BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 84

GOTTFRIED ECKART

Über die Streuung des Schalles an Wirbeln und turbulenten Zonen in der Atmosphäre

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer

am 11. Januar 1957

MÜNCHEN 1958
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

HERRN GEORG FABER

ZUM 80. GEBURTSTAG

GEWIDMET

INHALTSANGABE

ÜBERSICHT

Es wird ein beliebiges Unterschallströmungsfeld in der Atmosphäre vorausgesetzt und eine darauf einfallende ebene Schallwelle angenommen. Mittels einer Iterationsmethode wird in erster Näherung die Streuung des Schalles berechnet und ein einfaches Beispiel gegeben: Ein stationärer Wirbel ohne Singularitäten wird in seiner Achsenrichtung von einer ebenen Schallwelle getroffen; die Richtcharakteristik des gestreuten Schalles wird ermittelt.

1. ALLGEMEINE PROBLEMSTELLUNG

Der Verfasser hat in einer Anzahl von Arbeiten ([1] [2] [3] [4] [5] [6]) die Streuung elektrischer Wellen an turbulenten Zonen in der unteren Atmosphäre behandelt. Hier liegt eine wesentliche Vereinfachung des Problems darin, daß die Bewegungsgeschwindigkeit der Materie gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, der Lichtgeschwindigkeit, vernachlässigt werden kann.

Nun haben Pekeris [14] und Gordon und Booker [15] sich mit demselben Problem befaßt, und der erstere hat damit auch eine Berechnung der Schallstreuung an atmosphärischen Inhomogenitäten für den Fall bestimmter räumlicher Korrelationen geliefert. Diese deckt sich formal ungefähr mit der Rechnung für die elektrischen Felder, solange man die Strömungsgeschwindigkeit der Luft gegenüber der Schallgeschwindigkeit vernachlässigen kann. Es erscheint nun notwendig, eine Theorie zu entwickeln, die es gestattet, in sukzessiver Näherung den Einfluß der Bewegung des Ausbreitungsmediums zu ermitteln, und uns in den Stand setzt, die Schallausbreitung in einer turbulenten Zone und darum herum zu studieren. Es wird im folgenden eine Iterationsmethode gegeben, deren erste Näherung für nicht zu große Strömungsgeschwindigkeiten genügend genaue Resultate liefern dürfte.

2. AUFSTELLUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

2.1 DIE EULERSCHEN GLEICHUNGEN EINES KOMPRESSIBLEN GASES

Zunächst schreiben wir die Eulerschen Gleichungen eines kompressiblen Mediums an: die Geschwindigkeit der Teilchen sei $\vec{v}$ mit u, v, w bzw. als x, y, z Komponente. Die Dichte des Gases sei ϱ, der Druck p. Alle diese Größen seien Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z und der Zeit t; wir verwenden das Giorgische Maßsystem: somit messen wir $\vec{v}$ in m/sec, ϱ in kg/m^3, p in Newton/m^2.

Dann haben wir zunächst die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla \varrho). \tag{2}$$

Für den Fall fehlender äußerer Kräfte lautet die Bewegungsgleichung:

$$\varrho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla \vec{v})\right) + \operatorname{grad} p = 0. \tag{3}$$

$\nabla \vec{v}$ ist die Dyade, die aus der unbestimmten Multiplikation des Operators ∇ mit $\vec{v}$ hervorgeht, $(\vec{v}, \nabla \vec{v})$ ist das skalare Produkt (linksseitig) von $\vec{v}$ mit dieser Dyade. Das Gas sei als ideales Gas vorausgesetzt, das der Beziehung genügt:

$$\frac{p}{\varrho} = KT, \tag{4}$$

wo K eine Konstante ist, die sich auf die Masse 1 kg (nicht auf ein Mol) beziehe.

Für den Schallvorgang nehmen wir adiabatische Zustandsänderung an mit

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma. \tag{5}$$

Dann gilt für die Schallgeschwindigkeit c, d. h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen:

$$c^2 = \frac{p}{\varrho}\gamma, \tag{6}$$

was seinerseits eine Funktion von x, y, z, t ist. Wir denken uns die Amplituden des Schalldruckes p_s klein gegenüber dem Druck der Atmosphäre ohne Schall p_0, analog die Dichteamplitude ϱ_s klein gegenüber der Dichte der schallosen Atmosphäre ϱ_0:

$$p_s \ll p_0, \qquad \varrho_s \ll \varrho_0. \tag{7}$$

Es gilt bekanntlich

$$p_s = c^2 \varrho_s. \tag{8}$$

2.2 DIE SCHALLWELLENGLEICHUNG IN EINEM HOMOGENEN RUHENDEN GAS

Als eine Leitlinie für die späteren Betrachtungen geben wir zunächst eine Ableitung der Schallwellengleichung in einem homogenen ruhenden Gas. Als nächste Stufe wollen wir dann in schrittweiser Analogie die Schallwellengleichung in einem allgemeinen den Eulerschen Gleichungen genügenden „Grundfeld der Strömung" ermitteln.

Wir denken uns ein homogenes ruhendes Medium mit einer kleinen Störung ϱ_s, p_s, $\vec{v}_s\,(u_s, v_s, w_s)$, wir vernachlässigen Glieder von 2. Ordnung in ϱ_s, p_s, $\vec{v}_s$ und deren Ableitungen. Dann wird

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho_s}{\partial t}, \tag{9}$$

und wir erhalten für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \varrho_0 (\nabla, \vec{v}_s) = 0, \qquad (\nabla, \vec{v}_s) = \operatorname{div} \vec{v}_s, \tag{10}$$

wo ϱ_0 die Dichte der ruhenden Luft bedeutet.

Für die Bewegungsgleichung erhalten wir:

$$\varrho_0 \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + c^2 (\nabla \varrho_s) = 0 \qquad (\nabla \varrho_s) \quad = \text{grad } \varrho_s \,. \tag{11}$$

Wir differenzieren (10) nach t:

$$\frac{\partial^2 \varrho_s}{\partial t^2} + \varrho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla, \vec{v}_s) = 0 \,. \tag{12}$$

Nach (11) ist aber

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla, \vec{v}_s) = - c^2 \Delta \varrho_s \,, \tag{13}$$

woraus mit (12) folgt:

$$\frac{\partial^2 \varrho_s}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varrho_s = 0 \,. \tag{14}$$

Damit haben wir die Wellengleichung aufgestellt. Haben wir aus (14) eine Lösung ϱ_s gefunden, so können wir aus (11) die Teilchengeschwindigkeit angeben:

$$\vec{v}_s = - \frac{c^2}{\varrho_s} \int^t \nabla \varrho_s \, dt \,. \tag{15}$$

Nehmen wir für ϱ_s eine harmonische Zeitabhängigkeit an, so muß auch $\vec{v}_s$ zeitlich harmonisch sein, und daraus bestimmt sich die Integrationskonstante in (15) zu Null.

