Untersuchungen

über die

Kettenbrückenlinie.

Entworfen

vom

Dr. Jakob Philipp Kulik,

öffentl. ord. Professor der höheren Mathematik an der k. k. Prager Universität, und ordentl. Mitgliede der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften und der Landwirthschaftsgesellschaft in Steyermark.

Mit 2 Steintafeln.

Prag, 1838.

Druck und Papier von Gottlieb Haase Söhne.

Dr. J. Ph. Kulik's

UNTERSUCHUNGEN

über die

Kettenbrückenlinie.

Est quadam prodire tenus, si non datur ultra.
Horatii epist. I.

Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie.

Vom

Dr. Jakob Philipp Kulik.

Einleitung.

Der Zweck vorstehender Schrift ist eine genauere Erörterung der Eigenschaften derjenigen krummen Linie, welche die Tragketten einer Kettenbrücke annehmen, wenn dieselben nebst ihrem eigenen Gewichte, noch das Gewicht der Tragstangen, sammt der daran hängenden Fahrbahn zu erhalten haben. Ich will sie die Kettenbrückenlinie nennen.

Man hat unter verschiedenen Voraussetzungen die Kettenbrückenlinie zu bestimmen gesucht. So findet Navier, *) dass sie eine Parabel sey, Gilbert **) nimmt hiefür die gleichgespannte Kettenlinie, Gerstner ***) die Ellipse an: andere Mathematiker halten sie für die gemeine Kettenlinie. Meines Erachtens ist die Kettenbrückenlinie eine eigene, von den eben genannten verschiedene krumme Linie, welche mit jeder erforderlichen Genauigkeit verzeichnet werden kann, wie dieses die Folge unwiderleglich zeigt. Ausser dem theoretischen Interesse, welches die genauere Bestimmung der Kettenbrückenlinie dem Denker gewährt, hat auch dieser Gegenstand eine praktische Seite. Beim Baue der Kettenbrücken ist es wichtig, die Länge der Tragstangen, welche in gewissen Punkten der Tragketten eingehängt werden, so zu bestimmen, dass ihre Endpunkte, welche die Brückenbahn stützen, in einer horizontalen Linie zu liegen kommen. Will man nun die Kettenbrückenlinie als eine Parabel, Ellipse u. s. f. betrachten, so wird man freilich diese Längen im Voraus berechnen können: allein man wird dann in die unausweichliche Nothwendigkeit kommen, entweder versuchsweise die Tragstangen nach Umständen abzukürzen, oder durch andere län-

*) *Memoire sur les ponts suspendus en fils de fer. Paris* 1823. In das Deutsche übersetzt von *J. Kutschera.* Lemberg 1829.

**) *On the mathematical Theory of Suspension Bridges. By Davies Gilbert (Philos. Transact. for* 1826. *Part. III. p.* 202.)

***) Handbuch der Mechanik vom F. J. Ritter *v. Gerstner.* Band I. S. 477. Prag 1831.

gere Stangen zu ersetzen, bis die beabsichtigte Geradlinigkeit der Fahrbahn nahe erreicht ist, oder aber man wird, welcher Fall gewöhnlich eintrifft, keine ebene horizontale, sondern eine nach der Mitte zu gekrümmte Brückenbahn erzielen.

Eine neue Methode zur Verzeichnung der Kegelschnitte, auf welche ich zufällig bei Entwerfung der zu dieser Schrift gehörenden Figuren gerathen bin, dürfte ihrer Einfachheit halber das Interesse der Techniker in Anspruch nehmen.

Schliesslich muss ich erwähnen, dass die hier vorkommenden Tafeln von mir neu berechnet wurden, und sich von allen bisher bekannten Tafeln, ihrer Genauigkeit halber, wesentlich unterscheiden.

I. Die gleichgespannte Kettenlinie.

§. 1.

Bekanntlich entsteht die gemeine Kettenlinie, wenn eine gleichförmig dicke und biegsame Kette an ihren beiden Enden so befestigt wird, dass ihre sämmtlichen Theile frei schweben. Die Spannung, welche in einzelnen Punkten derselben Statt hat, nimmt von der Mitte der Kettenlinie, d. i. von ihrem Scheitel gegen die Aufhängepunkte beständig zu, und ist an den letzteren am grössten.

Denkt man sich nun eine ungleichförmig dicke Kette von der Beschaffenheit, dass ihre Stärke von ihrer Mitte gegen die beiden Enden in dem Verhältnisse wächst, als die Spannungen, denen einzelne Punkte derselben unterworfen sind, grösser werden, an ihren beiden Enden unveränderlich aufgehängt, und sich selbst überlassen; so bildet sie eine von der gemeinen Kettenlinie abweichende krumme Linie, welche wegen der gleichen Festigkeit oder Spannung aller ihrer Theile die gleichgespannte Kettenlinie *) *(the Catenary of equal strength)* genannt werden kann.

§. 2.

Zur leichteren Auffassung des Folgenden, und um die gemeine Kettenlinie mit der Kettenbrückenlinie vergleichen zu können, will ich einige in meiner Abhandlung über die gemeine Kettenlinie **) aufgestellten Formeln hier aufführen:

Stellt $A\ C\ B$ (fig. 1) die gemeine Kettenlinie vor, bei welcher A, B die Aufhängepunkte, C den Scheitel derselben bedeuten, und führt man durch einen beliebigen Punkt M die Horizontale $M\ Q$ und die Tangente $M\ T$, so heisst der Winkel $Q\ M\ T$ der Stellungswinkel des Punktes M. Bezeichnet man diesen mit v, und die Bogenlänge $C\ M$ vom Scheitel an gerechnet mit s; so hat man

$$1)\quad s = p.\ tg\, v$$

---

*) Meines Wissens ist diese Kurve noch in keinem deutschen Lehrbuche der Statik abgehandelt worden, und es mag vorläufig diese Benennung, bis sie nicht durch eine bessere ersetzt wird, hier gelten.

**) Theorie und Tafeln der (gemeinen) Kettenlinie. Prag 1832.

wo p eine konstante Gerade vorstellt, welche man den Parameter der Kettenlinie nennt: sie ist die Bogenlänge eines Punktes, dessen Stellungswinkel 45° beträgt, weil für $v = 45°$, $s = p$ wird.

Führt man durch C die Vertikale $C\,Y$, und überträgt den Parameter von C gegen F, und zieht $F\,X$ zu $C\,Y$ senkrecht; so nennt man diese Gerade die Direktrix der Kettenlinie. Wird nun der Punkt F zum Anfangspunkt der Koordinaten, und die Direktrix zur Abszissenaxe angenommen, dann hat man für jeden Punkt M, dessen Abszisse $F\,P = x$, Ordinate $P\,M = y$ ist, die Gleichungen

$$2)\ x = p\,\lambda\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\,v)$$

unter λ natürliche Logarithmen verstanden

$$3)\ y = p\,sec\,v \text{ und wegen } 1)$$

$$4)\ s = \sqrt{(y^2 - p^2)}$$

Bezeichnet man mit R den Krümmungshalbmesser eines Punktes, dessen Ordinate y ist, so ist

$$5)\ R = -\frac{y^2}{p}$$

eine Formel, welche für den Scheitel, wo $y = p$ wird

$$6)\ R = -p \text{ gibt:}$$

es ist sonach der Parameter nichts anderes, als der Krümmungshalbmesser für den Scheitel der Kettenlinie.

Zu seiner Bestimmung führen folgende Formeln:

$$7)\ d = p\,\lambda\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\,a)$$

$$8)\ t = p\,(sec\,a - 1)$$

$$9)\ m = \frac{\lambda\,tg\,(45^0 + \frac{1}{2}\,a)}{sec\,a - 1} \qquad 10)\ p = \frac{t}{sec\,a - 1}$$

in denen d die halbe Spannweite, t den Pfeil oder die Vertiefung in der Mitte der Kettenlinie, a den Stellungswinkel des Aufhängepunktes und m den Quotienten $\frac{d}{t}$ bedeutet. Behandelt man die Formel 9) logarithmisch, so ergibt sich leicht *)

$$11)\ log\,m = log\,cos\,a + log\,[log\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\,a) - 10] - 2\,log\,sin\,\tfrac{1}{2}\,a + 0.0611857.$$

§. 3.

Suchen wir zuvörderst den Ausdruck für die Bogenlänge einer gleichgespannten Kettenlinie.

Seien A, B (fig. 2) die Aufhängepunkte, C der Scheitel derselben: sei ferner ph die Spannung im Scheitel, wo p den Parameter der Kurve, und h das Gewicht der Längeneinheit der daselbst Statt habenden Kettendicke vorstellt, und es sei noch T die Spannung an irgend einem Punkte M derselben. Man setze den im Scheitel anfangenden Bogen $C\,M = s$,

*) Durch einen Schreibfehler ist am a. O. die Wiederholung des Zeichens *log* im zweiten Gliede rechts weggeblieben; die beigefügten Tafeln stützen sich jedoch auf der richtigen Formel.

und es sei dessen Gewicht gleich dem Gewichte einer gleichförmig dicken Kette von der Länge σ und dem Querschnitte der Kette im Scheitel der Kurve, endlich bezeichne v den Stellungswinkel QMT des Punktes M; so hat man bei Zerfällung der nach der Tangente MT wirkenden Spannung T in die ihr gleichgeltenden Kräfte $T \sin v$ nach der Richtung MP, und $T \cos v$ nach der Richtung MQ.

$$T \sin v = \sigma h \quad , \quad T \cos v = p h, \text{ also} \qquad \alpha)$$

$$T^2 (\sin^2 v + \cos^2 v) = h^2 (\sigma^2 + p^2), \text{ oder}$$

$$T = h \sqrt{(\sigma^2 + p^2)} \qquad \beta)$$

Man bezeichne noch mit u und b die Querschnitte der Kette beziehungsweise in den Punkten M und C, so wird der Inhalt eines Kettenelementes bei M von der Länge ds, nämlich

$$u\,ds = b\,d\sigma, \text{ diess gibt}$$

$$u : b = d\sigma : ds$$

und da die Querschnitte den Spannungen proportional sein sollen, so hat man auch

$$u : b = T : ph = d\sigma : ds$$

woraus sofort folgt

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{T}{ph} \text{ und wegen } \beta) = \frac{\sqrt{(\sigma^2 + p^2)}}{p}$$

mithin ist 12) $ds = \dfrac{p\,d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 + p^2)}}$

Die Integration gibt nun

$$s = p \lambda \left[\sigma + \sqrt{(\sigma^2 + p^2)}\right] + C$$

da aber s mit σ zugleich verschwindet, so ergibt sich

$$C = - p \lambda p$$

und sonach vollständig

$$s = p \lambda \frac{\sigma + \sqrt{(\sigma^2 + p^2)}}{p} \qquad \gamma)$$

Dividirt man noch die Gleichungen α) miteinander, so erhält man

$$13) \quad tg\, v = \frac{\sigma}{p}$$

und nach Einführung dieses Werthes in die Formel γ) findet man

$$s = p \lambda\, (tg\, v + sec\, v) \text{ oder}$$

$$14) \quad s = p \lambda\, tg\, (45^0 + \tfrac{1}{2} v)$$

Bei der Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Formel 2) ist leicht zu ersehen, dass bei gleichen Stellungswinkeln in der gemeinen und in der gleichgespannten Kettenlinie die Abszissen der ersteren den Bogenlängen der andern gleich sind.

§. 4.

Die Wichtigheit der Funktion $p \lambda\, tg\, (45^0 + \frac{1}{2} v)$ in der Analysis überhaupt, *) und in der Lehre von den Kettenlinien insbesondere, hat mich bewogen, eine Tafel derselben

*) S. *Gudermann's* Theorie der Potenzial-Funktionen in *Crelle's Journal* der reinen und angewandten Mathematik. Band. VI. VII. und VIII.

für alle Werthe von v unter 24° von 6 zu 6 Minuten zu berechnen, hierbei wurde $p = 100$ angenommen. *Legendre* *) hat eine Tafel dieser Funktion in 12 Dezimalstellen für alle Werthe von v unter 90° jedoch nur von 30′ zu 30′ mitgetheilt, aus welcher ich die Zwischenwerthe durch eine sorgfältige Interpolation mit Rücksicht auf die dritten Differenzen und mit einer Genauigkeit von 10 Dezimalstellen abgeleitet habe. In der nachstehenden Tafel behielt ich die ersten 6 Stellen.

I. Tafel.

Bogenlängen der gleichgespannten Kettenlinie.

v	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
0°	0.0000	0.1745	0.3491	0.5236	0.6981	0.8727	1.0472	1.2218	1.3963	1.5709
1	1.7454	1.9200	2.0945	2.2691	2.4437	2.6183	2.7929	2.9675	3.1421	3.3167
2	3.4914	3.6660	3.8407	4.0153	4.1900	4.3647	4.5394	4.7141	4.8889	5.0636
3	5.2384	5.4132	5.5880	5.7628	5.9376	6.1125	6.2873	6.4622	6.6371	6.8120
4	6.9870	7.1620	7.3370	7.5120	7.6870	7.8621	8.0372	8.2123	8.3874	8.5626
5	8.7377	8.9130	9.0882	9.2635	9.4388	9.6141	9.7894	9.9648	10.1402	10.3157
6	10.4917	10.6667	10.8422	11.0178	11.1934	11.3691	11.5447	11.7204	11.8962	12.0720
7	12.2478	12.4237	12.5996	12.7755	12.9515	13.1275	13.3036	13.4797	13.6558	13.8320
8	14.0082	14.1845	14.3608	14.5372	14.7136	14.8900	15.0665	15.2431	15.4196	15.5963
9	15.7730	15.9497	16.1265	16.3033	16.4802	16.6571	16.8341	17.0111	17.1882	17.3654
10	17.5426	17.7198	17.8971	18.0745	18.2519	18.4294	18.6069	18.7845	18.9622	19.1399
11	19.3177	19.4955	19.6734	19.8513	20.0293	20.2074	20.3856	20.5638	20.7420	20.9204
12	21.0988	21.2772	21.4558	21.6344	21.8130	21.9918	22.1706	22.3494	22.5284	22.7074
13	22.8865	23.0657	23.2449	23.4242	23.6036	23.7830	23.9626	24.1422	24.3219	24.5016
14	24.6814	24.8614	25.0414	25.2214	25.4016	25.5818	25.7621	25.9425	26.1230	26.3036
15	26.4842	26.6650	26.8458	27.0267	27.2077	27.3887	27.5699	27.7512	27.9325	28.1139
16	28.2955	28.4771	28.6588	28.8406	29.0225	29.2044	29.3865	29.5687	29.7509	29.9333
17	30.1158	30.2983	30.4810	30.6637	30.8466	31.0295	31.2126	31.3957	31.5790	31.7624
18	31.9458	32.1294	32.3131	32.4968	32.6807	32.8647	33.0488	33.2330	33.4173	33.6018
19	33.7863	33.9709	34.1557	34.3406	34.5255	34.7106	34.8959	35.0812	35.2666	35.5222
20	35.6379	35.8236	36.0096	36.1956	36.3817	36.5680	36 7544	36.9409	37.1276	37.3143
21	37.5012	37.6882	37.8754	38.0626	38.2500	38.4375	38.6252	38.8130	39.0009	39.1889
22	39.3771	39.5654	39.7538	39.9424	40.1311	40.3200	40.5090	40.6981	40.8872	41.0767
23	41.2663	41.4559	41.6458	41.8357	42.0258	42.2161	42.4065	42.5970	42.7877	42.9785

§. 5.

