Leonard Grubers
Benediktiners vom Kloster Metten,
einige

Grundsätze

der

Theorie der Centralkräfte,

in Rücksicht
auf die

Astronomie.

Vorbericht.

Man kann wohl sagen, daß die Vollkommenheit der Astronomie meistens von der mehreren Aufklärung, Ausbreitung und Auszierung der Theorie der Centralkräfte abhängt. Newton; dieser grosse Newton hat uns davon die ersten Grundsätze, welche sich in den allgemeinen Gesetzen der Natur selbst gründen, aufgedecket. Er hat uns in seiner so erhabenen als einfachen Theorie der anziehenden Kraft das ächte Bildniß der wirkenden Natur anschauen gelehret. Von diesen Zeiten mag man wohl die glücklichen Epochen einer gegründeten, einer aufgeklärten Astronomie herzählen. * Man läßt sich auch jetzt noch sehr angelegen seyn, die Theorie dieser anziehenden Kraft mehr und mehr aufzuklären, mit noch mehr dringenden Beweisen zu unterstützen, und selbe nach ihrem ganzen Umpfange auszubreiten. Die geschicktesten Mittel sind hiezu ohne Zweyfel eine richtige Mechanik-Lehre und höhere Geometrie. Ich will davon in dieser Abhandlung ein Beyspiel geben, und einige vornehmere Grundsätze von der Theorie der anziehenden Kraft, welche eben in sich nicht so bekannt und aufgeklärt, als nutzbar selbe in Rücksicht auf die Astronomie sind, aus den Grundsätzen einer neueren und verbesserten Mechanik und höheren Geometrie herzuleiten, mir angelegen seyn lassen; indem ich zei-

*) La Decouverte de l'Attraction ouvrit, pour ainsi dire, aux Philosophes un nouveau ciel. Mr. de la Lande en Astron. Livr. XIX. §. 2420.

gen werde, was man daraus für nützliche und vortheilhafte Theoremes sowohl für verschiedene Gegenstände der Anziehungskraft selbst als der davon abhangenden Anwendungen auf die verschiedene Kreutzungen des Planetenlaufes wird machen können. Eines muß ich noch anmerken, daß ich nach dem Beyspiele anderer Mathematiker die in dieser Theorie durch gewisse Buchstaben festgesetzten Ausdrücke, und deßwegen auch einige Figuren für meine Beweise beybehalten habe; und obschon ich einige sonderliche Lehrsätze aus der Lehre von den *Kegelschnitten* angesetzet habe; so nehme ich davon einige leichtere Sätze aus der gemeinern Mechanik und Geometrie als bekannt an; um in Anführung der Beweise dieser überall schon festgestellten Sätze nicht gar zu sehr ausschweifen zu därfen, weil ohne das diese Abhandlung nicht den Ruhm eines gelehrten Werkes, sondern nur das Zeugniß eines geringen Kenntnisses und weniger Uebung in der astronomischen Haupttheorie von den Centralkräften zu ihrem Gegenstand hat.

Einige

Einige Grundsätze der Theorie der Centralkräfte in Rücksicht auf die Astronomie.

1. §.

Der Satz, daß man eine jede Centralkraft, welche in sehr kleinen Zeitpuncten sich äußert, als eine einförmige Zunehmungs- oder Beschleunigungskraft annehmen könne, ist in der Theorie der Centralkräfte schon allgemein geworden. Wir wollen wegen eines vollkommnern Zusammenhangs und leichtern Begrifs des Nachfolgenden den Beweis dieses bekannten Theorems hier einrücken. Es sey (1. Fig.) APD eine Umkreislinie; Pp soll davon einen unendlich kleinen Bogen vorstellen. PVNP sey endlich der küßende Zirkel. Weil man nun den unendlich kleinen Bogen eben aus der Ursache, daß er unendlich klein ist, als eine gerade Linie annehmen kann, so bekömmt man folgende Gleichung der Verhältniße: $PE : PQ = PQ : PN$; und hernach $PH : Pp = Pp : PN$. Hiemit ist $PQ^2 = PE . PN$; und $Pp^2 =$

PH.

PH. PN. Deßwegen ist auch $PQ^2 : Pp^2 = PE : PH$. Aus der nämlichen Ursache, daß man Pp als unendlich klein annimmt, so kann man $QI = PE$ und $pi = PH$ betrachten; hiemit wird $PQ^2 : Pp^2 = QI : pi$. Man kann auch das QI zu pi und das QR zu pF als parallel annehmen: folglich würden die Dreyecke QIR und piF einander ähnlich seyn, und also ist $QR : pF = QI : pi$, aus welchem auch endlich die Analogie $QR : pF = PQ^2 : Pp^2$ fließt. Nun aber werden durch PQ und Pp die Zeitpuncte; durch QR aber und pF die Centralkräfte angezeiget. Weil also die Centralkraft in diesem Falle mit der Beschleunigungskraft die nämliche Analogie beybehält, so mag man diese für jene annehmen.

2. §.

Wenn wir durch f, durch S den Raum; durch t die Zeit anzeigen, so ist $f = \frac{S}{tt}$. Es ist aber der Raum oder $S = pF$; denn durch dieses wird die Bewegung durch die Centralkraft bis in p ausgedrückt; es ist also $f = \frac{pF}{tt}$; und, weil in der einförmigen Beschleunigungskraft $t = 1$, so wird $f = pF$.

3. §.

Die Zeiten sind wie die Summe der Sectorn oder der Dreyecke; hiemit ist auch t oder die Zeit für Pp = dem Dreyecke SpP oder SFP. Der Innhalt aber des ersten Dreyeckes ist $= SP \times pM$, des zweyten $= ST \times PF$; das ist = dem Factum der Grundlinien und ihrer Höhen. Wenn man nun in der vorher angesetzten Formel (2. §.) statt des t seinen Werth beybehält,

so

so bekömmt man $f = \frac{pF}{SP^2 . pM^2}$; oder auch $f = \frac{pF}{ST^2 . PF^2}$.

4. §.

Aus den Eigenschaften des Zirkels wissen wir, daß das Quadrat einer Tangente gleich sey dem Factum aus den Secanten. Es wird also $PF^2 = pF . pB$, und weil wir pP als unendlich klein angenommen haben (1. §.), so ist $pB = PV$; hiemit $pF = \frac{PF^2}{PV}$; dessen Werth, wenn wir selben in vorher gesetzter Formel (3. §.) einrücken, so wird $f = \frac{PF^2}{ST^2 . PV . PF^2} =$

$\frac{1}{ST^2 . PV}$.

5. §.

Die zwey Dreyecke STP und PVN sind einander ähnlich; und also ist $SP : ST = 2PG : PV$; hiemit $PV = \frac{ST . 2PG}{SP}$; und $PV . ST^2 = \frac{ST^3 . 2PG}{SP}$, welchen Werth wir in die vorige Formel $f = \frac{1}{ST^2 . PV}$ (4. §.) übersetzen können, daß wir also $f = \frac{SP}{ST^3 . 2PG}$ überkommen.

6. §.

In der zwoten Figur kann man wegen der Aehnlichkeit der zweyen Dreyecke SPT und QPV folgende Proportion ansetzen;

$SP : ST = PQ : QV$, und also werden wir diese nämliche Analogie in $SP + PQ : ST + QV = SP : ST$; das ist in $2CA : 2CK$ (weil diese die mittere arithmetische Proportionallinie ist) $= SP : ST$ abändern können. Nun wissen wir aber aus der Lehre von den Kögelschnitten, daß in einer Ellipse $SP : ST = CA : CK$ (PD), wo denn wiederum das Factum bey den Durchmessern = dem Vierecke aus den halben Axen: und also $CA : PD = CN : CB$; deßwegen auch seyn wird $SP : ST = CN : CB$; folglich $ST = \frac{CB.\, SP}{CN}$. Wenn man ferner den halben Durchmesser des küssenden Zirkels in Betracht ziehet; so wird $PG = \frac{CN^2}{PD}$. Es ist aber aus der angesetzten Proportion das $PD = \frac{CA.\, CB}{CN}$: hiemit $PG = \frac{CN^3}{CA.\, CB}$. Setzen wir nun in der vorigen Formel (5. §.) statt des ST und PG ihren Werth, so bekommen wir das $f = \frac{CA}{SP^2.\, C^2 B^2}$: es sind aber CA und CB unveränderliche Größen; hiemit wird $f = \frac{1}{SP^2}$. In einer Hyperbole also kann man die nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft durch die Gleichung $f = \frac{1}{SP^2}$; das ist, durch das verkehrte Verhältniß des quadrirten Radius Vector am sichersten ausdrücken.

7. §.

Eben diese Gleichung nämlich $f = \frac{1}{SP^2}$ kann man auch in der Parabole ansetzen. Denn, wenn man in dem Dreyecke STH (3. Fig.) aus dem ersten Winkel eine senkrechte Linie AT herab-

herabfallen läßt, so ist $ST^2 = SA. SH$. Es ist aber $SH = SP$; hiemit $ST^2 = SA. SP$; und also auch $ST^6 = SA^3 . SP^3$. So ist nun der Radius des küssenden PG in einer Parabole $= \frac{DP^3}{4AS^2}$. Weiters ist $DP = 2ST$ (denn es ist die Analogie $HP : PD = HT : TS$; überdas $HP = 2HT$; folglich ist $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$; und $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Deßwegen, wenn wir in der oben angeführten Formel $\frac{SP}{ST^3 . 2PG}$ (5. §.) den Werth von $2PG$, nachmals den Werth von $4ST^6$ ansetzen, so wird $f = \frac{1}{4SP^2 . AS}$, und nach weggelassenen unveränderlichen Größen ist $f = \frac{1}{SP^2}$; das ist, in der Parabole bekömmt man die nämliche Formel, welche wir vorher für die in einer Ellipse oder Hyperbole nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft angeführt und bewiesen haben (6. §.).

8. §.

Wenn mehrere Körper mit ihren Centralkräften, welche nach einem gemeinen Brennpunct gerichtet sind; und durch die Formel $\frac{1}{SP^2}$ mögen ausgedrücket werden, (6. 7. §§.) in der Laufbahne Kögelschnitte beschreiben, so sind die Räume im Quadratwurzlichten Verhältnisse der Parameter. Denn, weil nach dem bekannten Ausdrucke π oder der Parameter $= \frac{2CB^2}{CA}$; und wir vorher $f = \frac{AC}{SP^2 . CB^2}$ bekommen haben (6. §.), so wird $f =$

$\frac{1}{SP^2 . \pi}$. Wir haben aber schon oben bewiesen, daß $f = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ (3. §.); hiemit $\frac{1}{SP^2 . \pi} = \frac{pF}{SP^2\, PM^2}$. Nun ist weiters pF, durch welches die Centralkraft ausgedrücket wird (2. §.), dem $\frac{1}{SP^2}$ gleich (6. 7. §§.), folglich, wenn man diesen Werth dafür annimmt, so wird $\frac{PF}{\pi} = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ und also $\pi = SP^2 . PM^2$; hernach $\sqrt{\pi} = SP . PM$. Es ist aber SP. PM mit dem Raume oder Sector in einem Verhältnisse (3. §.): also auch $\sqrt{\pi}$ oder der quadratwurzlichte Parameter wie die Räume ꝛc.

9. §.

Die Geschwindigkeit läßt sich in einem unendlich kleinen Zeitraum durch Pp ausdrücken (1. §.). Weil nun die Dreyecke SPT und pMB einander ähnlich sind, so überkömmt man eine Analogie, nämlich $ST : SP = pM : pD$, wo $pP = \frac{SP . PM}{ST}$. Es ist aber $SP . PM = \sqrt{\pi}$: (§. 8.) folglich $pP = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$. Das ist: die Geschwindigkeit ist in einem geraden quadratwurzlichten Verhältniße des Parameter, und umgekehrten Verhältnisse des Perpendikels.

10. §.

Je weitläuftiger der Raum einer Ellipse, welchen wir a heißen wollen, ist; oder je kleinere Theile der bewegte Körper in seiner Laufbahne beschreibet, um so größer ist die Zeit des Umlaufes; das ist $t = \frac{a}{s}$. Nun sind aber die Räume oder S mit $\sqrt{\pi}$ in in einem Verhältnisse (§. 8.), so ist also auch $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ und $a = t\sqrt{\pi}$. Es stehet also a oder die Größe des Raums einer Ellipse in einem Verhältnisse, welches aus dem quadratwurzlichten Verhältnisse des Parameters der größern Axe und der einfachen Zeit von dem ganzen Umlaufe zusammengesetzet ist.