2.3 DIE SCHALLWELLENGLEICHUNG IN EINEM BELIEBIGEN GRUNDFELD DER STRÖMUNG

Wir denken uns jetzt das schon mehrfach erwähnte Grundfeld der Strömung in folgender Weise gegeben: Es sei $\vec{v}_0$ die Geschwindigkeit des Grundfeldes mit den Komponenten: $u_0(x, y, z, t)$, $v_0(x, y, z, t)$, $w_0(x, y, z, t)$; der Druck des Grundfeldes sei $p_0(x, y, z, t)$, die Dichte $\varrho_0(x, y, z, t)$, und es gelte die ideale Gasgleichung (4), wo p_0, ϱ_0, T_0 Funktionen von x, y, z, t sind. Diese Funktionen sollen Abweichungen von einem räumlich und zeitlich konstanten Mittelwert sein, auf den sie sich beim Aufhören der Strömung reduzieren: wir schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho_0(x, y, z, t) &= \varrho_{00} + \varrho_{01}(x, y, z, t) \\ p_0(x, y, z, t) &= p_{00} + p_{01}(x, y, z, t) \\ T_0(x, y, z, t) &= T_{00} + T_{01}(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{16}$$

Die örtliche Schallgeschwindigkeit erhalten wir unter der Voraussetzung (7) in der Form

$$c^2 = \frac{p_0}{\varrho_0} \gamma \tag{17}$$

und schreiben für dieses Quadrat, das allein in unseren Beziehungen auftreten wird:

$$c_0^2 = c_{00}^2 + c_{01}^2(x, y, z, t). \tag{18}$$

Die Größen des Grundfeldes müssen für sich den Eulerschen Gleichungen genügen. Dem Grundfeld überlagern wir das Schallfeld, das wir als kleine Störung betrachten und dessen Größen wir den Index s geben. Wir haben also

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_s \quad \text{mit} \quad u = u_0 + u_s, \quad v = v_0 + v_s, \quad w = w_0 + w_s \tag{19}$$

$$p = p_0 + p_s, \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho_s, \quad T = T_0 + T_s. \tag{20}$$

Dann schreiben wir mit diesen Größen erneut die Eulerschen Gleichungen an: zunächst die Bewegungsgleichung:

$$(\varrho_0 + \varrho_s)\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_0 + \vec{v}_s) + \left((\vec{v}_0 + \vec{v}_s), \nabla(\vec{v}_0 + \vec{v}_s)\right)\right] + \nabla(p_0 + p_s) = 0. \tag{21}$$

Ferner lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial(\varrho_0 + \varrho_s)}{\partial t} + \left(\nabla, (\varrho_0 + \varrho_s)(\vec{v}_0 + \vec{v}_s)\right) = 0. \tag{22}$$

Wir multiplizieren die Klammern aus; dann stehen in unseren Gleichungen jeweils Produkte aus 2 Faktoren, die die Indexpaare $0\,0$, $0\,s$, $s\,0$, $s\,s$ enthalten. Die Größen mit dem Indexpaar $0\,0$ sind die Größen des Grundfeldes, erfüllen die Eulerschen Gleichungen und fallen heraus. Die Größen mit dem Indexpaar $s\,s$ fallen als Größen 2. Ordnung nach der Voraussetzung der Beschränkung auf die erste Näherung weg, nur die Glieder mit gemischten Indexpaaren bleiben stehen: Das zweite Glied links in (21) führt auf Indextripel: $0\,0\,0$ fällt weg, Glieder, die zweimal s enthalten, ebenso, es bleibt nur

$$\varrho_s(\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_0), \quad \varrho_0(\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s), \quad \varrho_0(\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0).$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$\varrho_0\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial t} + \varrho_0(\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s) + \varrho_0(\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0) + \varrho_s\frac{\partial\vec{v}_0}{\partial t} + \varrho_s(\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_0) + \nabla p_s = 0. \tag{23}$$

Für die Kontinuitätsgleichung erhalten wir analog.:

$$\frac{\partial\varrho_s}{\partial t} + (\nabla, \varrho_0\vec{v}_s) + (\nabla, \varrho_s\vec{v}_0) = 0. \tag{24}$$

In (23) erinnern wir uns daran, daß nach (3)

$$\frac{\partial\vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_0) = -\frac{1}{\varrho_0}\nabla p_0. \tag{25}$$

Somit schreibt sich unsere Bewegungsgleichung schließlich:

$$\varrho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s) + (\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0) \right) - \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \nabla p_0 + \nabla p_s = 0. \tag{26}$$

Damit haben wir zunächst unser Differentialgleichungssystem für $\vec{v}_0$, ϱ_s, p_s aufgestellt. Wir müssen es jetzt noch in eine zu (11) und (12) analoge Form bringen und dann nach (13) für ϱ_s eine gestörte Wellengleichung aufstellen; anschließend müssen wir dann die Gleichungen für u_s, v_s, w_s in ebenfalls gestörter Form schreiben. Zu diesem Zwecke müssen wir leider (26) in Komponenten auflösen, d. h. die drei Gleichungen in Kauf nehmen:

$$\varrho_0 \frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \varrho_0 u_s \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varrho_0 v_s \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varrho_0 w_s \frac{\partial u_0}{\partial z} + \varrho_0 u_0 \frac{\partial u_s}{\partial x} + \varrho_0 v_0 \frac{\partial u_s}{\partial y} + \varrho_0 w_0 \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial p_s}{\partial x} = 0, \tag{27}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial v_s}{\partial t} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \varrho_0 u_s \frac{\partial v_0}{\partial x} + \varrho_0 v_s \frac{\partial v_0}{\partial y} + \varrho_0 w_s \frac{\partial v_0}{\partial z} + \varrho_0 u_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} + \varrho_0 v_0 \frac{\partial v_s}{\partial y} + \varrho_0 w_0 \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial p_s}{\partial y} = 0, \tag{28}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial w_s}{\partial t} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \varrho_0 u_s \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varrho_0 v_s \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varrho_0 w_s \frac{\partial w_0}{\partial z} + \varrho_0 u_0 \frac{\partial w_s}{\partial x} + \varrho_0 v_0 \frac{\partial w_s}{\partial y} + \varrho_0 w_0 \frac{\partial w_s}{\partial z} + \frac{\partial p_s}{\partial z} = 0. \tag{29}$$

Unter Berücksichtigung von (8) schreiben wir diese Gleichungen so an, daß die Analogie mit (11) und (15) evident wird und die in (11) nicht vorkommenden Glieder als Störglieder auf die rechte Seite kommen.

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \varrho_s) + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \left\{ u_s \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_s \frac{\partial u_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_s}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_s}{\partial z} \right\} \tag{30}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial y} (c^2 \varrho_s) + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \left\{ u_s \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_s \frac{\partial v_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_s}{\partial y} + w_0 \frac{\partial v_s}{\partial z} \right\} \tag{31}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} = - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial z} (c^2 \varrho_s) + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \left\{ u_s \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_s \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_s \frac{\partial w_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial w_s}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_s}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w_s}{\partial z} \right\} \tag{32}$$

Hier wird der Unterschied gegenüber dem ruhenden homogenen Medium evident: als Störglieder treten auf alle Glieder der rechten Seiten in (30) (31), (32) mit Ausnahme des ersten.

