VERSUCH

einer

analytischen Behandlung

beliebig begrenzter und zusammengesetzter

Linien, Flächen und Körper;

nebst

einer Anwendung davon auf verschiedene Probleme der Geometrie descriptive und perspective.

Von

Christian Doppler,

wirklichem Professor der Elementar-Mathematik und gewesenem ausserordentl. Professor der höheren Mathematik am k. böhm. polytechnischen Institute zu Prag.

Mit 3 lithographirten Tafeln.

Prag, 1839.

Druck und Papier von Gottlieb Haase Söhne.

Christian Doppler's

VERSUCH

einer

analytischen Behandlung der verschiedenen Probleme der
Geometrie descriptive und der Perspective.

Vorrede.

Dass die analytische Geometrie ungeachtet ihrer wissenschaftlichen Ausbildung und in mehrfacher Beziehung hohen Vollendung dennoch in den technischen Wissenschaften bis auf den heutigen Tag nur eine so geringe Anwendung gefunden hat, ist von gebildeten Technikern, wie mir däucht, öfter mit Bedauern gefühlt, als mit Nachweisung der wahren Ursache hiervon ausgesprochen worden. Auch die theoretische Geometrie macht keine geringe Anzahl von Problemen nahmhaft, in Bezug auf welche leider ein Gleiches gesagt werden muss. Von dieser Art ist z. B. die Aufgabe von der Verwandlung eines vorgelegten Polygons in ein anderes gegebenes Vieleck, durch Zerstückelung und Zusammensetzung der Theile desselben, nebst noch vielen anderen unbestimmten Problemen, von welchen man wohl ohne alle Uebertreibung behaupten darf, dass selbst in den einfachsten Fällen die analytische Geometrie gar keine, die synthetische aber nur höchst dürftige und jedenfalls unzureichende Hilfsmittel zu deren Lösung darbiethet. Versucht man irgend ein Problem erstgenannter Art, gegenüber der *descriptiven* Methode, auf bisherige Weise rein analytisch zu behandeln, so stösst man gar bald durch die Complicität der Formeln auf Schwierigkeiten, die selbst den geübtesten Rechner zu ermüden und zu verwirren im Stande sind. Und diesem Umstande mag es wohl vorzüglich zuzuschreiben sein, dass man den Grund dieses Uebelstandes geradezu in der Ungeeignetheit des Gegenstandes für analytische Behandlung zu finden geglaubt hat, und sich sogar der Meinung hingab, es werde sich die Analysis auf derartige Aufgaben wohl schwerlich jemals mit Erfolg anwenden lassen.

Mehrfach angestellte Berechnungen und Untersuchungen, von denen ich hiermit einige dem Leser zur billigen Beurtheilung vorlege, machen mich jedoch sehr geneigt, zu glauben, dass die wahre Ursache hiervon nicht sowohl in der allzugrossen Complicität der Formeln oder in der Ungeeignetheit des Gegenstandes, als vielmehr in einer gewissen bisher übersehenen Mangelhaftigkeit oder Unvollständigkeit der analytischen Geometrie selbst zu suchen sein dürfte.

Die analytische Geometrie als solche, hat bekanntlich bisher bloss unbegrenzte oder sich selbst begrenzende Linien und Flächen zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht, und alle sogenannten *discontinuirlichen* — alle gebrochenen und zusammengesetzten Linien davon ausgeschlossen. Es ist mir wenigstens völlig unbekannt, dass man es mit einigem Erfolge bis jetzt versucht hätte, die Gleichung eines Dreieckes oder eines Polygons, eines Kreisbogens oder auch nur einer geraden Linie von bestimmter Länge, und in räumlicher Beziehung etwa die Gleichung einer im Raume befindlichen, durch irgend ein Polygon begrenzten Ebene oder krummen Fläche aufzustellen. Nun sind es aber eben Linien, Figuren und Flächen vollkommen begrenzter Art — es sind gebrochene und mannigfältig zusammengesetzte Figuren, die uns bei allen, dem praktischen Leben entnommenen und selbst bei vielen theoretischen Aufgaben fast durchgehends entgegen treten.

Ein nicht minder wesentliches und mit dem so eben Erwähnten innig zusammen hängendes Bedürfniss, scheint mir, in der gleichzeitigen Darstellung mehrerer als zusammengehörig betrachteter Punkte, Linien und Figuren d. h. ganzer Systeme von geometrischen Objekten mittelst Gleichungen zu liegen. Nach den Grundsätzen der analytischen Geometrie werden bekanntlich die Gleichungen zweier oder mehrerer Linien nur deshalb mit einander verbunden, um die zur Lösung eines Problems nöthigen Bedingungsgleichungen zu erhalten. Allein es ist wohl kaum in Abrede zu stellen, dass sich von der Gleichung eines ganzen Systems wenigstens eben dieselben Vortheile erwarten lassen, die man durch die analytische Darstellung einer einzelnen unbegrenzten oder sich selbst begrenzenden Linie in der That bereits erreicht hat. — Ist aber nur einmal das Mittel hierzu angegeben, so wird man mit vieler Leichtigkeit die Gleichung der horizontalen und vertikalen Projektion irgend eines geometrischen oder technischen Gegenstandes sich zu verschaffen, und mit Hilfe derselben alle auf den Gegenstand bezüglichen Probleme rein analytisch zu behandeln vermögen. Hierzu kömmt noch, dass die in der That abschreckende Complicität der Formeln mehr scheinbar als wirklich ist, indem solche Gleichungen in anderer Beziehung und durch Einführung der combinatorischen Bezeichnung eine Einfachheit und Gleichförmigkeit in der Rechnung gestatten, deren sich so manche andere Untersuchung in der analytischen Geometrie wohl kaum in gleichem Grade rühmen darf.

Die Darstellung ganzer Systeme durch Gleichungen macht es meines Erachtens sofort auch nothwendig, bei Ableitung der Formeln für die Transformation der ***Coordinaten*** von einer anderen Vorstellungsweise auszugehen, als es bisher geschah, indem die Natur eines Problems es öfters fordern kann, die Stellung einzelner Figuren, ja sogar einzelner Theile einer Figur bei unveränderter Lage aller übrigen verschiedentlich abzuändern, d. h. eine partielle Ortsveränderung eintreten zu lassen.

Die Anwendung der analytischen Geometrie auf die verschiedenen Probleme der ***Geometrie descriptive***, der Perspcktive und des Steinschnittes führen ferners, wie ich mich überzeugte, noch unausweichlich zu dem bisher ungekannten Bedürfniss, sich die Gleichung einer auf bestimmte Weise begrenzten Fläche und eines begrenzten Körperraums zu verschaffen. Man hat sich unter ersterer jedoch weder die Gleichung für die Figur, noch auch für den Flächeninhalt zu denken, so wie jene für den Körperraum sich weder auf die Oberfläche noch auf den Rauminhalt bezieht. Es sind vielmehr die Gleichungen für sämmtliche Punkte, aus denen man sich sowohl die Fläche als den Körperraum zusammengesetzt vorzustellen pflegt.

Das in den nachfolgenden Blättern Dargebothene ist daher, wie schon aus dem Gesagten erhellen dürfte, als ein wiewohl noch sehr mangelhafter Versuch anzusehen, die bisherigen Grundlehren der analytischen Geometrie zu vervollständigen, oder vielmehr, um im mathematischen Sinne zu sprechen, sie zu verallgemeinen. — Möchten Kenner sie mit freundlicher Nachsicht aufnehmen, und die hier besprochenen Begriffe rücksichtlich ihrer Brauchbarkeit oder Unbrauchbarkeit in der Analysis in derselben wohlmeinenden Absicht prüfen, mit der ich sie ihnen hiermit vorlege.

Dass ich endlich für neue Begriffe neue Zeichen und Namen erfand, kann mir so lange wenigstens nicht zum Vorwurf gereichen, als ich mich derselben bloss für meinen Theil als eines Mittels bediente, mich dem Leser in Kürze verständlich zu machen, und mich übrigens, falls die durch sie bezeichneten Begriffe in der Wissenschaft fortbestehen sollten, zur Annahme jeder zweckmässigeren Bezeichnung gerne verstehen werde.

Der Verfasser.

I. Abschnitt.

Vorläufige Andeutung der neu einzuführenden Bezeichnung.

§. 1.

Bei allen Untersuchungen der analytischen Geometrie, so wie bei jenen der Analysis überhaupt, die bestimmten Integrale etwa hiervon ausgenommen, wird insgemein stillschweigend vorausgesetzt, dass sowohl die gesonderten Funktionen, als die ihnen zu Grunde liegenden absolut veränderlichen Grössen eines jeden Werthes ohne Unterschied fähig seien, in so fern derselbe nicht etwa durch die besondere Beschaffenheit der Funktion selbst sich als unmöglich oder unzulässig darstellet. So ist z. B. in der Gleichung für die gerade Linie sowohl die Ordinate y, als die Abscisse x eines jeden reellen Werthes ohne Ausnahme fähig, während dagegen in der Gleichung des Kreises, wegen der Eigenthümlichkeit dieser Curve jene Werthe zwischen ganz bestimmte enge Grenzen eingeschlossen sind. —

„Indem man aber die Beschränkung der möglichen Werthe in Betreff der „Variablen lediglich blos der Natur und besondern Beschaffenheit der Functio„nen, also etwas ganz Zufälligem überlässt, leistet man meines Erachtens ohne „Noth und eigenwillig auf den grossen Vortheil Verzicht, diese Grenzen Behufs „gewisser Zwecke selbstthätig feststellen zu können."

Um daher von dieser Bemerkung Nutzen zu ziehen, wollen wir nachfolgende Bezeichnung einführen: Soll nämlich eine Funktion einer Veränderlichen wie z. B. $y = \varphi(x)$ nur für jene Werthe von x gelten, welche zwischen α und β liegen; so wollen wir dieses durch $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\beta}$ anzeigen, und vorläufig festsetzen, dass sowohl der untere Grenzwerth α als der obere β *inclusive* zu verstehen sei. Durch diese Bestimmungen und deren Bezeichnung wird daher jeder andere, wenn gleich sonst mögliche Werth der Funktion von unserer Betrachtung ausgeschlossen und muss daher als unmöglich oder vielmehr als gar nicht vorhanden angesehen werden.

§. 2.

Ein anderer in der ganzen Mathematik nicht minder häufig vorkommender wichtiger Begriff, dem es gleichfalls noch an einer zweckmässigen Bezeichnung und an einer gehörigen Würdigung fehlet, ist jener des wirklichen Zugleichbestehens mehrerer Werthe für eine und dieselbe veränderliche Grösse. Dort, wo es die unbedingte Nothwendigkeit erheischte, ein derartiges oder doch ähnliches Verhältniss mehrerer Grössen zu einer dritten anzuzeigen, wie z. B. bei den verschiedenen combinatorischen Operationen, begnügte man sich bisher, dieses gemeiniglich durch dazwischen gesetzte Komma auszudrücken. Aber abgesehen von dem nicht unwesentlichen Umstande, dass eine derartige Bezeichnung leicht zu Missverständnissen aller Art führen kann, und sich mithin wenig zu dem beabsichtigten Zwecke eignen dürfte: scheint man auch noch überdiess bis jetzt wenig Nutzen von einer geregelten Anwendung eines solchen Begriffszeichens erwartet zu haben. Ich aber meines Theils muss gestehen, dass ich nicht ganz dieser Meinung bin, vielmehr glaube, dass es wohl immerhin der Mühe werth sein dürfte, in eine genauere Erörterung in Ansehung der Brauchbarkeit dieses Begriffs in der Mathematik, als Grundlage eines neuen Algorithmus einzugehen.

Um daher anzuzeigen, dass der Veränderlichen y die Werthe A, B, C, u. s. w. zukommen, d. h. dass sie dieser Werthe fähig ist, wollen wir uns des dazwischen gesetzten Zeichens ω bedienen und schreiben: $y = A\omega B\omega C\omega \ldots.$ d. h. y ist sowohl A als B als auch C u. s. w. — Dies glaubte ich vorläufig erwähnen zu müssen, und die nachfolgenden ganz einfachen Aufgaben dürften dazu beitragen, das Gesagte noch mehr zu verdeutlichen.

§. 3.

I. Aufgabe. Man suche die Gleichung einer Geraden von bestimmter Begrenzung? —

Auflösung. Es sei die Gleichung der unbegrenzten Geraden, nämlich jene von AB in *Fig.* 1.: $y = 2x - 3$. Verlangt man nun die Gleichung des völlig begrenzten Stückes MN derselben, welches zwischen den Ordinaten β und β' liegt, so wird dieses nach unserer Bezeichnungsweise durch folgende Darstellung jener Gleichung erreicht:

$$y = \Big\{2x - 3\Big\}_{\alpha}^{\alpha'};$$

wobei α und α' die den Punkten M und N entsprechenden Abscissen bedeuten. Es sei nun $\alpha = 2\frac{1}{2}$ und $\alpha' = 5$, so hat man als Gleichung von MN:

$$y = \Big\{2x - 3\Big\}_{\frac{5}{2}}^{5};$$

Von allen möglichen Werthen also, deren y fähig ist, zu Folge der unbegrenzten Linie, sollen hier nur jene gelten, welche durch die Substitution eines zwischen den Grenzen $\frac{5}{2}$ und 5 liegenden Werthes von x hervorgehen. Alle anderen Ordinaten sind mithin von dieser Gleichung selbst ausgeschlossen, und müssen demnach als unmöglich oder besser als gar nicht vorhanden betrachtet werden.

Wäre nebst der so eben besprochenen begrenzten Geraden MN auch noch eine andere gleichfalls begrenzte OP gleichzeitig im Coordinaten-Systeme vorhanden, so hätte man, wenn ihre Gleichung: $y = \Big\{_{6}\, \frac{2}{3}x - 1 \Big\}^{9}$ ist, zufolge unserer oben eingeführten Bezeichnung:

$$y = \Big\{_{\frac{5}{2}}\, 2x - 3 \Big\}^{5} \,\omega\, \Big\{_{6}\, \tfrac{2}{3}x - 1 \Big\}^{9};$$

wobei y den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Ordinaten vorstellet. Durch das im vorigen Paragraphe besprochene und eingeführte Zeichen ω ist man mithin in den Stand gesetzt, die sonst nur vereinzelt angeschriebenen Gleichungen durch eine einzige Gleichung darzustellen, d. h. ein System gleichzeitig bestehender Linien in einer Gleichung darzustellen.