Da die Stellungswinkel der Aufhängepunkte bei Kettenbrücken nicht leicht 20° übersteigen, so reicht vorstehende Tafel für alle Fälle aus, wo Bogenlängen der gleichgespannten Kettenlinie zu bestimmen sind. Ist nun der Stellungswinkel eines Punktes in Graden und

*) *Exercices de calcul integral. Par M. Legendre. Tome 3e.*

Minuten gegeben: dann geht man mit den Graden in die erste vertikale Spalte und mit den Minuten in die oberste horizontale Zeile der Tafel, und fährt von da vertikal abwärts bis zu jener horizontalen Zeile, welche durch die Grade des Stellungswinkels geht; am Orte des Zusammentreffens findet man die Zahl, welche die verlangte Bogenlänge ausdrückt. Sei z. B. $v = 17^0\ 42'$, so erhält man aus der Tafel unmittelbar $s = 31.3957$, der noch genauere Werth ist $s = 31.39574689$.

Kommen die Minuten eines gegebenen Stellungswinkels in der Tafel nicht vor, so findet man die gesuchte Bogenlänge durch Proportionaltheile, indem man den Unterschied des nächst grösseren und nächst kleineren Werthes von s aus der Tafel mit der Zahl der im gegebenen Stellungswinkel überschüssigen Minuten multiplizirt, das Produkt durch 6 dividirt und zur nächst kleineren Bogenlänge in der Tafel addirt. Wäre also z. B. $v = 17^0\ 47'$, dann hat man

$$\begin{array}{ll} v = 17^0\ 48' & s = 31.5790 \\ v = 17^0\ 42' & s = 31.3957 \\ \hline & \text{Unterschied. } 0.1833 \end{array}$$

nun ist $17^0\ 47' - 17^0.\ 42' = 5'$ und $5 \times 0.1833 = 0.9165$

$$\begin{array}{rl} \text{daher } \tfrac{1}{6}\ 0.9165 = & 0.1527 \\ \text{nächst kleinere } s = & 31.3957 \\ \hline \text{gesuchte Bogenlänge} = & 31.5484 \end{array}$$

Da diese Tafel für den Parameter $p = 100$ konstruirt ist, so ergeben sich die Bogenlängen für einen andern Parameter p', wenn man die zugehörigen Zahlen der Tafel mit $\frac{1}{100}\,p'$ multiplizirt. Es wäre sonach für den Parameter $p' = 79$ und $v = 17^0\ 47'$,

$$s = \tfrac{79}{100} \times 31.5484 = 24.9232$$

Eben dasselbe ist beim Gebrauche der folgenden Tafeln zu bemerken.

§. 6.

Um noch die Koordinatengleichung unserer Kettenlinie zu finden, hat man nach der Formel 13)

$$tg\, v = \frac{\sigma}{p} = \frac{dy}{dx} \qquad \alpha)$$

indem $\frac{dy}{dx}$ immer die Tangente des Winkels vorstellt, welchen die Berührende eines Punktes der Kurve mit der Abszissenaxe einschliesst; verlängert man aber die Tangente MT (fig. 2), bis sie die Abszissenaxe FX in E schneidet, so sind offenbar die Winkel $TMQ = v$, und MEX einander gleich: hierbei sind die Koordinaten des Punktes M, $FP = x$, $PM = y$, und und es heisst hier, wie bei der gemeinen Kettenlinie die Gerade $FC = p$ der Parameter, die Gerade XX' die Direktrix der Kurve. Quadrirt man die Gleichung α) und addirt beiderseits dx^2, so ergibt sich, wegen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(\sigma^2 + p^2)}}{p} \qquad \beta)$$

und nach Substituirung des Werthes von ds aus der Formel 12) im Ausdrucke β)

$$\frac{p\,d\sigma}{dx\sqrt{(\sigma^2+p^2)}} = \frac{\sqrt{(\sigma^2+p^2)}}{p}\text{, diess gibt}$$

$$dx = \frac{p^2\,d\sigma}{\sigma^2+p^2} \qquad \gamma)$$

das Integrale hiervon ist nach (A. F. 328) *)

$$x = p.\ arc.\ tg\,\frac{\sigma}{p} \qquad \delta)$$

Setzt man aber in der Gleichung α) statt dx seinen Werth aus der Gleichung γ), so folgt

$$dy = \frac{p\,\sigma.\ d\sigma}{\sigma^2+p^2}$$

dessen Integrale nach (A. F. 301)

$$y = \tfrac{1}{2}p\,\lambda\,(\sigma^2+p^2)\text{ ist.}$$

Die Konstante lässt sich durch die Bedingung bestimmen, dass für $\sigma = o$, $y = p$ wird; man findet so $C = p - \frac{1}{2}p\,\lambda\,p^2$, und daher

$$y = p\left[\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{\sigma^2+p^2}{p^2}\right)+1\right]\text{ d. i.}$$

weil $\frac{1}{2}\lambda\frac{\sigma^2+p^2}{p^2} = \lambda\frac{\sqrt{\sigma^2+p^2}}{p^2}$ ist,

$$y = p\left[1+\lambda\sqrt{\frac{\sigma^2+p^2}{p^2}}\right] \qquad \varepsilon)$$

Durch Einführung des Stellungswinkels v aus der Formel α) in die Formeln δ) und ε) erhält man, wegen

$$tg\,\frac{x}{p} = \frac{\sigma}{p} = tg\,v$$

15) $x = p\,v$ und

16) $y = p\,(\lambda\,sec\,v + 1)$, mithin ist

17) $y = p\,(\lambda\,sec\,\frac{x}{p} + 1)$

die Koordinatengleichung der gleichgespannten Kettenlinie. Die Spannung T ergibt sich aber, wenn man in der Formel β) §. 3, statt σ seinen Werth $p\,tg\,v = p\,tg\,\frac{x}{p}$ setzt.

18) $T = p\,h\,sec\,\frac{x}{p}$, während die Formel 14) für $v = \frac{x}{p}$ in

19) $s = p\,\lambda\,tg\left(45^\circ + \frac{x}{2p}\right)$ übergeht.

§. 7.

Aus den eben erhaltenen Formeln lassen sich mehrere Folgerungen anstellen:

1) Die gleichgespannte Kettenlinie ist eine transzendente Kurve, welche

*) Das Citat (A. F. 328) bedeutet die Formel 328) in meinem Lehrbuche der höhern Analysis. Prag 1831. Dasselbe ist von allen Citaten dieser Art zu verstehen.

2) aus zwei unendlichen Aesten besteht, weil für $v = 90^0$, x in $\frac{1}{2} p \pi$ übergeht, und y unendlich wird.

3) weil für $v = o$, $x = o$, und $y = p$ wird, so liegen alle Punkte der Kettenlinie auf einer Seite der Abszissenaxe, ihr Scheitel liegt dieser am nächsten, nämlich im Abstande $y = p$, und

4) weil für gleich grosse positive und negative Werthe von x, der Werth von y ungeändert bleibt, so theilt die Ordinatenaxe $C\,Y$ die Kurve in zwei gleiche und ähnliche Hälften CMA, $CM'B$. Ferner

5) gibt es für grössere Abszissen als $\frac{1}{2} p \pi$ keine Punkte der Kurve, oder die Vertikalen DG, und $D'G'$, Fig. 3, welche in dem Abstande $FD = FD' = \frac{1}{2} p \pi$ der Ordinatentaxe $F\,Y$ parallel laufen, sind Assymptoten der Kurve. Endlich

6) weil ebene Figuren, die sich durch nichts als ihre Dimensionen unterscheiden, einander ähnlich sind, so folgt, dass alle gleichgespannten Kettenlinien einander ähnlich sind.

§. 8.

Wir wollen nun die gefundenen Formeln in eine für die Rechnung bequemere Gestalt bringen. Gewöhnlich handelt es sich bei Verzeichnung der Kettenlinie um die Bestimmung der Ordinate, der Spannung und des Stellungswinkels, welche mit einer als gegeben betrachteten Abszisse zusammen gehören. Man findet zuvörderst aus der Formel 15) den Stellungswinkel $v = \frac{x}{p}$, wo das Glied rechter Hand als Bogenlänge zu betrachten ist, zu dem das in Graden, Minuten zugehörige v zu bestimmen wäre. Drückt man nun v in Minuten und Dezimalstellen der Minuten aus, so hat man für die Länge einer Minute im Bogen $\frac{\pi}{180.60} = 0.0002908882$ dessen Logarithme $0.4637262 - 4$ ist. Es wird sonach, wenn $p = 100$ gesetzt wird,

$lg\ v = lg\ x - 0.4637262 + 2$. Sei Beispiels halber $x = 37$, so findet man $v = 1271'.966 = 21^0 11'.97$ als Stellungswinkel, der mit der Abszisse $x = 37$ für den Parameter $p = 100$ zusammenhängt

Aus der Formel 16) erhält man

$$\frac{y-p}{p} = \lambda\ sec\ v$$

und wenn man beiderseits Logarithmen nimmt, wird

$$lg\ (y-p) - lg\ p = lg\ \lambda\ sec\ v$$

es ist aber $\lambda\ sec\ v = \frac{lg\ sec\ v}{M} = \frac{10 - lg\ cos\ v}{M}$, wenn M den Modulus der briggischen Logarithmen vorstellt, diess gibt

$$lg\ \lambda\ sec\ v = lg\ (10 - lg\ cos\ v) - lg\ M = lg\ (10 - lg\ cos\ v) + 0.3622157$$

sonach erhält man

20) $lg\ (y-p) = 2.3622157 + lg\ (10 - lg\ cos\ v)$

Im obigen Beispiele hat man

$$lcg\ 21^{0}11'.97 = 0.9695683 \text{ mithin}$$

$$10 - lcg\ 21^{0}11'.97 = 0.0304317,$$ hiervon den Logarithmen genommen, wird

$$0.4833262 - 2$$

die Konstante $\underline{2.3622157}$ addirt

$$0.8455419 = lcg\ 7.00716$$

sonach ist $y - 100 = 7.00716$

Eben so erhält man aus Formel 14)

$$lcg\ s = lcg\ p + lcg\ \lambda\ tg\ (45^{0} + \tfrac{1}{2} v), \text{ und } p = 100 \text{ angenommen}$$

$$= 2 + lcg \left[\frac{lcg\ tg\ (45^{0} + \frac{1}{2} v) - 10}{M}\right], \text{ mithin}$$

21) $lcg\ s = 2.3622157 + lcg\ [lcg\ tg\ (45^{0} + \tfrac{1}{2} v)\ 10]$

Im obigen Beispiele steht die Rechnung so:

es ist $v = 21^{0}11'.97$, $\tfrac{1}{2} v = 10^{0}35'.98$ und $45^{0} + \tfrac{1}{2} v = 55^{0}35'.98$

nun hat man $lcg\ tg\ (45^{0}35'.98) - 10 = 0.1644852$

$$lcg\ (0.1644852) = 0.2161268 - 1$$

$$\text{die Konstante } = \underline{2,3622157}$$

$$1.5783425$$

welcher Logarithme zur Zahl $37.8741 = s$ gehört.

§. 9.

Folgende Tafel gibt für die in der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Abszissen die zugehörigen Ordinaten, Bogenlängen, Spannungen und Stellungswinkel der gleichgespannten Kettenlinie, ferner zum Behufe einer leichteren Uebertragung dieser Grössen auf andere Parameter die Logarithmen der Ordinaten, Bogenlängen und Spannungen, wobei der Parameter $= 100$ vorausgesetzt, und die Tangente des Scheitels CX'' (fig. 2) als Abszissenaxe angenommen wird.