Die Kontinuitätsgleichung (24) bekommt die Form:

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \varrho_0 (\nabla, \vec{v}_s) = -\{(\vec{v}_0, \nabla \varrho_s) + (\vec{v}_s, \nabla \varrho_0) + \varrho_s (\nabla, \vec{v}_0)\}. \tag{33}$$

Zur Ableitung der Wellengleichung müssen wir jetzt in Analogie (12), (13), (14) verfahren unter Berücksichtigung der Gleichung (16): Wir differenzieren (33) nach t und erhalten:

$$\frac{\partial^2 \varrho_s}{\partial t^2} + \varrho_0 \left(\nabla, \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \varrho_0}{\partial t} (\nabla, \vec{v}_s) - \frac{\partial}{\partial t} \{(\vec{v}_s, \nabla \varrho_0) + (\vec{v}_0, \nabla \varrho_s) + \varrho_s (\nabla, \vec{v}_0)\}. \tag{34}$$

Nun ist aber nach (26) und somit auch nach (27), (28), (29)

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \varrho_s)\right) + \varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x}\right) - \varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \{\}_{30} \tag{35}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 v_s}{\partial y \partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial y} (c^2 \varrho_s)\right) + \varrho_0 \frac{\partial x}{\partial y} \left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y}\right) - \varrho_0 \frac{\partial}{\partial y} \{\}_{31} \tag{36}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial z \partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial z} (c^2 \varrho_s)\right) + \varrho_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) - \varrho_0 \frac{\partial}{\partial z} \{\}_{32} \tag{37}$$

wo $\{\}_{30}\ \{\}_{31}\ \{\}_{32}$ bzw. die in den geschweiften Klammern der Gleichungen (30), (31), (32) stehenden Ausdrücke bedeuten. Diese sind aber die x, y, z Komponente des Vektors: $(\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0) + (\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s)$. Daraus folgt aber:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\}_{30} + \frac{\partial}{\partial y} \{\}_{31} + \frac{\partial}{\partial z} \{\}_{32} = \left(\nabla, ((\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s) + (\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0))\right). \tag{38}$$

Ferner ist:

$$-\varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \varrho_s)\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (c^2 \varrho_s) + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \varrho_s) \tag{39}$$

$$-\varrho_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial y} (c^2 \varrho_s)\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} (c^2 \varrho_s) + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (c^2 \varrho_s) \tag{40}$$

$$-\varrho_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial z} (c^2 \varrho_s)\right) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (c^2 \varrho_s) + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (c^2 \varrho_s) \tag{41}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x}\right) = \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \varrho_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \tag{42}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right) = \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} + \varrho_0 \frac{\partial p_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \tag{43}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial z}\right) = \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} + \varrho_0 \frac{\partial p_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\,. \tag{44}$$

Durch die Addition (35), (36), (37) erhalten wir unter Berücksichtigung von (40), (41), (42)

$$\begin{aligned}\varrho_0\left(\nabla,\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t}\right) &= -\Delta(c^2\varrho_s) + \frac{1}{\varrho_0}\left((\nabla\varrho_0, \nabla c^2\varrho_s) + \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\Delta p_0\right) + \varrho_0\left(\nabla p_0, \frac{\nabla\varrho_s}{\varrho_0^2}\right)\\ &\quad - \varrho_0(\nabla, ((\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s) + (\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0)))\,.\end{aligned} \tag{45}$$

Wir wollen noch $\Delta(c^2\varrho_s)$ explizit anschreiben $\left(c^2 = c^2(x, y, z, t) = \frac{p_0}{\varrho_0}\gamma\right)$.

$$\begin{aligned}\Delta(c^2\varrho_s) &= c^2\Delta\varrho_s + 2(\nabla c^2, \nabla\varrho_s) + \varrho_s\Delta c^2\\ &= c_{00}^2\Delta\varrho_s + c_{01}^2\Delta\varrho_s + 2(\nabla c^2, \nabla\varrho_s) + \varrho_s\Delta c^2.\end{aligned} \tag{46}$$

Dann bekommen wir durch Einsetzen in (34)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varrho_s}{\partial t^2} - c_{00}^2\Delta\varrho_s &= c_{01}^2\Delta\varrho_s + 2(\nabla c^2, \nabla\varrho_s) + \varrho_s\Delta c^2 - \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\Delta p_0\\ &\quad - \varrho_0\left(\nabla p_0, \frac{\nabla\varrho_s}{\varrho_0^2}\right) + \varrho_0\left(\nabla, (\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s) + (\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0)\right)\\ &\quad - \frac{\partial\varrho_0}{\partial t}(\nabla, \vec{v}_s) - \frac{\partial}{\partial t}\{(\vec{v}_s, \nabla\varrho_0) + (\vec{v}_0, \nabla\varrho_s) + \varrho_s(\nabla, \vec{v}_0)\}.\end{aligned} \tag{47}$$

In (47) ind (30), (31), (32) haben wir nunmehr das zu lösende System von Differentialgleichungen vor uns. Es entspricht den Gleichungen (11) und (14) im homogenen Fall und setzt die durch das Grundfeld dargestellten Störungen in Evidenz.

3. DIE LÖSUNG DES PROBLEMS MITTELS EINER ITERATIONSMETHODE

Wir suchen von dem genannten System eine Lösung, die die Eigenschaft hat, daß sie sich beim Übergang zum homogenen ruhenden Medium auf eine ebene Schallwelle reduziert, die in der Richtung α, β, γ läuft. Dabei machen wir die Voraussetzung, daß sich die turbulenten Störungen in einer relativ kleinen Umgebung des Koordinatenursprungs abspielen und in geringer Entfernung davon unmerklich werden.

Zunächst schreiben wir die Gleichungen (30), (31), (33) so:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_s}{\partial x} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\frac{\partial c^2}{\partial x} + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial x} - \left\{(\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0) - (\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s)\right\}_x \tag{48}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_s}{\partial y} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\frac{\partial c^2}{\partial y} + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial y} - \left\{(\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0) - (\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s)\right\}_y \tag{49}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_s}{\partial z} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0}\frac{\partial c^2}{\partial z} + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial z} - \left\{(\vec{v}_s, \nabla\vec{v}_0) - (\vec{v}_0, \nabla\vec{v}_s)\right\}_z . \tag{50}$$

Die Indizes x, y, z an den geschweiften Klammern bedeuten bzw. die x-, y-, z-Komponente des in der Klammer stehenden Vektorausdrucks.

Nun verwenden wir als Lösungsverfahren eine der PICARDschen sukzessiven Approximation ähnliche Iterationsmethode, wobei nicht eine Konstante als Anfangslösung verwendet wird, sondern die schon genannte ebene Welle. Bei PICARD müssen erst eine ganze Anzahl von Iterationsschritten getan werden, bis eine Wellenfunktion entsteht. Nehmen wir aber schon die ungestörte Wellenfunktion als Ausgangslösung, so stellt uns bereits die darauffolgende Iteration eine brauchbare Lösung dar, wenn nur die Störglieder hinreichend klein sind. Man vergleiche die Methode von SHELKUNOFF in [7] und ihre Anwendung in [8]. Da wir uns nun nicht auf den Fall des zeitlichen stationären Grundfeldes beschränken, so können wir uns auch nicht der komplexen Darstellung der Welle bedienen. Ferner können wir die Zeit, in der der Schall die Turbulenzzone durcheilt, nicht mehr als klein gegenüber derjenigen ansehen, in der sich eine der in die Differentialgleichungen eingehenden Größen merklich ändert. In dem Anwendungsbeispiel werden wir dann aber die Schallstreuung an einem stationären Wirbel berechnen und können uns in diesem Falle der komplexen Rechnung bedienen.