Bedeutet: $y = Ux + V$ die allgemeine Gleichung einer unbegrenzten geraden Linie, so hat man für eine von bestimmter Begrenzung: $y = \Big\{_{\alpha}\, Ux + V \Big\}^{\alpha'}$; oder durch Coordinaten ihrer Endpunkte ausgedrückt: $y = \Big\{_{\alpha} \left(\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}\right) x + \left(\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'}\right) \Big\}^{\alpha'}$;

wobei $U = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}$ und $V = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'}$.

Die allgemeine Gleichung eines Systems begrenzter Linien ist mithin:

$$y = \Big\{_{\alpha}\, Ux = V \Big\}^{\alpha'} \,\omega\, \Big\{_{\alpha''}\, U'x + V' \Big\}^{\alpha'''} \,\omega\, \Big\{_{\alpha^{IV}}\, U''x + V'' \Big\}^{\alpha^{V}} \,\omega \ldots.$$

§. 4.

2. *Aufgabe.* Es ist die Gleichung eines Systems dreier begrenzter und einer unbegrenzten Linie gegeben; man soll analytisch untersuchen, ob und wo sich dieselben schneiden?

Auflösung. Es sei die gegebene Gleichung folgende:

$$y = \Big\{_{2}\, 2x - 3 \Big\}^{3} \,\omega\, \Big\{_{4}\, x + 5 \Big\}^{7} \,\omega\, \Big\{_{1}\, 5x - 12 \Big\}^{8} \,\omega\, \Big\{ 10x - 6 \Big\};$$

Der Umstand, dass die Grenzen der beiden ersteren Linien ausserhalb einander liegen, überzeugt uns schon auf den ersten Blick, dass sich diese Linien unmöglich schneiden können. Anders hingegen ist es bei der dritten und vierten, wo die Untersuchung hierüber Folgendes lehrt:

Soll die 1. die 3. schneiden, so muss: $2x - 3 = 5x - 12$; oder $x = 3$, mithin zwischen 2 und 3 liegend, also möglich.

Soll die 2. die 3. schneiden, so muss: $x + 5 = 5x - 12$; oder $x = 4\frac{1}{4}$, mithin zwischen 4 und 7 fallend, daher gleichfalls möglich.

Soll die 1. von der 4. geschnitten werden, so muss
$2x - 3 = 10x - 6$; oder $x = \frac{3}{8}$;
Soll die 2. von der 4. geschnitten werden, so muss
$10x - 6 = x + 5$; oder $x = \frac{11}{9}$;
Soll die 3. von der 4. geschnitten werden, so muss
$5x - 12 = 10x - 6$; oder $x = -\frac{6}{5}$;

sämmtlich ausserhalb der entsprechenden Grenzen liegend und mithin unmöglich.

Es ergibt sich somit hieraus, dass zwar die beiden ersten Linien sich nicht schneiden, dass jedoch die 3. die 1. in ihrem Endpunkte, die 2. dagegen in dem Punkte $x = 4\frac{1}{4}$, $y = 9\frac{1}{4}$ schneidet, die 4. hingegen mit keiner der drei ersteren zusammen trifft.

§. 5.

3. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung eines Dreiecks suchen?

Auflösung. Es seien die Gleichungen der drei Linien, in welchen die Seiten des verlangten Dreieckes liegen, für sich genommen:

$$y = 3x + 2,\; y = 4x - 5,\; y = 10x - 15;$$

Denkt man sie im Coordinaten-Systeme zugleich vorhanden, so hat man nach unserer Bezeichnung:

$$y = (3x + 2)\ \omega\ (4x - 5)\ \omega\ (10x - 15);$$

wobei die Linien noch immer ohne bestimmte Begrenzung sind.

Sucht man nun ihre Durchschnittspunkte, so findet man, und zwar:

$$\begin{aligned} \text{wegen } 3x + 2 &= 4x - 5; & x &= 7. \\ 3x + 2 &= 10x - 15; & x &= \tfrac{17}{7}. \\ 4x - 5 &= 10x - 15; & x &= \tfrac{10}{6}. \end{aligned}$$

Die verlangte Gleichung des Dreieckes wird daher sein:

$$y = {}_{\frac{17}{8}}\Big\{ 3x + 2 \Big\}^{7}\ \omega\ {}_{7}\Big\{ 4x - 5 \Big\}^{\frac{10}{6}}\ \omega\ {}_{\frac{10}{6}}\Big\{ 10x - 15 \Big\}^{\frac{17}{7}};$$

Für $x = 5$ erhält man $y = \Big\{ 17 \Big\}\ \omega\ \Big\{ 15 \Big\}$; indem die Seite ${}_{\frac{10}{6}}\Big\{ 10x - 15 \Big\}^{\frac{17}{7}}$ für genannten Werth von x keinen Durchschnitt darbiethet. Errichtet man daher in einem Abstande gleich 5 vom Ursprunge der Coordinaten eine Ordinate, so wird diese von zweien der Dreiecksseiten in einer Höhe von 15 und 17 Einheiten geschnitten.

Auf ganz gleiche Weise findet man als Gleichung für ein anderes Dreieck, welches durch Fig. 2 graphisch dargestellt ist, den Ausdruck:

$$y = {}_{2}\Big\{ \tfrac{1}{2}x + 2 \Big\}^{\frac{16}{3}}\ \omega\ {}_{\frac{16}{3}}\Big\{ 2x - 6 \Big\}^{4}\ \omega\ {}_{4}\Big\{ -\tfrac{1}{2}x + 4 \Big\}^{2};$$

Sollen daher im Allgemeinen drei Linien von bestimmter Begrenzung ein Dreieck bilden, so müssen nebst der Gleichung

$$y = \left\{ Ux + V \right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{ U'x + V' \right\}_{\alpha'}^{\alpha''} \omega \left\{ U''x + V'' \right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \dots\dots$$

auch noch folgende Gleichungen Statt finden:

$$U\alpha + V = U''\alpha + V'' \text{ und daher: } \alpha = \frac{V - V''}{U'' - U}$$

$$U\alpha' + V = U'\alpha' + V' \qquad \alpha' = \frac{V - V'}{U' - U}$$

$$U'\alpha'' + V' = U''\alpha'' + V'' \qquad \alpha'' = \frac{V' - V''}{U'' - U'};$$

u. s. w..... u. s. w.....

substituirt man daher diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man als allgemeine Gleichung eines Dreiecks:

$$y = \left\{ Ux + V \right\}_{\frac{V - V''}{U'' - U}}^{\frac{V - V'}{U' - U}} \omega \left\{ U'x + V' \right\}_{\frac{V - V'}{U' - U}}^{\frac{V' - V''}{U'' - U'}} \omega \left\{ U''x + V'' \right\}_{\frac{V' - V''}{U'' - U'}}^{\frac{V - V''}{U'' - U}};$$

mit welcher Gleichung, wie wir im Verlaufe dieser Abhandlung genüglich zeigen werden, alle jene Untersuchungen angestellt werden können, welche man sonst nur immer mit den Gleichungen der Kegelschnittslinien und anderer Curven anzustellen pflegt.

Es ist zwar nicht in Abrede zu stellen, dass man in diesen ganz einfachen und ungemein leichten Fällen auch ohne die neu eingeführten Bezeichnungen zu denselben Resultaten gelangt sein würde, und fast befürchte ich, dass mancher, der diese Blätter in die Hand nimmt, sie auch alsobald wieder und wohl allzu voreilig mit der Aeusserung zur Seite legen wird, dass ihr Inhalt, wenn auch eben nicht Unrichtiges, doch auch wenig Erhebliches enthalten dürfte, und dass sich übrigens die Sache, wie man zu sagen pflegt, von selbst verstehe. — Besonnenere Leser werden dagegen zum Wenigsten einräumen, dass diese oder ähnliche Bezeichnungen bei complicirteren Problemen von sehr wesentlichem erleichternden Nutzen sein können, und dass man überhaupt, wenn gleich der nächste Zweck dieser Zeichen vorerst nur Vereinfachung der Rechnung ist, man doch wohl nicht absehen könne, wie viel Erspriessliches nicht selbst schon hieraus sich ergeben werde. Hatte doch auch die erste Einführung der ganzen positiven Exponenten lediglich bloss Vereinfachung der Rechnung zum Zwecke, und welche grosse Zahl der wichtigsten Wahrheiten verdanken wir nicht dieser Bezeichnung? — In der That glaube ich schon in diesen Blättern Gelegenheit zu finden, von der erfolgreichen Anwendung dieser Zeichen hinreichende Beweise zu geben.

Nach diesen ganz einfachen Betrachtungen, welche lediglich nur den Zweck hatten, die Möglichkeit einer nützlichen Anwendung dieser neuen Bezeichnungen einigermassen vor Augen zu legen, und den Leser geneigt zu machen, dem Nachfolgenden die nothwendige Aufmerksamkeit und Beachtung zu schenken, wollen wir sofort im nächsten Abschnitte sowohl die bereits erwähnten als auch einige andere damit verwandte Begriffe einer genaueren Untersuchung unterziehen.

II. Abschnitt.

Ausführlichere Erörterung der eingeführten Bezeichnungen.

§. 6.

Wenn man die vorhin erwähnten Bezeichnungen auf zusammengesetztere und schwierigere Probleme mit Erfolg anwenden will, so reichen die im vorigen Abschnitte gegebenen, nur beiläufigen und jedenfalls dürftigen Bemerkungen über dieselben nicht mehr hin, und es erscheint eine genauere Feststellung dieser Begriffe nach allen Beziehungen als unerlässlich und nothwendig. Diess soll nun auch, in so weit es der Zweck dieser Abhandlung erlaubt, noch in diesem Abschnitte geschehen.

Gleichwie es nämlich in vielen Fällen einen erheblichen Vortheil gewähren kann, von allen einer Funktion oder Variablen zukommenden möglichen Werthen nur gewisse, zwischen namhaft gemachten Grenzen liegende gelten zu lassen, wie dieses wohl schon zum Theile aus den so eben behandelten Aufgaben, noch weit mehr aber aus dem Folgenden erhellen wird: so kann es gleicherweise zuweilen auch von nicht geringem Nutzen sein, von sämmtlichen möglichen Werthen einer veränderlichen Grösse eine bestimmte Partie derselben davon auszuschliessen. Wir wollen daher, um dieses sofort an der Variablen auszudrücken, uns der in Etwas abgeänderten Grenzbezeichnung $\overset{\alpha'}{\underset{\alpha}{\left\{\varphi(x)\right\}}}$ bedienen, und setzen demnach durch dieses Zeichen fest, dass alle jene Werthe von $\varphi(x)$ als nicht vorhanden betrachtet werden sollen, welche durch die Substitution eines zwischen α und α' liegenden Werthes von x hervorgehen. — Dem bis jetzt Gesagten zu Folge wären daher z. B. die Ausdrücke

$$_3\left\{\varphi(5)\right\}^7 \text{ und } {}^8\left\{\varphi(4)\right\}_5 \text{ mögliche,}$$

$$\text{hingegen } _3\left\{\varphi(7)\right\}^5 \text{ und } {}^5\left\{\varphi(3)\right\}_2 \text{ unmögliche Werthe der Funktionen.}$$

Da ferners als Grenzwerthe nicht selten als sehr zusammengesetzte Ausdrücke auftreten, so sollen diessfalls und gleichsam als Abkürzungen statt der Bezeichnungen $\overset{\alpha'}{\underset{\alpha}{\left\{\varphi(x)\right\}}}$ und $\overset{\alpha'}{\underset{\alpha}{\left\{\varphi(x)\right\}}}$ die bequemeren $\alpha\left\{\varphi(x)\right\}\alpha'$ und $\alpha'\left\{\varphi(x)\right\}\alpha$ geschrieben werden. Dasselbe soll auch gelten von der im nächsten Paragraphe einzuführenden Klammer.

§. 7.

Die Grenzbezeichnung gestattet ferners durch Einführung einer anders gestalteten, nämlich der doppeltgekerbten Grenzklammer noch eine sehr wesentliche Erweiterung, indem man nämlich die Grenzwerthe, sodann auf die Function selbst, und nicht wie früher, auf die ihr zu Grunde liegende Variable bezieht. Durch das Zeichen $\underset{\beta}{\overset{\beta'}{\Big\{ f(x) \Big\}}}$ soll mithin angedeutet werden, dass von allen möglichen Werthen, deren $f(x)$ fähig ist, nur jene gelten sollen, welche zwischen β und β' liegen. Der Ausdruck: $\underset{\beta}{\overset{\beta'}{\Big\{ f(x) \Big\}}}$ bedarf nun weiters keiner besonderen Erklärung mehr. Es bezeichnen daher die Ausdrücke:

$${}_{5}\Big\{ 7 \Big\}^{8} \text{ und } {}^{9}\Big\{ 10 \Big\}_{3} \text{ mögliche; dagegen:}$$

$${}_{2}\Big\{ 5 \Big\}^{3} \text{ und } {}^{12}\Big\{ 11 \Big\}_{5}$$ unmögliche, oder vielmehr gar nicht vorhandene Werthe der Funktionen.

Keiner weiteren Erklärung bedürfen ferners die Ausdrücke:

$\underset{\alpha}{\overset{\infty}{\Big\{ \varphi(x) \Big\}}}$; $\underset{-\infty}{\overset{\alpha'}{\Big\{ \varphi(x) \Big\}}}$; $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{\Big\{ \varphi(x) \Big\}}}$; und $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{\Big\{ \varphi(x) \Big\}}}$, für welche letztere Bezeichnung wir der Einfachheit wegen, stets das gleichbedeutende $\varphi(x)$ nehmen werden. — Eben so ist klar, dass das Verhältniss der beiden Grenzklammern, so wie die Vorschrift für ihre wechselseitige Verwandlung oder Transformation durch die Gleichung:

$$\underset{\alpha}{\overset{\alpha'}{\Big\{ \varphi\, x \Big\}}} = \underset{\varphi(\alpha)}{\overset{\varphi(\alpha')}{\Big\{ \varphi(x) \Big\}}} \;;$$

ausgedrückt wird. — Die auf die Grössen x, y, z sich beziehenden Grenzwerthe sollen gewöhnlich der Ordnung nach durch die Grössen α, β, γ mit den nöthigen Accentuirungen bezeichnet werden. Endlich muss hier noch ausdrücklich bemerkt werden, dass die beiden Grenzbezeichnungen kein unbedingtes und nothwendiges, sondern nur ein mögliches Stattfinden der zwischen den Grenzen liegenden Werthe aussagen, und dass dieses durch die Eigenthümlichkeit der betreffenden Funktion selbst bedingt wird.