II. Tafel.

Koordinaten, Bogenlängen, Spannungen und Stellungswinkel der gleichgespannten Kettenlinie. *)

x	$y-p$	s	T	v	$\log(y-p)$	$\log s$	$\log T$
1	0.0050	1.0001	100.0050	0° 34.38	0.69906—3	0.00004	2.00000
2	0.0200	2.0001	100.0200	1 8.75	0.30099—2	0.30105	2.00009
3	0.0450	3.0004	100.0502	1 43.13	0.65227—2	0.47718	2.00022
4	0.0800	4.0011	100.0802	2 17.51	0.90321—2	0.60218	2.00035
5	0.1250	5.0021	100.1251	2 51.89	0.09610—1	0.69915	2.00054
6	0.1801	6.0036	100.1803	3 26.26	0.25551—1	0.77841	2.00078
7	0.2452	7.0057	100.2455	4 0.64	0.38951—1	0.84545	2.00106
8	0.3203	8.0085	100.3209	4 35.02	0.50562—1	0.90355	2.00139
9	0.4056	9.0122	100.4064	5 9.40	0.60805—1	0.95483	2.00176
10	0.5008	10.0167	100.5021	5 43.77	0.69968—1	1.00072	2.00217
11	0.6062	11.0222	100.6081	6 18.15	0.78263—1	1.04227	2.00263
12	0.7217	12.0289	100.7243	6 52.53	0.85838—1	1.08023	2.00313
13	0.8471	13.0368	100.8509	7 26.91	0.92795—1	1.11517	2.00368
14	0.9832	14.0460	100.9880	8 1.28	0.99264—1	1.14755	2.00427
15	1.1292	15.0566	101.1356	8 35.66	0.05278	1.17773	2.00490
16	1.2855	16.0687	101.2938	9 10.04	0.10971	1.20598	2.00558
17	1.4520	17.0825	101.4626	9 44.42	0.16198	1.23255	2.00631
18	1.6288	18.0980	101.6421	10 18.79	0.21187	1.25763	2.00707
19	1.8159	19.1154	101.8325	10 53.17	0.25910	1.28138	2.00789
20	2.0136	20.1347	102.0339	11 27.55	0.30397	1.30395	2.00874
21	2.2214	21.1561	102.2463	12 1.93	0.34663	1.32544	2.00965
22	2.4397	22.1796	102.4698	12 36.30	0.38734	1.34595	2.01060
23	2.6686	23.2055	102.7016	13 10.68	0.42628	1.36559	2.01159
24	2.9081	24.2338	102.9508	13 45.06	0.46361	1.38442	2.01263
25	3.1582	25.2645	103.2085	14 19.44	0.49944	1.40251	2.01372
26	3.4187	26.2980	103.4779	14 53.81	0.53386	1.41992	2.01485
27	3.6901	27.3341	103.7591	15 28.19	0.56704	1.43670	2.01603
28	3.9723	28.3732	104.0523	16 2.57	0.59904	1.45289	2.01725
29	4.2653	29.4152	104.3576	16 36.95	0.62995	1.46857	2.01852
30	4.5692	30.4604	104.6751	17 11.32	0.65984	1.48373	2.01984
31	4.8840	31.5088	105.0052	17 45.70	0.68878	1.49843	2.02121
32	5.2099	32.5605	105.3479	18 20.08	0.71683	1.51269	2.02263
33	5.5468	33.6158	105.7035	18 54.46	0.74404	1.52654	2.02409
34	5.8948	34.6747	106.0721	19 28.83	0.77047	1.54001	2.02560
35	6.2543	35.7373	106.4540	20 3.21	0.79618	1.55312	2.02716
36	6.6141	36.8038	106.8494	20 37.59	0.82047	1.56589	2.02877
37	7.0072	37.8743	107.2535	21 11.97	0.84554	1.57834	2.03043
38	7.4008	38.9490	107.6814	21 46.34	0.86928	1.59050	2.03214
39	7.8061	40.0280	108.1187	22 20.72	0.89243	1.60236	2.03390
40	8.2229	41.1114	108.5705	22 55.10	0.91502	1.61396	2.03571
50	13.0583			28 38.87			
60	19.1965			34 22.65			
70	26.8085			40 6.42			
80	32.6677			43 50.20			
90	47.5442			51 33.97			
100	61.5627			57 17.75			
110	79.0547			63 1.52			
120	101.513			68 45.30			
130	131.864			74 29.07			
140	177.216			80 12.85			

*) Für Abszissen, welche die Zahl 40 übersteigen, erscheinen in der Tafel nur die Ordinaten, weil sie bei Verzeichnung der Kurve brauchbar sind: die übrigen Grössen dagegen werden nicht leicht benöthiget.

§. 10.

Wir haben in den vorher entwickelten Formeln den Parameter der Kurve als bekannt vorausgesetzt: nun ist dieser immer von der Spannweite und dem Pfeile der Kettenlinie abhängig; es frägt sich also, wie bestimmt man aus diesen Stücken den Parameter?

Heisst die Spannweite $2d$ und die Tiefe des Scheitels oder der Pfeil t, so folgt aus den Formeln 15) und 16), wenn man den Stellungswinkel des Aufhängepunktes mit a bezeichnet, also dort v mit a vertauscht

$$22)\ d = p a$$

$$y - p = t = p \lambda \sec a, \text{ demnach}$$

$$23)\ \frac{d}{t} = \frac{a}{\lambda \sec a} = m$$

es ist daher m eine gegebene Grösse, aus welcher a mittelst der Gleichung 23) gefunden werden kann. Der indirekte Weg, um aus der transzendenten Gleichung 23) a zu finden, wird merklich erleichtert, wenn man sich eine Tafel entwirft, welche zu einem gegebenen a das zugehörige m nahe angibt: nur hat man, um aus a umgekehrt m zu berechnen, statt a im Zähler nicht den in Graden und Theilen desselben ausgedrückten Winkel, sondern die ihm zugehörige Bogenlänge zu nehmen.

Aus 23) ergibt sich nun

$$\log m = \log a - \log (\lambda \sec a), \text{ und weil}$$

$$\lambda \sec a = 2.3025851 \log \sec a \text{ demnach}$$

$$\log (\lambda \sec a) = \log 2.3025851 + \log (10 - \log \cos a)$$

$$= 0.3622157 + \log [10 - \log \cos a], \text{ so wird hierdurch}$$

$$24)\ \log m = \log a - \log [10 - \log \cos a] - 0.3622157$$

Die nach dieser Formel berechneten Ergebnisse von m enthält folgende Tafel:

III. Tafel.

Stellungswinkel der Aufhängepunkte.

a	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
5°	22.89	22.44	22.00	21.59	21.19	20.80	20.43	20.07	19.72	19.39
6	10.06	18 75	18.45	18.15	17.87	17.59	17.32	17.07	16.81	16.57
7	16.33	16.10	15.87	15.66	15.44	15.23	15.03	14.84	14.65	14.46
8	14 28	14.10	13.93	13.76	13.59	13.43	13.27	13.12	12.97	12.82
9	12.68	12.54	12.40	12.27	12.14	12.01	11.88	11.76	11.64	11.52
10	11.40	11.29	17.17	11.06	10.96	10.85	10.74	10.64	10.54	10.44
11	10.35	10.25	10.16	10.07	9.985	9.897	9.811	9.726	9.643	9.560
12	9.479	9.400	9.322	9.244	9.170	9.094	9.021	8.949	8.877	8.807
13	8.739	8.671	8.604	8 538	8.473	8.409	8.346	8.284	8.223	8.162
14	8.103	8.044	7.987	7.929	7.873	7.818	7.763	7.709	7.656	7.603
15	7.556	7.500	7.450	7.400	7.351	7.302	7.254	7.207	7.160	7.114
16	7.068	7.023	6.978	6.934	6.891	6.848	6.805	6.764	6.722	6.681
17	6.641	6.601	6.561	6.522	6.483	6.445	6.407	6.370	6.333	6.296
18	6.260	6.223	6.189*	6.154	6.119	6.085	6.051	6.018	5.984	5.952
19	5.919	5.887	5.855	5.824	5.792	5.761	5.731	5.701	5.671	5.641
20	5.612	5.583	5.554	5.525	5.497	5.469	5.441	5.414	5.387	5.360
21	5.333	5.306	5.280	5.254	5.228	5.203	5.178	5.153	5.128	5.103
22	5.079	5.056	5.031	5.007	4.983	4.960	4.937	4.914	4.892	4.868
23	4.847	4.824	4.802	4.780	4.758	4.737	4.715	4.695	4.674	4.649
24	4.632	4.612	4.592	4.572	4.552	4.532	4.512	4.493	4.474	4.454

§. 11.

Der Gebrauch vorstehender Tafel ist sehr einfach. Aus der gegebenen halben Spannweite d und dem Pfeil t berechne man den Dezimalbruch $m = \frac{d}{t}$: hierauf suche man ihn unter den Werthen von m in der Tafel und nehme den zugehörigen Werth von a: durch Proportionaltheile ergibt sich derselbe leicht bis auf 1 Minute genau.

Um nun den Stellungswinkel a noch genauer zu finden, kann man so verfahren: es sei z die Zahl der an die schon gefundenen Grade und Minuten von a noch fehlenden Sekunden, so dass $a + z$ derjenige Werth sei, welcher mit dem gegebenen Werthe von m genau zusammenhängt. Man hat dann, nach Formel 24)

$$\log m = \log\,(a + z) - \log\,[10 - \log\cos\,(a + z)] - 0.3622157$$

ferner sei m' der zum Stellungswinkel a gehörende Werth von m, der also nach Formel 24) genau auszumitteln ist, so hat man auch

$$\log m' = \log a - \log\,[10 - (\log\cos a)] - 0.3622157$$

demnach $\log m' - \log m = D$ gesetzt, wird

$$D = \log a - \log\,(a + z) - \log\,[10 - \log\cos a] + \log\,[10 - \log\cos\,(a + z)]$$

Setzt man nun weiter, da der Bogen von einer Sekunde 0.0000048 ist,

$$\log (a + 0.0000048) = \log a + \delta, \text{ und } \log \cos (a + 1'') = \log \cos a - \varDelta$$

wo δ und $\varDelta$ aus den logarithmischen Tafeln entnommen werden, so verwandelt sich hierdurch $\log (a + z) = \log (a + 0.0000048\, z)$ in $\log a + z\,\delta$ und

$$10 - \cos (a + z) \text{ in } 10 - \log \cos a + z\,\varDelta$$

Substituirt man diese Werthe im Ausdrucke für D, so findet man leicht, indem man Kürze halber $10 - \log \cos a = n$ setzt

$$D = -z\,\delta + \log \frac{n + z\,\varDelta}{n} = -z\,\delta + \log \left(1 + \frac{z\,\varDelta}{n}\right)$$

welches nach *(A. F. 81)* in

$$D = -z\delta + \frac{Mz\,\varDelta}{n} \text{ übergeht.}$$

Hieraus ergibt sich $z = \dfrac{D}{\dfrac{M\varDelta}{n} - \delta}$,

und der genauere Werth des Stellungswinkels ist dann $a + z$,

Oder noch einfacher, wenn man sich die Bestimmung von $\dfrac{M\varDelta}{n}$ ersparen will, bemerke man für das schon bekannte $\varDelta$ die Differenz für $\log [10 - \log \cos (a + 1'')]$ in den Tafeln d. i. die Grösse, um welche sich der Logarithme ändert, wenn die zugehörige Zahl $10 - \log \cos a + \varDelta$ wäre, ist diese $= \varepsilon$, so geht $\log [10 - \log \cos (a + z)]$ in $\log [10 - \log \cos a] + z\,\varepsilon$ über, und man erhält nun

$$D = -z\,\delta + z\,\varepsilon, \text{ oder } z = \frac{D}{\varepsilon - \delta}$$

Beispiel. Sei die Spannweite $2\,d = 695'8''$ die Tiefe oder der Pfeil $55'$ den Stellungswinkel der Aufhängepunkte zu finden? Hier ist $d = 347'10'' = 347'.833$, mithin $\log m = \log d - \log t = 0.8010085$, und $m = \dfrac{d}{t} = 6.32424$: geht man nun mit der Zahl 6.324 in die Tafel, so ergibt sich a zwischen $17^{0}48'$ und $17^{0}54'$: durch Proportionaltheile findet man $a = 17^{0}.49.'4$, wofür man $a = 17^{0}49'$ nehmen kann. Nun ist die Bogenlänge von $17^{0}49'$ oder $a = 0.3109595$, daher $\log a = 0.4927038 - 1$, und $\delta = 67.2$ *)

$\log \cos 17^{0}49' = 9.9786554$, mithin

$10 - \log \cos 17^{0}49' = 0.0213446$, $\varDelta = 6.77$

$\log [10 - \log \cos 17^{0}49') = 0.3292880 - 2 \quad \varepsilon = 137.7$

hiezu addirt 0.3622157 wird 0.6915037 — 2

0.6915037—2 $\qquad \log m' = 0.8012001$

*) Die Grössen δ und ε ergeben sich so: Wenn man Tafeln mit 7 Dezimalstellen wie die Vega'schen gebraucht, so findet man, weil δ und ε die Proportionaltheile zu 48 und 6.77 vorstellen, beim Aufschlagen des $\log a$ in der Spalte der Proportionaltheile $\delta = 56 + 11.2 = 67.2$ und beim Aufschlagen des $\log (10 - \log \cos 17^{0}49')$ die Zahl $\varepsilon = 122 + 14.3 + 1.4 = 137.7$

Zieht man nun von $\log m' = 0.8012001$
$\log m = 0.8010085$ ab,

so folgt $D = 1916$

Multiplicirt man $\varDelta = 6.77$ mit $M = 0.434$ und dividirt das Produkt mit $n = 0.0213$ so ergibt sich $\frac{M\varDelta}{n} = 137.9$ mithin $\frac{M\varDelta}{n} - \delta = 70.7$, daher $z = \frac{1916}{70.7} = 27''1$, oder aber man findet $\varepsilon - \delta = 70.6$ und $z = \frac{1916}{70.6} = 27''.1$; es ist sonach $a = 17^0 49' 27''$

Die Formel 22) gibt sofort den Parameter

$$p = \frac{d}{a}$$

wo a Bogenlänge bedeutet. Im letzten Beispiele hat man

$$\log d = 2.5413712 \quad , a = 0.3110903$$
$$\log a = 0.4928865 - 1$$
$$\log p = 3.0484847 \qquad p = 1118.111$$

§. 12.

Wir wollen nun noch den Krümmungshalbmesser und die Lage des Krümmungsmittelpunktes für einen beliebigen Punkt der gleichgespannten Kettenlinie aufsuchen. Bezeichnet man zu diesem Ende den erstern mit R, und die Koordinaten des letzteren mit g, h, so hat man nach bekannten Formeln (A. F. 523 und 525)

$$R = \frac{ds^3}{d^2y.dx}, \quad g = x - \frac{R\,dy}{ds}, \quad h = y + \frac{R\,dx}{ds}$$

Durch Differentiirung der Gleichungen 15) und 16) findet man $dx = p\,dv$, $dy = p\,d\lambda\,sec\,v = p\,dv\,.\,tg\,v$ mithin

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = p\,dv\sqrt{(1 + tg^2v)} = p\,dv\,.\,sec\,v$$

ferner ist $d^2y = p\,dv^2.\,sec^2v$

mit diesen Werthen ergibt sich 25) $R = p\,sec\,v$ und

26) $g = x - p\,tg\,v, \quad h = y + p$

wo man statt v auch $\frac{x}{p}$ setzen kann, um die Grössen R, g, h durch x auszudrücken.

Für $v = o$ folgt $R = p$, $g = o$, $h = 2p$, d. i. der Krümmungsmittelpunkt E des Scheitels befindet sich auf der Ordinatenaxe in einem Abstande p vom Scheitel der Kurve: ferner ist für $v = 90^0$, $R = \infty$, $g = -\infty$, $h = \infty$ d. i. die beiden unendlichen Aeste der gleichgespannten Kettenlinie nähern sich immer mehr und mehr einer geraden Linie, übereinstimmend mit §. 7: während ihre Evolute im Punkte E (fig. 4) anfängt, und sich von da an beiderseits der Ordinatenaxe in zwei unendlichen Aesten erstreckt.