Wir nehmen also als Grundlösung für ϱ_s an:

$$\varrho_{s0} = A \cos \omega \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right). \tag{51}$$

Dies wäre die von uns gesuchte Lösung von (47), wenn die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null wäre. Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ kommt dabei eine in der x-Richtung laufende ebene Welle heraus. Nun suchen wir für diese Ausgangslösung in ϱ_s die Größen u_{s_0}, v_{s_0}, w_{s_0} d. h. die Komponenten der Teilchengeschwindigkeit. Diese stellen zusammen eine Lösung dar, mit der wir in (47) eingehen. Mit ϱ_{s_0} aus (51) erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\frac{c^2}{\varrho_0} = \frac{c_{00}^2 + c_{01}^2(x, y, z, t)}{\varrho_{00} + \varrho_{01}(x, y, t, z)} \approx \left(\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} + \frac{c_{01}^2}{\varrho_{00}}\right)\left(1 - \frac{\varrho_{01}}{\varrho_{00}} + \frac{\varrho_{01}^2}{\varrho_{00}^2} - + \cdots\right) \tag{52}$$

und der Annahme

$$c_{01}^2 \ll c_{00}^2 \,[1] \tag{53}$$

[1] Diese Annahme ist an sich nicht notwendig, wir können auch einfach in ϱ, $\vec{v}$ von der Grundlösung des homogenen ruhenden Mediums ausgehen und die Störungen erst eine Stufe später berücksichtigen.

$$u_{s_0} = -\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} \int^t \frac{\partial \varrho_{s_0}}{\partial x}\, dt = -\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} A \int^t \frac{\alpha\omega}{c_{00}} \sin\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right) dt \tag{54}$$
$$= \frac{\alpha c_{00}}{\varrho_{00}} A \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right)$$

$$v_{s_0} = -\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} \int^t \frac{\partial \varrho_{s_0}}{\partial y}\, dt = -\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} A \int^t \frac{\beta\omega}{c_{00}} \sin\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right) dt \tag{55}$$
$$= \frac{\beta c_{00}}{\varrho_{00}} A \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right)$$

$$w_{s_0} = -\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} \int^t \frac{\partial \varrho_{s_0}}{\partial z}\, dt = -\frac{c_{00}^2}{\varrho_{00}} A \int^t \frac{\gamma\omega}{c_{00}} \sin\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right) dt \tag{56}$$
$$= \frac{\gamma c_{00}}{\varrho_{00}} A \cos\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_{00}}\right).$$

Wir können zunächst so beginnen und das c_{01}^2 dann bei der zweiten Näherung einführen. Mit $\beta = \gamma = 0$ werden $v_{s_0} = w_{s_0} = 0$. Wenn wir nun u_{s_0}, v_{s_0}, w_{s_0} und ϱ_{s_0} in die Wellengleichung (47) einsetzen, so erhalten wir in dieser eine Quellenverteilung auf der rechten Seite, über die wir in bekannter Weise integrieren, um die erste Näherung zu finden nach der oben gegebenen nullten Näherung. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \varrho_{s_1} = \varrho_{s_0} + \iiint \frac{1}{R} \Big\{ & \Big(c_{01}^2 \cdot \frac{1}{c_{00}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho_{s_0}\Big) + 2\,(\nabla c^2, \nabla \varrho_{s_0}) \\ & + (\varrho_{s_0} \Delta c_0^2) - \Big(\frac{\varrho_{s_0}}{\varrho_0} \Delta p_0\Big) - \Big(\varrho_0 \Big(\nabla p_0, \nabla \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\Big)\Big) \\ & + \varrho_0 (\nabla, (\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s) + (\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0)) - \Big(\frac{\partial \varrho_0}{\partial t} (\nabla, \vec{v}_s)\Big) \\ & - \frac{\partial}{\partial t} ((\vec{v}_s, \nabla \varrho_0) + (\vec{v}_0, \nabla \varrho_{s_0}) + \varrho_{s_0} (\nabla, \vec{v}_0)) \Big\}_{t - \frac{R}{c_{00}}} dv. \end{aligned} \tag{57}$$

Wenn wir nun mit ϱ_{s_0}, u_{s_0}, v_{s_0}, w_{s_0} in die Gleichungen (48), (49), (50) eingehen, so bekommen wir eine weitere Näherung für die Geschwindigkeiten der Teilchen:

$$u_{s_1} = -\int^t \frac{c^2}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_{s_0}}{\partial x} + \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \frac{\partial c^2}{\partial x} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \{(\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0) + (\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s)\}_x\, dt \tag{58}$$

$$v_{s_1} = -\int^t \frac{c^2}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_{s_0}}{\partial y} + \frac{\varrho_s}{\varrho_0} \frac{\partial c^2}{\partial y} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \{(\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0) + (\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s)\}_y\, dt \tag{59}$$

$$w_{s_1} = -\int^t \frac{c^2}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_{s_0}}{\partial z} + \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial c^2}{\partial z} - \frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \{(\vec{v}_s, \nabla \vec{v}_0) + (\vec{v}_0, \nabla \vec{v}_s)\}_z\, dt. \tag{60}$$

Diese Größen müssen einen Zeitfaktor $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}\, \omega t$ haben mit einem Faktor, der seinerseits noch von t abhängen kann.

Mit u_{s_1}, v_{s_1}, w_{s_1}, ϱ_{s_1} können wir nun wieder in Gleichung (47) eingehen, ϱ_{s_2} ermitteln, ϱ_{s_2}, u_{s_1}, v_{s_1}, w_{s_1} in (48), (49), (50) einsetzen und daraus u_{s_2}, v_{s_2}, w_{s_2} errechnen, in (47) einsetzen, ϱ_{s_3} ermitteln usf. Die Konvergenz des Verfahrens ist durch den PICARDschen Beweis gegeben, solange wir nur dafür sorgen, daß das Grundfeld endlich, samt 1. und 2. Ableitungen stetig ist und die räumlichen Integrale genügend stark konvergieren.

Damit haben wir die allgemeine Lösung des Problems gegeben und wollen diese nun auf ein spezielles Beispiel anwenden, in dem diese Konvergenzen gesichert sind.

4. DIE SCHALLSTREUUNG AN EINEM STATIONÄREN WIRBEL

Wir wollen uns nunmehr um ein Beispiel bemühen, das mit einem zumutbaren Rechenaufwand durchführbar ist. Unsere Theorie umfaßt zwar die Schallstreuung an nichtstationären Strömungen, doch sehen wir z. B. aus (57), wie umfangreich diese Berechnungen werden; in allgemeinen Fällen würde die Anwendung dieser Theorie maschinelle Rechenmittel erfordern. Mit allgemeinen diskutierbaren Formeln werden wir von Ausnahmefällen abgesehen höchstens stationäre Verhältnisse behandeln können. Wir suchen uns einen stationären Wirbel, der so gewählt ist, daß sich die dabei auftretenden Integrale ausrechnen lassen. Zunächst stellen wir eine Lösung der EULERschen Gleichungen auf, die einen Wirbel mit der Achse in der Z-Achse darstellt.

4.1 ANGABE EINES STATIONÄREN GRUNDFELDES

Wir denken uns ein stationäres Strömungsfeld, in dem nur eine Komponente v_φ der Geschwindigkeit $\vec{v}$ vorhanden ist, wo φ der Azimutwinkel in einem Kugelkoordinatensystem ist. Also ist $v_\vartheta = 0$ und $v_R = 0$. Schreiben wir in üblicher Weise die EULERschen Gleichungen zunächst in rechtwinkligen Koordinaten an, so bedeutet dies $v_z \equiv 0$, $\frac{\partial}{dt} = 0$

$$u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varrho \frac{\partial u}{\partial y} + \varrho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{61}$$

$$\varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad + \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{62}$$

$$\varrho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad + \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{63}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{64}$$

Führen wir in üblicher Weise Polarkoordinaten R, ϑ, φ ein,

$$x = R \sin\vartheta \cos\varphi \qquad y = R \sin\vartheta \sin\varphi \qquad z = R \cos\vartheta\,, \tag{65}$$

so sind die EULERschen Gleichungen, die nur erste Ableitungen enthalten, leicht auf Kugelkoordinaten umzurechnen. Es ist

$$(65a) \qquad u = -v_\varphi \sin\varphi, \qquad v = v_\varphi \cos\varphi, \qquad w = 0.$$