§. 8.

Schon im vorigen Abschnitte wurde vorläufig bemerkt, dass sowohl der untere als auch der obere Grenzwerth *inclusive* zu verstehen seien. In zwei Fällen leidet jedoch diese allgemeine Regel eine Ausnahme. Der erste dieser Fälle ist jener, wo die untere und obere Grenze genau dieselben sind. Da hier offenbar nach dem Sinne der Bezeichnung nur das Bestehen eines einzigen Werthes der Function zugestanden werden soll, so wollen wir ein für allemal festsetzen, dass in diesem Falle nur der dem unteren Grenzwerthe entsprechende Functionswerth zu gelten habe, der obere hingegen *exclusive* zu betrachten sei. So ist z. B. die Function $\left\{\varphi(x)\right\}_2^2$ nur des einzigen Werthes $\varphi(2)$ fähig, wie dieses zwar schon aus der Natur der Sache selbst, noch mehr jedoch aus unserer so eben gegebenen Erklärung folgt. In geometrischer Bedeutung drückt dieses Zeichen den der Abscisse 2 entsprechenden Punkt der Curve aus, welche durch die Function $\varphi(x)$ dargestellt wird.

Der zweite jener Fälle findet dann statt, wenn sich an die Function $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ die Function $\left\{f(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha''}$ so anschliesst, dass nebst der angezeigten Gleichheit des unteren Grenzwerthes mit dem obern der folgenden Function auch noch: $\varphi(\alpha') = f(\alpha')$ ist, welches im geometrischen Sinne darauf hindeutet, dass der Endpunkt der ersteren Linie $\varphi(x)$ zugleich der Anfangspunkt der zweiten ist, deren Ordinate durch $f(x)$ ausgedrückt wird. Um ferners anzuzeigen, dass einer Function $\varphi(x)$ die vereinzelnten Werthe α, α', α'', α''' u. s. w. in Bezug auf die zu Grunde liegende Variable x zukommen, wird man schreiben: $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots}^{\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots}$.
Dieser letztere Fall tritt z. B. jedesmal ein, wenn man die Wurzeln einer gegebenen Gleichung dadurch bezeichnen, oder mehrere isolirte Punkte einer Curve angeben will. Alles hier Gesagte gilt natürlich auch von dem Zeichen $\left\{\varphi(x)\right\}_{\beta}^{\beta'}$. —

§. 9.

Nach den bisher gepflogenen Betrachtungen scheint es im ersten Augenblicke völlig gleichgültig zu sein, welcher der beiden Grenzwerthe unten und welcher oben geschrieben wird, und so lange es sich nur um die blosse Ausscheidung gewisser Werthe der Function handelt, ist dieses allerdings auch der Fall. — Da aber die Grenzwerthe nebst dem Intervall der möglichen oder unmöglichen Werthe auch noch die Ordnung, in welcher diese Functionswerthe auf einander folgen oder in der sie gezählt werden, anzeigen: so ist es im Allgemeinen und insbesonders bei jedem noch nicht bis zu Ende geführten Calcül durchaus nicht erlaubt, eine Verwechslung dieser beiden Werthe willkührlich vorzunehmen. —

Vielmehr wird es sich schon jetzt deutlich genug herausstellen, dass Ausdrücke wie: $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ und $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha}$, sich bei jeder Summation und Integration, denen sie zu Grunde gelegt werden, wie ein Zählen nach entgegengesetzter Richtung und mithin wie positive und negative Grössen zu einander verhalten. Der wissenschaftlichen Bestimmtheit wegen soll daher die Function $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ in dem Falle, wenn $\alpha < \alpha'$ ein Progress, dagegen wenn $\alpha > \alpha'$ ein Regress genannt werden. Diese Eintheilung ist keineswegs unwesentlich, indem sich nebst vielen andern Wahrheiten auch beispielsweise der Satz hieraus folgern lässt, dass: bei jeder in sich zurückkehrenden Linie oder geschlossenen Figur, sie mag übrigens wie immer zusammengesetzt sein, die Summe der Progresse gleich sein müsse der Summe ihrer Regresse; u. s. w.

Gleicherweise folgt aus den verwandten Begriffen des Zählens und Summirens auf eine nothwendige Weise, dass:

$\Sigma \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = - \Sigma \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha}$, ferners, dass: $\int \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} dx = - \int \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha} dx$, und endlich, dass in Ausdrücken von der Form $\int_n^m \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} dx$ die Grenzen der Integration mit jenen der Function von gleicher Art, d. h. beide Progresse oder Regresse sein oder doch früher auf solche gebracht werden müssen wenn die Integration nichts Widersprechendes enthalten soll. Diese Verwandlung der Progresse in Regresse und umgekehrt unterliegt nach der obigen Bemerkung keiner Schwierigkeit, und die oben nachgewiesene Beziehung solcher Integral-Ausdrücke wird im Folgenden die Behauptung bestätigen, dass unsere Werthausdrücke wahre Gleichungen des durch sie bezeichneten Gegenstandes seien. —

Nachstehende Transformationen dürften, als durch das Vorhergehende vollkommen begründet, keiner weiteren Rechtfertigung bedürfen:

1.) $y = \left\{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots Vx^n\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = A + B\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + C\left\{x^2\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + D\left\{x^3\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + \ldots V\left\{x^n\right\}_{\alpha}^{\alpha'} =$

$$= A + B\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + C\left(\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\right)^2 + \ldots . \; V\left(\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\right)^n ;$$

2.) $y = \left\{\sqrt[n]{x}\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \sqrt[n]{\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}}$;

3.) $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \varphi\left(\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\right)$; oder auch

4.) $y = F\left(a, b, \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\right) = \left\{F\left(a, b, \varphi(x)\right)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ und endlich

5.) $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \left\{\varphi(x-n)\right\}_{\alpha-n}^{\alpha'-n}$; wobei n jede konstante Grösse bezeichnen kann.

Dass ferners zwischen dem bestimmten Integrale $\int_{\alpha}^{\alpha'} \varphi(x)\, dx$, und dem noch völlig allgemeinen, jedoch begrenzten Integrale $\int \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} dx$ ein sehr wesentlicher Unterschied sei, dürfte schon aus dem Umstande einleuchten, dass jedes bestimmte Integral durch die Grenzwerthe eine bestimmte Forderung, das Integrale einer begrenzten Function dagegen nur im Allgemeinen die Möglichkeit aussagt, einer solchen Forderung Genüge zu leisten.

§. 10.

Der zweite der im vorigen Abschnitte erwähnten Begriffe ist, wie gesagt, jener des gleichzeitigen Stattfindens oder wirklichen Zugleichbestehens mehrerer Werthe für eine und dieselbe Variable. Da die aufgezählten Werthe als für sich bestehend und von einander unabhängig durchaus keine unmittelbare Verbindung eingehen sollen, welches durch das dazwischen gesetzte Zeichen ω angezeigt wird: so möge dieses Zeichen, da es jene Werthe in der That auseinander hält, sofort von uns Trennungs- oder Disjunctivzeichen, die einzelnen Grössen aber Trennungs- oder Disjunctivglieder genannt werden. Da die Disjunctivglieder in der Regel stets mit Grenzklammern versehen sind, und sich am häufigsten diese Grenzen wechselseitig ausschliessen, wodurch der Begriff des gleichzeitigen Vorhandenseins in den weniger allgemeinen eines bedingten Nebeneinanderseins übergeht und diessfalls recht eigentlich die grammatikalische Disjunction „entweder — oder" ausdrückt: so dürfte mit Rücksicht auf das früher Gesagte diese Benennung wohl nicht ganz unpassend gewählt worden sein.

Mit der Disjunctivgleichung und deren Gliedern können nachfolgende Veränderungen vorgenommen werden, und zwar:

Wenn $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots$; so ist auch begreiflicher Weise:

$$1.)\; y \pm A = \left\{\varphi(x) \pm A\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x) \pm A\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\varphi''(x) \pm A\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots;$$

$$2.)\; Ay = \left\{A\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{A\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{A\varphi''(x)\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots;$$

$$3.)\; \frac{y}{A} = \left\{\frac{\varphi(x)}{A}\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\frac{\varphi'(x)}{A}\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\frac{\varphi'''(x)}{A}\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots;$$

$$4.)\; y^n = \left\{\overline{\varphi(x)}^{\,n}\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\overline{\varphi'(x)}^{\,n}\right\}_{\alpha''}^{\alpha''} \omega \left\{\overline{\varphi''(x)}^{\,n}\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots;$$

5.) $\sqrt[n]{y} = \left\{\sqrt[n]{\varphi(x)}\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\sqrt[n]{\varphi'(x)}\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\sqrt[n]{\varphi''(x)}\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots$; und allgemein

6.) $F(y) = \left\{F(\varphi(x))\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{F(\varphi'(x))\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{F(\varphi''(x))\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots$ d. h. alle Veränderungen, welche mit dem y vorgenommen werden, müssen gleicherweise mit jedem einzelnen Disjunctivgliede vorgenommen werden.

Setzt man in der Gleichung 6) aus der anfänglich angenommenen Gleichung den Werth für y, so erhält man:

7.) $F\left(\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\right) = \left\{F(\varphi(x))\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{F(\varphi'(x))\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{F(\varphi''(x))\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots$

mithin auch: $y = f(A \omega B \omega C \omega \ldots) = f(A) \omega f(B) \omega f(C) \omega \ldots$,

oder $\log (5 \,\omega\, 7 \,\omega\, 11) = \log 5 \,\omega\, \log 7 \,\omega\, \log 11$.

Die 7.) aufgestellte Relation ist von grosser Wichtigkeit und wir werden ihrer vorzüglich bei der Berechnung krummer Flächen von bestimmter Begrenzung im Raume bedürfen.

§. 11.

Die Disjunctivgleichung lässt sich in sehr vielen Fällen durch Anwendung der combinatorischen Bezeichnungsweise sehr bedeutend vereinfachen, so wie überhaupt sich hier für die combinatorische Analysis ein neues Feld zu den wichtigsten Untersuchungen eröffnen dürfte. Erst durch Anwendung der Combinationslehre auf unsere neuen Begriffszeichen wird es möglich, sehr complizirte und schwierige Probleme, wie z. B. jene in der Vorrede erwähnten, allgemein analytisch zu behandeln und aufzulösen. Indem ich in dieser Beziehung mehreres gelegenheitlich besprechen werde, will ich hier nur folgende allgemeine Bemerkungen beifügen:

Wenn $y = A_1 \omega A_2 \omega A_3 \omega A_4 \omega \ldots A_n$, so wollen wir dieses combinatorisch durch

$y = \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{1.\varrho}^{n\varrho} \binom{A}{\varrho}$ anzeigen, wofür man auch überall dort, wo keine Zweideutigkeit statt findet, auch kürzer $y = \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{,}^{n} \binom{A}{\varrho}$ schreiben kann. Durch beide Abkürzungen will man anzeigen, dass ϱ alle Werthe von $\varrho = 1$ bis $\varrho = n$ erhalten soll, und die einzelnen diessfälligen Ergebnisse durch das Zeichen ω verbunden werden sollen. Für die Disjunctivgleichung:

$y = \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{\alpha}^{\alpha'} {}^{A'}_{\varrho} \,\omega\, \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{\beta}^{\beta'} {}^{A''}_{\varrho} \,\omega\, \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{\gamma}^{\gamma'} {}^{A'''}_{\varrho} \,\omega \ldots\ldots$, deren Gliederanzahl $= n$ ist, hat man dagegen als combinatorischen Ausdruck:

$$y = \mathop{CO}\limits_{(\alpha,\beta,\gamma,\ldots.)\varrho}^{(\alpha',\beta',\gamma'\ldots.)\varrho} \mathop{CO}\limits_{1,\pi}^{n,\pi} \binom{A^{\pi}}{\varrho};$$

Ist einmal die Bedeutung des combinatorischen CO festgestellt (wir wollen es schlechtweg das grosse CO nennen), so wird man auch sofort in der Deutung anderer Ausdrücke, natürlich mit Zuziehung des nöthigen aus der Combinationslehre, wie etwa des Zeichens: $y = \mathop{CO}\limits_{n\varrho,\, p\psi}^{m\varrho,\, p\psi} \underset{\varrho}{A^{\psi}} = \mathop{CO}\limits_{n\varrho}^{m\varrho} \mathop{CO}\limits_{p\psi}^{q\psi} \underset{\varrho}{A^{\psi}}$ keine Schwierigkeiten finden und auch einsehen, dass es diessfalls auf die Ordnung der combinatorischen CO nicht ankomme.

Fast überflüssig scheint noch die Bemerkung zu sein, dass sich die über dem grossen CO geschriebenen Zahlen lediglich bloss auf die Indices, keineswegs aber auf die Variablen selbst beziehen.

Jede Function von der Form $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$, in welcher α und α' verschieden ist, lässt sich in beliebig viele Disjunctivglieder von gleichen oder ungleichen Intervallen auflösen, dagegen gestattet es schon um viel seltener die Form der Functionen, mehrere Disjunctivglieder in eine Function zusammen zu ziehen. Das Verhältniss ist hier ungefähr wie beim Differenziren und Integriren, mit dem das hierbei nöthige Verfahren in der That einige Aehnlichkeit hat, indem man auch dort zwar jede Function leicht zu differenziren, jedoch keineswegs jeden Differenzialausdruck auch zu integriren vermag. — Bezeichnet man durch $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots.$ gewisse zwischen α und α' liegende Werthe, so hat man begreiflicher Weise:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\varepsilon} \,\omega\, \left\{\varphi(x)\right\}_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \,\omega\, \left\{\varphi(x)\right\}_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} \,\omega \ldots.\, \left\{\varphi(x)\right\}_{\varepsilon'''}^{\alpha'};$$

Sind dagegen die Intervalle einander gleich und ihre Anzahl $= n$, so hat man, wenn δ die Differenz bezeichnet:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{n+\delta} \,\omega\, \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha+\delta}^{\alpha+2\delta} \,\omega\, \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha+2\delta}^{\alpha+3\delta} \,\omega \ldots.\, \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha+(n-1)\delta}^{\alpha+n\delta} = \mathop{CO}\limits_{0.\varrho}^{(n-1)\varrho} \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha+\varrho\delta}^{\alpha+(\varrho+1)\delta};$$

oder da offenbar $\alpha' = \alpha + n\delta$, somit $\delta = \frac{\alpha'-\alpha}{n}$ ist, so hat man auch:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \mathop{CO}\limits_{0.\varrho}^{(n-1)\varrho} \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha+\varrho\left(\frac{\alpha'-\alpha}{n}\right)}^{\alpha+(\varrho+1)\left(\frac{\alpha'-\alpha}{n}\right)};$$

wobei n eine völlig willkührliche

Grösse bezeichnet, und auch ∞ sein kann. — Da mich eine tiefer eingehende Betrachtung dieses Gegenstandes von dem hier beabsichtigten Zwecke zu weit entfernen würde, so gehen wir sofort zu einer anderen wichtigen Bemerkung über.