11. §.

Es sey in einer Ellipse die kleinere Axe $= b$, die größere oder Hauptaxe $= d$; der Parameter von dieser sey $= \pi$. Aus der Theorie der Kegelschnitte wissen wir, daß $d\pi = b^2$, hiemit die ganze Gleichung durch d^2 multipliciret giebt $d^3\pi = b^2 d^2$. Es ist nun die Größe des Raums in einer Ellipse wie ein anderes Viereck; das ist: $a = b\,d$. Wir haben aber erst gleich oben (§. 10.) gesehen, daß $a = t\sqrt{\pi}$: so ist nun auch $bd = t\sqrt{\pi}$ und $b^2 d^2 = t^2\pi$: und, wie wir jetzt gesagt haben, so ist $b^2 d^2 = d^3\pi$; deßwegen ist nach geschehener Einschaltung des Werths von $b^2 d$ klar, daß $d^3\pi = t^2\pi$, und also $d^3 = t^2$, oder $t = \sqrt{d^3}$. In einer Ellipse verhält sich also die periodische Zeit, wie die Quadratwurzel des Cubus von der größeren Axe.

12. §.

Aus diesem nun lassen sich die Verhältnisse für die wahren Durchmesser, für die Fläche und körperlichen Innhalt der Planeten bestimmen, welche wir, weil sie ohnedem sehr bekannt sind, weglassen wollen.

13. §.

Damit ein Körper bey abwachsender Centralkraft die nämliche Ellipse beschreibe, so muß die Linie der beyden Apsiden nach demjenigen Theil, in welchem der Körper sich beweget, gewendet werden. Hingegen, wenn die Centralkraft anwächst, so richtet sich die Apsiden Linie nach dem gegenseitigen Theile.

14. §.

Man wird auch ganz leicht begreifen, daß in einem Zirkel, in dessen Mittelpuncte die Centralkraft überall die nämliche ist, und also ein solcher Zirkel keinen anderen küssenden als sich selbst hat, alle SP, ST seyn = 1, und also auch $f = 1$.

15. §.

Wenn man hingegen den Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct eines Zirkels z. E. in S ansetzet (Fig. IV.), und annimmt, daß der Körper in P sey, und einen unendlich kleinen Bogen PQ beschreibe, so werden wir aus der vorigen Formel $f = \frac{p\,F}{ST^2 .\, PM^2}$ (§. 3.) für diesen Fall $f = \frac{PR}{ST^2 .\, PQ^2}$ überkomen. Nun wird aus der Theorie für die Eigenschaften des Zirkels bewiesen, daß $PQ^2 = PO \times PB$; Es ist aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke POR und PVB ausgemacht, daß $PO : PR = PV : PB$, und also $PO = \frac{PR .\, PV}{PB}$: Deßwegen rücke man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung ein, so erhält man $PQ^2 = \frac{PR .\, PV .\, PB}{PB} = PR .\, PV$. Diesen Werth des PQ^2, wenn man ihn in der allgemeinen Formel ansetzet, so bekömmt man $f = \frac{PR}{ST^2 .\, PR .\, PV} = \frac{1}{ST^2 .\, PV}$. Ferner sieht man, daß die Dreyecke PBV und STP sich ähnlich sind (denn den Winkel VPT mißt der halbe Bogen PV, welcher gleichfalls

das

das Maaß des Winkels VBP ist; wie auch sind die Winkel bey T und V = 90'): hiemit ist PB: PV = SP: ST; und also $ST^2 = \frac{PV^2 . SP^2}{PB^2}$, welcher Werth die vorige Formel in $f = \frac{PB^2}{PV^2 . PV . SP^2}$ verwandelt: und weil PB eine unveränderliche Größe anzeiget, so wird $f = \frac{1}{PV^3 . SP^2}$; oder diese Formel mit Worten auszudrücken, so ist die Centralkraft, wenn selbe außer den Mittelpunct eines Zirkels angesetzet wird, allzeit in dem umgekehrten Verhältnisse, welches aus dem Cubus der Sehne, so durch den Mittelpunct der Kraft und die Lage des Körpers gezogen wird, und aus dem Quadrat des Radius Vector zusammengesetzet ist.

16. §.

Will man nun wissen, was für eine Größe oder wie viel Theile des Durchmessers ein Körper, welcher aus A (Fig. V.) vermög seiner natürlichen Schwere herabfällt, beschreibe, auf daß er jene Geschwindigkeit überkomme, welche ihm nöthig ist, einen halben Umkreis des Zirkels zu durchlaufen, so setze man vor allem den Bogen AM als unendlich klein, und also als eine gerade Linie an. Wenn man nun die Abscisse AP annimmt, daß sie der Centralkraft gleichkömmt, und daß AP in dem nämlichen Zeitraum beschrieben wird, in welchem der Körper den Bogen AM durchläuft, so ist AP: AM = AM: AB: und also $AP = \frac{AM^2}{AB}$. Man setze nun ferner, daß der Körper in einer einförmig zunehmenden Bewegung weiters in L herabfalle, hiemit auch indessen mit einer gleichförmigen Bewegung in dem Zirkel bis in Q fortrücke, so wird man (wenn AM und AQ die Zeit ausdrücken) eine neue

Analogie $AP : AL = \frac{AM^2}{AB} : \frac{AQ^2}{AB}$ bekommen. Man kann nun diese in $AP : \frac{AM^2}{AB} = AL : \frac{AQ^2}{AB}$ verändern. Wir haben aber allererst bewiesen, daß $AP = \frac{AM^2}{AB}$; es ist also auch $AL = \frac{AQ^2}{AB}$. Weil aber AQ im Ende seiner Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung, AL mit einer beständig zunehmenden ist beschrieben worden, so ist $AQ = 2\,AL$, und $AQ^2 = 4\,AL^2$. Deßwegen, wenn man diesen Werth in der Gleichung $AL = \frac{AQ^2}{AB}$ für AQ^2 ansetzt, so bekömmt man endlich $AL = \frac{4\,AL^2}{AB}$, und $AL.\ AB = 4\,AL^2$; nachmals $AB = 4\,AL$, und endlich $AB = 4\,AL$, wie auch $AL = \frac{1}{4}\,AB$. Das Maaß der Geschwindigkeit also ist in diesem Falle ein halber Radius oder der vierte Theil von einem Durchmesser.

17. §.

Suchen wir einen allgemeinen Ausdruck oder Formel für die Centralkraft, wenn der Mittelpunct der Kräfte in den Mittelpunct einer Ellipse, nämlich in S (VI. Fig.) gesetzt wird, so müssen wir wiederum die Formel $f = \frac{SP}{ST^3.\ 2PG}$ (5. §.) für uns nehmen, und weil 2PG oder das zweyfältige des halben Durchmessers des küssenden Zirkels ist $= \frac{2SD^2}{ST}$, so bekommen wir $f = \frac{SP.\ ST}{ST^3.\ 2SD^2} = \frac{SP}{ST^2.\ 2SD^2}$. Aus der Theorie der Kögelschnitte kann man ferner in einer Ellipse die Analogie $SD.\ ST = SB.\ SA$

gebrauchen, wo $SD^2 = \frac{SB^2 . SA^2}{ST^2}$: deßwegen wird $f =$ $\frac{SP . ST^2}{ST^2 . 2SB^2 . SA^2} = \frac{SP}{2SB^2 . SA^2}$: es sind aber SB und SA unveränderliche Größen, deßwegen bleibt $f = SP$.

18. §.

Das Verhältniß der periodischen Zeit in einer Ellipse zu einem Zirkel zu finden, so wollen wir (7. Fig.) für den Zirkel die Größe des Raumes $= A$, für die Ellipse aber $= a$; den Sector $AMS = S$, den andern Sector $ANS = s$; die Zeit für den Zirkel $= T$; für die Ellipse $= t$ annehmen. Nun sind die Perioden der Zeit in dem geraden Verhältnisse der Räume und in dem umgekehrten der Zeiten; hiemit $T \cdot t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$. Weiters hält der Raum eines Zirkels zu der Größe eines elliptischen Raumes eben das Verhältniß, welches die grosse oder Hauptaxe zu der kleinern Axe beybehält; das ist: $A : a = SD : SG$. Deßwegen wird die vorige Proportion durch Unterschiebung des Werthes in $T : t = \frac{SD}{S} : \frac{SG}{s}$ verwandelt. Es sind aber auch die Sectores wie die Größen der Räume; und diese wie die Axen: so ist denn auch $S : s = SD : SG$; oder nach dafür angesetztem Werthe wird $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SG}{SG}$ das ist $T : t = 1 : 1$, hiemit $T = t$.

19. §.

Wenn ein Körper aus dem obersten Puncte der Apsidenlinie in die b gesetzt wird, so ist die Geschwindigkeit in einer Ellipse, wo der Mittelpunct der Kräfte in S ist, nicht so groß, als selbe ist in einem Zirkel, welchen man aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS (8. Fig.) beschreibet. Dieses zu beweisen, so nehmen wir AP zur Abscisse an, und ziehen wir zur selben die Ordinaten PN, PM. Es ist nun richtig, daß AN und AM zur nämlichen Zeit beschrieben werden, in welcher der Körper durch AP sich beweget. Gleichwie nun AP = AP, so ist auch AN = AM, wenn sie sich nämlich auf die Zeit beziehen. Allein, obschon AP oder die Centralkraft beständig die nämliche ist, so ist doch in sich selbst AM > AN: die Ungleichheit also der Geschwindigkeit muß sich auf die Tangentialkraft gründen. Daß aber M über das N hinaus fallen muß, ist die Ursache, weil der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels dem Quadrate des *conjugirten* Diameters, welcher in diesem Falle die halbe kleinere Axe ist, gleichet, welches Quadrat man hernach mit der senkrechten Linie, dessen Stelle die halbe größere Axe vertritt, muß getheilet werden. Es ist also $2\,PG = \frac{b^2}{a}$: aber auch $\frac{1}{2}\pi$ ist $= \frac{b^2}{a}$ (11 §.): folglich ist der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels im Scheitelpuncte dem halben Parameter gleich: es ist aber $\frac{1}{2}\pi < AS$, denn $\frac{1}{2}\pi = PN$, welches ja kleiner ist als die halbe kleinere Axe, und folglich noch viel kleiner als die halbe größere Axe, hiemit auch $PN < AS$; der ganze Zirkel also fällt für die Ellipse hinaus.

20. §.

Wird ein Körper aus dem untersten Puncte der Apsidenlinie zur Bewegung hingerissen, so ist die Geschwindigkeit in einer Ellipse, wo der Mittelpunct der Kräfte in S gesetzet wird, größer als die Geschwindigkeit in einem Zirkel, welcher aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS beschrieben wird (9. Fig.). Denn, wenn man wiederum AP für die Abscisse nimmt, so werden

den die Bögen A M und A N in der nämlichen Zeit durchgelaufen: weil aber $AN > AM$, so muß in der Ellipse eine größere Geschwindigkeit seyn. Die Centralkraft bleibt aber die nämliche, also ist davon der Unterschied von der Tangentialkraft herzuleiten. Hiemit ist in einer Ellipse die Tangentialkraft größer als in einem Zirkel. Weiters fällt der ganze Zirkel in den Raum der Ellipse; denn, wie wir erst oben (§. 19.) gesagt haben, so ist $\frac{1}{2}\pi$ = dem halben Durchmesser des küssenden Zirkels; hernach ist $\frac{1}{2}\pi$ in diesem Falle grösser als A S, und eine halbe Axe ist auch größer als der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels: deßwegen wird der küssende Zirkel niemals die Ellipse berühren, viel minder über selbe hinaus fallen können.

21. §.