Wir verlangen von unserer Lösung, daß v_φ nicht von φ, sondern nur von ϑ und R abhängen soll. Dann folgt aus dem System (61)–(64) nach leichter Rechnung:

$$(66) \qquad -v_\varphi^2 + \frac{R\sin\vartheta}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial R}\sin\vartheta + \frac{\partial p}{\partial\vartheta}\frac{1}{R}\cos\vartheta\right) = 0.$$

D. h. wir können ein p, das nur von R und ϑ abhängt, vorgeben und daraus v_φ errechnen. Wir nehmen an, daß p auch nicht von ϑ abhänge, dann wird $\partial p/\partial\vartheta = 0$ und aus (66) wird

$$(67) \qquad \frac{v_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = \frac{R}{\varrho(R)}\frac{\partial p}{\partial R}.$$

Da der Vorgang stationär ist, muß die Temperatur konstant sein, somit ist ϱ proportional p:

$$(68) \qquad \frac{p}{\varrho} = KT = \text{const} = K^*, \quad \varrho = p/K^*.$$

Also wird aus (67)

$$(69) \qquad \frac{v_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = \frac{R}{p}K^*\frac{\partial p}{\partial R} = RK^*\frac{d\ln p}{dR}.$$

Wir wollen nun eine Geschwindigkeit haben, die mit wachsendem R stark abnimmt, so daß in einer gewissen Entfernung vom Ursprung praktisch ruhende, homogene Atmosphäre vorhanden ist. Nehmen wir z. B.:

$$(70) \qquad v_\varphi^2 = M\sin^2\vartheta\, R^2 e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} = \sin^2\vartheta\, K^* R\frac{d\ln p}{dR} \quad (\text{nach } (69)),$$

so wird

$$(71) \qquad \frac{d\ln p}{dR} = \frac{M}{K^*}Re^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}$$

und

$$(72) \qquad \ln p = -\frac{M}{K^*}\int Re^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}dR + \ln p_\infty \qquad (\ln p_\infty = \text{Integrationskonstante})$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2 e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} + \ln p_\infty$$

und

$$p = p_\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*} R_0^2 e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right] = p_0(R). \tag{73}$$

Für $R \to \infty$ wird $p \to p_\infty$.

Dieser Wirbel ist, wie schon bemerkt, stationär. Damit können wir ϱ_{s_0} auch in komplexer Form schreiben. Mit $\exp[-j\omega t]$ als Zeitfunktion wird

$$\varrho_{s_0} = A \exp\left[-j\omega\left(t - \frac{z}{R_0}\right)\right]. \tag{74}$$

Wir nehmen also eine in der $+z$-Richtung laufende einfallende Welle an. Wie wir die Retardierung zu berücksichtigen haben, werden wir später sehen.

4.2 DIE SCHALLSTREUUNG AN DIESEM WIRBEL BEI EINFALL EINER EBENEN WELLE IN DER ACHSENRICHTUNG

Wir müssen uns jetzt alle die in (57) vorkommenden Ausdrücke verschaffen. Wir beginnen mit Δp_0. Da p_0 nur von R abhängt, gilt bekanntlich:

$$\Delta p_0 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial p_0}{\partial R}\right). \tag{75}$$

Zunächst wird $\nabla p_0 = \vec{r}\,{}^{\partial p_0}/_{\partial R}$, wo $\vec{r}$ einen Einheitsvektor in der Richtung des Radius R bedeutet. Es wird also

$$\nabla p_0 = \vec{r} p_\infty \frac{M}{K^*} R e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*} R_0^2 e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right] \tag{76}$$

und

$$\Delta p_0 = p_\infty \frac{M}{K^*} e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*} R_0^2 e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right] \left\{3 - 2\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + R^2 \frac{M}{K^*}\right\}. \tag{77}$$

Wir ermitteln jetzt $c^2(x, y, z, t)$.

Es ist nach (6) $\qquad c^2 = \gamma\, {}^{p_0}/_{\varrho_0} = \gamma K^* = c_\infty^2,$

somit ist in unserem Falle

$$c_{01}^2 \equiv 0 \tag{78}$$ und daher

$$\nabla c^2 \equiv 0 \tag{79}$$ und

$$\Delta c^2 \equiv 0. \tag{80}$$

Da das Grundfeld stationär ist, ist auch

$$\frac{\partial \varrho_0}{\partial t} = 0. \tag{81}$$

Somit fallen in (57) gleich eine ganze Reihe von Gliedern heraus. Es wird dann:

$$\frac{\varrho_s}{\varrho_0}\,\Delta p_0 = A\,M \exp\left[j\,\frac{\omega}{c}\,z\right]\left[3-2\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + \frac{M}{K^*}\,R^2\right] e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} \exp\left[-j\,\omega\,t\right]. \tag{82}$$

Wir benötigen jetzt $\varrho_0\left(\nabla p_0,\ \nabla\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\right)$.

In dem skalaren Produkt in der letzteren Klammer hat ∇p_0 nur eine Komponente in der R-Richtung; wir brauchen also von $\nabla\varrho_s/\varrho_0^2$ nur die R-Komponente zu ermitteln. Es ist also ∇ einfach als $\vec{r}\,\partial/\partial R$ zu verstehen. Wir bekommen

$$\nabla\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2} = \frac{1}{\varrho_0^2}\,\nabla\varrho_s - 2\,\frac{\varrho_s}{\varrho_0^3}\,\nabla\varrho_0 \tag{83}$$

und nach einfacher Rechnung:

$$\left(\nabla\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\right)_r = \frac{A\,K^{*2}}{p_\infty^2}\exp\left[\frac{M}{K^*}\,R_0^2\,e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right]\exp\left[j\,\frac{\omega}{c}\,R\cos\vartheta\right] \times\left\{j\,\frac{\omega}{c}\cos\vartheta - M\,R\,e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right\}\exp\left[-j\,\omega\,t\right] \tag{84}$$

und also

$$\varrho_0\,\nabla\left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\right)_r = \frac{K^*A}{p_\infty}\exp\left[-j\,\omega\,t\right]\exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{M}{K^*}\,R_0^2\,e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right] \times\exp\left[j\,\frac{\omega}{c}\,R\cos\vartheta\right]\left\{j\,\frac{\omega}{c}\cos\vartheta - 2\,M\,R\,e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right\}. \tag{85}$$

Jetzt bilden wir das skalare Produkt $\varrho_0\,\nabla\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}$ mit ∇p_0. Es wird:

$$\varrho_0\left(\nabla p_0,\ \nabla\left(\frac{\varrho_s}{\varrho_0^2}\right)\right) = \exp\left[-j\,\omega\,t\right]\,A\,M\exp\left[j\,\frac{\omega}{c}\,R\cos\vartheta\right] R\,e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\left\{j\,\frac{\omega}{c}\cos\vartheta - 2\,M\,R\,e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right\}. \tag{86}$$

Jetzt wenden wir uns den Größen in (57) zu, die die Geschwindigkeiten $\vec{v}_0$ und $\vec{v}_s$ enthalten. Wir benötigen zunächst

$\varrho_0\left(\nabla,\ \left[(\vec{v}_0,\ \nabla\vec{v}_s) + (\vec{v}_s,\ \nabla\vec{v}_0)\right]\right)$ und sehen nach einfacher Rechnung, daß dies verschwindet:

$$\varrho_0\left(\nabla,\ \left[(\vec{v}_0,\ \nabla\vec{v}_s) + (\vec{v}_s,\ \nabla\vec{v}_0)\right]\right) = 0. \tag{87}$$

Ferner haben wir noch auszurechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{v}_s,\ \nabla\varrho_0) + (\vec{v}_0,\ \nabla\varrho_s) + \varrho_s(\nabla,\ \vec{v}_0)\right].$$