§. 12.

Ist $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} + \left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha^{\mathrm{iv}}}^{\alpha^{\mathrm{v}}} + \ldots$, so bedeutet x offenbar $\Sigma\, y$ die Summe sämmtlicher Ordinaten und zwar nicht nur jener, welche zwischen den Grenzen α und α' liegen und der $\varphi(x)$ entsprechen, sondern auch jener, die den Functionen $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ u. s. w. angehören; es ist somit dem Begriffe zufolge:

$$\Sigma\, y = \Sigma \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + \Sigma \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} + \Sigma \left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha^{\mathrm{iv}}}^{\alpha^{\mathrm{v}}} + \ldots,$$

wobei jedoch das oben erwähnte Verhältniss in Bezug auf Progresse und Regresse natürlich nicht geändert wird. Man sieht hieraus, dass die Wirkung des Summenzeichens Σ auf das Disjunctivzeichen ω darin besteht, dass letzteres in $+$ verwandelt wird; mithin ist allgemein

$$\Sigma\ \omega \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = + \Sigma \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = - \Sigma \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha}.$$

Ganz ein Gleiches gilt auch von dem Integralzeichen. Ist nämlich $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha''} \omega \ldots$;

so ist $\int y\, dx = \int \left(\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \ldots \right) dx = \int \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} dx + \int \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha''} dx + \ldots$

Der Unterschied zweier Ordinaten, welche zu einer und derselben Abscisse gehören soll, in so fern man dieses Stück der Ordinate als ein unendlich schmales Flächen-Increment ansieht, Lamelle genannt, und mit λ bezeichnet werden. Es ist daher $\Sigma\,\lambda$ mit $\int y\, dx$ gleichbedeutend, und der allgemeine Ausdruck für den Flächenraum einer Figur.

Endlich ist noch eine Bezeichnung zu erwähnen, von der wir schon im nächsten Abschnitte Gebrauch machen müssen. Ist nämlich eine Grösse b einer anderen a gleich, und von ihr abzuziehen, so werden wir uns des Zeichens $\equiv$ bedienen und schreiben: $a \equiv b$; also gewissermassen zusammengesetzt aus $a = b$ und $a - b$. Obgleich das hier angewandte Zeichen schon anderswo, nämlich als Zeichen für die Congruenz zweier Zahlen gebraucht wird, so glauben wir doch es hier beibehalten zu dürfen, da ein Irrthum oder eine Verwechselung der dadurch bezeichneten Beziehungen nicht wohl zu befürchten sein dürfte. Einige andere Begriffe, deren schon in der Vorrede gedacht wurde, werden in der Folge noch ausführlicher besprochen werden.

Diese allgemeinen Bemerkungen glaubte ich nun vorausschicken zu müssen, um den folgenden Untersuchungen eine grössere Allgemeinheit geben zu können.

III. Abschnitt.

Auflösung verschiedener Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf combinatorische Darstellung ihrer Resultate.

§. 13.

1. *Aufgabe.* Combinatorische Darstellung der Gleichung eines Systems von Geraden und eines Polygons im Allgemeinen?

Sind die geraden Linien ohne alle bestimmte Begrenzung und ist ihre Anzahl gleich n, so hat man ganz allgemein:

$$y = (U_1 x + V_1) \,\omega\, (U_2 x + V_2) \,\omega\, (U_3 x + V_3) \,\omega \,\ldots\, (U_n x + V_n);$$

oder combinatorisch dargestellt:

I.) $y = \overset{n}{C\omega}\left(U_\varrho x + V_\varrho\right)$; als allgemeine Gleichung eines Systems von n geraden Linien.

Sind jene Geraden sämtlich begrenzt, so geschieht ihre Darstellung auf folgende Weise: $y = \left\{U_1 x + V_1\right\}_{\alpha'}^{\alpha_2} \,\omega\, \left\{U_2 x + V_2\right\}_{\alpha_3}^{\alpha_4} \,\omega\, \left\{U_3 x + V_3\right\}^{\alpha_6} \,\omega \ldots\ldots \left\{U_n x + V_n\right\}_{\alpha_{2n+1}}^{\alpha_{2n}}$;

oder combinatorisch dargestellt:

II.) $y = \overset{n}{C\omega}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha}^{\alpha_{2\varrho}}$; als combinatorische Gleichung eines Systems begrenzter Linien.

Bilden diese n Linien ein Polygon, so hat man wegen des nothwendigen Stattfinden nachfolgender Bedingungsgleichungen, nämlich:

$\alpha_2 = \alpha_3$; $\alpha_4 = \alpha_5$; $\alpha_6 = \alpha_7$; $\alpha_8 = \alpha_9 \ldots\ldots \alpha_{2n} = \alpha_1$; so wie auch noch der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} U_1\alpha_2 + V_1 &= U_2\alpha_2 + V_2 \\ U_2\alpha_4 + V_2 &= U_3\alpha_4 + V_3 \\ U_3\alpha_6 + V_3 &= U_4\alpha_6 + V_4 \\ U_4\alpha_8 + V_4 &= U_5\alpha_8 + V_5 \\ \ldots&\ldots \\ U_n\alpha_1 + V_n &= U_1\alpha_1 + V_1 \end{aligned}\right\} \text{ hieraus ergeben sich aber sofort unmittelbar folgende Bestimmungen: } \left\{\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_3 = \frac{V_2 - V_1}{U_1 - U_2} \\ \alpha_4 &= \alpha_5 = \frac{V_3 - V_2}{U_2 - U_3} \\ \alpha_6 &= \alpha_7 = \frac{V_4 - V_3}{U_3 - U_4} \\ \alpha_8 &= \alpha_9 = \frac{V_5 - V_4}{U_4 - U_5} \\ \ldots&\ldots \\ \alpha_n &= \alpha_1 = \frac{V_n - V_1}{U_1 - U_n} \end{aligned}\right.$$

Man hat ganz allgemein die Gleichung:

$$y = \left\{Ux + V\right\}^{\frac{V_2 - V_1}{U_1 - U_2}}_{\frac{V_n - V_1}{U_1 - U_n}} \omega \left\{Ux + V\right\}^{\frac{V_3 - V_2}{U_2 - U_3}}_{\frac{V_2 - V_1}{U_1 - U_2}} \omega \left\{Ux + V\right\}^{\frac{V_4 - V_3}{U_3 - U_4}}_{\frac{V_3 - V_2}{U_2 - U_3}} \omega \ldots\ldots \left\{Ux + V\right\}^{\frac{V_n - V_1}{U_1 - U_n}}_{\frac{V_n - V_{n-1}}{U_{n-1} - U_n}};$$

mithin ganz allgemein, combinatorisch:

$$\text{III.)}\; y = \underset{\varrho}{\overset{n}{\mathcal{W}}} \left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}^{\frac{V_\varrho - V_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1} - U_\varrho}}_{\frac{V_{\varrho-1} - V_\varrho}{U_\varrho - U_{\varrho-1}}}$$; als allgemeinste Gleichung eines Polygons von n Seiten.

Hierbei ist jedoch ausdrücklich zu bemerken, dass dem Begriffe einer geschlossenen Figur nach offenbar:

$U_{n+1} = U_1$; $U_o = U_n$ und gleicherweise $V_{n+1} = V_1$, und $V_o = V_n$ ist;

So ist z. B. die allgemeinste Gleichung eines Dreieckes;

$$1.)\; y = \underset{\varrho}{\overset{3}{\mathcal{W}}} \left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}^{\frac{V_\varrho - V_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1} - U_\varrho}}_{\frac{V_{\varrho-1} - V_\varrho}{U_\varrho - U_{\varrho-2}}}$$; und eben so findet man die Gleichung des 4, 5 und 6 Ecks u. s. w.

In allen diesen Gleichungen bedeuten die verschiedenen U und V was immer für positive oder negative Zahlen.

Der allgemeine Ausdruck für die Länge der ϱten Polygons-Seite ist sodann aus bekannten Gründen:

$$\alpha)\ S_{\varrho} = \left(\frac{V_{\varrho} - V_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1} - U_{\varrho}} - \frac{V_{\varrho-1} - V_{\varrho}}{U_{\varrho} - U_{\varrho-1}}\right)\sqrt{1 + U_{\varrho}^{2}}\ ;$$

Ferners ist der Polygonswinkel, welcher von der ϱten und $(\varrho + 1)$ten Seite eingeschlossen wird, wie man ohne weitere Erklärung begreifen wird:

$\beta)\ tang\ \pi_{\varrho} = \Pi_{\varrho} = \dfrac{U_{\varrho} - U_{\varrho+1}}{1 + U_{\varrho} U_{\varrho+1}}$; welche Formeln dienen, um die Grössen S_{ϱ} und Π_{ϱ} in jedem bestimmten Falle auszurechnen.

Sind in den Gleichungen α) und β), S_{ϱ} und Π_{ϱ} von dem Indexe der Seiten d. h. von ϱ unabhängig und mithin konstant, z. B. $S_{\varrho} = a$ und $\Pi_{\varrho} = tang\left(180 - \frac{360}{n}\right) = -\,tang\ \frac{360}{n}$; so bilden die Gleichungen α und β die Systeme der Bedingungsgleichungen für jedes reguläre nEck von der Seite a. Nach unserer combinatorischen Bezeichnungsweise würden wir daher diese Systeme folgender Weise darstellen, und zwar in Bezug auf ein irreguläres Polygon:

$$1.)\ \overset{n}{\underset{\varrho}{\mathcal{C}}}\left(S_{\varrho} = \left(\frac{V_{\varrho} - V_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1} - U_{\varrho}} - \frac{V_{\varrho-1} - V_{\varrho}}{U_{\varrho} - U_{\varrho-1}}\right)\sqrt{1 + U_{\varrho}^{2}}\right);\ \text{und}$$

$$2.)\ \overset{n}{\underset{\varrho}{\mathcal{C}}}\left(\Pi_{\varrho} = \frac{U_{\varrho} - U_{\varrho+1}}{1 + U_{\varrho} U_{\varrho+1}}\right).$$

Jedes dieser beiden Systeme liefert n Bedingungsgleichungen, mithin zusammen $2n$ Gleichungen. Da nun aber von den n Seiten und n Winkeln eines Polygons bekanntlich nur $(2n - 3)$ Stücke gegeben zu sein brauchen, worunter jedoch wenigstens sich $(n - 3)$ Winkel befinden müssen, um das Polygon seiner Form nach vollkommen zu bestimmen, andererseits aber wie man sieht im Ganzen $2n$ Unbekannte vorkommen, so erhält man auf diese Weise mithin nur $(2n - 3)$ verschiedene Gleichungen mit $2n$ Unbekannten. Dieser Umstand weiset daher unverkennbar auf eine noch vorhandene Unbestimmtheit hin, wie dieses in der That auch der Fall ist. Denn ungeachtet die Form des Polygons durch jene $(2n - 3)$ Stücke vollkommen bestimmt ist, so ist es noch keineswegs die Lage des Polygons gegen das Coordinaten-System. Durch eine leichte Ueberlegung überzeugt man sich ferners, dass zur Feststellung der Lage eines Polygons gegen das Coordinaten-System nicht mehr und auch nicht weniger Bedingungen gehören, als eben drei. Fügt man mithin zu den obigen $(2n - 3)$ Bedingungsgleichungen noch drei solche hinzu, wodurch die Lage des Polygons festgestellt wird, so lassen sich aus diesen $2n$ Gleichungen die $2n$ Unbekannten d. h. sämmtliche U_{ϱ} und V_{ϱ} bestimmen.