In dem Falle, daß die Centralkraft die nämliche sey, und der Körper aus dem untersten Punct der Apsidenlinie zur Bewegung hingerissen werde, so läßt sich fragen, in welchem Kegelschnitte die Geschwindigkeit größer sey. Diese Frage zu erörtern sey (Fig. 10.) A der unterste Punct in der Apsidenlinie und zugleich der Scheitelpunct für die Kegelschnitte, welche sollen beschrieben werden; S sey der Mittelpunct der Kräfte. Man nehme nun den Punct P, wo A P die Centralkraft ausdrücket, und richte daselbst die Ordinate P L auf. In A ziehe man eine Tangente $AQ = AS$. Aus der Beschreibung der Kegelschnitte, und aus ihren Eigenschaften wissen wir, daß in der Parabole A S gleich sey dem Abstande der Leiterin (Linea directrix) von dem conischen Scheitelpuncte. In der Ellipse ist aber dieser Abstand der Leiterin größer, und in der Hyperbole kleiner als A S. Deßwegen, wenn ich außer dem A eine Linie A R nehme, und noch vorher A S in A b übersetze; nachmals zwischen A und b den Punct B;

und endlich außer dem *b* den Punct *β* anmerke, so ist es richtig, daß in B die Leiterin der Hyperbole, in *b* die Leiterin der Parabole, in *β* die Leiterin der Ellipse anzutreffen sey. Ziehe man nun aus diesen Puncten durch Q die Tangenten, so wird die Tangens der Ellipse in der Ordinate P L den kleinsten Theil, die Tangens der Parabole einen größeren, die Tangens der Hyperbole den größteu Theil abschneiden. Die Ordinaten aber drücken die Tangentialkraft aus; deßwegen, weil man angenommen hat, daß die Centralkraft die nämliche sey, so wird in der Hyperbole die größte, in der Parabole eine mindere, in der Ellipse endlich die kleinste Geschwindigkeit oder Tangentialkraft seyn.

22. §.

Eben dieses kann man aus der Beschreibungsforme der Kegelschnitte herleiten. Es sey (Fig. XI.) z. B. M. N. eine unbestimmte Linie. In S setze man den Brennpunct der Kegelschnitte, also zwar, daß selbe die Linie M N in P berühren. Nun wird S P den Radius vector oder die Centralkraft für alle als gleich ausdrücken. Man lasse weiters aus S in M N eine senkrechte Linie S T herab fallen, und man ziehe eine ihr gleiche T K, wie auch aus K durch P eine andere unbestimmte. Nun wird man in dieser alle Brennpuncte der Kegelschnitte antreffen, welche nämlich also beschrieben werden, daß sie ihren Brennpunct in *S* haben und die Linie M N in P berühren. Denn nehme man in selber einmal einen Punct F, so wird K F die Axe; S F der Abstand der zween Brennpuncte. Theilen wir S F in C in gleiche Größen, so bekommen wir in C den Mittelpunct der Ellipse. Schneide man hernach K F entzwey und übersetze man sie aus C über das S und F hinaus, so bekömmt man die Axe A B, und die Ellipse A P F. Nimmt man ferner F in einem unendlich grossen Abstande an, oder zieht man durch S eine

Pa-

Parallele zu K F, welche nämlich in einem unendlich entfernten Abstande sich mit K F vereiniget, so bekömmt man durch G S die Lage einer Parabole; und, wenn man aus K auf dieselbe eine senkrechte Linie K G herabfallen läßt, so wird diese die Leiterin seyn; da hingegen die Linie G S, wenn man sie entzwey schneidet, den Scheitelpunct a bestimmet, und die Parabole in P berühret wird. Wenn man endlich in der nämlichen Linie ausser K einen Punct Φ annimmt, und diesen mit S vereiniget, so wird Φ S die Lage der Axe und Φ K die Axe, welche, wenn sie in S Φ, so vorher schon in C entzwey geschnitten wird, auf beyde Seiten in a und a übersetzt ist worden, so wird a den Scheitelpunct anmerken; und die Hyperbole in P berühret werden. Wir haben nun schon vorher das Verhältniß der Geschwindigkeit, welche wir jetzt V heißen wollen, durch eine Formel angezeigt (§. 9.); nämlich $V = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$, und weil S T in diesem Falle unveränderlich ist, so wird $V = \sqrt{\pi}$ oder $V^2 \pi$. Es ist aber nach den bekannten Gleichungen der Kegelschnitte in einer Ellipse der $\frac{1}{2}\pi = \frac{2ac - c^2}{a}$; in der Parabole $\frac{1}{2}\pi = 2c'$; in der Hyperbole $\frac{1}{2}\pi = 2ac + c^2$, deßwegen, wenn wir diese Gleichungen in Analogien auflösen, so bekommen wir I. $a : 2a - c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a - c < 2a$, hiemit auch $\frac{1}{2}\pi < 2c$. II. $\frac{1}{2}\pi = 20$. III. $a : 2a + c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a + c > 2a$, und also auch $\frac{1}{2}\pi > 2c$. Folglich ist $\frac{1}{2}\pi$ in der Hyperbole am größten, in der Parabole nicht so groß, in der Ellipse aber kleiner: Wir haben aber gleich jetzt gesagt, daß die Geschwindigkeit oder $V^2 = \pi$; hiemit ist auch diese oder die Tangentialkraft in einer Hyperbole die größte, in einer Parabole minder groß, und in der Ellipse am kleinsten.

23. §.

Erster Lehnsatz.

Wenn man in einer Ellipse oder Hyperbole (12. und 13. Fig.) durch den Mittelpunct C eine Linie ziehet, also zwar, daß selbe zu der Tangente T M X parallel sey, so wird sie zwischen E π und M einen Theil der geraden Linie F M (12. Fig.) oder fM (13. Fig.) einschliessen, welcher der halben Hauptaxe gleich kömmt. Es sey also in der Ellipse (12. Fig.) die Linie K C D zu der Tangente X T parallel. Man vereinige das M mit f und F, und ziehe überdas eine senkrechte Linie M N, welcher in O eine andere fQ zu K D und T X parallel entgegen läuft. Weil nun fM T = X M Q, und M f O = M Q O, wie auch Q M O = O M f, so sind die Dreyecke Q O M, fO M einander ähnlich und gleich: und deßwegen wird auch M f = M Q. Es ist aber F M + M f = S s oder der Hauptaxe gleich; weiters, weil F C = C f und C E zu fQ parallel ist, so folget, daß F E = E Q. Deßwegen ist E Q die Semidifferenz zwischen M f oder M Q und M F, welche also, wenn man sie zur Q M hinzusetzet, die halbe Summe der geraden Linien F M und M f ausmachen.

In der 13. Fig. sey C Q zu X T parallel. Ziehe man nun durch F und M eine unbestimmte Linie, welche in Q und H den geraden und zu X T parallelen Linien C Q und F H entgegen kömmt. Die unter sich gleiche Winkel T M H, X M f sind auch ihren abwechselnden gleich, nämlich = M H f, M f H; so ist denn auch fM = M H. Hernach, weil fC = C F, so ist auch H Q = Q F. Es ist aber fM — F M = s S und $\frac{1}{2}$ fM (oder $\frac{1}{2}$ H M) — $\frac{1}{2}$ F M = C S; das ist $\frac{1}{2}$ H M — $\frac{1}{2}$ F M = $\frac{1}{2}$ H Q + $\frac{1}{2}$ Q M — $\frac{1}{2}$ F M =

$\frac{1}{2}$ F

$\frac{1}{2}FQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}QM + \frac{1}{2}MF + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = QM = CS$. Weil aber EQ zu fH parallel ist, und $Mf = MH$, so ist auch $QM = EM$.

24. §.

Wenn man die vorige Construction der zwölften und dreyzehenden Figur beybehält, (23. §.) so kann man gleichfalls zeigen, daß $MN \times MR$ dem CL^2 gleiche. Denn sowohl in der Ellipse als Hyperbole ist $CV \times CX = CL^2$. Ziehet man nun aus dem Mittelpuncte C zur Tangente XF eine senkrechte Linie CI, so sind die Dreyecke CIX und MPN einander ähnlich. Deßwegen bekömmt man $CI : CX = MP : MN$. Es ist aber $CI = MR$, und $MP = CV$: wenn man also diese dafür ansetzet, so wird $MR : CX = CV : MN$, und also $MR \times MN = CX \times CV = CL^2$.

25. §.

Zweyter Lehnsatz.

Wenn aus dem Intersectionspuncte N, wo die Normallinie und die Axe des Kögelschnittes zusammen stossen, die zu FM senkrechte Linie NB gezogen wird, so ist MB dem halben Parameter gleich. Denn in der Ellipse (12. Fig.) sind die Dreyecke NBM, EMR, welche bey B und R einen rechten Winkel haben, wegen den bey M gemeinschaftlichen Winkel einander ähnlich.

---

*) Es verstehet sich von selbst, daß die Parallele zur Tangente, welche durch den Mittelpunct gezogen ist, ein conjugirter Durchmesser derjenigen Linie sey, welche man durch den Berührungspunct gezogen hat.

lich. Deßwegen ist $MB : MN = MR : ME$ oder CS (23. §.): folglich $CS \times MB = MN \times MR = CL^2$ (25. §.). Wenn man nun den halben Parameter, als die zu CS und CL beständige dritte Proportionallinie, L heißt, so ist auch $CS \times L = CL^2$, hiemit $CS \times MB = CS \times L$ oder $MB = L$.

In der Hyperbole (13. Fig.) sind sich die Dreyecke MRQ und MBN wegen gleichen Winkeln bey der Spitze M, und den rechten Winkeln bey R und B ähnlich. Deßwegen ist $RM : MQ$ (oder CS 23. §.) $= MB : MN$, wo wir denn wiederum bekommen $RM \times MN = CL^2$ (25. §.) $= BM \times CS$; und, wenn der halbe Parameter L genennet wird, so wird wie vorher $L = BM$.

Für die Parabole (14. Fig.) ist dieses wohl sehr leicht zu beweisen. Denn daselbst ist allzeit $FM = FN$: und, weil bey F der gemeinschaftliche Winkel ist, wie auch bey P und B rechte Winkeln anzutreffen, so sind auch die Dreyecke FMP und FNB einander ähnlich und gleich; folglich $FP = FB$. Deßwegen, wenn man gleiche Größen von gleichen wegnimmt, so verbleibt $PN = BM$. Es ist aber aus der Lehre von Kögelschnitten sehr bekannt, daß in einer Parabole PN oder die Subnormal dem halben Parameter gleiche: so ist denn auch demselben die Linie BM gleich.

26. §.

Aus dem gesagten kann man wohl ganz leicht eine Methode finden, den halben Durchmesser des küssenden Zirkels zu bestimmen, wenn die Normale und der Brennpunct in einem Kegelschnitte gegeben sind; oder auch die Normale zu finden, wenn man den halben Durchmesser des küssenden Zirkels, und die Sehne, welche durch den Brennpunct geht, vorher weis. Denn die Normale

fällt

fällt nothwendig auf den halben Durchmesser des küssenden Winkels, weil alle beyde in dem nämlichen Punct M (Fig. XV.) zur Tangente MQ senkrechte Linien sind, und der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels in allen Kegelschnitten um den Cubus der Normallinie, welcher mit dem Quadrate des halben Parameters dividirt wird, gleich ist. Es sey also nach dem gegebenen Beweise MB der halbe Parameter (§. 24.), so wird auch $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$: hiemit $MB^2 : MN^2 = MN : MC$; oder, wenn man aus N zu MC eine senkrechte Linie aufrichtet, welche in L der geraden Linie FM entgegen kömmt, so ist die Analogie $BM : MN = MN : ML$, und also auch $MB^2 : MN^2 = MB : ML$ oder $MB : ML = MN : MC$. Weil nun bey B und deßwegen auch bey L ein rechter Winkel ist, so ist es nicht möglich, daß MC ein halber Durchmesser des Zirkels sey, außer es ist $ML = \frac{1}{2} MV$. Man findet also aus dieser Proportion und Construction sowohl den halben Durchmesser des küssenden Winkels, als auch die halbe Sehne ML, welche durch den Brennpunct F gezogen ist.

27. §.

Im Gegentheil giebt man den halben Durchmesser des küssenden Zirkels, und den Brennpunct des Kegelschnittes so findet man die Normale MN. Denn, wenn MC und der Punct F bekannt sind, so weis man auch das MV und ML. Es sind aber die Dreyecke MBN und MLC einander ähnlich: deßwegen, weil $BM^2 : MN^2 = MN : MC$, so ist auch $ML^2 : MC^2 = MN : MC$; und also $MN = \frac{ML^2}{MC}$. Man darf jetzt nichts anders thun, als daß man aus L zu MC eine senkrechte Linie LN herabfallen läßt, welche sodann die gesuchte Normallinie MN bestimmen wird.