Man erkennt sofort, daß

$$(88) \qquad \varrho_s(\nabla, \vec{v}_0) = \varrho_s \operatorname{div} \vec{v}_0 = 0,$$

die Strömung ist nämlich quellenfrei: Das skalare Produkt $(\vec{v}_0, \nabla\varrho_s)$ muß auch identisch verschwinden, denn $\vec{v}_0$ hat nur eine φ-Komponente, $\nabla\varrho_s$ hat nur eine z-Komponente; diese beiden stehen aufeinander senkrecht. Daher also:

$$(89) \qquad (\vec{v}_0, \nabla\varrho_s) = 0.$$

Es bleibt nur noch zu berechnen: $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_s, \nabla\varrho_0)$, da ϱ_0 nur von R abhängt und stationär ist, wird

$$(90) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_s, \nabla\varrho_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}_s, \nabla\varrho_0\right) = -j\omega A\left(\exp\left[-j\omega t + \frac{\omega}{c_0}z\right]\vec{z}, \nabla\varrho_0\right),$$

wo $\vec{z}$ einen Einheitsvektor in der z-Richtung bedeutet. $\nabla\varrho_0$ hat bekanntlich nur eine R-Komponente. Also

$$(91) \qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_s, \nabla\varrho_0) &= -j\omega A \exp\left[-j\omega t + \frac{\omega}{c_0} R\cos\vartheta\right]\cdot\cos\vartheta \\ &\quad\times p_\infty \frac{M}{K^{*2}} R e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*} R_0^2\, e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right].\end{aligned}$$

Nun haben wir alle die Größen formal ausgerechnet, die in (57) unter dem Integralzeichen stehen, und müssen jetzt angeben, wie sich die zeitliche Retardierung darin ausdrückt.

Wir denken uns eine Distanz D, die sehr groß gegenüber R_0 sei, also gegenüber der Zone, die nennenswert streut. Eine Welle, die von einem Punkt R, ϑ, φ (x, y, z) ausgeht und in der Richtung $\alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times$ läuft, hat im Aufpunkt die Phase

$$(92) \qquad j\frac{\omega}{c}\left(D - (\alpha^\times x + \beta^\times y + \gamma^\times z)\right).$$

Den allen Richtungen gemeinsamen Faktor $\exp\left[j\frac{\omega}{c}D\right]$, der den Betrag 1 hat, lassen wir dann aus unserem Integral weg und haben den Integranden dann nur mit

$$(93) \qquad \exp\left[-j\frac{\omega}{c_0}(\alpha^\times x + \beta^\times y + \gamma^\times z)\right]$$

zu multiplizieren.

Führen wir im Richtungsraum $\alpha^\times, \beta^\times, \gamma^\times$ Polarkoordinaten zur Achse z ein $(\gamma^\times = 1)$:

$$(94) \qquad \begin{aligned}\alpha^\times &= \sin\vartheta^\times \cos\varphi^\times \\ \beta^\times &= \sin\vartheta^\times \cos\varphi^\times \\ \gamma^\times &= \cos\vartheta^\times,\end{aligned}$$

so wird mit (65) aus (93)

$$(95) \qquad \exp\left[-j\frac{\omega}{c}R(\sin\vartheta^\times\cos\varphi^\times\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta^\times\sin\varphi^\times\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta^\times\cos\vartheta)\right].$$

Jetzt können wir für unseren Wirbel das Integral (57) explizit ausschreiben und erhalten nach geeigneter Zusammenfassung:

(96)

I

$$\varrho_{s_1} = -\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^{\times}+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times}+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times})\right)\right]$$
$$\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] 3R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

II

$$-\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^{\times}+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times}+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times})\right)\right]$$
$$\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]\left(\frac{M}{K^*}-\frac{2}{R_0^2}\right) R^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

III

$$-j\frac{\omega}{c}\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^{*}+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times}+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times})\right)\right]$$
$$\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

IV

$$+\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^{*}+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times}+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times})\right)\right]$$
$$\exp\left[-2\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] 2MR^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

V

$$+j\frac{\omega}{K^*}p_\infty\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \exp\left[-j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^{*}+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times}+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times})\right)\right]$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\, e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right]\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^3 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi .$$

Wir schreiben dies, indem wir die Integrale mit römischen Ziffern durchnumerieren:

(96a) $$\varrho_{s_1} = \int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{\mathrm{III}} + \int_{\mathrm{IV}} + \int_{\mathrm{V}} .$$

Die Reihenfolge der Integration kann in allen Integralen beliebig angenommen werden: Wir haben eine Integration über die Winkel ϑ, φ und über R. Das Winkelintegral kann beliebig in ϑ und φ vertauscht werden, da in beiden Veränderlichen das Intervall endlich und der Integrand stetig ist. Das Integral über die Winkel ist daher eine überall endliche und stetige Funktion von R in $0 < R < \infty$, denn R geht bei der Winkelintegration nur in der Form $\exp\left[j\frac{\omega}{c}R\cdot f(\vartheta,\varphi)\right]$ ein. Mit $\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^n$ multipliziert und über R integriert, resultiert ein absolut konvergentes Integral. Hätte man zuerst über R integriert, so wäre der Integrand in ϑ, φ überall endlich gewesen und es hätte auch dieses Integral absolut konvergiert.

Wir studieren zunächst das Integral I:

Wir betrachten zunächst den Exponenten: Es war

$$j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^{\times}+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times}+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^{\times}\sin\vartheta^{\times})\right) = jk[z-R\cos\omega], \tag{97}$$

wo ω den Winkel zwischen der Richtung $\vec{r}$ vom Nullpunkt zum Punkt R und der Richtung $\alpha^{\times}$, $\beta^{\times}$, $\gamma^{\times}$ ist (vgl. [9] S. 157 ff. [10] S. 125/26).

Man transformiert im Richtungs- (Integrations-) Raum auf Polarkoordinaten um die Achse $\alpha^{\times}$, $\beta^{\times}$, $\gamma^{\times}$, und das Flächenelement der Einheitskugel bleibt in seinem formalen Ausdruck erhalten:

$$\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \sin\omega\, d\omega\, d\psi. \tag{98}$$

Das Integral über die Winkel φ, und $\vartheta \to \omega$, ψ wird

$$\int_{\psi=-\pi}^{+\pi}\int_{\omega=0}^{\pi} \exp\left[-jkR(\cos\omega-\cos\vartheta)\right]\sin\omega\, d\omega\, d\psi. \tag{99}$$

Wir müssen nun ϑ noch durch die neuen Koordinaten um die Richtung $\vartheta^{\times}$, $\varphi^{\times}$ als Achse ausdrücken: nach dem Seitencosinussatz der sphärischen Trigonometrie ist:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta^{\times}\cos\omega + \sin\vartheta^{\times}\sin\omega\cos\psi. \tag{100}$$

Wir setzen dies in (99) ein und erhalten

$$\int_{\psi=-\pi}^{+\pi}\int_{\omega=0}^{\pi} \exp\left[jkR\left((\cos\vartheta^{\times}-1)\cos\omega+\sin\vartheta^{\times}\sin\omega\cos\psi\right)\right]\sin\omega\, d\omega\, d\psi. \tag{101}$$

Wir setzen:

$$R(\cos\vartheta^{\times}-1) = \zeta \qquad R\sin\vartheta^{\times} = \varrho \tag{102}$$

und bekommen

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} \exp\left[jk(\varrho\sin\omega\cos\psi+\zeta\cos\omega)\right]\sin\omega\, d\omega\, d\psi. \tag{103}$$

Dieses Integral ist aber bekannt (NOETHER in [9] S. 157 ff.)