In Beziehung auf ein reguläres Polygon von n Seiten, wovon jede Seite a ist, hat man demnach folgende Bedingungsgleichungen:

$$3.)\ \mathcal{C}\!\mathcal{W}\left(a = \left(\frac{V_{\varrho} - U_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1} - U_{\varrho}} = \frac{V_{\varrho-1} - V_{\varrho}}{U_{\varrho} - U_{\varrho-1}}\right)\sqrt{1 + U_{\varrho}^2}\right); \text{ und}$$

$$4.)\ \mathcal{C}\!\mathcal{W}\left(tang\, \frac{360}{n} = \frac{U_{\varrho+1} - U_{\varrho}}{1 + U_{\varrho} U_{\varrho+1}}\right);$$

Somit ist nun auch die Aufgabe gelöst, die Gleichung eines n Ecks von gegebenen Seiten und Winkeln und in einer zu den beiden Coordinaten-Axen festgesetzten Lage zu finden. Meistentheils wird die Lage dadurch festgesetzt, dass ein Scheitelpunkt durch einen gegebenen Punkt geht, dessen Coordinaten p, q sein mögen, und dass die anliegende Seite mit der Abscissenaxe einen gegebenen Winkel ψ macht. Geschicht diese Feststellung beim ε^{ten} Scheitelpunkte, so hätte man sofort folgende $2\,n$ Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der $2\,n$ Unbekannten:

$$1.)\ \overset{n-2}{\mathcal{C}\!\mathcal{W}}\left(S_{\varrho} = \left(\frac{V_{\varrho} - V_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1}\ U_{\varrho}} - \frac{V_{\varrho-1} - V_{\varrho}}{U_{\varrho} - U_{\varrho+1}}\right)\right); \qquad 3.)\ p = \frac{V_{\varepsilon+1} - V_{\varepsilon}}{U_{\varepsilon} - U_{\varepsilon+1}};$$

$$2.)\ \overset{n-1}{\mathcal{C}\!\mathcal{W}}\left(\Pi = \frac{U_{\varrho} - U_{\varrho+1}}{1 + U_{\varrho} U_{\varrho+1}}\right); \qquad 4.)\ q = \frac{U_{\varepsilon} V_{\varepsilon+1} - U_{\varepsilon+1} V_{\varepsilon}}{U_{\varepsilon} - U_{\varepsilon+1}};$$

$$\text{und } 5.)\ U_{\varepsilon} = tang\, \psi^{0}.$$

Mittelst dieser 5 Gleichungen findet man nun aus einer vorliegenden Gleichung eines n Ecks sämmtliche Polygonsstücke, und nebstdem noch die Coordinaten eines Scheitelpunktes und die Lage der unmittelbar darauf folgenden Seite gegen die Abscissenaxe. Man kann aber auch umgekehrt diese Gleichung eines Polygons von n Seiten aus den $(2\,n - 3)$ Polygonsstücken der Coordinaten p und q einer Polygonsecke, und aus der Neigung einer beliebigen Seite gegen die Achse der X berechnen. Man würde diessfalls aus den Gleichungen 2 und 5 sämmtliche U berechnen, und sodann aus den Gleichungen 1, 3, und 4 alle V bestimmen können. Da alle zu behandelnden Gleichungen vom ersten Grade sind, so hat die Ausführung sowohl der ersterwähnten, als auch der umgekehrten Aufgabe auch nicht die geringste Schwierigkeit. Für den zweiten Fall würde man den obigen 5 Gleichungen zweckmässiger folgende Form geben:

$$1.)\ \overset{n-2}{\mathcal{C}\!\mathcal{W}}\left[V_{\varrho+1} = V_{\varrho} - \left(\frac{S_{\varrho}}{\sqrt{1 + U_{\varrho}^2}} + \frac{V_{\varrho-1} - V_{\varrho}}{U_{\varrho} - U_{\varrho+1}}\right)\left(U_{\varrho+1} - U_{\varrho}\right)\right]; \qquad 3.)\ V_{\varepsilon+1} = q - p\ U_{\varepsilon+1};$$

$$4.)\ V_{\varepsilon} = q = p\ U_{\varepsilon};$$

$$2.)\ \overset{n-1}{\mathcal{C}\!\mathcal{W}}\left(U_{\varrho+1} = \frac{U_{\varrho} - \Pi_{\varrho}}{1 + \Pi_{\varrho} U_{\varrho}}\right); \qquad 5.)\ U_{\varepsilon} = tang\, \psi^{0}.$$

In diesen, so wie in den vorhergehenden Formeln beziehen sich die Grössen U_{ε}, $U'_{\varepsilon+1}$ auf jenes Seitenpaar, von denen die Ecke ε, deren Abscisse $= p$ und Ordinate $= q_{\varepsilon}$ ist, eingeschlossen wird.

Als ein specielles Beispiel sei das in Fig. 3 dargestellte Fünfeck gegeben, mittelst welchem man sofort folgende Gleichung für dasselbe findet:

$$y = \left\{2x - 4\right\}_{\frac{21}{4}}^{\frac{14}{3}} \omega \left\{\tfrac{1}{2}x + 3\right\}_{\frac{14}{3}}^{4} \omega \left\{-5x + 3\right\}_{4}^{5} \omega \left\{x - 5\right\}_{5}^{9} \omega \left\{-\tfrac{2}{3}x + 10\right\}_{9}^{\frac{21}{4}};$$

Man kann aber auch den umgekehrten Weg betreten, und aus der gegebenen Gleichung mittelst der obigen Formeln die Polygonsstücke berechnen und dasselbe sodann construiren. In der Folge soll noch von einer viel einfacheren und zu vielen Zwecken brauchbareren analytischen Darstellung der Polygonsgleichungen die Rede sein.

§. 14.

2. *Aufgabe.* Es ist die Gleichung eines Systems von begrenzten Geraden zu finden, welche auf der Abscissenachse senkrecht stehen?

Die Gleichung einer unbegrenzten Geraden ist bekanntlich: $y = Ux + V$. Um sie für den Fall, wo $U = tang.\, 90° = \infty$ ist, in einer brauchbaren Form zu erhalten, nehme man an, erwähnte Linie gehe durch die beiden Punkte $x'y'$, $x''y''$, so ist ihre Form:

$y - y' = \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)(x - x')$; liegt einer dieser Punkte z. B. der Punkt $x'y'$ in der Abscissenachse, so ist offenbar diessfalls $y' = o$, und somit unsere Gleichung:

$$y = \left(\frac{-y''}{x' - x''}\right)(x - x') = \frac{y''}{(x' - x'')}(x' - x);$$

Denkt man sich nun die Abscisse x'' des einen Punktes in fortwährender Annäherung an die sich beständig gleichbleibende d. h. constante Abscisse x' begriffen, ohne dass sich desshalb auch die zugehörige Ordinate y änderte: so ersieht man auf den ersten Blick, dass jene Gerade sich allmählig der senkrechten Lage nähern und für $x'' = x'$ in der That auf der Abscissenachse perpendikulär stehen wird. Da nun aber bei diesem Uebergange von der schiefen Lage in die senkrechte nicht nur die Abscisse x'', sondern überhaupt die Abscissen sämmtlicher Punkte jener Geraden ohne Ausnahme, der beständigen Grösse x'' gleich zu werden streben, und sich derselben wiewohl mit verschiedener Raschheit annähern: so müssen, wenn x den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Abscissen vorstellt, offenbar die Differenzen $x' - x''$ und $x' - x$ zu gleicher Zeit Null werden, so bald die Linie ihre senkrechte Lage erreicht hat. Man erhält daher diessfalls, wegen des konstanten Werthes von y'':

$y = \frac{0}{0}$ als Gleichung einer auf der Abscissenachse senkrechten unbegrenzten Linie.

Da das Symbol der Unbestimmtheit $\frac{0}{0}$ bekanntlich jeden Werth bezeichnen kann, so sagt die erhaltene Gleichung in Uebereinstimmung mit der Natur der Sache aus, dass zwar in diesem Falle die Ordinaten von den Abscissen völlig unabhängig, übrigens aber eines jeden Werthes fähig seien. Um daher immer vor Augen zu haben, für welchen Werth von x diese Unbestimmtheit eintritt, wollen wir uns einer früher erwähnten Bezeichnung bedienen, und indem wir zugleich $x' = d$ setzen, statt obigen Ausdruck den völlig gleichbedeutenden nur unreducirten Ausdruck schreiben:

$y = \frac{0}{0} = \left(\frac{x, \equiv d}{0}\right) = \left(\frac{x'}{0} \equiv \frac{d}{0}\right)$; wo d den Abstand der Senkrechten vom Ursprunge der Abscissen bedeutet.

Ist ferners diese senkrechte begrenzt, so hat man:

$y = \left\{\frac{x' \equiv d}{0}\right\}_{\beta}^{\beta'}$; d. h. von dieser Senkrechten haben nur jene Punkte zu gelten, welche zwischen $y = \beta$ und $y = \beta'$ liegen. Stehen mehrere gerade begrenzte Linien auf der Abscissenachse senkrecht, so hat man:

$$y = \left\{\frac{x \equiv d_1}{0}\right\}_{\beta_1}^{\beta_2} \omega \left\{\frac{x \equiv d_2}{0}\right\}_{\beta_3}^{\beta_4} \omega \left\{\frac{x \equiv d_3}{0}\right\}_{\beta_5}^{\beta_6} \omega \ldots\ldots \left\{\frac{x \equiv d_n}{0}\right\}_{\beta_{2n-1}}^{\beta_{2n}};$$

und combinatorisch dargestellt;

IV.) $y = \overset{n}{\mathcal{C}\omega} \left\{\frac{x \equiv d_\varrho}{0}\right\}_{\beta_{2\varrho-1}}^{\beta_{2\varrho}}$; als Gleichung eines Systems von n senkrechten begrenzten Linien.

So ist z. B. die Gleichung der in Fig. 4 dargestellten 3 Senkrechten nämlich AB, DC, EF, die folgende, nämlich:

$$1.)\ y = \left\{\frac{x \equiv 5}{0}\right\}_{3}^{8} \omega \left\{\frac{x \equiv d}{0}\right\}_{-2}^{5} \omega \left\{\frac{x \equiv 8}{0}\right\}_{-3}^{-5};$$

Durch diese mit der Natur der Sache so sehr zusammenhängende Bezeichnungsweise wird mithin alles angedeutet, was überhaupt zur genauen Kenntniss eines solchen begrenzten Perpendikels gehört, seine Lage und seine Länge.

§. 15.

3. *Aufgabe.* Es soll die Gleichung eines Systems begrenzter Linien gefunden werden, welche mit der Abscissenachse parallel laufen?

Die Gleichung einer mit der Abscissenachse parallel laufenden Geraden wird bekanntlich unter der Form $y = \delta$ vorgestellt, wobei δ den senkrechten Abstand sämmtlicher Punkte der Linie von der Abscissenachse bezeichnet. Zu unserem Zwecke ist es jedoch vortheilhafter, die Ordinate y unter der Form einer scheinbaren Funktion von x darzustellen, und zwar: $y = \delta x^0$ zu schreiben.

Ist die Parallele begrenzt, so hat man: $y = \left\{\delta x^0\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$; welche mithin die Gleichung einer begrenzten zur Achse X parallel laufenden Linie ist.

Für n solche Linien hat man daher die Gleichung:

$$y = \left\{\delta_1 x^0\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2} \omega \left\{\delta_2 x^0\right\}_{\alpha_3}^{\alpha_4} \omega \left\{\delta_3 x^0\right\}_{\alpha_5}^{\alpha_6} \omega \ldots . \left\{\delta_4 x^0\right\}_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} ;$$

und combinatorisch:

V.) $y = \overset{n}{\underset{,}{C\omega}} \left\{\delta_{\varrho} x^0\right\}_{\alpha_{2\varrho-1}}^{\alpha_{2\varrho}}$; als Gleichung eines Systems von n begrenzten zur Abscissenachse parallel laufender Linien.

So ist z. B. die Gleichung der in Fig. 5 dargestellten drei Parallellinien die folgende:

$$1.)\ y = \left\{5\, x^0\right\}_{3}^{8} \omega \left\{9\, x^0\right\}_{-4}^{5} \omega \left\{2\, x^0\right\}_{1}^{7} .$$

§. 16.

4. *Aufgabe.* Es ist die Gleichung eines Systems von Punkten zu finden?

Obgleich nach dem Vorhergehenden jede krumme oder gerade Linie zur Lösung dieser Aufgabe benützt werden könnte, so gewähren doch nachfolgende drei Annahmen die grösste Einfachheit, u. z.

1.) dass der den Coordinaten α und β entsprechende Punkt, ein Punkt einer senkrechten Linie sei, und daher dessen Gleichung:

$$y = \left\{\frac{x \equiv \alpha}{0}\right\}_{\beta}^{\beta}\varrho\ ; \text{ und für } n \text{ Punkte:}$$

IV. $y = \overset{n}{\underset{,}{C\omega}} \left\{\frac{x \equiv \alpha}{0}\right\}_{\beta_\varrho}^{\beta}\varrho$; als Gleichung eines Systems von n Punkten.

Liegen die Punkte sämmtlich in einem Perpendikel, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, und somit hat man diessfalls:

$$y = \overset{n}{\underset{,}{C\omega}} \left\{\frac{x \equiv \alpha\varrho}{0}\right\}_{\beta_\varrho}^{\beta}\varrho .$$

2.) Dass jener Punkt einer zur Abscissenachse parallel gezogenen Linie angehöre, und ihm daher die Gleichung:

1.) $y = \left\{\beta x^0\right\}_{\alpha}^{\alpha}$ zugehöre, und daher allgemein für n Punkte:

VII.) $y = \underset{\alpha}{\overset{n}{\mathcal{C}\omega}} \left\{\beta_{\varrho} x^0\right\}_{\overset{\alpha}{\varrho}}^{\underset{\varrho}{\alpha}}$; eine 2. Gleichung für ein System von n Punkten.

Liegen jene Punkte alle in einer und derselben parallelen Linie, so ist $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots . \beta_n$, und somit hätte man:

$$1.)\ y = \overset{n}{\mathcal{C}\omega} \left\{\beta x^0\right\}_{\overset{\alpha}{\varrho}}^{\underset{\varrho}{\alpha}}.$$

3.) Dass man diesen Punkt so betrachten könne, als läge er in der durch den Ursprung gehenden Geraden: $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, und in Folge dessen hat man als eine dritte Gleichung des Punktes:

$y = \left\{\frac{\beta}{\alpha} x\right\}_{\alpha}^{\alpha}$; in dieser Gleichung erhält man für $x = \alpha$, $y = \beta$, wie es auch sein muss. Für n solche Punkte combinatorisch dargestellt hat man somit:

VIII.) $y = \overset{n}{\mathcal{C}\omega} \left(\frac{\beta_{\varrho}}{\alpha_{\varrho}} x\right)_{\overset{\alpha}{\varrho}}^{\underset{\varrho}{\alpha}}$; als 3. Gleichung eines Systems von n Punkten.

Die 3 Punkte, wie sie Fig. 6 zeigt, werden durch nachfolgende drei Gleichungen, dem oben Gesagten gemäss analytisch ausgedrückt:

$$1.)\ y = \left\{\frac{x \equiv 5}{0}\right\}_{3}^{3} \omega \left\{\frac{x \equiv 8}{0}\right\}_{-5}^{-5} \omega \left\{\frac{x \equiv 2}{0}\right\}_{4}^{4};\ \text{oder}$$

$$2.)\ y = \left\{3 x^0\right\}_{5}^{5} \omega \left\{-5 x^0\right\}_{8}^{8} \omega \left\{4 x^0\right\}_{2}^{2};\ \text{oder endlich:}$$

$$3.)\ y = \left\{\tfrac{3}{5} x\right\}_{5}^{5} \omega \left\{-\tfrac{5}{8} x\right\}_{8}^{8} \omega \left\{2 x\right\}_{2}^{2}.$$

Von diesen nur der Form nach verschiedenen Gleichungen, werden wir insbesonders von der dritten einen häufigeren Gebrauch machen. Alle drei Gleichungen kommen darin überein, dass von allen denkbaren Werthen von x, bloss die Substitutionen von $x = 5$, $x = 8$, $x = 2$, mögliche Werthe für y darbiethen und zwar beziehungsweise $y = 3$, $y = -5$, $y = 4$.

§. 17.

5. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung eines oder mehrerer Systeme von begrenzten Parallellinien suchen?

