.\tfrac{1}{2}.\quad \tfrac{2}{2}} \\ 3yu^2 - 2au^2 + xuz + yz^2 - 2az^2 + xuz. \\ (3y - 2a)\,u^2 + 2xuz + (y - 2a)\,z^2. \end{array}$$

Man überkömmt also folgende Gleichungen: I. $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. IV. $3y - 2a = 0$. V. $2x = 0$. VI. $y - 2a = 0$. Wir haben aber erst gezeigt, daß, wenn wir $y = 2a$ annehmen, die Auflösung unter die unmöglichen müsse gezählet werden. Nimmt man aber aus der 5ten angesetzten Gleichung des $x = 0$, so wird die erste Gleichung in $y^3 - 2a^2y + a^2y = 0$; oder in $y^2 - 2ay + a^2 = 0$ verwandelt, wo man denn zwo gleiche Wurzel überkömmt; nämlich $y = a$ und $y = a$. Die sechste Gleichung gilt endlich $y = 2a$. Weil es aber unmöglich ist, daß auf einem einzelen Punct eine zweyfache Abscisse ruhe, so ist der untersuchte Punct der krummen Linie keineswegs dreyfach.

20. §.

20. §.

Fünftes Beyspiel.

Nach den angeführten Regeln (17. 18. §§.) werde ich nun auch für den nämlichen Fall als es im letzt berechneten Beyspiele geschehen (19. §.) auch die oben angesetzte Gleichung (7. §.) untersuchen, wo es denn nicht mehr nöthig seyn wird, sich auf die schon bekannte Methode (17. 18. 19. §§.) zu beziehen.

$$\begin{array}{lllllll} y^4 & -\,8y^3 & -\,12xy^2 & +\,16y^2 & +\,48xy & +\,4x^2 & -\,64x = 0 \\ 4. & 3. & 2.1. & 2. & 1.1. & 2. & 1. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} 4y^3u & -\,24y^2u & -\,24xyu & -\,12y^2z & +\,32yu & +\,48xu & + \\ \tfrac{3}{2}. & \tfrac{2}{2}. & \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}. & \tfrac{2}{2}. & \tfrac{1}{2}. & \tfrac{1}{2}. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 48yz & +\,8xz & -\,64z \\ \tfrac{1}{2}. & \tfrac{1}{2} & \\ \hline \end{array}$$

$6y^2u - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yuz - 12yuz + 16u^2 + 24uz + 24uz + 4z^2$.

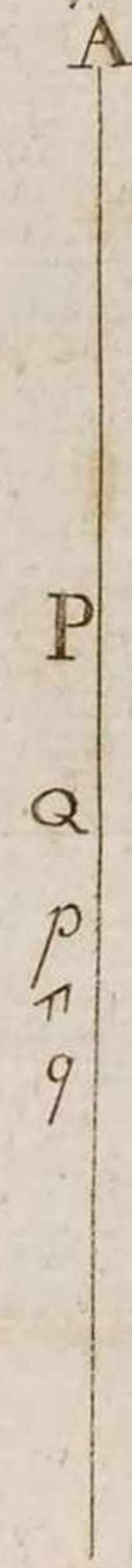
Hieraus lassen sich folgende 6. Gleichungen ansetzen: I. $y^4 - 8y^9 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$. II. $4y^3 - 24y^2 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x = 0$. III. $-12y^2 + 48y + 8x - 64 = 0$. IV. $6y^2 - 24y^2 - 12x + 16 = 0$. V. $-24y + 48 = 0$. VI. $4 = 0$. Mittels der fünften Gleichung ist $48 = 24y$, und also $y = 2$. Rückt man diesen Werth in die vierte Gleichung ein, so wird $24 - 48 - 12x + 16 = 6 - 12 - 3x + 4 = 0$; hiemit $x = -\frac{2}{3}$. Ist $y = 2$, und übersetzt man davon den Werth in die dritte Gleichung, so wird $-48 + 96 - 64 + 8x = -6 + 12 - 8 + x = -2 + x = 0$, hiemit $x = 2$. Setzt man nun diesen Werth des x, wie auch den erfundenen von y in die vorigen 6. Gleichungen I. $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 121 = 0$. II. $32 - 96 - 96 + 64$