Es ist das Integral, das sich aus ebenen Wellen gleicher Amplitude in allen Richtungen zusammensetzt, wobei nur reelle Richtungen auf der Einheitskugel in Frage kommen; sein Wert ist

$$\frac{4\pi}{k\sqrt{\varrho^2+\zeta^2}}\cdot\sin\left(k\sqrt{\varrho^2+\zeta^2}\right). \tag{104}$$

Nun ist aber

$$\sqrt{\varrho^2 + \zeta^2} = R\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)}\,. \tag{105}$$

Somit ist der Winkelanteil von I gegeben durch

$$\frac{4\pi}{kR\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)}} \sin\left(kR\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)}\right). \tag{106}$$

Wir setzen

$$k\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)} = k'. \tag{107}$$

Dann wird aus dem Integral I der Ausdruck

$$-\frac{12\pi AM}{k'D}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R\sin k'R\,dR\,. \tag{108}$$

Dies ist aber eine bekannte einseitige LAPLACE-transformierte, wie man sieht: mit

$$R^2 = u \tag{109}$$

wird es

$$\begin{aligned} &-\frac{6\pi AM}{k'D}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{R_0^2}u\right]\sin k'\sqrt{u}\,du \\ &= -\frac{6\pi AM}{k'D} L_{\mathrm{I}}\left\{\sin k'\sqrt{u}\,;\,\frac{1}{R_0^2}\right\}. \end{aligned} \tag{110}$$

Dies ist nach [11] S. 24, [12] S. 50

$$-\frac{3\pi^{3/2}AMR_0^3}{D}\exp\left[-\frac{(k'R_0)^2}{4}\right] = \int_{\mathrm{I}}\,, \tag{111}$$

was von $\varphi^\times$ unabhängig ist und wo der Einfluß von $\vartheta^\times$ nach (107) im Exponenten auftritt.

Wir wenden uns jetzt dem Integral II zu:

$$\begin{aligned} &-\frac{AM}{D}\left(\frac{M}{K^*}-\frac{2}{R_0^2}\right)\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left(\cos\vartheta-(\cos\vartheta\cos\vartheta^\times+\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi^\times\sin\vartheta^\times+\sin\varphi\sin\vartheta\sin\varphi^\times\sin\vartheta^\times)\right)\right] \\ &\qquad\times\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]R^4\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,. \end{aligned} \tag{112}$$

Es ist leicht aus dem vorigen Integral zu berechnen: Abgesehen von dem Faktor vor dem Integralzeichen steht hier statt R^2 R^4 unter dem Integralzeichen. Das Winkelintegral ist dasselbe. Wir bekommen also:

$$(113) \qquad -\frac{4\pi AM}{k'D}\left(\frac{M}{K*}-\frac{2}{R_0^2}\right)\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{R_0^2}R^2\right]R^3\sin k'R\,dR\,.$$

Mit $R^2 = u$ wird daraus:

$$(114) \qquad -\frac{2\pi AM}{k'D}\left(\frac{M}{K*}-\frac{2}{R_0^2}\right)\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{R_0^2}u\right]u\sin k'\sqrt{u}\,du$$

$$= -\frac{2\pi AM}{k'D}\left(\frac{M}{K*}-\frac{2}{R_0^2}\right)L_{\mathrm{I}}\left\{u\sin k'\sqrt{u}\,;\,\frac{1}{R_0^2}\right\},$$

wo L_{I} wieder die einseitige Laplacetransformierte bedeute. Dies ist aber nach [11] S. 44, 155, [12] I. Bd. S. 144, [12] II. Bd. S. 21, [13] S. 16/17

$$(115) \qquad \frac{2\pi AM}{k'D}\left(\frac{M}{K*}-\frac{2}{R_0^2}\right)\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{R_0}\right)^2}L_{\mathrm{I}}\left\{\sin k'\sqrt{u}\,;\,\frac{1}{R_0^2}\right\}$$

$$= \frac{2\pi^{3/2}AM}{D}\left(\frac{M}{K*}-\frac{2}{R_0^2}\right)\exp\left[-\frac{(k'R_0)^2}{4}\right]\left\{\frac{R_0^7k'^2}{4}-\frac{3}{2}R_0^5\right\} = \int_{\mathrm{II}}\,.$$

Wir wenden uns jetzt zunächst dem Integral IV zu, das sich unter Berücksichtigung der Konstanten aus II direkt ermitteln läßt, wenn man R_0 durch $R_0/\sqrt{2}$ ersetzt:

$$(116) \qquad \frac{4\pi^{3/2}AM}{D}\exp\left[-\left(\frac{k'R_0}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]\left\{\frac{R_0^7k'^2}{32\sqrt{2}}-\frac{3R_0^5}{8\sqrt{2}}\right\} = \int_{\mathrm{IV}}\,.$$

Das Integral III muß für sich studiert werden: Der Exponent ist in der e-Funktion derselbe wie in den anderen Integralen; wir nennen ihn $f(\vartheta^*, \varphi^*, \vartheta, \varphi)$; es ist:

$$(117) \quad -j\frac{\omega}{c}\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\exp\left[j\frac{\omega}{c}Rf(\vartheta^\times,\varphi^\times,\vartheta,\varphi)\right]\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]R^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Zunächst transformieren wir wieder im Integrationsraum auf Polarkoordinaten um die Achse $\vartheta^\times$, $\varphi^\times$ und erhalten unter Berücksichtigung von (100), da ja nun $\cos\vartheta$ auch als Faktor außerhalb des Exponenten vorkommt, folgendes

(118)

$$\int_{\mathrm{III}} = -j\frac{\omega}{c}\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left((\cos\vartheta^\times-1)\cos\omega+\sin\vartheta^\times\sin\omega\cos\psi\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]$$

$$R^3\cos\vartheta^\times\cos\omega\sin\omega\,d\omega\,d\psi$$

$$-j\frac{\omega}{c}\frac{AM}{D}\int\limits_{R=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\exp\left[j\frac{\omega}{c}R\left((\cos\vartheta^\times-1)\cos\omega+\sin\vartheta^\times\sin\omega\cos\psi\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]$$

$$R^3\sin\vartheta^\times\sin\omega\cos\psi\sin\omega\,d\omega\,d\psi\,.$$

Dies wird mit (102), (103), (104) und $k = \frac{\omega}{c}$

$$(119) \qquad -\frac{4\pi\omega AM\cos\vartheta^\times}{D}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^3 \frac{\partial}{\partial k\zeta}\left(\frac{\sin\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}}{\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}}\right) dR$$

$$-\frac{4\pi\omega AM\sin\vartheta^\times}{D}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^3 \frac{\partial}{\partial k\varrho}\left(\frac{\sin\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}}{\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}}\right) dR.$$

Zunächst verschaffen wir uns die beiden partiellen Ableitungen: es ist

$$(120) \qquad \frac{\partial}{\partial k\zeta}\,\frac{\sin\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}}{\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}} = k(\cos\vartheta^\times - 1)\left(\frac{\cos k'R}{k'^2R} - \frac{\sin k'R}{k'^3R^2}\right)$$

$$(121) \qquad \frac{\partial}{\partial k\varrho}\,\frac{\sin\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}}{\sqrt{k^2\varrho^2+k^2\zeta^2}} = k\sin\vartheta^\times\left(\frac{\cos k'R}{k'^2R} - \frac{\sin k'R}{k'^3R^2}\right).$$