28. §.

Dritter Lehnsatz.

Wenn man eine Sehne MV (Fig. XV. XVI. XVII. XVIII.) in D also theilet, daß $MD = \frac{1}{4} MV = \frac{1}{2} ML$, hernach das D mit N vereiniget, so wird die Linie DN zu Mf, welche durch den andern Brennpunct gezogen ist, parallele seyn. Denn den Winkel FMf schneidet die Normale MN in jedem Kegelschnitte in zween gleiche Theile, wenn nämlich in der Hyperbole auch der äußere Winkel oder $DM\phi$ (Fig. XVII.) in Betracht gezogen wird. Es ist also $DMN = NMf$, oder in der Hyperbole $= NM\phi$. Hernach, weil LN zu MN senkrecht ist, und $LD = DM$, so ist auch $DN = DM$ und $DMN = DMN = NMf$; das ist, DN, Mf (oder $M\phi$) sind gleichlaufende Linien.

29. §.

Wir bekommen also in einer Ellipse (Fig. XV. XVI.) die Analogie $FD : DN = FM : Mf$; das ist, $FD : DM = FM : Mf$; und, wenn wir zusammen setzen, so ist $FD : FD + DM\ (= FM) = FM : FM + Mf\ (= sS)$. Deßwegen, im Falle wir das FM (Fig. XVI.) weiter hinausziehen, oder verlängern, daß nämlich sey $FD : FM = FM : FE$, und, wenn man hernach aus E die senkrechte Linie EQ, welche auf die Tangente herabfällt, verlängeret, bis nämlich $EQ = Qf$, so wird f der andere Brennpunct, durch welchen die verlängerte fN gehet, denn aus eben der Ursache wird $ME = Mf$ und $FE = Ss$.

30. §.

In einer Hyperbole (Fig. XVII.) liegt F, wenn man selbes auf das M beziehet, ober den D. Doch bekömmt man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke DFN und FMf die Analogie DF: DN (oder DM) = FM : Mf: und abgetheilter ist DF: DM — DF (FM) = FM: Mf — FM (Ss). Wenn man also in der geraden Linie MV auf der Seite, wo das D ist, das FE nimmt, daß nämlich DF: FM = FM: FE; wenn man hernach die aus E in MQ herabgelassene senkrechte Linie EQ hinausziehet, bis EQ = Qf, so bekömmt man das f, und also die transverse Axe FE = S s.

31. §.

In der Parabole ist M$f = \infty$. Wenn man nun annimmt, daß FD: FM = FM: ∞ (Fig. XVIII.), so folgt nothwendig, daß sich FD verliehren muß, weil ∞ : FM = FM: o: deßwegen fließen die zween Puncte F und D zusammen; doch kann man den Scheitelpunct einer Parabole leicht bestimmen, wenn man aus M eine senkrechte Linie MP auf die hinaus gezogene Linie FN herabfallen läßt, und die Subtangens PT in S in zween Theile schneidet.

32. §.

Hier läßt sich zugleich eine allgemeine Folgerung machen, daß, wenn F unter dem D liegt, der Kegelschnitt eine Ellipse sey (Fig. XV. XVI.); fließt aber F mit D zusammen, so ist selber eine Parabole (Fig. XVIII.). Liegt endlich das F ober dem D, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbole (Fig. XVII.). Denn im ersten Falle ist MFN < MDN; folglich müssen FN und Mf zusammenstoßen, und zwar auf der Seite N, welche sich gegen die Tangente MQ wendet. Im zweyten Falle ist es klar, daß sie nirgends einander begegnen. Aber im dritten Falle (Fig. VII.) ist MFN > MDN, hiemit stossen die zwo Linien NF und Mf auf der Seite F zusammen, welche die Gegenseite der Tangente MQ ist. Nun dann im ersten Falle sind die Brennpuncte auf der nämlichen Seite der Tangeute, welches sich bey einer Ellipse äußert. Im zweyten Falle hat der eine von den Brennpuncten einen unendlich entfernten Abstand, welches der Parabole eigen ist. In dem dritten Falle sind die Brennpuncte auf den verschiedenen Theilen der Tangente anzutreffen, welches aber nur von der Hyperbole kann verstanden werden.

33. §.

Dieses alles, was wir vom 23. §. bis auf den gegenwärtigen Absatz gesagt haben, mußten wir voraus setzen, um die nachfolgenden Sätze von der Theorie der Centralkräfte ächt aufgeklärt einzusehen, und gründlich zu beweisen. Es gehören aber selbe meistens zur richtigen Bestimmung der Laufbahne eines Planeten; wie auch die Geschwindigkeit eines Körpers zu bestimmen, mit welcher derselbe nach der gegebenen Richtung muß hingerissen werden, damit er um den gegebenen Mittelpunct der Kräfte einen Kegelschnitt beschreibe, welchen man nämlich aus dem halben Durchmesser des küssenden Winkels und aus der Sehne, welche man durch den Mittelpunct der Kräfte ziehet, finden kann; oder auch daß man die Lage und die Größe des zu beschreibenden Kegelschnittes bestimmen kann, wenn die Geschwindigkeit und die Richtung eines durch die Bewegung hingerissenen Körpers gegeben sind. Man setzt aber hier allzeit im voraus als bekannt, daß die Centralkräfte in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältnisse, Ratio duplicata reciproca, der Abstände wirken.

34. §.

Es sey (XV. Fig.) ein küssender Zirkel, welcher seinen Durchschnitt in M hat. Der Mittelpunct der Kräfte sey F; die Richtung der mitgetheilten Kraft sey MP. Endlich die Sehne MV solle durch F gehen. Setze man nun, daß der Körper in M schon jene Geschwindigkeit inne hätte, welche er doch erst bekommen würde, wenn er durch MD herab fiele. Nun wird selber zu der nämlichen Zeit, wo er mit einer einförmigen Kraft die Linie MD beschreibet, das zweyfache davon, nämlich ML beschreiben, im Falle seine Bewegung eine einförmig zunehmende oder beschleunigende wäre. Gleichfalls, da der Körper, im Falle er durch die nämliche Geschwindigkeit dahin gerissen würde, mit einer gleichförmigen Bewegung die Linie MP beschreibt, so würde er mit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung die Linie PR durchlaufen; es haben aber die Räume, welche bey der Wirkung der nämlichen Anziehungskraft durch eine einförmig zunehmende Kraft durchlaufen werden, das nämliche Verhältniß unter sich, welches die Quadrate der Zeiten beobachten; und diese sind wie die Quadraten der Räume, welche zu der nämlichen Zeit mit einer einförmigen und durch den Fall überkommenen Geschwindigkeit beschrieben würden; wie dieses alles aus der Lehre der Mechanik bekannt ist. Es ist also $PR : MD = MP^2 : ML^2$. Und, wenn man das erste Verhältniß mit PA, welche zu MV parallel ist, multiplicirt, so ist $PR \times PA : MD \times PA = MP^2 : ML^2$. Es ist aber bekannt, daß in einem Zirkel $PR \times PA = MP^2$: so ist denn auch $MD \times PA = ML^2$. Deßwegen ist $PA : ML = ML : MD$. Wenn nun die Linie PA der andern Linie MV unendlich nahe kömmt; oder wenn die Puncte M, R zusammenfließen, so ist $PA = MV$; deßwegen auch $MV : ML = ML : MD$. Nehme man nun, daß $ML = 2MD$, so ist $MV = 2ML$, mithin $MD = \frac{1}{4} MV$. Das ist: die Sehne eines küssenden Zirkels in einem Kögelschnitte, wenn sie durch den Brennpunct gehet, in welchem der Mittelpunct der im umgekehrten gezweyfältigten Verhältnisse wirkenden Kräfte ist; eine solche Sehne ist die vierfache Höhe, durch welche ein Körper fallen muß mit einer unveränderlichen Anziehungskraft, welche er in einem solchen Abstande hat, daß er jene Geschwindigkeit überkomme, mit welcher er nach der gegebenen Richtung soll hingerissen werden, um den gegebenen Kögelschnitt zu beschreiben.

35. §.

Eben diesen Hauptsatz von der Theorie der Centralkraft kann man aus des Newtons oder de la Cailles Grundsätzen (welche wir indessen borgen wollen, um nicht gar zu sehr weitläuftig zu werden) auf folgende Art beweisen. Man nehme MD als die Höhe an, durch welche, wenn ein Körper fällt, in M die Geschwindigkeit erhalten wird. So ist nun vermöge der astronomischen Grundsätze *) die Geschwindigkeit in M wie $\frac{\sqrt{2MB}}{FT}$ (denn, wenn man die Linie NB zur FM perpendicular ziehet, so ist MP der halbe Parameter von der Hauptaxe, wie wir schon oben 24. §. bewiesen haben): es ist aber auch aus den mechanischen Grundsätzen **) $c = 2\sqrt{5}\,v$, oder auch $2\frac{\sqrt{MD}}{FM}$, und hiemit $\frac{\sqrt{2MB}}{FT} = \frac{2\sqrt{MD}}{FM}$, oder $\frac{2MB}{FT^2} = \frac{4MD}{FM^2}$. Deßwegen ist $FM^2 : FT^2 = 2MD : MB$; und wenn man aus T zu FM eine senkrechte Linie TX herabfallen läßt, so bekömmt man wegen

*) Siehe Newton. Lib. I. Princ. Propos. XVI. Theorem. VIII. Item de la Caille Leçons Astron. §. 166.

**) Siehe des de la Caille Mechaniq. §. 113.

gen $FM^2 : FT^2 = FM : FX$ die Proportion $FM : FX = 2MD : MB$: ziehet man weiters die Linie NL zu MT parallel, so ist gleichfalls $ML : MB = FM : FX$; denn die Dreyecke FTM, FTX, MNL, MNB sind einander ähnlich. Deßwegen wird auch $MB : ML = MB : 2MD$; das ist, $2MD = ML$. Es ist aber aus der Lehre von den Kögelschnitten bekannt, daß $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$; und also ist MLC ein rechter Winkel (26. §.) und ML $= \frac{1}{2}MV$; hiemit $MD = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{4}MV$.

36. §.

Wir haben schon oben 32. §. gesagt, daß, wenn D ober dem F ist, so ist der Durchschnitt des gegebenen küssenden Winkels eine Ellipse; wenn aber D mit F zusammenfließt, ist selber eine Parabole; und endlich eine Hyperbole, wenn D unter dem F liegt. Nun ist es richtig, daß, wenn eine Ellipse beschrieben wird, die Projectionsgeschwindigkeit minder seyn müsse, als die Geschwindigkeit, welche der Körper überkommen würde, wenn er aus M bis in F fiele. Eben so gewiß ist es, daß selbe in Beschreibung einer Parabole gleich seyn müsse. Endlich zur Beschreibung einer Hyperbole ist nöthig, daß der Körper mit einer größern Geschwindigkeit muß hingerissen werden, als diejenige ist, welche man durch eine in M unveränderliche Anziehungskraft überkommen würde, wenn der Körper aus M in F fällt.

37. §.

Wenn wir im voraus setzen, daß der Mittelpunct der Kräfte einen unendlich grossen Abstand habe, so bekömmt man eine Parabole (XIX. Fig). Denn alsdenn wird die Linie TN zu

UM

UM parallel. Ferner in der oben bewiesenen Analogie DF : FM = FM : FE (30. §.) wird FM — FD (oder DM) : FE — FM (ME) = DF : FM. Weil nun nach dem gesetzten Heischesatz FD und FM unendlich groß sind, so sind sie einander gleich, wie auch DM = ME; deßwegen, wenn man aus E eine senkrechte Linie EQ ziehet, und das Q*f* demselben gleich nimmt, so bekömmt man den Brennpunct *f*; hernach ziehe man die Ordinate MP; die Subtangens PT, und bestimme den Scheitelpunct S, so wird man EM als den vierten Theil des zum Durchmesser MV gehörigen Parameters überkommen.

38. §.