Setzt man in der Formel 18) $h = 1$, so wird

$$T = p\, sec \frac{x}{p} = p\, sec\, v = R$$

mithin gibt die Tafel II. in der mit T bezeichneten Spalte zugleich die Krümmungshalbmesser einzelner Punkte der gleichgespannten Kettenlinie.

II. Die Kettenbrückenlinie.

§. 13.

Unter der Voraussetzung, dass das Gewicht der Tragketten sammt dem Gewichte der Tragstangen und der Fahrbahn zu einer einzigen horizontalen Belastung vereinigt wird, lässt sich die Gleichung der Kettenbrückenlinie so finden:

Seien A, B (fig. 4) die Aufhängepunkte C der Scheitel der Kurve AMB, $CD = p$ ihr Parameter, und die durch C gezogene Vertikale CX die Abszissenaxe, die Tangente des Scheitels CY ihre Ordinatenaxe, $A' B'$ sei die Fahrbahn. Man bezeichne mit h das Gewicht der Längeneinheit z. B. das Gewicht der Länge eines Fusses der Ketten und Fahrbahn zu einer Last vereinigt, oder das Gewicht eines Kurrentfusses beider Grössen, also mit ph die hieraus entstehende Spannung im Scheitel und mit T die Spannung im Punkte M, für welchen die Koordinaten $CP = x$, $MP = y$ sind: sei ferner $AE = d$ die halbe Spannweite, und $CE = t$ der Pfeil, und der Stellungswinkel des Punktes M nämlich $PMT = v$, so hat man wie oben §. 3.

$$T\, sin\, v = h\, y \quad , \quad T\, cos\, v = p\, h \qquad \alpha)$$

weil das Gewicht des Kettenbogens MC und des innerhalb desselben befindlichen Theiles FG der Fahrbahn als eine horizontale Last FG vereinigt angesehen wird: nun ist $FG = PM = y$ sonach das auf den Bogen MC zu vertheilende Gewicht $= hy$. Die Summe der Quadrate der Gleichungen α) gibt sofort

$$T^2 = h^2 (p^2 + y^2), \text{ mithin}$$
$$T = h \sqrt{(p^2 + y^2)} \qquad \beta)$$

dagegen liefert der Quotient der Gleichungen α)

$$tg\, v = \frac{y}{p} \qquad \gamma)$$

Man hat aber auch (A. F. 480) $tg\, MTP = \frac{dy}{dx}$, und weil die Winkel MTP und v sich zu 90° ergänzen, so ist sofort

$$tg\, v = \frac{y}{p} = \frac{dx}{dy}, \text{ diess gibt}$$
$$y\, dy = p\, dx, \text{ und integrirt}$$
$$27)\ y^2 = 2\, p\, x$$

die Konstante ist null, weil x mit y zugleich verschwindet.

Um p zu finden, hat man für die Spannweite $2\,d$ und den Pfeil t, wenn man in der Gleichung 27) d statt y und t statt x setzt

$d^2 = 2pt$, woraus $p = \frac{d^2}{2t}$ folgt; es ist sonach unter der gemachten Annahme die Gleichung der Kettenbrückenlinie

$$28)\ y^2 = \frac{d^2}{t} \cdot x \quad \text{d. i.}$$

die Kurve ist eine Parabel, deren Parameter zum Pfeil und zur halben Spannweite die dritte geometrische Proportionalzahl bildet.

§. 14.

Um aus der Spannweite AB (fig. 5) und dem Pfeil EC beliebig viele Punkte der zugehörigen Parabel durch eine leichte Verzeichnung zu finden, konstruire man zuerst das Rechteck $ADD'B$, schneide sowohl AE als AD in irgend eine und dieselbe Zahl gleicher Theile z. B. in 5 gleiche Theile: die Theilungspunkte der ersteren Geraden mögen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die der anderen 1, 2, 3, 4, sein: ziehe dann durch den Punkt C, wo der Scheitel der Parabel zu stehen kommt, die Sekanten $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, ferner durch die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die zur Axe CE parallelen Geraden αa, βb, γc, δd, bis diese jene Sekanten in den Punkbel a, b, c, d treffen; so gehören die so bestimmten Punkte einer Parabel an, deren Scheitel in C, und Axe CE ist, und deren beide Aeste beziehungsweise durch die Punkte A und B gehen. Der Beweis ist leicht einzusehen: gesetzt für einen beliebigen Theilungspunkt β in der Geraden AE und den gleichnamigen Theilungspunkt 2 in der Geraden AD gehöre der Punkt b, dessen Abszisse $CQ = x$, und Ordinate $bQ = y$ angenommen wird, so ist $\beta E = \frac{1}{n} AE = y$, und $D2 = \frac{1}{n} AD$, mithin verhält sich $y : AE = D2 : AD$, diess gibt $y = \frac{AE \cdot D2}{AD}$, nun ist in den ähnlichen Dreiecken $C\beta' b$ und $CD2$

$$\left.\begin{matrix} C\beta' \\ y \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} \beta' b \\ x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} CD \\ AE \end{matrix}\right\} : D2, \text{ daher } y = \frac{x \cdot AE}{D2}$$

das Produkt dieser 2 Gleichungen liefert sofort

$$y^2 = \frac{AE^2 \cdot x}{AD} = \frac{d^2 \cdot x}{t} \text{ übereinstimmend mit der Formel 28).}$$

§. 15.

Die eben angegebene Methode zur Verzeichnung der Parabel dürfte um so mehr vor der gewöhnlichen einen Vorzug behaupten, als sie auch auf die anderen Kegelschnittslinien anwendbar ist. Stellen wir zu dem Ende die Aufgabe so: In einem Rechtecke $AC'D'E'$ (fig. 6) werden die zwei anstossenden Seiten $C'D'$ und $E'D'$ in den Punkten 2 und β beziehungsweise so getheilt, dass wenn $C'2 = \frac{1}{n} = C'D'$, auch $E'\beta = \frac{1}{n} E'D'$ sei, man führt aus A, wo der Scheitel der Kurve sein soll, eine Sekante $A\beta$, und aus einem in der Verlängerung der Seite AC' gegebenen Punkte B durch den Theilungspunkt 2 die Gerade $B2M$, welche die Sekante im Punkte M trifft, man frägt nach dem geometrischen Orte des Punktes M? Zieht man die zu den Seiten des Rechteckes parallelen Geraden MP, MQ, und bezeichnet AB mit $2a$, AC' mit g, $C'D'$ mit h, setzt $AP = x$, $PM = y$; so geben die ähnlichen Dreiecke AQM, $AE'\beta$

$$\begin{Bmatrix} AQ \\ y \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} QM \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AE' \\ h \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} E'\beta \\ \frac{1}{n}g \end{Bmatrix}, \text{ mithin ist } y = \frac{nxh}{g}$$

und die ähnlichen Dreiecke BPM, $BC'2$

$$\begin{Bmatrix} PM \\ y \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} BP \\ 2a-x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C'2 \\ \frac{1}{n}h \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} BC' \\ 2a-g \end{Bmatrix}, \text{ daher } y = \frac{(2a-x)\,h}{n(2a-g)}$$

und das Produkt beider Gleichungen liefert

$$y^2 = \frac{(2a-x)\,x\,h^2}{(2a-g)\,g}, \text{ oder}$$

$$y^2 : h^2 = (2a-x)\,x : (2a-g)\,g$$

welches eine bekannte Eigenschaft der durch die Punkte A, M, D' gezogenen Ellipse ist.

Theilt man also die anstossenden Seiten $C'D'$ und $E'D'$ des gegebenen Rechteckes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, führt aus A die Sekanten $A\alpha$, $A\beta$ und aus B durch die Theilungspunkte 1, 2 die Geraden $B\alpha$, BM, so sind α, M Punkte des elliptischen Bogens AD', zu welchem AB als grosse Axe gehört. Ist aber der Punkt C' in C, oder ist AC' die halbe grosse Axe, so geht $C'D'$ in CD die halbe kleine Axe der Ellipse über, und man erhält bei der vorigen Konstruktion, indem man nämlich im Rechtecke $ACDE$, die anstossenden Seiten ED, DC in den Punkten α', β', γ', δ', und 1, 2, 3, 4 beziehungsweise in gleich viele gleiche Theile schneidet, aus A die Sekanten $A\alpha'$, $A\beta'$, $A\gamma'$, $A\delta'$ und aus B durch die Theilungspunkte 1, 2, 3, 4 die Geraden $B\alpha$, BM, BD' und Bd zieht, den elliptischen Quadranten AMD, und bei Wiederholung derselben im Rechtecke $BCDF$, ergibt sich auch der elliptische Quadrant BD, sonach die halbe Ellipse ADB.

Lässt man endlich im Rechtecke $AECD$ (fig. 7) den Punkt B in der Verlängerung von AC so sein, dass A zwischen C und B fällt, so erhält man durch dieselbe Konstruktion eine Hyperbel $A\,d\,c\,b\,a\,D$, deren Scheitel in A und deren Axe $A\,B$ ist. Denn zieht man $b\,P$ zu AE und $b\,Q$ zu AC parallel, setzt $AC = g$, $CD = h$, $AP = x$, $Pb = y$, $AB = 2a$ so erhält man erstlich

$$\begin{Bmatrix} AQ \\ y \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} Qb \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AE \\ h \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} E2 \\ \frac{1}{n}g \end{Bmatrix}; \text{ demnach } y = \frac{nxh}{g}$$

hierauf hat man $\begin{Bmatrix} BP \\ 2a+x \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} Pb \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} BC \\ 2a+g \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} C\beta \\ \frac{1}{n}h \end{Bmatrix}$, und $y = \dfrac{(2a+x)\,h}{n(2a+g)}$

daher ist das Produkt dieser Gleichungen

$$y^2 = \frac{(2a+x)\,x\,h^2}{(2a+g)\,g}.$$

Wird der Punkt B unendlich entfernt angenommen, so werden die von diesem Punkte durch die Theilungspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, gezogenen Geraden $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$, ... einander parallel, und die Kurve geht in eine Parabel über, wie die in §. 14 gegebene Konstruktion es erfordert.

Es wird kaum nothwendig sein zu bemerken, dass wenn im Rechtecke die anstossenden Seiten gleich sind, bei dieser Konstruktion in (fig. 6) ein Kreis und in (fig. 7) eine gleichseitige Hyperbel zum Vorschein kommt: ferner, dass wenn dieselbe Methode auf ein Parallelogramm überhaupt in Anwendung gebracht wird, man dieselben Kegelschnittslinien, allein auf ihre Durchmesser bezogen, erhält.

§. 16.

Nach dieser Abschweifung kehren wir wieder zur Kettenbrückenlinie, als Parabel betrachtet zurück, und suchen die Bogenlänge der Parabel aus dem Stellungswinkel v eines Punktes M (fig. 4) und dem Parameter p.

Die Polargleichung der Parabel ist nach (A. F. 478)

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos\alpha} \qquad \alpha)$$

wobei r den Radiusvektor HM, und α den Neigungswinkel MHC desselben gegen die Axe CX vorstellt, den Brennpunkt der Parabel in H angenommen. Zieht man an den Punkt M die Tangente MT, welche den Stellungswinkel $TMP = v$ mit dessen Ordinate bildet; so ist erstlich zu ermitteln, wie v von α abhängt. Bekanntlich schliesst jede der Axe parallele Gerade MQ, und der an denselben Punkt gezogene Radiusvektor MH mit der Tangente Tt gleiche Winkel ein, es ist sonach $tMQ = HMT = MTP$, daher der äussere Winkel im Dreiecke MHT, nämlich

$MHP = 2MTP$, und also auch sein Nebenwinkel

$MHT = 180^0 - 2\,MTP = 180^0 - 2\;(90^0 - PMT)$, diess gibt

$$\alpha = 2v, \text{ und } v = \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \beta)$$

Ferner hat man nach (A. F. 538) die Bogenlänge bei Polarkoordinaten

$$s = \int d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\right)} \qquad \gamma)$$

differentiirt man aber den Ausdruck α), so folgt

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\frac{1}{2}p\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2 = \tfrac{1}{4}p^2\frac{[\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2]}{(1+\cos\alpha)^4}, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\right)} = \frac{\frac{1}{2}p}{(1+\cos\alpha)^2}\sqrt{(2+\cos\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}p\sqrt{2}}{(1+\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

setzt man weiter $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ statt $\sqrt{(1+\cos\alpha)}$, so ergibt sich

$$\sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\right)} = \frac{\frac{1}{4}p}{\cos^3\frac{1}{2}\alpha}\text{: hiermit entsteht aus Formel } \gamma)$$

$s = \frac{1}{4}p\int\frac{d\alpha}{\cos^3\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}p\int\frac{d\frac{1}{2}\alpha}{\cos^3\frac{1}{2}\alpha}$, ein Ausdruck, der nach (A. F. 378), wenn dort $m = o$, $n = -3$ gesetzt wird, sofort

$$s = \tfrac{1}{4}p\;[tg\tfrac{1}{2}\alpha\sec\tfrac{1}{2}\alpha + \lambda\,tg\;(45^0 + \tfrac{1}{4}\alpha)] \text{ gibt,}$$

und wenn man hierin v statt $\frac{1}{2}\alpha$ substituirt, erhält man

$$29)\quad s = \tfrac{1}{4}p\;[tg\,v\cdot\sec v + \lambda\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}v)]$$

Ist aber s' die dem Stellungswinkel v zugehörige Bogenlänge einer gleichgespannten Kettenlinie, so ist nach Formel 14) $s' = p\,\lambda\,tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)$, hierdurch wird

$$30)\quad s = \tfrac{1}{4}\;(p\,tg\,v\sec v + s')$$

und man kann mit Hülfe der I. Tafel die Bogenlängen der Parabel für jeden Stellungswinkel bequem berechnen.

§. 17.