Die Gleichung von n Parallellinien ist wegen $U_1 = U_2 = U_3 = \ldots . U_n$ offenbar:

$$y = \left\{ U_1 x + V_1 \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2} \omega \left\{ U_1 x + V_2 \right\}_{\alpha_3}^{\alpha_5} \omega \left\{ U_1 x + V_3 \right\}_{\alpha_6}^{\alpha_7} \omega \left\{ U_1 x + V_4 \right\}_{\alpha_8}^{\alpha_9} \omega \ldots . \left\{ U_1 x + V_n \right\}_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}};$$

oder combinatorisch:

IX.) $y = \overset{n}{\underset{,}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_1 x + V_\varrho \right\}_{\alpha_{2\varrho-1}}^{\alpha_{2\varrho}}$; als allgemeine Gleichung eines Systems von Parallellinien.

Sind diese Linien gleichweit abstehend und ist ihr senkrechter Abstand $= \delta$, ferners ihr Neigungswinkel zur Achse $X = \varepsilon$, so hat man wegen: $V_2 = V_1 + \triangle V_1$; $V_3 = V_1 + 2 \triangle V_1$; $V_4 = V_1 + 3 \triangle V_1$ u. s. w. und da offenbar $\triangle V_1 = \frac{\delta}{Cos\ \varepsilon}$ ist, so hat man sofort:

X.) $y = \overset{n}{\underset{,}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_1 x + V_1 + \frac{(\varrho-1)\,\delta}{Cos\ \varepsilon} \right\}_{\alpha_{2\varrho-1}}^{\alpha_{2\varrho}}$; als Gleichung eines Systems von n aequidistanten Parallellinien.

Werden mehrere z. B. q Systeme von parallelen Linien im Coordinatensysteme als zugleich vorhanden und dergestalt angenommen, dass das eine System aus m, das andere aus n, ein drittes aus p Linien u. s. w. besteht, so hat man unleugbar die Gleichung:

$$y = \overset{m}{\underset{,}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_1 x + V_1 + \frac{(\varrho-1)\,\delta_1}{Cos\,\varepsilon_1} \right\}_{\alpha^1_{2\varrho-1}}^{\alpha^1_{2\varrho}} \omega \overset{n}{\underset{,}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_2 x + V_2 + \frac{(\varrho-1)\,\delta_2}{Cos\,\varepsilon_2} \right\}_{\alpha^2_{2-\varrho}}^{\alpha^2_{\varrho}} \omega \overset{p}{\underset{,}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_3 x + V_3 + \frac{(\varrho-1)\,\delta_3}{Cos\,\varepsilon_3} \right\}_{\alpha^3_{2\varrho}}^{\alpha^3_{2\varrho}} \omega \ldots . \overset{t}{\underset{,}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_q x + V_q + \frac{(\varrho-1)\,\delta_q}{Cos\,\varepsilon_q} \right\}_{\alpha^q_{2\varrho-1}}^{\alpha^q_{2\varrho}};$$

und diese Gleichung abermals combinatorisch dargestellt, liefert somit den Ausdruck:

XI.) $y = \overset{q.\,\psi}{\underset{1.\,\psi}{\mathfrak{C}}} \cdot \overset{(n, m, p \ldots . t)\,\varrho}{\underset{1.\,\varrho}{\mathfrak{C}}} \left\{ U_\psi x + V_\psi + \frac{(\varrho-1)\,\delta_\psi}{Cos\,\varepsilon_\psi} \right\}_{\alpha^{(\psi)}_{2\varrho-1}}^{\alpha^{(\psi)}_{2\varrho}}$;

welches die Gleichung von q Systemen von Parallellinien ist, wovon n, sodann m, p, t, zu einander parallel laufen.

Als numerisches Beispiel mögen die zwei Systeme von parallelen Linien in Fig. 7 dienen, deren Gleichung die folgende ist

$$y = \left\{ 3x + 7 \right\}_{1}^{3} \omega \left\{ 3x + 1 \right\}_{-2}^{2} \omega \left\{ 3x + 4 \right\}_{2}^{4} \omega \left\{ -2x + 3 \right\}_{2}^{5} \omega \left\{ -2x + 7 \right\}_{1}^{6} \omega \left\{ -2x + 8 \right\}_{3}^{7};$$

§. 18.

6. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung eines Systems von u begrenzten Linien suchen, die auf einer gegebenen Linie senkrecht stehen?

Es sei die Gleichung derjenigen Linie, auf welcher ein System von Linien senkrecht stehen soll:

$y = Ux + V$; jede andere Linie, die auf dieser senkrecht steht, hat somit die Form:

$y = -\frac{1}{U}x + V_1$; und somit das System:

$$y = \left\{-\frac{1}{U}x + V_1\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2} \omega \left\{-\frac{1}{U}x + V_2\right\}_{\alpha_3}^{\alpha_4} \omega \left\{-\frac{1}{U}x + V_3\right\}_{\alpha_5}^{\alpha_6} \omega \ldots\ldots \left\{-\frac{1}{U}x + V_n\right\}_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}};$$

und combinatorisch dargestellt:

XII.) $y = \overset{n}{\underset{\alpha_{2\varrho-1}}{\mathfrak{C}}} \left\{-\frac{1}{U}x + V_\varrho\right\}^{\alpha_{2\varrho}}$; als Gleichung eines Systems von n Geraden, welche auf einer Linie senkrecht stehen.

Als spezielles Beyspiel mögen die in Fig. 8 dargestellten Linien dienen, welchen nachfolgende Gleichung entspricht:

$y = \left\{-\frac{1}{4}x + 7\right\}_2^{10} \omega \left\{-\frac{1}{4}x + 10\right\}_{\frac{1}{2}}^{7} \omega \left\{-\frac{1}{4}x + 2\right\}_1^{6} \omega \left\{4x + 3\right\}_1^{2}$; wobei die ersteren drei zu einander parallel laufen und auf der letzten senkrecht stehen.

§. 19.

7. *Aufgabe.* Man soll die allgemeine Gleichung eines Systems von n begrenzten Linien finden, von denen je zwei immer senkrecht auf einander stehen?

Da die Gleichungen je zweier Linien, die auf einander senkrecht stehen, offenbar:

$y = U_1 x + V_1$ und $= -\frac{1}{U_1}x + V_2$ sind: so kann man je zwei solche Gleichungen unter dem allgemeinen combinatorischen Ausdrucke:

$y = \overset{2}{\underset{\alpha_{2\varrho-1}}{\mathfrak{C}}} \left\{(U_1)^{2\varrho-3}(-1)^{\varrho}x + V_\varrho\right\}^{\alpha_{2\varrho}}$; zusammenfassen.

Hat man ein System solcher auf einander senkrecht stehender Linien d. h. ist:

$$y = \overset{2}{\underset{\alpha_{2\varrho-1}}{\mathfrak{C}}}\left\{(U_1)^{2\varrho-3}(-1)^{\varrho} + V_1^{(\varrho)}\right\}^{\alpha_{2\varrho}} \omega\, \overset{2}{\mathfrak{C}}\left\{(U_2)^{2\varrho-3}(-1)^{\varrho} + V_2^{(\varrho)}\right\} \omega\, \overset{2}{\mathfrak{C}}\left\{(U_3)^{2\varrho-3}(-1)^{\varrho} + V_3^{(\varrho)}\right\} \omega \ldots\ldots$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}\left\{(U_n)^{2\varrho-3}(-1)^{\varrho}x + V_n^{(\varrho)}\right\};$$

somit durch eine nochmalige combinatorische Zusammenziehung;

$$\text{XIII.)}\ y = \mathop{\mathcal{C}}\limits_{1.\psi}^{n.\psi} . \mathop{\mathcal{C}}\limits_{1.\varrho}^{2.\varrho} \left\{ \binom{U}{\psi}^{2\varrho-3} (-1)^{\varrho} x + \underset{\varrho}{V(\psi)} \right\}_{\substack{\alpha \\ 2\varrho+2\psi-3}}^{\substack{\alpha \\ 2\varrho+2\psi-2}}$$

; und diess ist die Gleichung eines Systems von n Geraden, wovon immer je zwei senkrecht auf einander stehen, ohne dass im Allgemeinen mehrere derselben parallel laufen.

§. 20.

8. *Aufgabe.* Man suche die Gleichung eines Systems von n begrenzten Linien, welche von einem gegebenen Punkte aus divergiren?

Es seien die Coordinaten dieses Punktes α, β, so ist bekanntlich die Gleichung einer Geraden, die durch diesen Punkt geht:

$$y = \left\{ Ux + \underset{1}{\beta} - \underset{1}{\alpha} U \right\}$$

, und wenn die Linie von dem genannten Punkte ausgeht, d. h. mit ihm anfängt, so hat sie offenbar zum unteren Grenzwerthe $\underset{\cdot}{\alpha}$; folglich ein System solcher Linien:

$$y = \left\{ \underset{1}{U}x + \underset{1}{\beta} - \underset{1}{\alpha}\underset{1}{U} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\overset{\alpha}{2}} \omega \left\{ \underset{2}{U}x + \underset{2}{\beta} - \underset{1}{\alpha}\, \underset{2}{U} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\overset{\alpha}{3}} \omega \left\{ \underset{3}{U}x + \underset{1}{\beta} - \underset{1}{\alpha}\, \underset{3}{U} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\overset{\alpha}{4}} \omega \ldots\ldots \left\{ \underset{n}{U}x + \underset{1}{\beta} - \underset{1}{\alpha}\, \underset{n}{U} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\overset{\alpha}{n-1}};$$

und combinatorisch:

$$1.)\ y = \mathop{\mathcal{C}}\limits^{n} \left\{ \underset{\varrho}{U}x + \underset{1}{\beta} - \underset{1}{\alpha}\, \underset{\varrho}{U} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\overset{\alpha}{\varrho+1}}$$

; als Gleichung eines Systems convergirender Linien.

Sind solcher q Systeme zugleich vorhanden, d. h. hat man:

$$y = \mathop{\mathcal{C}}\limits^{n} \left\{ \underset{\varrho}{U}x + \underset{1}{\beta} - \underset{\varrho}{U}\, \underset{1}{\alpha} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha}}^{\overset{\alpha}{\varrho+1}} \omega \mathop{\mathcal{C}}\limits^{m} \left\{ \underset{\varrho}{U'}x + \underset{2}{\beta} - \underset{\varrho}{U'}\, \underset{2}{\alpha} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha'}}^{\overset{\alpha'}{\varrho+1}} \omega \ldots\ldots \mathop{\mathcal{C}}\limits^{t} \left\{ \underset{\varrho}{U^{q}}x + \underset{q}{\beta} - \underset{\varrho}{U^{q}}\, \underset{q}{\alpha} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha^{q}}}^{\overset{\alpha^{q}}{\varrho+1}};$$

und combinatorisch;

$$\text{XIV.)}\ y = \mathop{\mathcal{C}}\limits_{1.\psi}^{q.\psi} . \mathop{\mathcal{C}}\limits_{1.\varrho}^{(n,m,p,\ldots.t)\varrho} \left\{ \overset{\psi}{\underset{\varrho}{U}}x + \underset{\psi}{\beta} - \overset{\psi}{\underset{\varrho}{U}}\, \underset{\psi}{\alpha} \right\}_{\underset{\cdot}{\alpha^{\psi}}}^{\overset{\alpha^{\psi}}{\varrho+1}}$$

; als Gleichung von q Systemen divergirender Linien.

Die Gleichung der in Fig. 9 vorgestellten Linien ist die folgende:

wobei $\underset{1}{U} = -2$ $\quad \underset{2}{U} = 5$

$\underset{1}{\alpha} = 3$ $\quad \underset{3}{U} = \frac{1}{2}$;

$\underset{1}{\beta} = 7$

$$y = \left\{ -2x + 13 \right\}_{3}^{8} \omega \left\{ 5x - 8 \right\}_{3}^{1} \omega \left\{ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{11}{2} \right\}_{3}^{5};$$

§. 21.

9. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung eines Systems von n Kreisbögen oder ganzen Kreisen finden?

Da die allgemeine Gleichung eines Kreises: $y = \delta \pm \sqrt{r^2 - (x-d)^2}$ ist, wobei d und δ die Coordinaten des Mittelpunktes sind, so hat man als Gleichung eines begrenzten Bogens:

$$y = {}_{\alpha}\left\{\delta \pm \sqrt{r^2 - (x-d)^2}\right\}^{\alpha_1}, \text{ und somit für } n \text{ Kreisbögen:}$$

$$\text{XV.)}\quad y = \mathop{\mathcal{C}\omega}_{,}^{n} {}_{\alpha_\rho}\left\{\delta_\rho \pm \sqrt{r_\rho - (x - d_\rho)^2}\right\}^{\alpha_{\rho+1}}$$

; als Gleichung eines Systems begrenzter Kreisbögen.

Ferners könnte man genau nach der bezeichneten Weise und mit gleicher Leichtigkeit die Gleichung eines Systems von elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bögen von bestimmter Begrenzung oder auch von Theilen irgend einer transcendenten Curve aufstellen. — Wir wollen uns jedoch darauf beschränken, zum Schlusse dieser, für die folgenden Untersuchungen so wichtigen Probleme, noch nachstehende Aufgabe aufzulösen:

§. 22.

10. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung für sämmtliche Scheitelpunkte oder Ecken eines regulären Polygons von n Seiten finden?