Wenn M der Scheitelpunct von der Hauptaxe des Kögelschnittes ist, (XV. XVI. XVII. XVIII. Fig.) so gehet der Durchmesser des küssenden Zirkels durch den Mittelpunct der Kräfte, und die Sehne MV wird mit dem Diameter zusammen fließen; deßwegen auch die Puncte L, N, C zusammen kommen. Wir wissen aber, daß die Normale im Scheitelpuncte einem *halben* Parameter gleich sey (19. §.), und hiemit verwandelt sich die Formel $\frac{MN^3}{MB^2}$, welche die Gleichung des halben Durchmessers vom küssenden Zirkel ist (26. §.), in $\frac{MB^3}{MB^2} = MB$, welches einem halben Parameter gleich ist. Es ist also in diesem Falle MQ die Normale zu MF (Fig. XX.). Wenn nun MD < DF in der Analogie FD : FM = FM : FE, so wird FM < 2 FD, hiemit auch FE < 2 FM. Deßwegen läßt man die zu M Q in M senkrechte Linie EM herabfallen, und ziehet man sie hinaus bis in *f*, daß also M*f* = ME, so wird *f* innerhalb M und F fallen. Es ist also in diesem Falle M der oberste Apsidenpunct von einer zu beschreibenden Ellipse. Und, wenn man die vorige Proportion

zer-

zertheilet, so wird $FE - FM (ME)$; $FM = FM - FD (MD)$: FD, hiemit $ME : MD = FM : FD$ und $FM > FD$, folglich auch $EM > MD$: deßwegen wird f zwischen den D und F hineinfallen.

39. §.

Wenn $MD > FD$ (Fig. XXI.), so wird $FM > 2FD$, und $FE > 2MF$; deßwegen, wenn man den Punct f auf das M beziehet, so wird selber über das F hinausfallen, und M wird also der unterste Apsidenpunct in einer beschriebenen Ellipse seyn.

40. §.

Wenn $MD = DF$ (Fig. XXII.), so wird $FM = 2FD$, und $FE = 2FM$, wo dann f in F fallen wird; das ist, es wird ein Zirkel beschrieben werden. Deßwegen ist klar, daß das Hugenische Theorem nur als ein sonderlicher Fall in Betrachtung des gesagten anzusehen sey, denn Hugenius beweiset, daß die Geschwindigkeit in einem Zirkel derjenigen Geschwindigkeit gleich kömmt, welche überkommen wird, wenn der Körper den vierten Theil des Durchmessers herabfällt.

41. §.

Wenn $MD > MF$ (Fig. XXIII.), und FE auf der nämlichen Seite ist, wo D liegt, so wird EM allzeit größer seyn als FM: deßwegen fällt f allzeit außer die Tangente, und der Kegelschnitt wird eine Hyperbole seyn. Im Gegentheil ist $MD = MF$ (Fig. XXIV.), oder $FD = 0$, so wird $ME = \infty$, und der zu beschreibende Kegelschnitt eine Parabole seyn.

42. §.

Wenn MD unendlich groß ist, (Fig. XVII. und XXIII.) das ist, wenn ein Körper mit einer unendlich grossen Geschwindigkeit hingerissen wird, so verwandelt sich die Hyperbole in eine gerade Linie MQ; denn auf solche Weise wird $FD = \infty$, und die Analogie $FD : FM = FM : FE$ sich in $\infty : FM = FM : 0$ verändern, wo denn, weil die Transverse oder Zwergaxe sich verliehret, die Hyperbole eine unendliche Breite überkömmt; das ist, selbe wird zu einer geraden Linie.

43. §.

Wenn MQ oder die Richtung der Projection mit FM (Fig. XXV.) in einer geraden Linie liegt, und der Körper mit derjenigen Geschwindigkeit hingerissen wird, welche er überkömmt, wenn selber durch MD fällt; so werden erstens MC und LC parallele; oder der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels unendlich groß; hernach fällt LM in M, oder die Normale MN verliehret sich; endlich wird die krumme Linie sich in eine gerade verändern, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gehet. Aus welchem sich dann weiters folgern läßt, daß, wenn ein Körper eine Ellipse S M s (Fig. XII.) beschreibet, wo der Hauptparameter 2 MB sey, so wird dessen Geschwindigkeit in s als dem untersten Apsidenpuncte zur Geschwindigkeit in S, als dem obersten Apsidenpuncte, eben das Verhältniß beobachten, welches ist zwischen $\frac{\sqrt{2BM}}{Fs}$ und $\frac{\sqrt{2BM}}{FS}$ oder $FS\sqrt{2BM} : Fs\sqrt{2BM}$.

44. §.

Wenn in den meisten Figuren, auf welche wir uns bisher bezogen haben, das MD einem 0 gleich genommen wird, so bekömmt

kömmt

kömmt die Analogie FD : FM = FM : FE alle drey Glieder einander gleich; deßwegen ME = o und f mit M zusammenfließt. Hiemit, wenn ein Körper mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit hingerissen wird, so wird er eine unendlich enge Ellipse, das ist, eine gerade Linie beschreiben, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gezogen wird.

45. §.

Aus dem gesagten läßt sich ferner beweisen, daß die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher einen Kegelschnitt beschreibet, und wo der Mittelpunct der Kräfte in dem Brennpuncte gesetzet wird, in einem jeden Puncte des Umkreises das gerade Quadratwurzlichte Verhältniß (Ratio directa subduplicata) des Hauptparameters, und das verkehrte einfache Verhältniß des Perpendikels, welches man aus dem Mittelpuncte der Kräfte herabläßt, beybehält. Denn aus den Formeln der Mechanik, wo man gemeiniglich die Geschwindigkeit durch c, die Zunehmungskraft durch v, und den Raum durch s ausdrücket, ist bekannt, daß $c = 2\sqrt{sv}$; wir nehmen aber in diesem Zusatze an, daß $v = \frac{1}{FM^2}$; und $s = \frac{1}{4}$ MV (Fig. XV.) Deßwegen ist nothwendig $c = \frac{2 \times 1}{FM} \times \frac{1}{2}\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{MV}}{FM}$. Es ist aber BM : MN = MN : ML = $\frac{MN^2}{BM}$; und 2 ML = MV = $\frac{2\,MN^2}{BM}$. Wie auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke FTM und MBN bekömmt man FT : FM = BM : MN = $\frac{MF.\,BM}{FT}$; folglich $\frac{2\,MN^2}{BM} =$

$\frac{2\,FM^2.\,BM^2}{FT^2.\,BM} = \frac{2\,FM^2 \times BM}{FT^2}$; und $\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{2\,MN^2}}{\sqrt{BM}} =$ $\frac{FM \times \sqrt{2\,BM}}{FT}$, welchen Werth, wenn man in $\frac{\sqrt{MV}}{FM}$ ansetzet, so wird $\frac{FM \times \sqrt{2\,BM}}{FT \times FM} = \frac{\sqrt{2\,BM}}{FT}$. Es ist aber BM aus dem obengesagten (§. 25.) dem halben Parameter der Hauptaxe gleich: deßwegen ist die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher ꝛc. *

*) Hier könnten wir noch sehr vieles aus der Theorie der Centralkräfte beyrücken, welches in der Rücksicht auf die Astronomie ungemein nützlich und vortheilhaft ist; doch wird das meiste, was wir davon sagen können, in des de la Caille und de la Lande Astronomie auf die vollkommenste Weise angeführet. Deßwegen wollen wir hier nur noch was weniges hersetzen, wovon man in der Astronomie einen nützlichen Gebrauch machen kann.

46. §.

Erste Aufgabe.

Man soll das Verhältniß der Centralkräfte finden, in dem Falle, daß ein Körper einen Zirkel MOA beschreibe (Fig. XV.), und der Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct des Zirkels in F gesetzt sey. Die allgemeine Auflösungsformel ist für diese Aufgabe $f = \frac{Fp}{ST^2.PF^2}$, (*) oder, wenn wir diese Formel auf die XV. Figur anwenden wollen, und also statt des Theils der Tangente einen unendlich kleinen Bogen annehmen, so wird $f = \frac{PR}{FT^2 \times MR^2} = \frac{MY}{FT^2 \times MR^2}$. Nun ist $ME : MR = MR : MO$, hiemit $ME = \frac{MR^2}{MO}$. Weiters ist $ME : MY = ML :$

MC

*) Siehe De la Caille Leçons Astron. §. 160.

$MC = MV : MO$; das ist: $\frac{MR^2}{MO} : MY = MV : MO$: hiemit $MY = \frac{MO \times MR^2}{MO \times MV} = \frac{MR^2}{MV}$. Wenn man also diesen Werth in der Formel ansetzt, so wird $f = \frac{MR^2}{FT^2 \times MR^2 \times MV} = \frac{1}{FT^2 . MV}$. Hernach ist $CM : LM = MO : MV = FM : FT$, hiemit $FT^2 = \frac{MV^2 . FM^2}{MO^2}$, wo dann endlich $f = \frac{MO^2}{FM^2 \times MV^3}$, und, wenn man die unveränderliche Größe MO wegläßt, so ist $f = \frac{1}{FM^2 \times MV^3}$.

47. §.

Es kann also durch die allgemeine Anziehungskraft kein Zirkel beschrieben werden, wenn nicht der Mittelpunct der Kräfte eben der Mittelpunct des Zirkels ist. Deßwegen können die Planeten um die Sonne keine Zirkelbögen beschreiben, wenn die Sonne außer den Mittelpunct gesetzt ist.

48. §.

Zwote Aufgabe.

Das Verhältniß der Centralkraft zu finden, wenn der Körper eine Ellipse beschreibt, und der Mittelpunct der Ellipse mit dem Mittelpuncte der Kräfte überein kömmt, oder eben derselbe ist. Die

Formel für diese Aufgabe ist $f = -\frac{SP}{ST^3 \times^2 PG}$ *) wo ST (Fig. XXVI.) die senkrechte Linie ist, welche aus dem Mittelpuncte der Kräfte zur Tangente gezogen wird. 2 PY ist der Durchmesser des küssenden Winkels, und SP der Radius Vector. Weil aber nach diesem Satze $2\,PY = \frac{2\,SD^2}{ST}$ so wird $f = \frac{SP \times ST}{ST^3 \times 2\,SD^2} = \frac{SP}{ST^2 \times 2\,SD^2}$. Es ist aber $SD^2 = \frac{AS^2 \times SB^2}{ST^2}$; deßwegen, wenn man dafür den Werth ansetzet, so ist $f = \frac{SP \times ST^2}{2\,ST^2 \times AS^2 \times BS^2} = \frac{SP}{2\,AS^2 \times BS^2}$, und wenn man endlich die unveränderlichen Größen wegläßt, so wird $f = SP$.

49. §.

Dritte Aufgabe.

Das Verhältniß der periodischen Zeiten zu finden, wenn ein Körper durch die Centralkraft, welche nach dem Mittelpunct der Ellipse gerichtet ist, eine Ellipse beschreibet. Man soll aber dieses Verhältniß sowohl für die Ellipse, als für einen Zirkel bestimmen, welcher über die größere Axe der Ellipse ist beschrieben worden. Es sollen also die Zeiten, in welchen der Zirkel und die Ellipse beschrieben worden, T und t heißen. Die Größe des Raumes von dem Zirkel sey = A; von der Ellipse aber = a. Setze man nun, daß der Körper aus A (Fig. XXVII.), wo die Centralkraft in einer Ellipse und in dem Zirkel die nämliche ist, hingerissen werde, so werden die Zeiträume AMS und ANS seyn, da indessen in der Zeit, wo der Körper durch AP fällt, in der Ellipse

*) Siehe De la Caille Leçons Astron. §. 162.

Ellipse AM und in dem Zirkel AN beschrieben würden. Nehme man nun den Sector ANS = S, und den Sector AMS = s, so ist aus den mechanischen Grundsätzen $T : t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$ (18. §.). Es ist aber $A : a = SD : SY$ und $S : s = SD : SY$; deßwegen, wenn man diesen Werth dafür ansetzet, so ist $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SY}{SY} = 1 : 1$, folglich $T = t$.

50. §.