Bei den Kettenbrücken ist die Last der Ketten bei weitem bedeutender, als die Gewichte der Tragstangen, der Fahrbahn, und der zufälligen Belastung der Brücke zusammen genommen; man würde daher genauer die letztere Last mit der ersteren zu einem einzigen Gewichte nach der Richtung der Kettenbrückenlinie vereinigen, und man erhielte die gleichgespannte Kettenlinie zu einem mehr angenäherten Ausdruck der Kettenbrückenlinie, als es die Parabel war. Noch genauer wird man jedoch die Kettenbrückenlinie bestimmen, wenn jede der beiden Lasten nach ihren Richtungen abgesondert in Rechnung gebracht wird. Nun wirkt das Gewicht der Tragketten in der Richtung der Tangente einzelner Punkte der Kettenbrückenlinie, das Gewicht der Fahrbahn, der Tragstangen und der zufälligen Belastung kann hingegen als eine besondere horizontale Belastung der Tragketten angesehen werden, und es ergibt sich bei dieser Absonderung beider Lasten die Gleichung der Kettenbrückenlinie so:

Sei b der Querschnitt der Ketten im untersten Punkte oder dem Scheitel der Kurve, b' der Querschnitt der prismatischen Fahrbahn, sei ferner h das Gewicht der Längeneinheit der Ketten, h' das der Brückenbahn mit Einschluss der Tragstangen, die Abszissenaxe horizontal und die übrigen Grössen wie im §. 13 angenommen; so lässt sich die Spannung T eines Punktes M (fig. 8) in eine horizontale Kraft $T\cos v$ und in eine vertikale Kraft $T\sin v$ zerlegen, jene ist bei allen Punkten der Kettenbrückenlinie gleich, und der Formel α) im §. 13 gemäss
$$T\cos v = p\ (bh + b'h') \qquad \alpha)$$
weil hier das Gewicht $bh + b'h'$ auf die Einheit der Länge im Scheitel der Kurve zu vertheilen ist: hieraus folgt
$$T = \frac{p\,(bh + b'h')}{\cos v} \qquad \beta)$$
Ist ferner u der Querschnitt der Tragketten im Punkte M, b derselbe Querschnitt im Scheitel der Kurve, so hat man, da diese den Spannungen proportional sein müssen
$$u : b = T : p\,(bh + b'h') = 1 : \cos v$$
demnach ist $u = \dfrac{b}{\cos v} = b\sec v \qquad \gamma)$

und das Gewicht des Bogens CM, welcher als die Summe aller Kettenelemente zwischen C und M, deren Gewicht einzeln $hu\,.\,ds$ bedeutet, betrachtet werden muss, ist $h\int u\,ds$, man hat also wegen Formel γ)

das Gewicht des Bogens $CM = bh\int ds\sec v = bh\int dx\sec^2 v$

hingegen ist das Gewicht desjenigen Theiles FC der Fahrbahn $A'B'$, welcher vom Bogen MC gestützt wird $= b'h'x$, man hat daher

$T\sin v = b'h'x + bh\int dx\sec^2 v = b'h'x + bh\int dx\,(1 + tg^2 v)$, während

$T\cos v = p\ (bh + b'h')$ ist: durch die Division dieser zwei Ausdrücke erhält man
$$tg\,v = \frac{b'h'x + bh\int dx\ (1 + tg^2 v)}{p\,(bh + b'h')}$$
woraus durch die Differentiirung folgt

$$d\,tg\,v = \frac{b'h'dx + b\,h\,d\,x\,(1 + tg^2 v)}{p\,(bh + b'h')}$$

Man findet hieraus die Differentialgleichung der Kettenbrückenlinie

$$dx = \frac{d\,tg\,v\,.\,p\,(bh + b'h')}{bh + b'h' + bh\,tg^2 v},$$ oder Zähler und Nenner mit $bh + b'h'$ dividirend, und Kürze halber $\frac{b\,h}{b\,h + b'h'} = k$ setzend wird 31) $dx = \frac{p\,.\,d\,tg\,v}{1 + k\,tg^2 v}$

Diese Grösse k, welche wie man sieht, von dem Gewichte der Längeneinheit der Tragketten im Scheitel der Kurve und von dem Gewichte der Längeneinheit der Fahrbahn und der zufälligen Belastung abhängt, hat auf die Beschaffenheit der Kettenbrückenlinie einen wichtigen Einfluss; ich will sie daher den Modulus der Kettenbrücken nennen. Ihr Werth ist bei der gleichgespannten Kettenlinie, wo $b'h'$ verschwindet, die Einheit, und weil bei Kettenbrücken stets $bh > b'h'$, also $bh + b'h' < 2\,bh$, sonach $k = \frac{b\,h}{bh + b'h'} > \frac{1}{2}$ ist, so folgt, dass der Modulus der Kettenbrücken immer eine zwischen 0.5 und 1 liegende Zahl bedeutet.

§. 18.

Integrirt man nach (A. F. 328) die letztgefundene Gleichung 31), so ergibt sich

$$x = \frac{p}{\sqrt{k}}\,arc\,tg\,(tg\,v\sqrt{k}) \qquad \alpha)$$

setzt man Kürze halber den Hülfswinkel

$w = arc\;tg\;(tg\,v\sqrt{k})$, daher umgekehrt

32) $tg\,w = tg\,v\,.\sqrt{k}$, so wird aus α)

33) $x = \frac{p}{\sqrt{k}}\,.\,w$

Diese Abhängigkeit der Grössen x, w, v lässt sich durch eine leichte geometrische Konstruktion nachweisen. Verlängert man die Ordinatenaxe EC (fig. 8) der Kettenbrückenlinie bis D', so dass $CD' = \frac{p}{\sqrt{k}}$ wird, und beschreibt aus D' mit den Halbmessern $CD' = \frac{p}{\sqrt{k}}$ und $D'G = p$ die konzentrischen Halbkreise HCH' und IGI', macht den Bogen des äusseren Kreises $CN = DP = x$, zieht den Halbmesser $D'N$ und verlängert denselben bis zum Zusammentreffen mit der Tangente CF in Q, führt hierauf die Tangente $GR = CQ$ des innern Kreises, und verbindet R mit D', so ist $ND'C = w$, $RD'C = v$.

Ferner hat man, da $tg v = \frac{dy}{dx}$ ist

$dy = dx\,.\,tg\,v$ und wegen Formel 31)

$$dy = \frac{p\,.\,tg v\,.\,d\,tg\,v}{1 + k\,tg^2 v} \qquad \beta)$$

dessen Integrale nach (A. F. 299)

$$y = \frac{p}{2k}\lambda(1 + k\,tg^2 v) + p = \frac{p}{k}\lambda\sqrt{(1 + k\,tg^2 v)} + p \text{ ist.}$$

Durch Einführung des Hülfswinkels w aus der Gleichung 32); erhält man hieraus

$$34)\; y = \frac{p}{k}\lambda\, sec\; w + p$$

Setzt man hierin noch statt w dessen Werth aus 32) so ergibt sich die Koordinatengleichung der Kettenbrückenlinie

$$35)\; y = \frac{p}{k}\lambda\, sec \frac{x\sqrt{k}}{p} + p$$

§. 19.

Von dieser krummen Linie lassen sich alle jene Folgerungen machen, welche schon §. 7 für die gleichgespannte Kettenlinie angegeben wurden, mit der Beschränkung, dass schon für Abszissen $\frac{1}{2}\frac{p\pi}{\sqrt{k}}$ die Ordinaten unendlich werden, mithin mit der Assymptote der Kurve übereinfallen, und dass nur jene Kettenbrückenlinien einander ähnlich sind, bei denen der Modulus denselben Werth hat.

Insbesondere erhält man für $k = 1$ aus 35) die Gleichung 17) der gleichgespannten Kettenlinie.

Die Rechnung mit diesen Formeln wird gerade so geführt, wie dieses für die Formeln der gleichgespannten Kettenlinie §. 8 gezeigt wurde. Man wird daher für einen gegebenen Stellungswinkel v und den Modulus k, den Hülfswinkel w nach Formel 32) suchen: hieraus ergibt sich schon die Abszisse x ganz einfach durch die Formel 33), und wenn man die Formel 34) wie in §. 8 umwandelt, so erhält man

$$36)\; log\,(y - p) = 2.3622157 + log\,(10 - log\,cos\,w)$$

oder aber, falls zu einer gegebenen Abszisse die zugehörige Ordinate gesucht wird, berechnet man erstlich aus der Gleichung 33) den Hülfswinkel $w = \frac{x\sqrt{k}}{p}$, und hiermit findet man aus der Gleichung 36) den Werth von $y - p$; es können daher die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kettenbrückenlinie mit aller Schärfe, welche die vorhandenen Logarithmentafeln gestatten, gefunden werden.

Die Spannung T ergibt sich aus der Formel β) im §. 17, wenn man dort den Werth von $bh + b'h'$ durch k ausdrückt, 37) $T = \frac{p\,b\,h}{k}\, sec\, v$

§. 20.

Nachstehende Tafel gibt die den horizontalen Abszissen von 1 bis 40 zugehörigen Ordinaten oder eigentlich die Längen der Tragstangen einer Kettenbrücke, deren Fahrbahn den Scheitel der Kurve berühret, nebst ihren Logarithmen für den Modulus 0.55, 0.60, 0.65 und 0.70.

IV. Tafel.

Koordinaten der Kettenbrückenlinie und ihre Logarithmen, für $p = 100$.

	Werthe von $y - p$.				Logarithmen derselben.			
x	0.55	0.60	0.65	0.70	0.55	0.60	0.65	0.70
1	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.69897—3	0.69897—3	0.69897—3	0.69897—3
2	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.30103—2	0.30103—2	0.30103—2	0.30103—2
3	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.65321—2	0.65321—2	0.65321—2	0.65321—2
4	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.90314—2	0.90314—2	0.90314—2	0.90314—2
5	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.09700—1	0.09701—1	0.09703—1	0.09705—1
6	0.1801	0.1801	0.1801	0.1801	0.25543—1	0.25544—1	0.25545—1	0.25547—1
7	0.2451	0.2451	0.2451	0.2452	0.38935—1	0.38938—1	0.38941—1	0.38945—1
8	0.3202	0.3202	0.3202	0.3202	0.50540—1	0.50542—1	0.50544—1	0.50547—1
9	0.4053	0.4053	0.4053	0.4054	0.60779—1	0.60781—1	0.60783—1	0.60785—1
10	0.5005	0.5005	0.5005	0.5006	0.69937—1	0.69940—1	0.69943—1	0.69946—1
11	0.6057	0.6057	0.6058	0.6058	0.78226—1	0.78229—1	0.78232—1	0.78236—1
12	0.7210	0.7210	0.7211	0.7212	0.85790—1	0.85795—1	0.85801—1	0.85807—1
13	0.8464	0.8464	0.8465	0.8467	0.92752—1	0.92758—1	0.92764—1	0.92771—1
14	0.9817	0.9819	0.9821	0.9822	0.99200—1	0.99207—1	0.99215—1	0.99222—1
15	1.1273	1.1275	1.1277	1.1279	0.05204	0.05113	0.05212	0.05229
16	1.2830	1.2833	1.2836	1.2839	0.10823	0.10833	0.10843	0.10852
17	1.4489	1.4492	1.4496	1.4499	0.16104	0.16113	0.16125	0.16134
18	1.6249	1.6253	1.6257	1.6216	0.21038	0.21094	0.21104	0.21116
19	1.8110	1.8115	1.8121	1.8126	0.25792	0.25804	0.25818	0.25831
20	2.0074	2.0080	2.0087	2.0094	0.30263	0.30277	0.30292	0.30306
21	2.2139	2.2148	2.2156	2.2165	0.34116	0.34533	0.34549	0.34566
22	2.4308	2.4318	2.4328	2.4338	0.38575	0.38593	0.38611	0.38628
23	2.6580	2.6591	2.6603	2.6615	0.42455	0.42474	0.42493	0.42512
24	2.8954	2.8967	2.8981	2.8995	0.46171	0.46191	0.46211	0.46232
25	3.1431	3.1447	3.1464	3.1480	0.49736	0.49759	0.49781	0.49803
26	3.4012	3.4031	3.4051	3.4070	0.53163	0.53188	0.53213	0.53237
27	3.6696	3.6718	3.6741	3.6764	0.56462	0.56488	0.56515	0.56542
28	3.9485	3.9511	3.9537	3.9564	0.59643	0.59672	0.59700	0.59730
29	4.2378	4.2408	4.2438	4.2469	0.62714	0.62745	0.62775	0.62807
30	4.5376	4.5411	4.5446	4.5481	0.65683	0.65716	0.65750	0.65783
31	4.8480	4.8519	4.8559	4.8599	0.68556	0.68591	0.68627	0.68662
32	5.1688	5.1733	5.1778	5.1823	0.71339	0.71377	0.71415	0.71453
33	5.5003	5.5054	5.5105	5.5156	0.74039	0.74079	0.74119	0.74159
34	5.8322	5.8480	5.8538	5.8596	0.76583	0.76701	0.76744	0.76787
35	6.1949	6.2015	6.2080	6.2146	0.79203	0.79249	0.79295	0.79341
36	6.5584	6.5657	6.5731	6.5804	0.81680	0.81728	0.81777	0.81825
37	6.9326	6.9408	6.9490	6.9572	0.84090	0.84141	0.84192	0.84243
38	7.3176	7.3267	7.3358	7.3449	0.86437	0.86491	0.86545	0.86599
39	7.7134	7.7236	7.7338	7.7439	0.88725	0.88781	0.88839	0.88896
40	8.1202	8.1314	8.1427	8.1539	0.90957	0.91017	0.91077	0.91137

§. 21.