Bezeichnet man durch d und δ die Coordinaten des Mittelpunktes von dem um das reguläre Vieleck beschriebenen Kreise, ferners mit r den Radius dieses Kreises, mit s den Abstand je zweier solcher Punkte oder die Polygonsseite, und nennt man endlich den Winkel, welchen der Radius, der zu irgend einer Ecke gezogen ist, mit der Achse X macht: ω; so hat man nach bekannten Gründen:

$$\left\{\begin{aligned} {}^{\alpha}_{\rho} &= \mathop{\mathcal{C}\omega}_{,}^{n}\left\{d + r\,Cos\left(\omega + \frac{2\rho\pi}{n}\right)\right\} \\ {}^{\beta}_{\rho} &= \mathop{\mathcal{C}\omega}_{,}^{n}\left\{\delta + r\,sin\left(\omega + \frac{2\rho\pi}{n}\right)\right\} \end{aligned}\right\}$$

oder auch wegen $r = \dfrac{s}{2\,sin\,\frac{\pi}{n}}$:

$$\left\{\begin{aligned} {}^{\alpha}_{\rho} &= \mathop{\mathcal{C}\omega}_{,}^{n}\left\{d + \frac{s}{2\,sin\,\frac{\pi}{n}}\,Cos\left(\omega + \frac{2\rho\pi}{n}\right)\right\} \\ {}^{\beta}_{\rho} &= \mathop{\mathcal{C}\omega}_{,}^{n}\left\{\delta + \frac{s}{2\,sin\,\frac{\pi}{n}}\,sin\left(\omega + \frac{2\rho\pi}{n}\right)\right\} \end{aligned}\right\}$$

; setzt man der Kürze wegen $\left(\omega + \frac{2\rho\pi}{n}\right) = {}^{n}_{\rho}$; so erhält man nach Formel VII.):

$$\text{XVI.)}\quad y = \mathcal{C}^{n}\left\{\left(\delta + \frac{s \sin n\varrho}{2 \sin \frac{\pi}{n}}\right) x^{0}\right\}^{\left(d + \frac{\cos n\varrho}{2 \sin \frac{\pi}{n}}\right)}_{\left(d + \frac{s \cos n\varrho}{2 \sin \frac{\pi}{n}}\right)}$$; als Gleichung der n Polygonsecken.

Da nun jede geometrische Zeichnung, sie betreffe nun einen Gegenstand der Mechanik oder der Architektur, offenbar bloss aus Systemen paralleler, senkrechter oder divergirender gerader Linien von bestimmter Länge, aus Kreisen oder deren Bögen und höchstens zuweilen auch aus Kegelschnittslinien oder einzelnen Stücken derselben besteht, diese aber, wie im gegenwärtigen Abschnitte gezeigt wurde, sich ganz leicht und einfach darstellen lassen: so dürfte sich hieraus zur Genüge ergeben, dass die allgemeine Gleichung eines auch noch so sehr zusammengesetzten geometrischen Planes unter einer verhältnissmässig sehr einfachen Form auftritt, und dass man mittelst solcher Gleichungen, wenn die speziellen Werthe in einer kleinen Tabelle beigefügt werden, alle Probleme, die sich auf zusammengesetzte und willkührlich begrenzte Figuren beziehen, mit derselben Leichtigkeit und nach denselben Grundsätzen werde sofort analytisch zu behandeln vermögen, welche man bis jetzt nur auf die sich selbst begrenzenden, sogenannten continuirlichen Funktionen anzuwenden gewohnt war.

Ich halte es endlich für nicht unnöthig zu bemerken, dass die combinatorische Darstellung eines Systems von Gleichungen nicht nur den schon an und für sich erheblichen Vortheil einer einfacheren und in allen Fällen vollkommen bestimmten Bezeichnung, sondern den noch wichtigeren einer jedenfalls kürzeren Rechnung gewährt, indem jede Rechnungs-Operation, die sonst mit jeder Gleichung einzeln vorgenommen werden müsste, hierdurch sich nur auf eine einmalige allgemeine Auflösung und nachherige Substitution reducirt.

Da wir nun nach den bisher gepflogenen Betrachtungen, nicht nur begrenzte und mannigfaltig zusammengesetzte Figuren mittelst Gleichungen analytisch darzustellen vermögen, sondern auch eine beliebige Anzahl derselben, als gleichzeitig im Coordinaten-Systeme vorhanden, bei verschiedenen Problemen in die Rechnung einzuführen genöthigt werden: so sieht man sich nicht selten veranlasst, die Lage oder Stellung der einen oder andern Figur bei ungeänderter Lage der übrigen beliebig abzuändern, oder selbst auch den Theilen einer und derselben Figur beliebige Orte anzuweisen. In allen diesen Fällen reichen die gewöhnlichen Formeln für die Transformation der Coordinaten nicht mehr aus, wenn man nicht zu den unnatürlichsten und gezwungensten, jeder klaren Einsicht entbehrenden Vorstellungsweisen seine Zuflucht nehmen will, und es stellt sich hieraus die unabweisliche Forderung fest, eine zweckmässige Methode anzugeben, genannte Transformationen bei stets klarer Einsicht in den Vorgang der Rechnung vorzunehmen.

Da ich nun die innige Ueberzeugung hege, dass, selbst abgesehen von den oben gestellten Forderungen, die im folgenden Abschnitte erfasste Ansicht sowohl, als die sich hieraus ergebenden Formeln, vorzüglich wenn man die Anwendbarkeit dieser Ansicht auf

Transformationen im Raume bedenkt, offenbar einen entschiedenen Vorzug vor den bis jetzt gebräuchlichen besitzen: so muss ich wohl sehr wünschen, dass dieser Punkt nicht unbeachtet und unbesprochen bleiben möchte.

IV. Abschnitt.

A.) Von der Dislocation und Transfiguration, und

B.) von der Transformation oder Umstaltung des Coordinaten-Systems in der Ebene.

§. 23.

Wenn Punkte, Linien und Figuren oder auch Zusammenstellungen aus ihnen d. h. ganze Systeme derselben ihre Lage gegen das ursprünglich als fix angenommene Coordinaten-System ändern, so behalten sie entweder ihre frühere Stellung gegen einander bei, oder sie ändern zugleich alle oder auch nur einige von ihnen ihre Lage gegen einander. Die zuerst erwähnte Veränderung der Figuren im Coordinatensysteme wollen wir Dislocation oder Ortsveränderung, jene zweite hingegen, da sie in der That eine Formänderung der Figur oder des Systems nothwendig zur Folge hat, die Transfiguration nennen. Es ist einleuchtend, dass sowohl das Problem der Dislocation als jenes der damit verwandten Transfiguration von der Art und Weise, wie die Coordinaten gezählt werden, und ob man sich der rechtwinklichten, schiefwinklichten oder Polar-Coordinaten bediene, völlig unabhängig ist. — So kann man sich z. B. ein Polygon, wie etwa ein Rechteck oder mehrere zu einander parallel laufende begrenzte gerade Linien, die in irgend einem Coordinatensysteme gedacht werden, von ihrer anfänglichen Stelle weggerückt und in was immer für eine andere Lage gebracht denken, ohne nothwendig die Form jenes Rechteckes oder die Lage der Parallellinien gegen einander ändern zu müssen. Es kann aber auch andererseits jene vierseitige Figur, ohne als Ganzes ihren Ort zu verändern, dennoch durch eine theilweise Verschiebung ihrer Seiten, wodurch sie z. B. in ein Rhomboid oder gar in eine eingeschlossene Figur aufgelöst und verwandelt würde, — oder jene Parallellinien, indem sie ihre parallele Lage in eine divergente verwandeln, offenbar eine Formänderung erleiden. Sowohl die eine als die andere Veränderung kann an Figuren gedacht und vorgenommen werden, ohne auch nur im Geringsten eine Aenderung in der Lage der Coordinaten gegen einander nothwendig voraussetzen zu müssen.

Man pflegt zwar allenthalben das Problem der Dislocation (denn der Transfiguration bedurfte man bis jetzt nicht) mit jenem für die Aenderung der Lage der Coordinaten unter der gemeinschaftlichen Benennung der Transformation des Coordinatensytems zusammen zu fassen, wobei man von der Ansicht ausgeht, dass jede Aenderung in der Lage einer Figur gegen das Coordinatensystem sich auch umgekehrt durch eine Umlegung oder Verlegung des Coordinatensystems herbeiführen lasse.

Abgesehen aber von dem Umstande, dass eine solche erkünstelte Vorstellungsweise eine minder deutliche Einsicht gewährt, ja sogar mit der gewöhnlich stillschweigend vorausgesetzten Annahme feststehender Coordinaten-Achsen gewissermassen im Widerspruche steht, ist sie noch überdiess in allen jenen Fällen unzureichend und unbrauchbar, wo einzelne Figuren oder deren Theile ihre Lage gegen einander ändern sollen. Die verschiedenen Probleme, die ich hier vorzulegen gedenke, machen es daher nicht nur räthlich, sondern sogar unerlässlich, die genannten zwei Probleme als von einander unabhängig zu betrachten, und die Dislocation und Transfiguration getrennt von der Transformation der Coordinaten im engeren Sinne abzuhandeln.

§. 24.

Wenn ein System von Linien oder irgend eine Figur in der Ebene sich um einen beliebigen mit dem Systeme in fester Verbindung gedachten unveränderlichen Punkt dreht, so bemerkt man zwei Eigenthümlichkeiten, welche bei genauerer Betrachtung als nothwendige Eigenschaften einer solchen Drehung angesehen werden müssen. Es ist nämlich erstlich gar bald ersichtlich und kann jedenfalls durch eine ganz einfache geometrische Construction erwiesen werden, dass in welchem Sinne die Drehung auch erfolgen, und wie gross oder klein auch der Drehungswinkel sein möge, die Winkel sämmtlicher festverbundener Geraden, die sie mit der Abscissenachse machen, um denselben Winkel wachsen oder abnehmen, und dass dieses in Beziehung auf Curven von jedem Linienelemente oder vielmehr von den Tangenten sämmtlicher Punkte zu gelten habe. — Die andere der erwähnten Eigenschaften, von welcher wir vorzugsweise Gebrauch zu machen gedenken, ist gleichfalls in der Natur einer derartigen Drehung gegründet, und besteht darin, dass begreiflicher Weise der Abstand eines jeden Punktes des Systems von dem Drehungspunkte bei jedem Drehungswinkel umgeändert derselbe bleibt.

Da nun jede Ortsveränderung als eine auf alle Theile einer Figur gleichförmig sich erstreckende Drehung und gleichzeitige Verlegung des Drehungspunktes betrachtet werden kann, jede Formänderung dagegen, genauer betrachtet, in nichts anderem, als in einer mehrfachen jedoch verschiedenen und auf einzelne Theile einer Figur sich erstreckende Ortsveränderung bestehen kann; so ersieht man hieraus, dass sich nach dieser Ansicht jede beliebige Stellung sowohl der Figuren und ihrer Theile unter einander, als auch gegen die Coordinatenachsen erzwecken lasse; ein Vortheil, den nur diese Betrachtungsweise des in Rede stehenden Gegenstandes darzubiethen vermag.

§. 25.

Um die Fundamental-Formeln für die beiden Probleme der Dislocation und Transfignration auf eine möglichst einfache Weise abzuleiten, wollen wir von der schon oben erwähnten Eigenschaft ausgehen, vermöge welcher jeder Punkt eines Systems bei jedem Drehungswinkel immer gleichen Abstand von dem Drehungspunkte behält und somit von selben ganz unabhängig ist.

Es sei Fig. 10, O irgend ein Punkt des Systems, dessen Coordinaten wir mit x, y bezeichnen wollen. Die Coordinaten des Drehungspunktes M in seiner anfänglichen Lage seien $AP = d$, $PM = \delta$; MR sei ferners mit der Abscissenachse parallel gezogen. Der Winkel, welchen die Verbindungslinie OM mit der Abscissenachse oder mit MR macht, heisse ω. Drehet sich nun das ganze System und somit auch der Punkt O um den Winkel ϱ, wodurch O z. B. nach O' kommt, so sind die neuen Coordinaten des Punktes O jene von O', d. h. wenn die neuen mit ξ und v bezeichnet werden, so hat man $v = O'Q'$; $\xi = AO'$.

Da nun aber, wie aus der Natur der Drehung folgt $OM = O'M$ sein muss, so ergeben sich hieraus nachfolgende Beziehungen:

$ON = O'M \sin(\omega + \varrho)$;
$MN = O'M \operatorname{Cos}(\omega + \varrho)$; ferners: $O'M = OM = \sqrt{(y-\delta)^2 + (y-d)^2}$; also durch Substitution:

$$O'N = \frac{\sin(\omega + \varrho)}{\sqrt{(y-\delta)^2 + (x-d)^2}}; \text{ und } \qquad MN = \frac{\operatorname{Cos}(\omega+\varrho)}{\sqrt{(y-\delta)^2 + (x-d)^2}}$$

Anderseits ist aber $tang\ \omega = \dfrac{y-\delta}{x-d}$; da nun

$$tang\,(\omega + \varrho) = \frac{tang\,\varphi + tang\,\varrho}{1 - tang\,\omega . tang\,\varrho} = \frac{(y-\delta) \operatorname{Cos}\varrho + (x-d)\sin\varrho}{(x-d)\operatorname{Cos}\varrho - (y-\delta)\sin\varrho};$$

Wegen: $$\sin(\omega+\varrho) = \frac{tang\,(\omega+\varrho)}{\sqrt{1 + tang\,(\omega+\varrho)^2}} = \frac{(y-\delta)\operatorname{Cos}\varrho + (x-d)\sin\varrho}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-\delta)^2}}$$

$$\operatorname{Cos}(\varphi + \varrho) = \frac{1}{\sqrt{1 + tang\,(\omega+\varrho)^2}} = \frac{(x-d)\operatorname{Cos}\varrho - (y-\delta)\sin\varrho}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-\delta)^2}}; \text{ und}$$

und hieraus findet man mittelst Zuziehung der Werthe für $O'N$ und MN,

$$O'N = (y-\delta)\operatorname{Cos}\varrho + (x-d)\sin\varrho; \text{ und } MN = (x-d)\operatorname{Cos}\varrho - (y-\delta)\sin\varrho.$$

Da nun offenbar wie die Figur zeigt: $\xi = d + NM$, und $v = \delta + O'N$, so hat man als die neuen Coordinaten des Punktes O:

$$\xi = d + (x-d)\operatorname{Cos}\varrho - (y-\delta)\sin\varrho; \text{ und } v = \delta + (y-\delta)\operatorname{Cos}\varrho + (x-d)\sin\varrho.$$

Verlegt man ferners noch vor oder nach der Drehung den Drehungspunkt M nach M' und bezeichnet man die Coordinaten von M' mit d' und δ', so wie die neuen dieser Aenderung entsprechenden des Punktes O'' mit x' und y'; so hat man wegen:

$$x' = \xi + d' - d; \text{ und } y' = v + \delta' - \delta, \text{ ganz allgemein:}$$

$$x' = d' + (x-d)\operatorname{Cos}\varrho - (x-\delta)\sin\varrho; \text{ und } y' = \delta' + (x-\delta)\operatorname{Cos}\varrho + (x-d)\sin\varrho;$$

und diess sind nun die gesuchten Ausdrücke für die neuen Coordinaten eines beliebigen Punktes nach erfolgter Drehung und gleichzeitiger Verlegung des Drehungspunktes.