Wenn man nun das Gesagte genugsam einsieht, so ist es klar, daß der geometrische Ort aller Brennpuncte f in den Kegelschnitten, welche durch eine jede Projectionsgeschwindigkeit nach einer gewissen Richtung QM um den gegebenen Brennpunct F mögen beschrieben werden (Fig. XVII.) eine unendliche gerade Linie $fM\Phi$ sey, also zwar, daß davon der unbestimmte Theil $M\Phi$ für die Brennpuncte der Ellipsen gehöre, welche sich in eine Parabole verwandeln, sobald Φ unendlich von M abweicht: hingegen wird Φ dem M unendlich nahe kommen, so ziehen sich die Ellipsen in eine gerade Linie zusammen. Weiters gehört der andere Theil Mf für die Hyperbolen, also zwar, daß, wenn selbe um den Brennpunct F beschrieben werden, sie allzeit QM in M berühren, so oft $Mf > MF$. Wenn aber $FM = Mf$, so verwandeln sich beyde Hyperbolen in eine gerade Linie QM. Ist endlich $FM > fM$, so berühren sie die gerade Linie QM, welche den Brennpunct f haben. Wenn also die Anziehungskraft nach F abzielet, so ist es nicht möglich, daß eine Hyperbole um den Brennpunct f beschrieben werde, denn, weil in diesem Falle allzeit $EM > FM$ und $EM = fM$, so ist auch $fM > FM$. Nimmt man aber im Gegentheil die vom Punct F zurück prellende Kraft, welche in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältnisse der Abstände wirket, so werden zwar Hyperbolen, von welchen der Ort ihrer Brennpuncte f auf der andern Seite der Tangente QM in Mf ist, beschrieben werden, aber nur so lange, bis Mf dem MF gleich werde. Also wollen wir setzen, daß der Körper M (Fig XXVIII.) von F im besagten Verhältnisse zurück geprellet werde, so wird man MD über QM hinaus ziehen müssen, durch welche Linie, wenn der Körper mit einer unveränderlichen zurückprellenden Kraft in M zurück kehrte, selber diejenige Geschwindigkeit überkommen würde, mit welcher er aus M hingerissen wird. Man mache nun die Analogie $FD : FM = FM : FE$; läßt man nun die Perpendiculare EQ zn QM herabfallen, und nimmt man das $EQ = Qf$, so überkömmt man den Brennpunct der Hyperbole AMO, welche um den Brennpunct f beschrieben wird. Denn, weil MD dem vierten Theile der Sehne des küssenden Zirkels gleich ist, und, indem selbe durch den Mittelpunct der zurück prellenden Kraft F gezogen ist, sie über QM zu stehen kömmt, so ist der ganze Zirkel über QM hinaus. Deßwegen, wenn man, wie vorher, das DL dem MD gleich macht, und zu CM die Perpendiculare LN (es ist aber CM zu QM gleichfalls eine senkrechte Linie) ziehet, so wird MN die Normale der Hyperbole. Ferner bekömmt man in der Analogie $FD : FM = FM : FE$ durch die Zertheilung $FD - FM$ (DM) $: FM - FE$ (ME) $= FD : FM$ und wegen des rechten Winkels bey N ist $ND = DM$; wegen der zween rechten aber bey Q ist $fM = ME$; deßwegen ist auch $ND : fM = FD : FM$. Wenn man also Ff hinaus ziehet, so gehet selbe durch N.

51. §.

Man kann sich einen dreyfachen Fall vorbilden, in welchem eine Hyperbole, welche durch eine zurückprellende Kraft beschrieben wird, sich in eine gerade Linie verwandelt. Der erste Fall ist, wenn man die Projectionsgeschwindigkeit als unendlich groß oder $= \infty$ annimmt. Der zweyte Fall ist, wenn man eben diese Geschwindigkeit oder MD als $= o$ ansetzet; und in diesem Fall ist $FM = f\,F = EF$; das ist, der Abstand des Brennpuncts von dem Scheitelpunct verliehrt sich ganz und gar, und die Hyperbole, indem sie unendlich zusammen gedrückt wird, verwandelt sich in eine gerade Linie. Wenn man endlich für den dritten Fall setzet, daß MQ mit FM in einer geraden Linie liegt, so geschieht das nämliche. Ferner läßt sich folgern, daß, wenn F zu einem unendlich entfernten Abstande gelangt, oder wenn die zurückprellende Kraft nach den parallelen Richtungen wirket, so wird die Hyperbole, welche man um den Brennpunct f beschreibet, zu einer Parabole, welche nach der Methode, so wie oben 37. §. ist bewiesen worden, kann bestimmet werden; dieses einzige muß man beobachten, daß man F auf die Seite des E setze, und die in der XIX. und XXIV. Figur gemachte Entwerfung umzuwenden habe.

52. §.

Wenn ein Körper um F (Fig. XII.) einen Zirkel, dessen Radius Fs wäre, beschreiben sollte, so würde seine Geschwindigkeit durch $2\sqrt{vs}$ müssen ausgedrücket werden, wo denn v die Centralkraft, s aber den Raum, durch welchen ein Körper fallen würde, anzeigete, oder man würde dieselbe auch durch das Verhältniß zu $\frac{2 \times 1 \times \sqrt{\frac{1}{2}}\,Fs}{Fs} = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}}\,Fs}{Fs} = \frac{\sqrt{2}\,Fs}{Fs}$ ausdrücken können

 (43. §.).

(43. §.). Eben auf diese Weise, wenn ein Körper einen Zirkel beschreiben sollte, dessen Mittelpunct F und der halbe Durchmesser FS wäre, so würde eine Geschwindigkeit erfordert, welche wäre wie $\frac{\sqrt{2Fs}}{FS}$; deßwegen würde die Geschwindigkeit eines solchen Körpers, welcher nämlich einen Zirkel von einem halben Durchmesser FS beschriebe, durch das Verhältniß $FS\sqrt{2Fs} : Fs\sqrt{2FS}$ müssen ausgedrücket werden. Es ist aber klar, daß $Fs < BM$ und $FS > BM$; deßwegen ist auch $FS\sqrt{2BM} > FS\sqrt{2Fs}$ und $Fs\sqrt{2BM} < Fs\sqrt{2FS}$; hiemit ist $FS\sqrt{2BM}$ die Geschwindigkeit in dem unteren; $Fs\sqrt{2BM}$ aber die Geschwindigkeit in dem obersten Apsidenpuncte von einer Ellipse. Wenn also ein Körper in einer Ellipse zu dem untersten Apsidenpuncte kömmt, so hat er eine größere Geschwindigkeit, als daß er mit solcher einen Zirkel, dessen halber Durchmesser der Abstand dieses Apsidenpuncts von dem Mittelpunct der Kräfte wäre, beschreiben könnte. Ist er aber im obersten Apsidenpunct, so ist seine Geschwindigkeit minder, als sie erfordert wird einen Zirkel zu beschreiben, wo der halbe Durchmesser dem Abstande des obersten Apsidenpuncts von dem Mittelpuncte der Kräfte gleich kömmt. Uebrigens verstehet man leicht, daß die Geschwindigkeiten der Körper, welche für ihren Umkreis concentrische Zirkeln hätten, ein umgekehrtes quadratwurzlichtes Verhältniß ihrer halben Durchmesser beobachten müßten; denn, wenn die halben Durchmesser FS und Fs sind, so sind aus dem Gesagten die Geschwindigkeiten wie $Fs\sqrt{2FS} : FS\sqrt{2Fs}$; oder, wenn man diese zwey Glieder mit $\sqrt{2Fs \times FS}$ dividirt, so verhalten sie sich wie $\sqrt{Fs} : \sqrt{FS}$.

53. §.

Wir haben schon gesagt, daß LNM (Fig. XV.) ein rechter Winkel sey (§. 26.): Es gehet also der Zirkel, welchen man über den Diameter LM aus dem Mittelpuncte D beschreibet, durch N. Deßwegen wird DN = DM, und DNM = DMN = MN*f*. Folglich sind DN und M*f* einander parallel, und FD : DN (oder DM) = FM : M*f*; wiederum FD : FD + DM (FM) = FM : FM + M*f* (S*s*), welche Analogie wir schon anderswo bewiesen haben (§. 30.).

54. §.

Man kann die Aufgabe von den Centralkräften auch umkehren, und alsdann folgende Auflösung anwenden, durch welche man zugleich beweisen kann, daß die Centralkräfte, wenn sie im umgekehrten verzweyfältigten Verhältnisse wirken, einen Kegelschnitt beschreiben. Es sey (Fig. XXVIII.) FT das Perpendikel, welches man aus F dem Mittelpuncte der Kräfte auf die Tangente MQ herabgelassen. MVA sey der in M küssende Zirkel von einer krummen Linie, welche man beschreiben soll; und FM sey der Radius Vector. In diesem Falle ist *f* die Centralkraft = $\frac{FM}{FT^3 \times MA} = \frac{1}{FM^2}$; * oder $FM^3 = FT^3 \times MA$. Deßwegen ist $FM^3 : FT^3 = MA : R\ (1)$: oder auch, weil die Dreyecke FTM, MVA sich ähnlich sind, so werden MP und MO zu MAMV proportional: hiemit ist $FM^3 : FT^3 = MA^3 : MV^3 = MA : MO = MA : 1$. Deßwegen ist MO = 1; das ist, MO ist eine unveränderliche Größe. Nun aber nehmen wir von diesen die halben Theile MC, MB, so wird MO als der Parameter = MB; denn MB ist der halbe Parameter der Axe von dem Kegelschnitte,

*) Siehe de la Caille Leçons Astronom. §. 161.

weil MC, ML, MN, MB beständig proportional sind, wie wir schon oben §. 26. bewiesen haben. Weil nun in den Kegelschnitten allzeit *M* A zu *M* O, als der unveränderlichen Größe das nämliche Verhältniß haben, welches zwischen FM^3 und FT^3 ist, und weil dieses Verhältniß allezeit in den krummen Linien, welche durch die nach diesem Gesetze wirkenden Kräften beschrieben werden, beobachtet wird, so ist es mehr als überzeugend, daß alle Puncten einer krummen zu beschreibenden Linie solche sind, durch welche der nämliche Kegelschnitt gehen muß, und hiemit ein Kegelschnitt beschrieben wird. Was aber für eine Gattung der Kegelschnitte eine solche krumme Linie an sich nehme, das hängt eigentlich von der Projectionsgeschwindigkeit ab, welche, wenn sie gegeben wird, so kann man durch die Höhe *M*D und durch den Abstand *M*E alle Gattungen der Kegelschnitte bestimmen, so wie wir genugsam bisher bewiesen haben.

Ein


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
hyperb.
Parab.
Ellip.
Fig. 11
hyperb.
Parab.
Ellip.
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17