Den Parameter der Kettenbrückenlinie zu bestimmen, setze man die halbe Spannweite $= d$, den Pfeil $= t$ und den Stellungswinkel des Aufhängepunktes $= a$, und substituire diese Werthe beziehungsweise statt x, $y - p$ und v in den Gleichungen 32), 33) und 34), so erhält man den Hülfswinkel c aus der Gleichung

38) $tg\, a \sqrt{k} = tg\, c$, ferner

39) $d = \dfrac{p}{\sqrt{k}}\, c$ und

$$t = \frac{p}{k} \lambda\, sec\, c$$

Hieraus findet man $m'' = \dfrac{d}{t}$ setzend

40) $m'' = \sqrt{k} \,.\, \dfrac{c}{\lambda\, sec\, c}$

Hält man diesen Werth gegen die Gleichung 23), so hat man sofort, indem man dort c mit a vertauscht

41) $m = \dfrac{m''}{\sqrt{k}}$

man hat daher nur aus dem gegebenen m'' den Werth von m nach der Gleichung 41) zu suchen, und nach der III. Tafel und dem im §. 11 angegebenen Verfahren zu dem so bestimmten Werthe von m das zugehörige a zu berechnen, welches sofort der gesuchte Werth von c ist. Nun ergibt sich der Parameter mittelst der Formel 39)

42) $p = \dfrac{d\sqrt{k}}{c}$

B e i s p i e l. Sei der Modulus einer Kettenbrücke $k = 0.617$, die Spannweite $2d = 815'$, der Pfeil $t = 50'$ den Parameter zu finden?

$$\begin{aligned}
log\ 2\,d &= 2.9111576 \\
log\ 2\,t &= 2.0000000 \\
\hline
log\ m'' &= 0.9111576 \\
log \sqrt{k} &= 0.8951426-1 \\
\hline
log\ m &= 1.0160150 \quad \text{demnach} \\
m &= 10.375
\end{aligned}$$

Hiezu findet man aus III. Tafel $c = 10^0 58'$

ferner ist $arc.\, 10^0 58' = 0.1914044$

$$\begin{aligned}
log\ cos\ c &= 9.9919956 \\
10 - l\ cos\ c &= 0.0080044 \\
\hline
log\,(10 - l\ cos\ c) &= 0.9033288-3 \\
\text{Konstante} &= 0.3622157 \\
\hline
log\,M(10 - l\ cos\ c) &= 0.2655445-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
log\ c &= 0.2819519-1 \\
log\,M(10 - l\ cos\ c) &= 0.2655445-2 \\
\hline
log\ m' &= 1.0164074 \\
log\ m &= 1.0160150 \\
\hline
D &= \quad 3924
\end{aligned}$$

man findet $\delta = 109.2$, $\Delta = 4.08$, $\varepsilon = 22.4$

daher $z = \dfrac{D}{\delta - \varepsilon} = 45''.2$, und $c = 10^0 58' 45''.2$

Endlich ist $arc.c = 0.191623$, $log\,c = 0.2824467 - 1$

$log\ d = 2.6101276$

$log\sqrt{k} = 0.8951426$, $log\ d\sqrt{k} = 2.5052702$

$log\ d\sqrt{k} = 2.5052702$ daher $log\,p = 3.2228235$, und $p = 1670.4$

§. 22.

Wir wollen nun zeigen, wiefern die im §. 13 betrachtete Parabel als ein Näherungsausdruck der Kettenbrückenlinie gelten kann: gibt es andere Kurven, die sich derselben noch mehr nähern, als jene, und welchen Fehlern ist man ausgesetzt, wenn man eine derselben in der Anwendung der Kettenbrückenlinie substituirt?

Verwechseln wir zu diesem Behufe die Axen, und nehmen den Scheitel C (fig. 8) zum Anfangspunkt der Koordinaten, so hat man in der Formel 31) und in der Formel β) des §. 18 x mit y zu vertauschen; hiedurch wird

$$dy = \frac{p\,d\tau}{1 + k\tau^2} \text{ und } dx = \frac{p\tau.d\tau}{1 + k\tau^2}$$

wo Kürze halber $tg\,v = \tau$ angenommen wird.

Nun ist bei Entwickelung durch die Division

$$\frac{1}{1 + k\tau^2} = 1 - k\tau^2 + k^2\tau^4 - k^3\tau^6 + k^4\tau^8 - \ldots$$

sonach

$$43)\ dy = p\,d\tau\,(1 - k\tau^2 + k^2\tau^4 - k^3\tau^6 + k^4\tau^8 - \ldots)$$

und wenn man diesen Ausdruck integrirt, und die Glieder, welche die zehnte und die höheren Potenzen der Grösse τ enthalten, ausser Acht lässt, erhält man

$$44)\ y = p\tau\,(1 - \tfrac{1}{3}k\tau^2 + \tfrac{1}{5}k^2\tau^4 - \tfrac{1}{7}k^3\tau^6 + \tfrac{1}{9}k^4\tau^8)$$

Ferner haben wir

$$dx = p\tau\,d\tau\,(1 - k\tau^2 + k^2\tau^4 - k^3\tau^6 + k^4\tau^8 - \ldots)$$

woraus bei derselben Einschränkung durch die Integration folgt

$$45)\ x = \tfrac{1}{2}p\tau^2(1 - \tfrac{1}{2}k\tau^2 + \tfrac{1}{3}k^2\tau^4 - \tfrac{1}{4}k^3\tau^6 + \tfrac{1}{5}k^4\tau^8)$$

Bleibt man nun bei dem ersten Gliede der Reihen 44) und 45) stehen, so ergibt sich aus 44) $y^2 = p^2\tau^2$ und aus 45) $2px = p^2\tau^2$, demnach die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

woraus hervorgeht, dass die Näherungskurve der Kettenbrückenlinie eine Parabel sei, welche mit jener den Scheitel und die Abszissenaxe gemein hat: die folgenden Glieder der vorhin genannten Reihen geben demnach die Abweichungen der Kettenbrückenlinie von der Parabel, die man so bestimmen kann:

Wird die Gleichung 44) zum Quadrat erhoben und mit der Gleichung 45) dividirt, so erhält man nach einigen Reductionen

$$\frac{y^2}{2px} = \frac{1 - \frac{2}{3}k\tau^2 + \frac{23}{45}k^2\tau^4 - \frac{44}{105}k^3\tau^6 + \frac{563}{1575}k^4\tau^8}{1 - \frac{1}{2}k\tau^2 + \frac{1}{3}k^2\tau^4 - \frac{1}{4}k^3\tau^6 + \frac{1}{5}k^4\tau^8}$$

setzt man diesen Quotienten der Reihe

$$1 + A\tau^2 + B\tau^4 + C\tau^6 + D\tau^8$$

gleich, und entwickelt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Grössen A, B, C, D, so findet man

$$A = -\tfrac{1}{6}k, \quad B = \tfrac{17}{180}k^2, \quad C = -\tfrac{167}{2520}k^3, \quad D = \tfrac{3869}{75600}k^4$$

hiedurch wird

$$46)\quad \frac{y^2}{2px} = 1 - \tfrac{1}{6}k\tau^2 + \tfrac{17}{180}k^2\tau^4 - \tfrac{167}{2520}k^3\tau^6 + \tfrac{3869}{75600}k^4\tau^8$$

Die Formel 45) kann man auch so schreiben.

$$47)\quad x = \tfrac{1}{2}p\,(\tau^2 - \tfrac{1}{2}k\tau^4 + \tfrac{1}{3}k^2\tau^6 - \tfrac{1}{4}k^3\tau^8 + \tfrac{1}{5}k^4\tau^{10})$$

setzen wir, um umgekehrt τ durch x auszudrücken,

$$\left.\begin{aligned} &\tau^2 = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 \\ \text{so ergibt sich } &\tau^4 = a^2x^2 + 2\,ab\,x^3 + (b^2 + 2\,ac)\,x^4 + 2\,(bc + ad)\,x^5 \\ &\tau^6 = a^3x^3 + 3\,a^2b\,x^4 + 3\,(ab^2 + a^2c)\,x^5 \\ &\tau^8 = a^4x^4 + 4\,a^3b\,x^5, \quad \tau^{10} = a^5x^5 \end{aligned}\right\}\ \alpha)$$

man erhält so nach der Substitution dieser Werthe der Potenzen von τ in die Gleichung 47)

$$\frac{2x}{p} = ax + (b - \tfrac{1}{2}a^2k)\,x^2 + (c - abk + \tfrac{1}{3}a^3k^2)\,x^3 + (d - \tfrac{1}{2}b^2k - ack + a^2bk^2 - \tfrac{1}{4}a^4k^3)\,x^4$$
$$+ (e - bck - adk + ab^2k^2 + a^2ck^2 - a^3bk^3 + \tfrac{1}{5}a^5k^4)\,x^5$$

woraus sich die Gleichungen ergeben

$$a = \frac{2}{p}$$
$$b - \tfrac{1}{2}a^2k = o$$
$$c - abk + \tfrac{1}{3}a^3k^2 = o$$
$$d - \tfrac{1}{2}b^2k - ack + a^2bk^2 - \tfrac{1}{4}a^4k^3 = o$$
$$e - bck - adk + ab^2k^2 + a^2ck^2 - a^3bk^3 + \tfrac{1}{5}a^5k^4 = o$$

durch deren Auflösung erhalten wir

$$a = \frac{2}{p}, \quad b = \frac{2k}{p^2}, \quad c = \frac{4k^2}{3p^3}, \quad d = \frac{2k^3}{3p^4}, \quad e = \frac{4k^4}{15p^5}$$

mit diesen Werthen von a, b, c, d, e wird nun in den Gleichungen α)

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{2x}{p} + 2k\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \frac{4k^2}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \frac{2k^3}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^4 + \frac{4k^4}{15}\left(\frac{x}{p}\right)^5 \\ \tau^4 &= 4\left(\frac{x}{p}\right)^2 + 8k\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \tfrac{28}{3}k^2\left(\frac{x}{p}\right)^4 + \tfrac{8}{3}k^3\left(\frac{x}{p}\right)^5 \\ \tau^6 &= 8\left(\frac{x}{p}\right)^3 + 24k\left(\frac{x}{p}\right)^4 + 40k^2\left(\frac{x}{p}\right)^5 \\ \tau^8 &= 16\left(\frac{x}{p}\right)^4 + 64k\left(\frac{x}{p}\right)^5, \text{ und } \tau^{10} = 32\left(\frac{x}{p}\right)^5 \end{aligned}\right\}\ \beta)$$

Substituirt man nun die eben gefundenen Werthe der Potenzen von τ^2 in die Gleichung 46) und ordnet alles nach den Potenzen von x, so ergibt sich

$$48)\ y^2 = 2px\left[1 - \tfrac{1}{3}k\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{2k^2}{45}\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \frac{k^3}{315}\left(\frac{x}{p}\right)^3 - \frac{2k^4}{1575}\left(\frac{x}{p}\right)^4 - \frac{2k^5}{9345}\left(\frac{x}{p}\right)^5\right]$$

welcher Ausdruck, im Falle man die auf die zweite Potenz von $\frac{x}{p}$ folgenden Glieder weglässt, in

$$49)\ y^2 = 2px - \tfrac{2}{3}kx^2 \text{ übergeht.}$$

Hält man diesen Ausdruck gegen die Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen a, b

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

so findet man leicht $p = \frac{b^2}{a}$, $\frac{2}{3}k = \frac{b^2}{a^2}$, woraus sich ergibt

$$a = \frac{3p}{2k}, \text{ und } b = p\sqrt{\frac{3}{2k}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{6}{k}}$$

es ist also eine Ellipse, deren grosse Axe $\frac{3p}{k}$ vertikal, und kleine Axe $p\sqrt{\frac{6}{k}}$ horizontal wäre, diejenige Kurve, welche sich der Kettenbrückenlinie mehr nähert, als die Parabel.

§. 23.

Um diese Ellipse graphisch darzustellen, übertrage man nach einem verjüngten Masstabe die gegebene Grösse $\frac{3p}{2k}$ auf die vertikale Gerade AB (fig. 9) von A aus, wo der Scheitel der Kurve zu liegen kommt, gegen B hin, mache hierauf AC gleich dem gegebenen Pfeile der Kettenbrückenlinie, ziehe durch C die horizontale Gerade ECD, und schneide auf derselben beiderseits des Punktes C die Stücke $CD = CE$ der halben Spannweite gleich ab: je nachdem man nun mehr oder weniger Punkte der Kurve finden will, theile man die anstossenden Seiten CD, DG des vorher verzeichneten Rechtecks $ACDG$ in mehrere gleiche Theile, und zwar jene in den Punkten α, β, γ . . . diese in den Punkten $1, 2, 3$ . . . . ziehe hierauf die Sekanten $A1$, $A2$, $A3$ . . ., und durch die Theilungspunkte α, β, γ . . . die Geraden Ba, Bb, Bc u. s. f. bis zu ihrem Zusammentreffen mit den vorhin gezogenen Sekanten; so sind $a, b, c, d,$ . . . Punkte des einen Astes AD der Ellipse, und auf gleiche Weise lässt sich der andere Ast AE derselben bestimmen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens gründet sich auf dem §. 15.

§. 24.

Setzt man die Quadratwurzel aus dem Polynom

$$1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{kx}{p}\right) + \tfrac{2}{45}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{315}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 - \tfrac{2}{1575}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 - \tfrac{2}{9345}\left(\frac{kx}{p}\right)^5$$

der Reihe $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5$ gleich, so findet man nach Erhebung beider Theile zum Quadrat, und der Bestimmung der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\alpha = -\tfrac{1}{6}\left(\frac{k}{p}\right),\ \beta = \tfrac{1}{120}\left(\frac{k}{p}\right)^2,\ \gamma = \tfrac{1}{236}\left(\frac{k}{p}\right)^3,\ \delta = -\tfrac{1}{5760}\left(\frac{k}{p}\right)^4,\ \varepsilon = -\tfrac{19}{126720}\left(\frac{k}{p}\right)^5;$$

hiedurch verwandelt sich die Gleichung 48) in die folgende

$$50)\ y = \sqrt{2px}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{kx}{p}\right) + \tfrac{1}{120}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{336}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 - \tfrac{1}{5760}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 - \tfrac{19}{126720}\left(\frac{kx}{p}\right)^5\right]$$

und eben so findet man durch Ausziehung der Quadratwurzel aus der Gleichung 49), wenn die zur gemeinschaftlichen Abszisse zugehörige Ordinate der Ellipse mit y_1 bezeichnet wird,

$$51)\ y_1 = \sqrt{2px}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{kx}{p}\right) - \tfrac{1}{72}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 - \tfrac{1}{432}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 - \tfrac{5}{10368}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 - \tfrac{7}{62208}\left(\frac{kx}{p}\right)^5\right]$$

es ist sonach die derselben Abszisse zugehörige Ordinate bei der Kettenbrückenlinie stets grösser, als bei der Ellipse. Der Unterschied beider ergibt sich

$$52)\ y - y_1 = \sqrt{2px}\left[\tfrac{1}{45}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{189}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 + \tfrac{1}{3240}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 + \tfrac{1}{2673}\left(\frac{kx}{p}\right)^5\right]$$

und kann nur ausser Betrachtung kommen, wenn die Grösse

$$\frac{k^2x^2}{45p^2}\cdot\sqrt{2px}$$

schon kleiner wird, als die Grenze, die man sich bei dem beabsichtigten Grade der Genauigkeit vorgesteckt hat.