$+ 96 = 0$. III. $- 48 + 96 + 16 - 64 = 0$. IV. $24 - 48 - 24 + 16 = 0$. V. $- 48 + 48 = 0$. VI. Ist eine nicht mögliche Gleichung. Unterschiebt man nun die Werthe $x = 2$ und $y = 2$, so werden sich nur die ersten drey Gleichungen tilgen; die andern drey aber kommen nicht einmal übereins, hiemit ist der Punct nur zweyfach (9. §.).

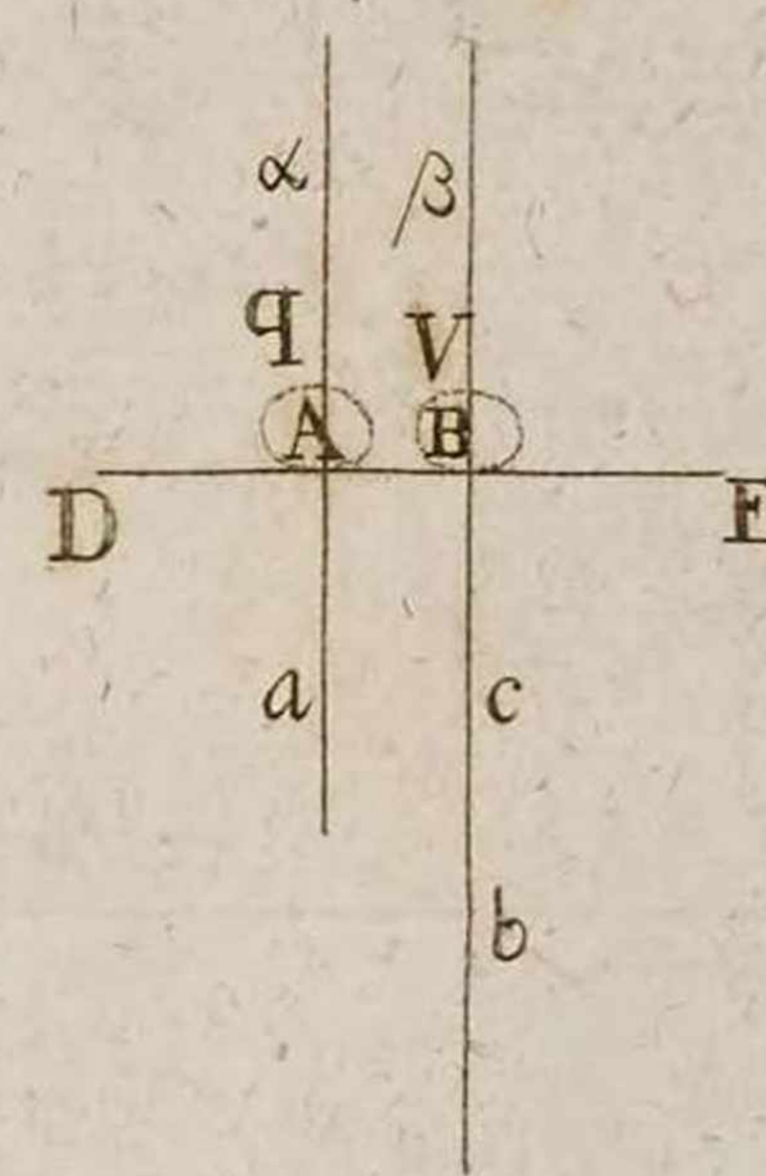
pag. 151

p. 152

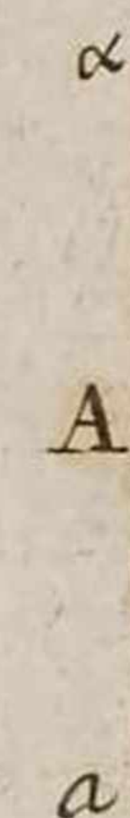
p. 163



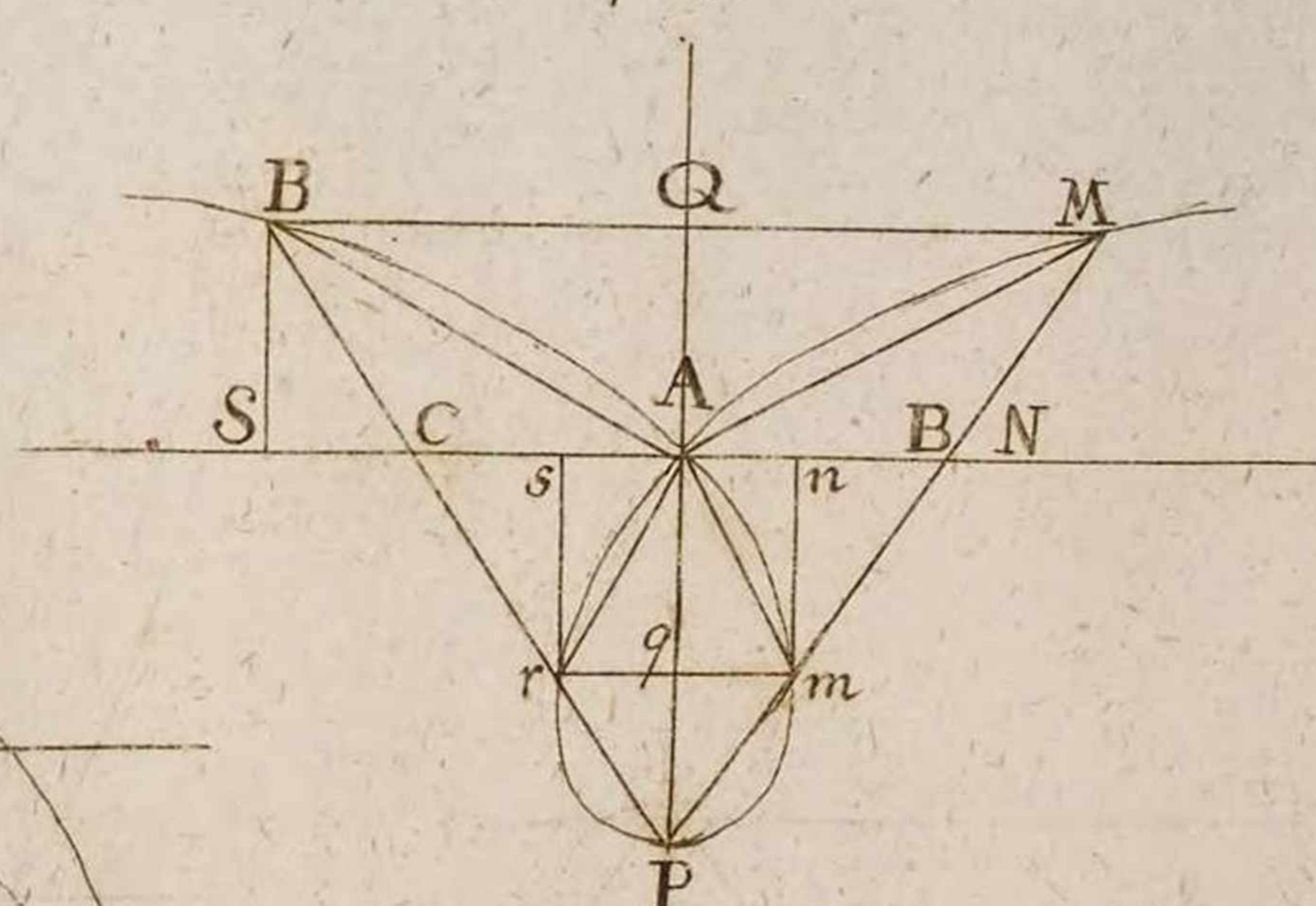
p. 158



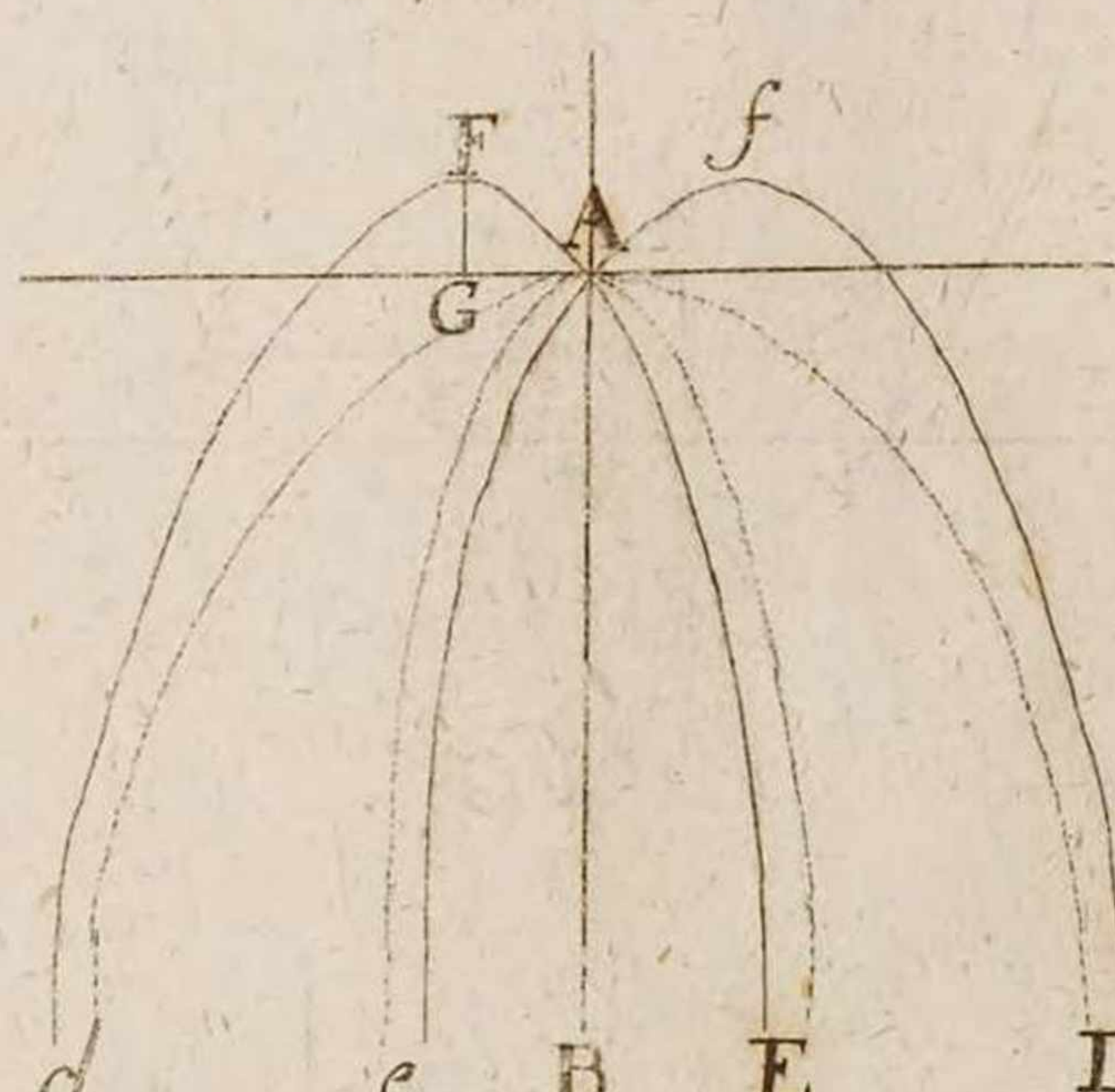
p. 156



p. 196



p. 194



Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1773

Band/Volume: 8-1773

Autor(en)/Author(s): Gruber Leonhard

Artikel/Article: Leonhard Grubers Benediktiners einige analytische Beyspiele und Anwendungen der verschiedenen Wendungen der krummen Linien. An die churfürstliche Akademie der Wissenschaften in München eingesendet. 1770. 182-202