Fig 18

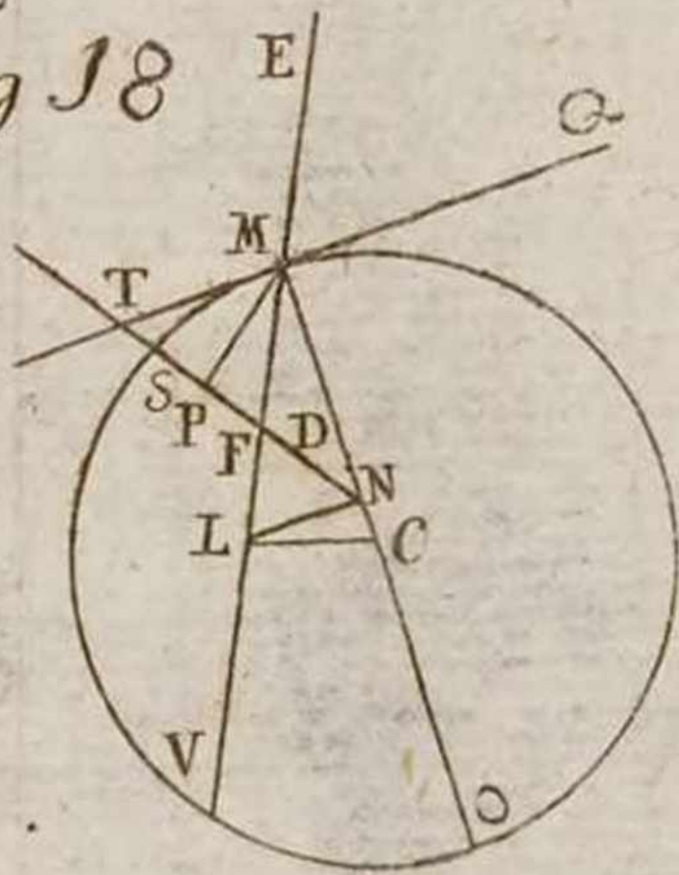

Fig. 19

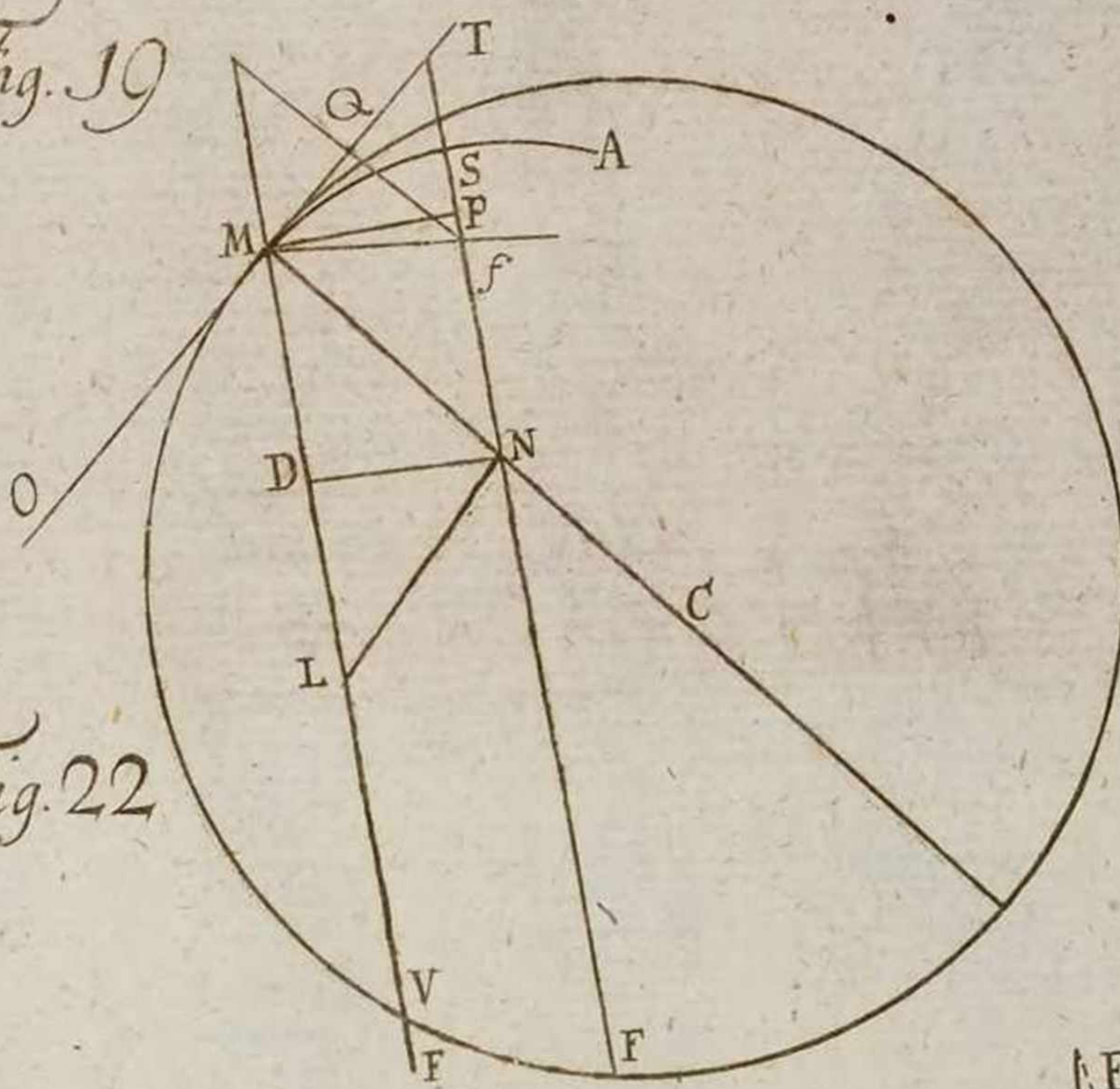

Fig. 20

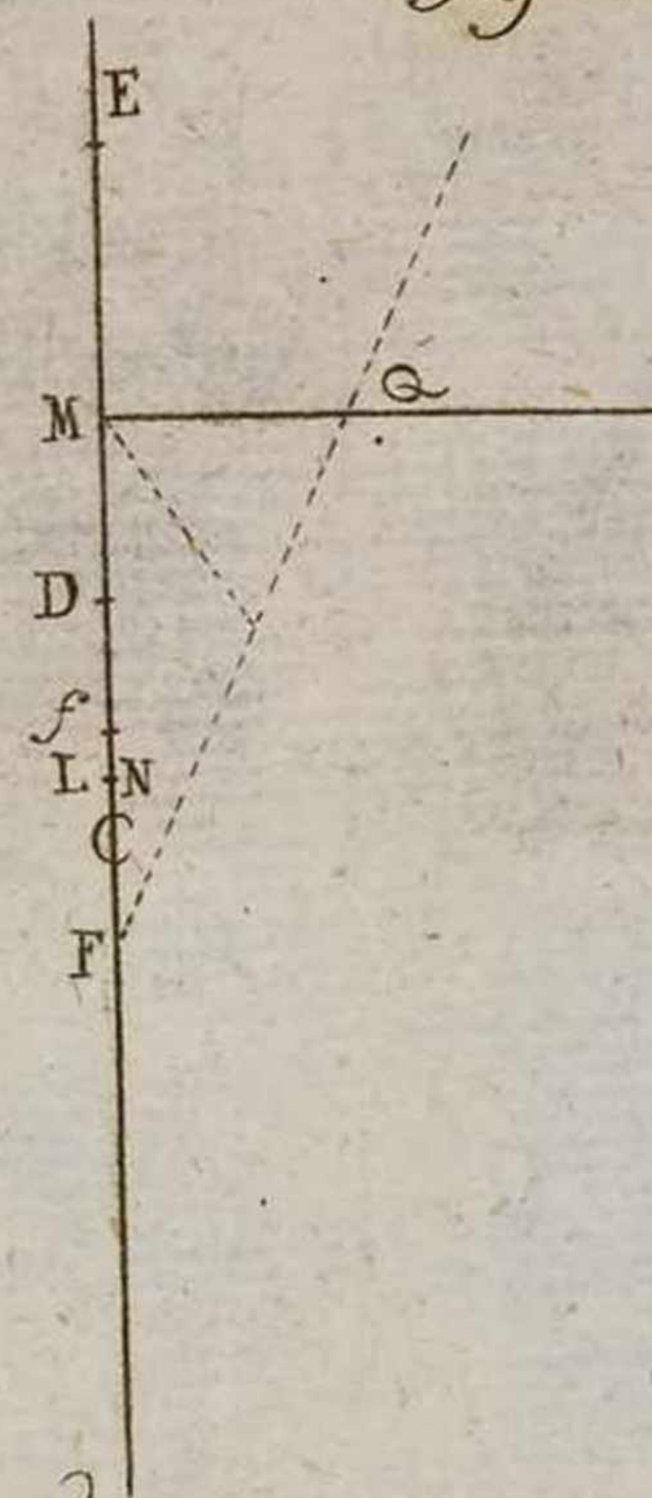

Fig. 21

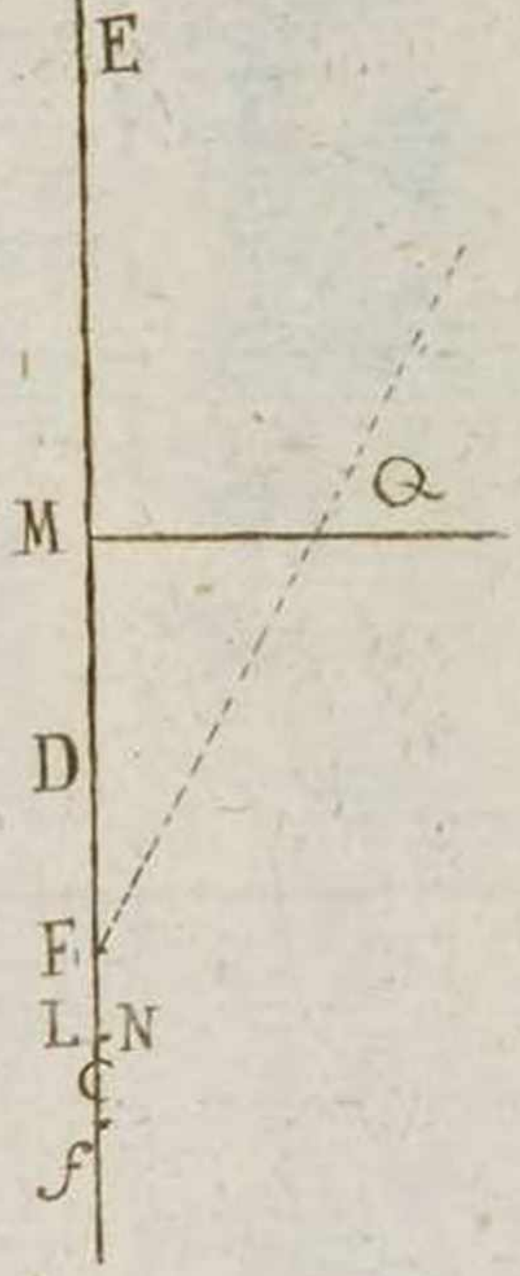

Fig. 22

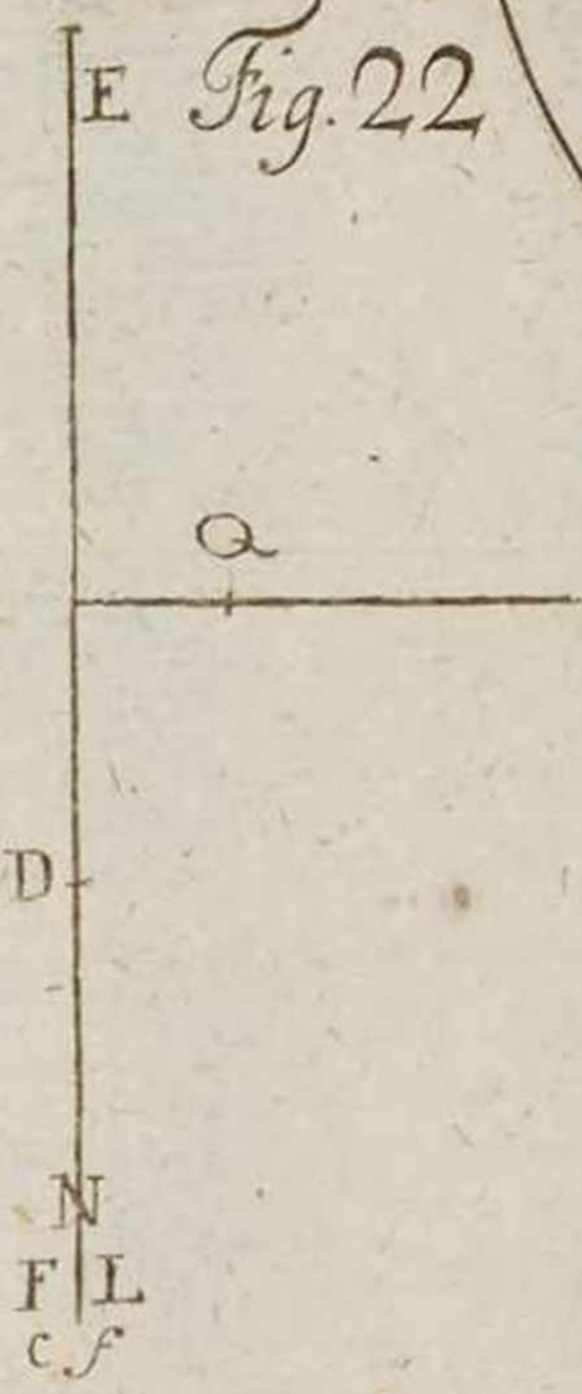

Fig. 23