Sei für einen besonderen Fall $p = 100$, und man soll die grösste einer Ellipse angehörende Abszisse finden, deren Ordinate noch in 4 Dezimalstellen richtig wäre d. i. mit der Ordinate der Kettenbrückenlinie bis auf 0.0001 übereinstimmte, so hätte man

$$\frac{k^2x^2}{45}\cdot\sqrt{200x} < 1, \text{ oder } x^2\sqrt{x} < \frac{45}{k^2\sqrt{200}}, \text{ diess gibt}$$

$$x^5 < \frac{(45)^2}{200k^4} \text{ und } x < \sqrt[5]{\frac{(45)^2}{200k^4}} \text{ d. i. } x < \frac{15888}{\sqrt[5]{k^4}}$$

wäre z. B. $k = 0.6$, so ergäbe sich hieraus $x < 2.3909$, mithin die der Abszisse $x = 3$ zugehörende Ordinate der Ellipse wäre schon merklich kleiner als die Ordinate der Kettenbrückenlinie.

Für $p = 1000$, und $k = 0.6$ hätte man eben so

$$x < 9.5182$$

gefunden.

Macht man aber im Ausdrucke 50) $k = 1$, so erhält man für die Ordinate y_2 der gleichgespannten Kettenlinie die Reihe

$$53)\ y_2 = \sqrt{2px}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{x}{p}\right) + \tfrac{1}{120}\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{236}\left(\frac{x}{p}\right)^3 - \tfrac{1}{5760}\left(\frac{x}{p}\right)^4 - \dots\right]$$

hält man diesen Ausdruck gegen jenen 50) so sieht man leicht, dass wieder $y > y_2$ sei. Ihr Unterschied ergibt sich

$$54)\; y - y_2 = \sqrt{2px}\left[\tfrac{1}{6}\left(\frac{x}{p}\right)(1-k) - \tfrac{1}{120}\left(\frac{x}{p}\right)^2(1-k^2) - \tfrac{1}{236}\left(\frac{x}{p}\right)^3(1-k^3) + \ldots\right]$$

Setzt man hier, wie vorhin, $k=0.6$, so wird dieser Unterschied kleiner als 0.0001, wenn $p=100$ und $x<0.0475$, ferner, wenn
$p=1000$ und $x<0.0104$.

Es stimmt also für den hier angenommenen Modulus die Ellipse mit der Kettenbrückenlinie genauer, als die gleichgespannte Kettenlinie. Dagegen nähern sich beide letztgenannten Kurven, dem Ausdrucke 54) zu Folge, einander desto mehr, je weniger k von 1 verschieden ist, und fallen für $k=1$ genau in einander.

Unter den drei Kurven, nämlich: Parabel, Ellipse und die gleichgespannte Kettenlinie, nähert sich also die erstere der Kettenbrückenlinie am wenigsten: von den beiden anderen nähert sich bald die eine bald die andere, nach Massgabe des Modulus, der Kettenbrückenlinie mehr.

§. 25.

Durch die Differentiirung der Gleichungen 33) und 34) erhält man

$$55)\; dx = \frac{p}{\sqrt{k}}dw,\; dy = \frac{p}{k}\,.\,dw\,.\,tgw;\text{ mithin}$$

$$56)\; ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{p\,dw}{k}\sqrt{(k+tg^2w)}$$

Wäre hier $k=1$, so hätte man sofort

$$s = \frac{p}{k}\int dw\sqrt{(1+tg^2w)} = \frac{p}{k}\,\lambda\,tg\,(45^0+\tfrac{1}{2}w)$$

und die Rektifikation der Kettenbrückenlinie würde durch eine einfache Formel gerichtet: allein da k von 1 verschieden ist (§. 17), setze man $tg\,w = t$, mithin

$$dw\sqrt{(k+tg^2w)} = \frac{dt\sqrt{(k+t^2)}}{1+t^2},\text{ und}$$

um $\sqrt{(k+t^2)}$ rational zu machen, setze man

$$57)\; \sqrt{(k+t^2)} = u - t$$

wo u eine unbestimmte Grösse vorstellt, so folgt nach einigen Reduktionen

$$t = \frac{u^2-k}{2u},\; dt = \frac{u^2+k}{2u^2}\,.\,du$$

$$\sqrt{(k+t^2)} = \frac{u^2+k}{2u},\text{ und } 1+t^2 = \frac{u^4+u^2(2-k)+k^2}{4u^2}$$

hiedurch verwandelt sich

$$\frac{dt\sqrt{(k+t^2)}}{1+t^2}\text{ in }\frac{(u+k)^2\,du}{u\,(u^4+2u^2(2-k)+k^2)}$$

Da nun der Nenner dieser Bruchfunktion aus den Faktoren u, $u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}$, und $u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}$ besteht, so kann man, zur Zerfällung derselben in Partialbrüche, setzen

$$\frac{(u+k^2)}{u\,(u^4+2u^2\,(2-k)+k^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}} + \frac{B'u+C'}{u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}}$$

man findet auf dem bekannten Wege

$A=1$, $B=-\sqrt{(1-k)}$, $C=o$, $B'=\sqrt{(1-k)}$, $C'=o$

mit diesen Werthen wird

$$ds = \frac{p}{k}\left[\frac{du}{u} - \frac{u\sqrt{(1-k)}\,du}{u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}} + \frac{u\sqrt{(1-k)}\,du}{u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}}\right]$$

und nach gerichteter Integration

$$s = \frac{p}{k}\left[\lambda\,u - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\,[u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}] + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\,[u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}]\right]$$

$$= \frac{p}{k}\left[\lambda\,u + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\,\frac{u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}}{u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}}\right]$$

Führt man hier, der Gleichung 57) gemäss

$t+\sqrt{(k+t^2)}$ statt u ein, so ergibt sich

$$s = \frac{p}{k}\left[\lambda\,(t+\sqrt{(k+t^2)}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\,\frac{t^2+t\sqrt{(k+t^2)}+1+\sqrt{(1-k)}}{t^2+t\sqrt{(k+t^2)}+1-\sqrt{(1-k)}}\right]$$

$$= \frac{p}{k}\left[\lambda\,(t+\sqrt{(k+t^2)}+\sqrt{(1-k)}\,\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} + \frac{1+\sqrt{(1-k)}}{(t+\sqrt{(k+t^2)})\sqrt{(1+t^2)}}\right)\right]$$

Das Integral verschwindet für $t = tgw = o$, mithin findet man die zugehörige Konstante

$$= -\lambda\sqrt{k} - \sqrt{(1-k)}\,\lambda\,\frac{1+\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{k}}$$

hiedurch wird vollständig

$$s = \frac{p}{k}\left[\lambda\,\frac{t+\sqrt{(k+t^2)}}{\sqrt{k}} + \sqrt{(1-k)}\,\lambda\left(\frac{t}{1+\sqrt{(1-k)}} + \frac{1}{t+\sqrt{(k+t^2)}}\right)\sqrt{\frac{k}{1+t^2}}\right]$$

$$= \frac{p}{k}\left[\lambda\,\frac{t+\sqrt{(k+t^2)}}{\sqrt{k}} + \sqrt{(1-k)}\,\lambda\,\frac{\sqrt{(k+t^2)}-t\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{k}\,(1+t^2)}\right]$$

Man ersieht hieraus, dass das Ergebniss nicht einfach genug ist, um daraus die Bogenlänge der Kettenbrückenlinie in einem geschlossenen Ausdrucke bequem zu berechnen.

§. 26.

Näherungsweise, und für jede Anwendung hinreichend genau, findet man die Bogenlänge so:

Es ist nach (A. F. 519) $ds = \dfrac{dy}{\sin\alpha}$

wo α den Winkel bedeutet, den die Berührende am Ende des Bogens s mit der Abszissenaxe einschliesst; nun ist dieser Winkel für den Fall, dass die Vertikale CE durch den Scheitel (fig. 4) die Abszissenaxe sei, die Ergänzung des Stellungswinkels v zu 90^0, demnach hat man, wenn wieder wie in §. 22 CX als Abszissenaxe und CY als Ordinatenaxe gewählt wird

$$ds = \frac{dy}{\cos v} = dy\sqrt{(1+tg^2 v)} = dy\sqrt{(1+\tau^2)}$$

und wenn man die Wurzelgrösse $\sqrt{(1+\tau^2)}$ in die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{8}\tau^4+\tfrac{1}{16}\tau^6-\tfrac{5}{128}\tau^8+\ldots$$

verwandelt, und statt dy seinen Werth aus der Gleichung 43) nimmt, so erhält man bei Weglassung der Glieder mit τ^{10} und den höheren Potenzen von τ

$$\frac{ds}{p}=d\tau\,(1-k\tau^2+k^2\tau^4-k^3\tau^6+k^4\tau^8)\,(1+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{8}\tau^4+\tfrac{1}{16}\tau^6-\tfrac{5}{128}\tau^8)$$

welches Produkt entwickelt, und nach den Potenzen von τ geordnet, sofort gibt

$$\frac{ds}{p}=d\tau\left[1-(k-\tfrac{1}{2})\tau^2+(k^2-\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{8})\tau^4-(k^3-\tfrac{1}{2}k^2-\tfrac{1}{8}k-\tfrac{1}{16})\tau^6+(k^4-\tfrac{1}{2}k^3-\tfrac{1}{8}k^2-\tfrac{1}{16}k-\tfrac{5}{128})\tau^8\right]$$

bezeichnet man aber die eingeklammerten Koeffizienten der Potenzen von τ nach einander mit A, B, C, D, so findet man leicht

$$A=k-\tfrac{1}{2},\; B=kA-\tfrac{1}{8},\; C=kB-\tfrac{1}{16},\; D=kC-\tfrac{5}{128}$$

hiedurch wird

$$ds=pd\tau\left[1-A\tau^2+(kA-\tfrac{1}{8})\tau^4-(kB-\tfrac{1}{16})\tau^6+(kC-\tfrac{5}{128})\tau^8\right]$$

woraus sich durch Integration ergibt

$$58)\quad s=p\left[\tau-\tfrac{1}{3}A\tau^3+\tfrac{1}{5}(kA-\tfrac{1}{8})\tau^5-\tfrac{1}{7}(kB-\tfrac{1}{16})\tau^7+\tfrac{1}{9}(kB-\tfrac{5}{128})\tau^9\right]$$

Da der Stellungswinkel des Aufhängepunktes bei Kettenbrücken 20^0 nicht übersteigt, so ist $\tau < 0.364$, oder $\log \tau < 0.561066-1$: diess gibt $\log \tau^{10} < 0.61066-5$, mithin $\tau^{10} < 0.0000408$: andrerseits ist, wenn man für k auch seinen grössten Werth annimmt, nämlich $k=1$ setzend $\quad A=\tfrac{1}{2},\; B=\tfrac{3}{8},\; C=\tfrac{5}{16},\; D=\tfrac{35}{128},\; E=\tfrac{63}{256}$
daher ist das grösste unter den weggelassenen Gliedern kleiner als $\tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{63}{256}\cdot 0.0000408$, oder kleiner als 0.0000001 d. i. die in der Reihe 58) vernachlässigten Glieder haben auf die siebente Dezimalstelle der gesuchten Bogenlänge keinen Einfluss mehr.

Soll nun die Bogenlänge der Kettenbrückenlinie bestimmt werden, welche einer gegebenen horizontalen Abszisse x zugehört, so wird man nach der Gleichung 33) zuerst aus x den Hülfswinkel w berechnen, und hieraus nach der Gleichung 32) den Stellungswinkel v und dessen Tangente τ bestimmen, endlich mit dem so gefundenen Werthe von τ nach der Reihe 58) die weitere Rechnung führen. Beispiels halber sei $p=100$, $x=37$, $k=0.6$, man sucht s? Den Hülfswinkel w zu finden, hat man

$$\log x = 1.5682017$$
$$\log \sqrt{k} = 0.8890756-1$$
$$\log x\sqrt{k} = 1.4572773, \text{ demnach}$$
$$\log \frac{x\sqrt{k}}{p} = 0.4572773-1$$: nun ist die Bogenlänge von 1^0 gleich 0.01745329, demnach
$$\log 1^0 = 0.2418774-2$$
$$\log w = 1.2153999;\ \text{mithin } w=16^0.4210=16^0\,25'\,15''.6$$

man hat ferner $lcg\ tg\,w = 9.4694012$
$lcg\ \sqrt{k} = 0.8890756-1$

daher $lcg\ \tau = 9.5803256$, und $\tau = +\ 0.380474$
$lcg\ \frac{1}{3}A = 0.5228787-2$
$lcg\ \tau^3 = 0.7409768-2$

$lcg\ \frac{1}{3}A\tau^3 = 0.2638555-3$, und $-\ \frac{1}{3}A\tau^3 = -\ 0.001836$
$lcg\ \frac{1}{5}B = 0.1139434-2$
$lcg\ \tau^5 = 0.9016280-3$

$lcg\ \frac{1}{5}B\tau^5 = 0.0155714-4$ und $-\ \frac{1}{5}B\tau^5 = -\ 0.000104$
$lcg\ \frac{1}{7}C = 0.1613680-2$
$lcg\ \tau^7 = 0.0622792-3$

$lcg\ \frac{1}{7}C\tau^7 = 0.2236472-5$ und $\frac{1}{7}C\tau^7 = +\ 0.000017$
endlich findet man eben so $\frac{1}{9}C\tau^9 = -\ 0.000002$

Die Summe gibt $\frac{s}{p} = 0.378550$

und $s = 37.8550$

§. 27.