Damit wird aus dem Integral III:

$$(122) \qquad -\frac{4\pi\omega AMk\cos\vartheta^\times(\cos\vartheta^\times+\sin\vartheta^\times-1)}{k'^2D}\int\limits_0^\infty \cos k'R\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^2\,dR$$

$$+\frac{4\pi\omega AMk\cos\vartheta^\times(\cos\vartheta^\times+\sin\vartheta^\times-1)}{k'^3D}\int\limits_0^\infty \sin k'R\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R\,dR.$$

Wir studieren jetzt die beiden Integrale für sich:

$$(123) \qquad \int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R^2\cos k'R\,dR = \qquad (\text{mit } R^2 = u)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{R_0^2}u\right]\sqrt{u}\cos k'\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}L_\mathrm{I}\left\{\sqrt{u}\cos k'\sqrt{u}\,;\,\frac{1}{R_0^2}\right\},$$

wo L_I das übliche Symbol der Laplacetransformierten bedeute. ([11], [12], [13]). Dies ist aber gleich:

$$(124) \qquad \frac{1}{2}L_\mathrm{I}\left\{u\frac{\cos k'\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,;\,\frac{1}{R_0^2}\right\} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k'^2}{4s}}\right\}_{s=\frac{1}{R_0^2}}$$

$$= +\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{R_0^3}{2} - k'^2R_0^5\right)\exp\left[-\frac{k'^2R_0^2}{4}\right].$$

Ferner wird:

$$(125) \qquad \int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] R\sin k'R\,dR = \frac{1}{2}L_\mathrm{I}\left\{\sin k'\sqrt{u}\,;\,\frac{1}{R_0^2}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{R_0^3}{2}k'\exp\left[-\frac{k'^2R_0^2}{4}\right].$$

Somit wird aus dem Integral III:

$$(126) \qquad \int_{\text{III}} = \frac{4\pi\omega AM\cos\vartheta^\times(\cos\vartheta^\times+\sin\vartheta^\times-1)}{D\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)}}\exp\left[-\frac{k'^2R_0^2}{2}\right]$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{-\frac{1}{k}\left(\frac{R_0^3}{2}-k'^2R_0^5\right)+\frac{1}{k}\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)}\,\frac{R_0^3}{2}\right\}.$$

Es bleibt jetzt nur noch das Integral V auszuwerten. Führen wir hier, wie etwa in $\int_{\text{I}}$, die Winkelintegration aus, so bleibt:

$$(127) \qquad \frac{4\pi j\omega p_\infty AM}{k'K^*D}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2e^{-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2}\right]\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]R^2\sin k'R\,dR.$$

Wir beachten dabei, daß in $0\leq R\leq\infty$ $\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\exp\left[-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]\right]$ nur zwischen $\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\right]$ und 1 variiert, was bei genügend kleinem $\frac{M}{K^*}R$ nicht sehr viel ist. Wir erhalten also:

$$(128) \qquad \int_{\text{V}} = \frac{4\pi j\omega p_\infty AM}{k'K^*D}\int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{\left[\frac{-1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\right]^n}{n!}\exp\left[-(n+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]R^2\sin k'R\,dR.$$

Die Reihe konvergiert als Potenzreihe absolut und gleichmäßig, wir können sie gliedweise integrieren: $(R^2=u)$

$$(129) \qquad \int_{\text{V}} = \frac{2\pi j\omega p_\infty AM}{k'K^*D}\int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{\left[\frac{-1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\right]^n}{n!}\exp\left[-(n+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]\sqrt{u}\sin k'\sqrt{u}\,du$$
$$=j\,\frac{2\pi j\omega p_\infty AM}{k'K^*D}\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\right)^n}{n!}\,L_{\text{I}}\left\{\sqrt{u}\sin k'\sqrt{u};\,\frac{n+1}{R_0^2}\right\}.$$

$L_{\text{I}}\{\sqrt{u}\sin k'\sqrt{u}\}$ entnehmen wir [16] S. 154 Formel (35):

$$(130) \qquad L_{\text{I}}\left\{\sqrt{u}\sin k'\sqrt{u};\,s\right\}=\sqrt{\frac{k'}{2}}\,s^{-2}-j\sqrt{\pi}\,s^{-\frac{5}{2}}\,\frac{1}{2}(s-k')\,e^{-k'/2s}\,Erf\left(j\sqrt{\frac{k'}{2s}}\right),$$

wo nach [16] S. 387 die Definition gilt:

$$(131) \qquad Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Wir haben in (130) $s=(n+1)/R_0$ zu setzen und nennen diese L-Transformierte dann einfach $L_n(k',R_0)$. Dann wird das $\int_{\text{V}}$

$$(132) \qquad \int_{\text{V}} = \frac{2\pi j\omega p_\infty AM}{k\sqrt{2(1-\cos\vartheta^\times)}}\cdot\frac{1}{K^*D}\sum_{n=1}^\infty\frac{\left(-\frac{1}{2}\frac{M}{K^*}R_0^2\right)^n}{n!}\,L_n(k',R_0),$$

wo
$$k' = k\sqrt{2(1-\cos\vartheta^{\times})}.$$

Für relativ kleine R_0 und kleine $\frac{M}{K^*}$ wird diese Reihe rasch konvergieren.

Damit haben wir alle fünf Integrale ohne Integralzeichen durch bekannte Funktionen ausgedrückt. Die numerische Auswertung, die erhebliche Arbeit verursachen würde, wollen wir unterlassen.

Das Problem der Streuung des Wirbels ist damit gelöst.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Eckart: Statistische Beschreibung der dielektrischen Turbulenz. Abh. der Bayerischen Akademie der Wissensch. Neue Folge Heft 74 S. 1–34 (1955).

[2] Eckart: Über die Streuung elektrischer Wellen an Zonen dielektrischer Turbulenz. Ebda Heft 76, S. 1–36 (1956).

[3] Eckart: Die Analyse der Störungen der Dielektrizitätskonstanten dielektrisch turbulenter Zonen mittels Streufeldbeobachtungen. Ebda Heft 77 S. 1–18 (1956).

[4] Eckart: Über den UKW-Schwund und seine Analyse. Z. f. angew. Physik, 8. Bd. 8. Heft 1956, S. 407 bis 416.

[5] Eckart: Über Peilfehler, die von dielektrischer Turbulenz in der Troposphäre herrühren. Annales Universitatis Saraviensis, Scientia, Vol. IV Fasc. 4, 1955, S. 268–293.

[6] Eckart: Über die Fehler der Radiotelemetrie, die von dielektrischer Turbulenz in der Troposphäre herrühren. Zeitschr. f. Flugwissenschaften, 5 (1957) Heft 3 S. 69–72.

[7] Shelkunoff, Electromagnetic Waves. Van Nostrand, S. 207 f.

[8] Eckart: Über die Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen in schwach homogenen Schichten. A. E. Ü. 5 (1951) 555–560.

[9] Rothe-Ollendorff-Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Springer 1931.

[10] Watson: Theory of Bessel Functions. Mc. Millan 1948.

[11] Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplacetransformation. Springer 1937.

[12] Doetsch: Handbuch der Laplacetransformation
I. Band Birkhäuser 1950;
II. Band Birkhäuser 1955.

[13] Doetsch: Tabellen zur Laplacetransformation und Anleitung zum Gebrauch. Springer 1947.

[14] Pekeris: Physical Review Vol. 71 no 4, Febr. 1947.

[15] Gordon-Booker: PIRE Vol. 38, 1950, No. 4.

[16] Bateman-Erdélyi-Magnus-Oberhettinger-Triconi: Tables of Integral-Transforms. McGraw-Hill.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften - Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1958

Band/Volume: NF_84

Autor(en)/Author(s): Eckart Gottfried

Artikel/Article: Über die Streuung des Schalles an Wirbeln und turbulenten Zonen in der Atmosphäre 3-27