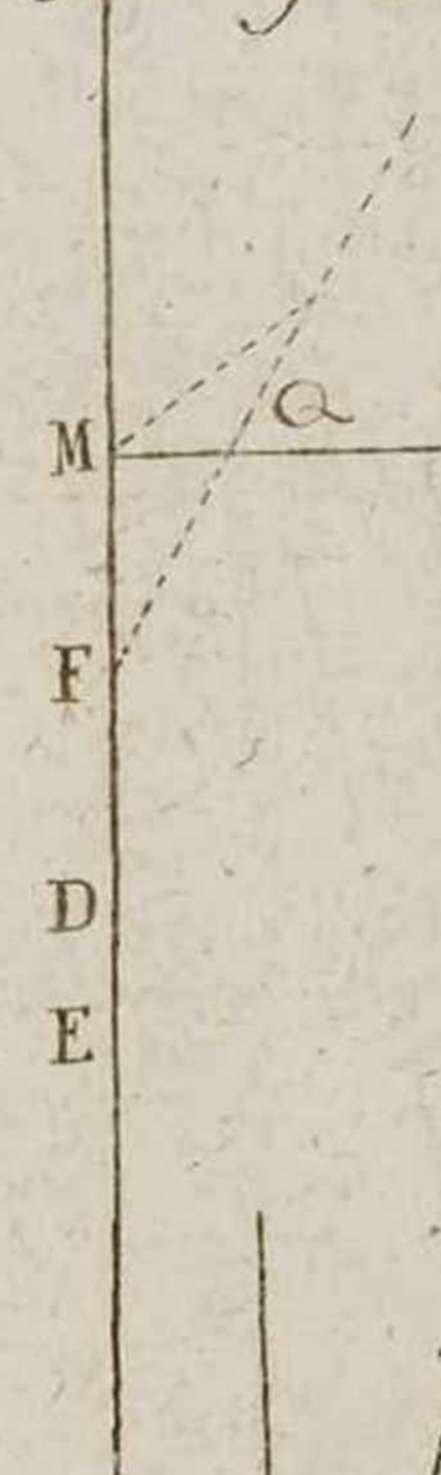

Fig. 24

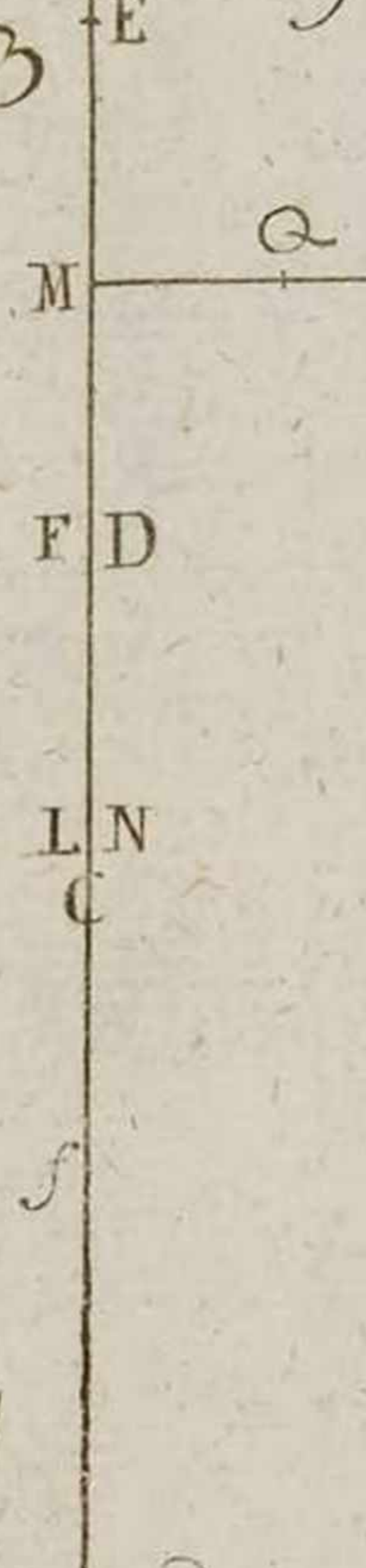

Fig. 25

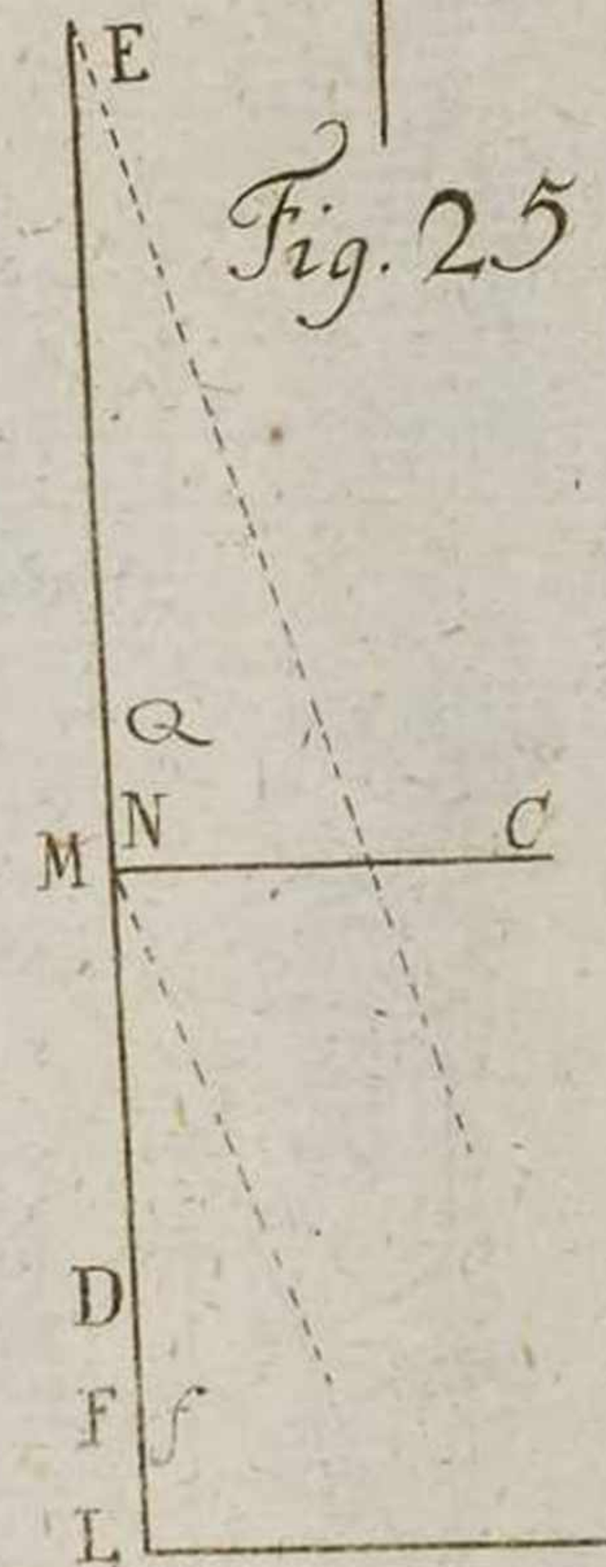

Fig. 26

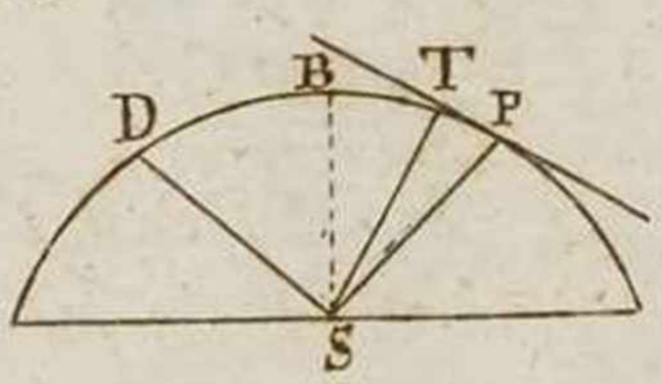

Fig. 27

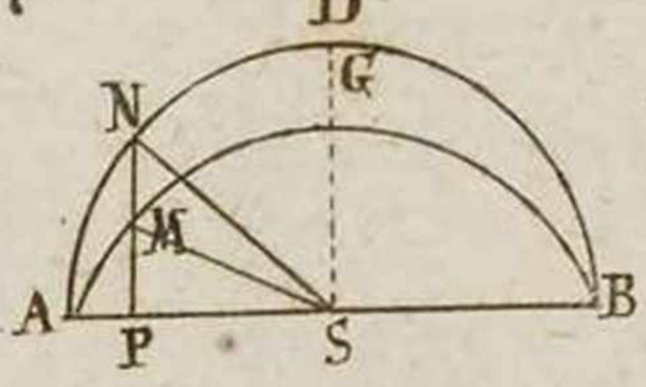

Fig. 28

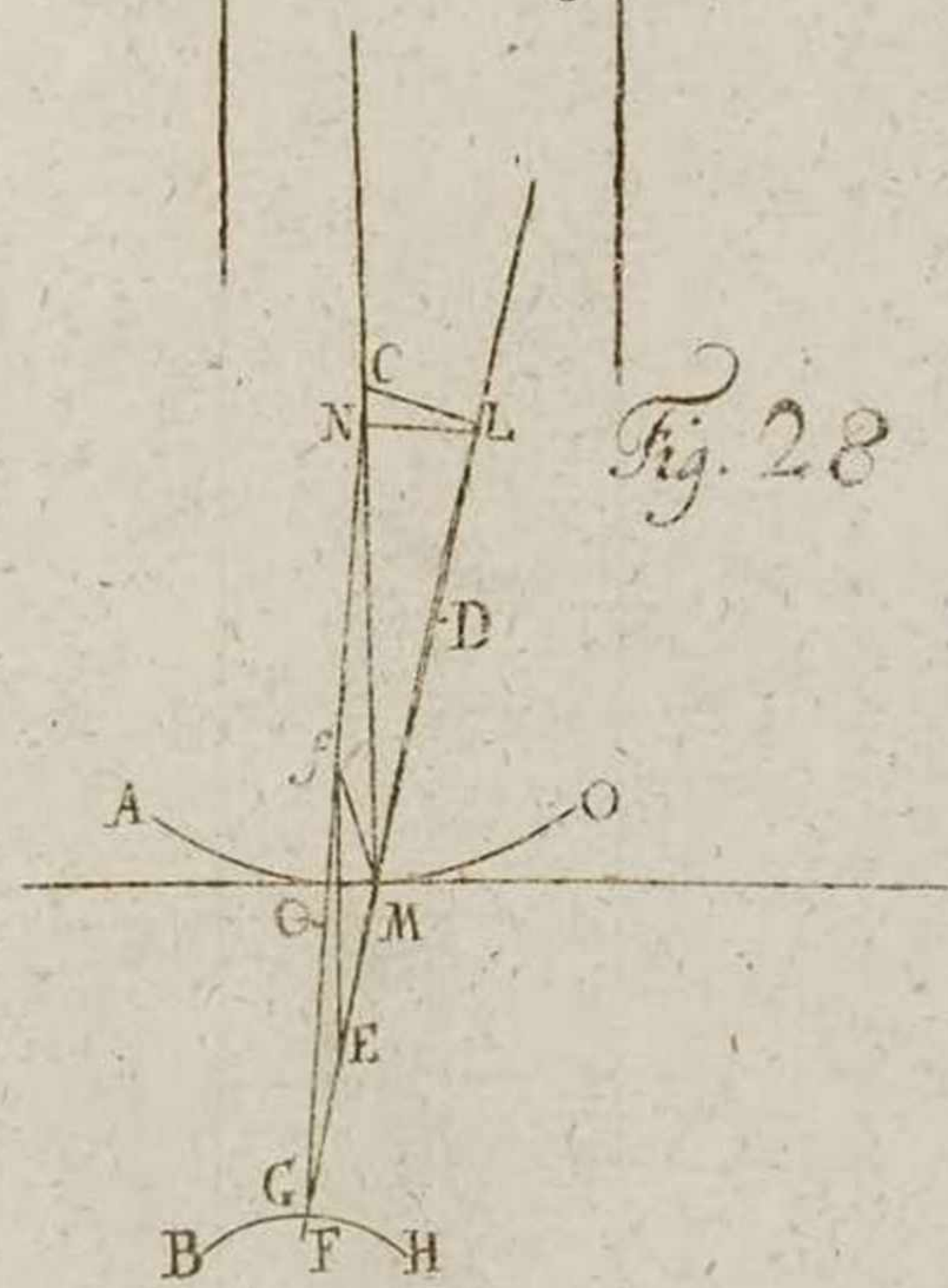

Fig. 29