Man kann auch die gesuchte Bogenlänge als eine Funktion der vertikalen Abszissen darstellen, wenn man zuerst die Gleichungen 58) und 44) mit einander dividirt, diess gibt

$$\frac{s}{y} = \frac{1 - \frac{1}{3}A\tau^2 + \frac{1}{5}(kA - \frac{1}{8})\tau^4 - \frac{1}{7}(kB - \frac{1}{16})\tau^6 + \frac{1}{9}(kC - \frac{5}{128})\tau^8}{1 - \frac{1}{3}k\tau^2 + \frac{1}{5}k^2\tau^4 - \frac{1}{7}k^3\tau^6 + \frac{1}{9}k^4\tau^8}$$

stellt man diesen Quotienten in der Reihe

$$1 + \alpha\tau^2 + \beta\tau^4 + \gamma\tau^6 + \delta\tau^8 \text{ vor,}$$

so findet man nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\alpha = \tfrac{1}{6},\ \beta = -\ \tfrac{1}{5}\left(\frac{2k}{9} + \tfrac{1}{8}\right),\ \gamma = \tfrac{1}{9}\left(\frac{22k^2}{135} + \frac{k}{15} + \tfrac{1}{16}\right)$$

$$\delta = -\ \tfrac{1}{9}\left\{\frac{214k^3}{1575} + \frac{9k^2}{175} + \frac{k}{28} + \tfrac{5}{128}\right\}$$

Substituirt man nun die Werthe dieser Koeffizienten, und die Werthe der Potenzen von τ aus der Formel β) im §. 22 in die so eben angenommene Reihe, so ergibt sich nach einigen Reduktionen für vertikale Abszissen

$$59)\quad \frac{s}{y} = \Big[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{p}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\frac{7k}{9} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{10k^2}{27} - \frac{13k}{15} + \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^3$$
$$+ \tfrac{1}{9}\left(\frac{191k^3}{1575} - \frac{303k^2}{350} + \frac{19k}{14} - \tfrac{5}{8}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^4\Big]$$

Um noch den Ausdruck für s von y unabhängig zu machen, setze man den für y gefundenen Werth aus Formel 50) in 59) und ordne alles nach den Potenzen von $\frac{c}{p}$, so erhält man

$$60)\ s = \left[1 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}k - 1\right)\left(\frac{x}{p}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{24}k^2 + \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{7}{336}k^3 + \tfrac{5}{24}k^2 - \tfrac{3}{4}k + \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \ldots\right]\sqrt{2px}$$

Für $k = 1$ folgt hieraus die Bogenlänge der gleichgespannten Kettenlinie als Funktion ihrer vertikalen Abszissen

$$61)\ s = \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{p}\right) + \tfrac{1}{120}\left(\frac{x}{p}\right)^2 - \tfrac{1}{336}\left(\frac{x}{p}\right)^3 - \tfrac{1}{5760}\left(\frac{x}{p}\right)^4\right]\sqrt{2px}$$

§. 28.

Für horizontale Abszissen kann die Bogenlänge der Kettenbrückenlinie durch eine schneller konvergirende Reihe, als die letztgefundene 60), ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$\sqrt{(k + tg^2 w)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left[1 - \frac{tg^2 w}{2k} + \frac{1.3.\,tg^4 w}{2.4.\,k^2} - \frac{1.3.5.\,tg^6 w}{2.4.6.\,k^3} + \frac{1.3.5.7\,tg^8 w}{2.4.6.8\,k^4}\right]$$

nun hat man nach (A. F. 193)

$$tg w = w + \frac{w^3}{1.3} + \frac{2w^5}{1.3.5} + \frac{17\,w^7}{1.3.5.7.3.} + \frac{2.31\,w^9}{3.5.7.9.3},\ \text{mithin}$$

$$tg^2 w = w^2 + \tfrac{2}{3}w^4 + \tfrac{17}{45}w^6 + \tfrac{62}{315}w^8$$

$$tg^4 w = w^4 + \tfrac{4}{3}w^6 + \tfrac{6}{5}w^8$$

$$tg^6 w = w^6 + 2\,w^8,\ \text{und}\ tg^8 w = w^8$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Reihe, und ordnet alles nach den Potenzen von w, so ergibt sich

$$\sqrt{(k + tg^2 w)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left\{1 - \frac{w^2}{2k} + \left(\frac{3}{8k^2} - \frac{1}{3k}\right)w^4 - \left(\frac{5}{16k^3} - \frac{1}{2k^2} + \frac{17}{90k}\right)w^6 + \left(\frac{35}{128k^4} - \frac{5}{8k^3} + \frac{9}{20k^2} + \frac{31}{315k}\right)w^8\right\}$$

oder, wenn wir Kürze halber die auf einander folgenden Koeffizienten der Potenzen von w mit a, b, c, d bezeichnen, so erhalten wir, der Gleichung 56) gemäss

$$ds = \frac{p\,dw}{k}\sqrt{(k + tg^2 w)} = \frac{p\,dw}{k\sqrt{k}}\left(1 - aw^2 + bw^4 + cw^6 + dw^8\right)$$

woraus durch die Integration folgt

$$s = \frac{p}{k\sqrt{k}}\left(w - \tfrac{1}{3}a\,w^3 + \tfrac{1}{5}b\,w^5 - \tfrac{1}{7}c\,w^7 + \tfrac{1}{9}dw^9\right)$$

nun ist nach Formel 33) $w = \dfrac{x\sqrt{k}}{p}$, und hiedurch wird

$$62)\ s = p\left[\frac{x}{p} - \frac{ak}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \frac{bk^2}{5}\left(\frac{x}{p}\right)^5 - \frac{ck^3}{7}\left(\frac{x}{p}\right)^7 + \frac{dk^4}{9}\left(\frac{x}{p}\right)^9\right]$$

§. 29.

Zur Berechnung der Grösse, um welche die Kettenbrückenlinie in ihrer Mitte einsinkt, hat man aus der Formel 59), wenn die halbe Kettenlänge mit L, die halbe Spannweite mit D und der Pfeil mit t bezeichnet wird, und man bei den 3 ersten Gliedern stehen bleibt

$L = D\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{p}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{7k}{9} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{p}\right)^2\right]$, diess gibt, weil D unveränderlich ist,

$$dt = \frac{dL}{\frac{D}{p}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\left(\frac{7k}{9} - \frac{1}{2}\right)\frac{t}{p}\right)}$$

$$= \frac{15 . p^2 dL}{5Dp + 6Dt\left(\frac{7k}{9} - \frac{1}{2}\right)}$$

dL bedeutet hiebei, die Ausdehnung der halben Kettenlänge, sofern diese durch die grösste Belastung der Kettenbrücke bewirkt wird, und kann auf die bekannte Weise ermittelt werden.

§. 30.

Zum Schluss soll noch die Bestimmung des Krümmungshalbmessers für einen gegebenen Punkt der Kettenbrückenlinie, und die Lage seines Krümmungsmittelpunktes angegeben werden.

Die Gleichungen 55) geben

$$d^2y = \frac{p}{k} dw.^2 sec^2 w, \quad ds = \frac{p}{k} dw \sqrt{(k + tg^2 w)}$$

es ist aber der Krümmungshalbmesser $R = \frac{ds^3}{d^2y . dx}$, und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes erhellen aus den Formeln

$$g = x - \frac{R dy}{ds}, \quad h = y + \frac{R dx}{ds}$$

woraus nach vollzogener Substitution der Werthe für dy, dx, d^2y, und ds gefunden wird

$$63) \; R = \frac{p}{k\sqrt{k}} . \frac{(k + tg^2 w)^{\frac{3}{2}}}{sec^2 w}$$

$$64) \; g = x - \frac{p\, tg w}{k\sqrt{k}} . \frac{\sqrt{(k + tg^2 w)}}{sec^2 w}, \text{ und}$$

$$65) \; h = y + \frac{p}{k} \frac{\sqrt{(k + tg^2 w)}}{sec^2 w}$$

wo w durch die Gleichung $tg w = \sqrt{k} . tg v$ gegeben ist, und v den Stellungswinkel jenes Punktes bezeichnet, bei dem die eben genannten Grössen bestimmt werden sollen.

Sinnstörende Druckfehler.

Seite:	*Zeile:*		*Statt:*	*Lies:*
9	12	von oben	$\frac{\sqrt{\sigma^2+p^2}}{p^2}$	$\sqrt{\frac{\sigma^2+p^2}{p^2}}$
11	11	v. oben	$log\,[log\,tg\,(45^0+\frac{1}{2}v)\,10]$	$log\,[log\,tg\,(45^0+\frac{1}{2}v)-10]$
14	5	von oben	10.06	19.06
18	7	von unten	$\frac{1}{n}=C'D'$	$\frac{1}{n}\,C'D'$
24	20	von unten	0.34116	0.34516
27	4	von unten	$2k\left(\frac{x}{p}\right)$	$2k\left(\frac{x}{p}\right)^2$
29	11		$+\frac{1}{2673}\left(\frac{kx}{p}\right)^5$	$-\frac{1}{2673}\left(\frac{kx}{p}\right)^5$

In der 4. Figur fehlt in der Verlängerung der Linie FM nach oben der Buchstabe Q.

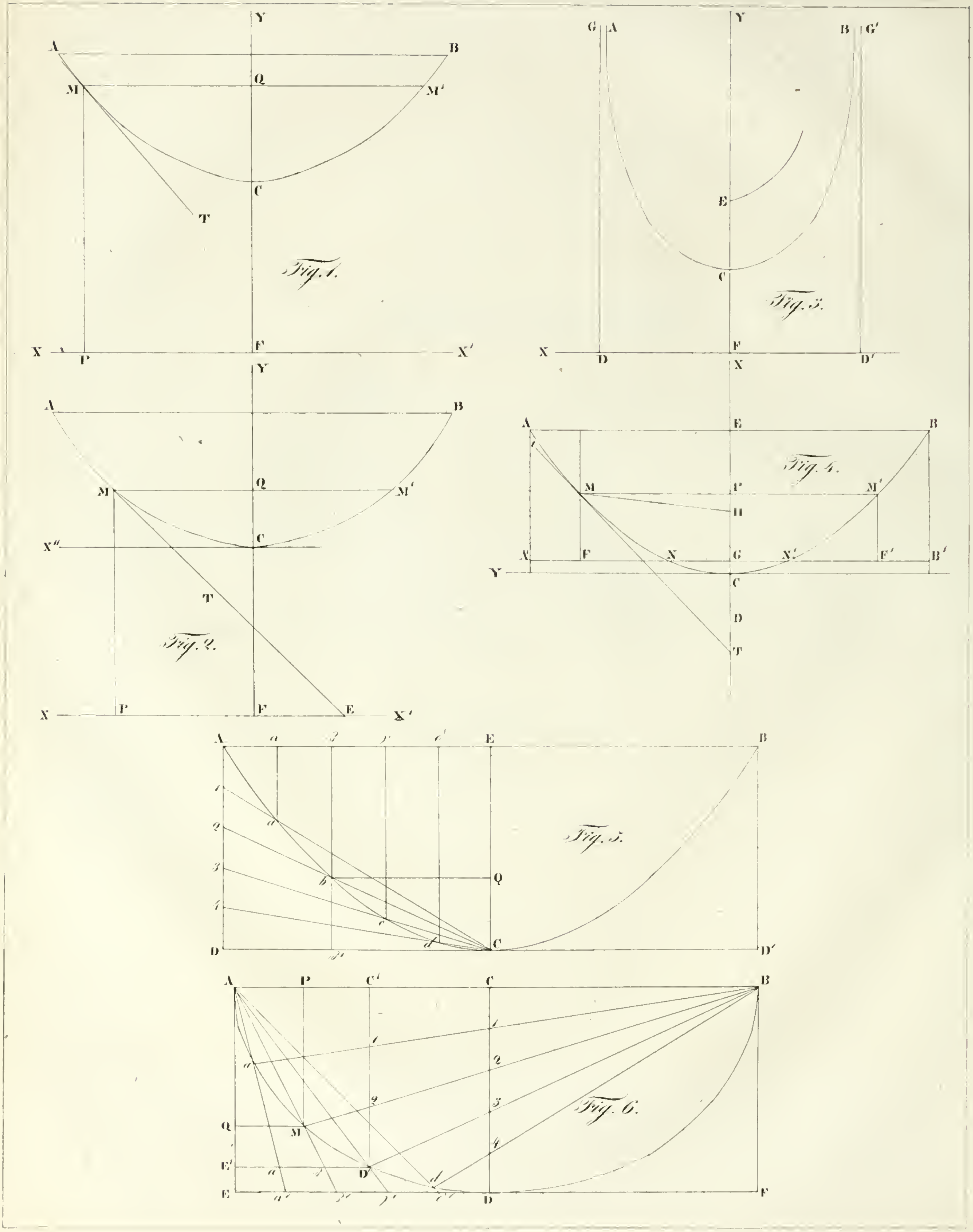
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

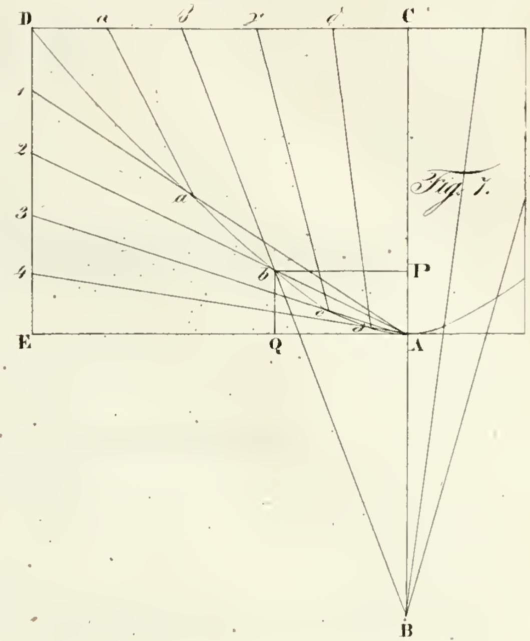

Fig. 7.

Fig. 9.

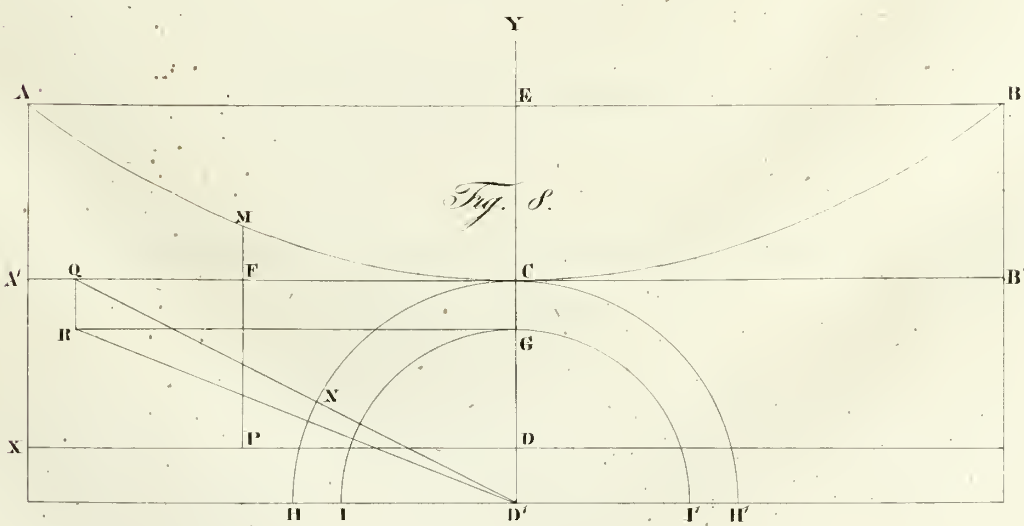

Fig. 8.