Bestimmt man in obigen Ausdrücken $x'-d'$ und $y'-\delta'$ und multiplicirt sie mit den entsprechenden Werthen $\operatorname{Cos}\varrho$ und $\sin\varrho$, so erhält man durch Addition und Subtraction nebst den oben gefundenen im Systeme I.) dargestellten Gleichungen noch zwei andere Ausdrücke, welche in II. angeführt sind.

Die bisherige Betrachtung liefert daher folgende zwei Systeme von Gleichungen:

$$(A.)\ \text{I.)} \left\{\begin{array}{l} x' = d' + (x-d)\,Cos\,\varrho - (y-\delta)\,sin\,\varrho \\ y' = \delta' + (y-\delta)\,Cos\,\varrho + (x-d)\,sin\,\varrho \end{array}\right\};\ \text{und II.)} \left\{\begin{array}{l} x = d + (y'-\delta')\,sin\,\varrho + (x'-d')\,Cos\,\varrho \\ y = \delta + (y'-\delta')\,Cos\,\varrho - (x'-d')\,sin\,\varrho \end{array}\right\}$$

Ist daher $f\,(x,\,y) = O$ die Gleichung einer gegebenen Curve, so erhält man die Gleichung $f'\,(x',\,y') = O$, d. h. die Gleichung derselben Curve, jedoch in einer anderen Lage zum Coordinaten-Systeme, wenn man aus II) die entsprechenden Werthe für x und y in dieselbe setzt. Die Aehnlichkeit der in I. und II. aufgeführten Gleichungen mit jenen bekannten, für die Transformation eines rechtwinklichten Coordinaten - Systems in ein anderes ist nicht zu verkennen, obgleich sich dieselben nothwendig auch von jenen unterscheiden müssen.

§. 26.

Mittelst dieser Fundamentalformeln ist man nunmehr nicht nur in den Stand gesetzt, die einzelnen Figuren in eine beliebige Stellung gegen einander und zum Coordinatensysteme zu bringen, sondern selbst die einzelnen Theile einer Figur, wie die Folge zeigen wird, beliebig zu verstellen und somit ihre Form selbst zu verändern. Sie sind daher mit Recht als die Grundformeln für das Problem der Dislocation und Transfiguration anzusehen. Von den verschiedenen speziellen Fällen obiger Formeln scheinen mir die nachfolgenden die wichtigsten zu sein.

Wird der Ursprung des Coordinatensystems als anfänglicher Drehungspunkt angesehen, so hat man: $d = o$, und $\delta = o$, und demnach:

$$1.) \left\{\begin{array}{l} x' = d' + x\,Cos\,\varrho - y\,sin\,\varrho \\ y' = \delta' + y\,Cos\,\varrho + x\,sin\,\varrho \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} x = (y'-\delta')\,sin\,\varrho + (x'-d')\,Cos\,\varrho \\ y = (y'-\delta')\,Cos\,\varrho - (x'-d'\,sin\,\varrho \end{array}\right\};$$

und diese Gleichungen reichen für sich allein schon hin, der Figur jede beliebige Stellung gegen das Coordinatensystem zu geben. Die Grösse d und δ sind also willkührliche Grössen, welche nicht nur dazu dienen, die Translocation leichter auszuführen, sondern auch zur Vereinfachung der Rechnung verwendet werden können.

Setzt man auch noch $d' = o$ und $\delta' = o$, d. h. lässt man die Figur sich bloss um den Ursprung drehen, so erhält man:

$$2.) \left\{\begin{array}{l} x' = x\ Cos\,\varrho - y\,sin\,\varrho \\ y' = y\ Cos\,\varrho + x\,siu\,\varrho \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} x = y'\ sin\,\varrho + x'\ Cos\,\varrho \\ y = y'\ Cos\,\varrho - x'\ sin\,\varrho \end{array}\right\}$$

findet keine Verlegung des Drehungspunktes statt, so hat man $d' = d$ und $\delta = \delta'$ zu setzen. Für die 4 Hauptwerthe des Drehungswinkels, d. i. für $\varrho = 90^0$, 180^0, 270^0, 360^0 erhält man nachstehende Ergebnisse, von deren Richtigkeit man sich durch einen Blick auf die Zeichnung leicht überzeugen kann. Es ist nämlich für

$$3.)\quad \overset{\varrho=90^0}{\begin{cases} x'=d+\delta-y \\ y'=\delta-d+x \end{cases}};\quad \overset{\varrho=180^0}{\begin{cases} x'=2d-x \\ y'=2\delta-y \end{cases}};\quad \overset{\varrho=270^0}{\begin{cases} x'=d-\delta+y \\ y'=\delta-d+x \end{cases}};\quad \overset{\varrho=360^0}{\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}}$$

Der Fall, wenn der Drehungspunkt in einem Punkte des Umfanges oder gar in dem Anfangs- oder Endpunkte einer Polygonsseite liegt, soll weiter unten gelegenheitlich besprochen werden.

§. 27.

Ist nun die Gleichung irgend einer Curve $f(x, y) = o$ gegeben, und soll dieselbe in eine andere Lage gegen das Coordinatensystem gebracht werden, so erhält man, wie schon gesagt, die entsprechende Gleichung, indem man für x und y aus II. die Werthe setzt. Ist aber die Figur begrenzt und ihre Gleichung z. B. $y = \Big\{f(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$; so könnte man leicht, da die Grenzen sich gleichfalls ändern müssen, und α und α' gewissermassen spezialisirte x vorstellen, zu der irrigen Meinung verleitet werden, dass für die Grenzwerthe α und α' die entsprechenden Werthe gleichfalls aus der ersten Gleichung des Systems II. zu setzen seien. Nach einiger Ueberlegung überzeugt man sich indess leicht, dass dieses hier durchaus nicht geschehen dürfe, sondern dass man sich in Bezug auf die Grenzwerthe der Gleichungen des Systems I. bedienen müsse. Die in II. aufgestellten Gleichungen dienen demnach für die Translocation selbst, jene in I. dagegen für die Grenzwerthe $\alpha, \alpha', \beta, \beta$. — Das so eben Erwähnte verdient daher eine besondere Beachtung.

In allen Formeln dieses Abschnitts wurden ferners die Grössen d, δ, d' und δ', nämlich die Coordinaten des anfänglichen und des verlegten Drehungspunktes als konstante und von einander völlig unabhängige Bestimmungsstücke angesehen und als solche in die Rechnung eingeführt. Man kann sie aber auch, ganz begreiflich, als von einander abhängig betrachten und den Untersuchungen dadurch eine bedeutend grössere Mannigfaltigkeit geben. So kann man z. B. festsetzen, dass der anfängliche Drehungspunkt stets ein Punkt einer gewissen Curve $\varphi(x, y) = o$ sein soll, in welchem Falle man obigen Gleichungen noch die Gleichung $\varphi(d, \delta) = o$ beizufügen hätte. Ein Gleiches kann auch rücksichtlich der Grössen d' u. δ' angenommen werden, und im Allgemeinen kann noch jede Verbindung zwischen dreien oder vieren der genannten Grössen als Bedingungsgleichung angenommen werden. Im folgenden Abschnitte soll von diesen Bemerkungen Anwendung gemacht werden.

§. 28.

Um nun die mit einer Gleichung in Folge einer Dislocation vorzunehmende Veränderung ganz einfach und auf eine vollkommen bestimmte Weise anzuzeigen, wollen wir uns des Zeichens $\underset{d,\,\delta}{\overset{d',\,\delta'}{\mathbf{L}}}\varphi$ bedienen, wo die Buchstaben d und δ als die Coordinaten des anfänglichen Drehungspunktes stets unten, so wie d', δ' als jene des bereits verlegten Drehungspunktes jederzeit oben geschrieben werden sollen, und der Drehungswinkel φ an dem bezeichneten Orte sich befindet.

Aus den in den früheren Paragraphen entwickelten Verhältnissen, so wie aus der Natur der Sache folgt sofort unwiderspreclilich, dass:

$$1.)\quad \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'} F(a,b,x) = F(a,b,\mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'}(x)) ;$$

$$2.)\quad \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'}\Big(\varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x)\,\omega\,\varphi''(x)\ldots\Big) = \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'}\varphi(\omega)\,\omega\,\mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'}\varphi'(x)\,\omega\,\mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'}\varphi''(x)\,\omega\ldots\ldots ;$$

und daher auch:

$$3.)\quad \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'} \overset{n}{\mathcal{CO}} \left\{f(x)\right\}^{\varrho+1}_{\alpha_\varrho} = \overset{n}{\mathcal{CO}} \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d,\delta}^{d',\delta'} \left\{f(x)\right\}^{\varrho+1}_{\alpha_\varrho} ;$$

ferners dass:

$$4.)\quad \mathop{L_{\varphi_1}}\limits_{d_2,\delta_2}^{d_3,\delta_3} \mathop{L_{\varphi_2}}\limits_{d_1,\delta_1}^{d_2,\delta_2}(\varphi(x)) = \mathop{L_{\varphi_1+\varphi_2}}\limits_{d_1,\delta_1}^{d_3,\delta_3}(\varphi(x)) ;$$

und demnach ganz allgemein:

$$5.)\quad \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d_{n-1}\,\delta_{n-1}}^{d_n\,\delta_n}\ \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d_{n-2}\,\delta_{n-2}}^{d_{n-1}\,\delta_{n-1}}\ \mathop{L_{\varphi}}\limits_{d_{n-3}\,\delta_{n-3}}^{d_{n-2}\,\delta_{n-2}}\ldots\ldots \mathop{L_{\varphi_1}}\limits_{d_1\,\delta_1}^{d_2\,\delta_2}\left\{\varphi(x)\right\} = \mathop{L_{\varphi_1+\varphi_2+\ldots\varphi_n}}\limits_{d_1\,\delta_1}^{d_n\,\delta_n}\left\{\varphi(x)\right\} ;$$

Wird endlich dieses Dislocationszeichen auf eine Gleichung mit mehr als einem Disjunctivgliede angewendet, so sind entweder die Grössen d, δ, d', δ' und ϱ bei allen einzelnen Gliedern dieselben oder sie sind verschieden. Der erstere Fall entspricht einer auf alle Theile des Systems sich in gleicher Weise erstreckenden Dislocation; im zweiten Falle hingegen tritt nothwendig eine Formänderung ein, und wir haben somit das, was wir die Transfiguration nannten. Im folgenden Abschnitte sollen für beide Fälle Beispiele vorkommen.

§. 29.

Das zweite der in diesem Abschnitte zu behandelnden Probleme ist jenes der sogenannten Transformation der rechtwinklichten Coordinaten in schiefwinklichte und umgekehrt, so wie die Einführung der Polar-Coordinaten. In beiden Fällen kann hier, ohne der Allgemeinheit im Geringsten Abbruch zu thun, angenommen werden, dass sowohl der Ursprung der Coordinaten als auch die Lage der Abscissenachse sich hierbei nicht ändern. Und in der That steht auch die Einführung schiefwinklichter oder anderer Coordinaten mit der Umlegung des ganzen Systems in gar keinem nothwendigen Zusammenhang. Bezeichnet man daher die Coordinaten des rechtwinklichten Systems mit x, y und jene des schiefwinklichten mit x', y', und den Winkel, welchen die neuen Ordinaten mit der Abscissenachse machen, mit φ, so hat man offenbar, wie eine einfache Verzeichnung zeigt:

$y' \sin\varphi = y$ und $x - x' = y' \operatorname{Cos}\varphi$; und hieraus:

$$\text{(B), I.)} \left\{ \begin{array}{l} x = x' + y' \operatorname{Cos}\varphi \\ y = y' \sin\varphi \end{array} \right\}; \text{ und umgekehrt: } \quad \text{II.)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - y \operatorname{Cotang}\varphi \\ y' = y \operatorname{cosec}\varphi \end{array} \right\};$$

mit welchen Formeln man für alle Fälle ausreicht. Wünscht man dagegen das Problem der Transformation der Coordinaten mit jenem für die Dislocation unter Einem aufgelöst, so erhält man die hierzu nöthigen Formeln, wenn man die so eben gefundenen Werthe für x, y; $x'. y'$; in die Gleichungen A., I. und II. substituirt. Die hieraus sich ergebenden Formeln sind folgende:

$$\text{(C.) I.)} \left\{ \begin{array}{l} x' = d' - \delta' \operatorname{Cotang}\varphi + (x - d) \dfrac{\sin(\varphi - \varrho)}{\sin\varphi} - (y - \delta) \dfrac{\operatorname{Cos}(\varphi - \varrho)}{\sin\varphi} \\ y' = \dfrac{\delta' + (x' - \delta) \operatorname{Cos}\varrho + (x - d) \sin\varrho}{\sin\varphi} \end{array} \right\};$$

$$\text{II.)} \left\{ \begin{array}{l} x = d + (x' - d) \operatorname{Cos}\varrho + y' \operatorname{Cos}(\varphi - \varrho) - \delta' \sin\varrho \\ y = \delta + \delta' \operatorname{Cos}\varrho - (x' - d') \sin\varrho + y' \sin(\varphi - \varrho) \end{array} \right\}.$$

Die Umwandlung der rechtwinklichten und schiefwinklichten Coordinaten in Polar-Coordinaten geschieht endlich mittelst der bekannten Formeln und bedarf hier keiner besondern Erwähnung.

§. 30.

Zum Schlusse dieses Abschnittes soll noch von der Beschränkung Erwähnung geschehen, vermöge welcher man bei Verbindung mehrerer Gleichungen mit einander unabweislich vorauszusetzen pflegt, dass sie sich sämmtlich auf dasselbe recht- oder schiefwinklichte Coordinatensystem beziehen. Wie wenig aber dieses ein nothwendiges Erforderniss zu ihrer Verbindung sei, dürfte sich schon aus folgenden ganz einfachen Betrachtungen, noch mehr aber aus einigen Aufgaben des nächsten Abschnitts ergeben.

Es sei die Gleichung der Curve AB Fig. 11; auf die angezeigten schiefwinklichten Coordinaten $\underset{1}{x}$ und $\underset{1}{y}$ bezogen, $\underset{1}{y} = f\left(\underset{1}{x}\right)$; und ebenso jene der Curve CD auf ein anderes schiefwinklichtes System bezogen $\underset{2}{y} = \varphi\left(\underset{2}{x}\right)$, so hat man, wenn y überhaupt den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Ordinaten vorstellt, nach unserer früheren Bezeichnungsweise:

$$y = f\left(\underset{1}{x}\right) \omega \varphi\left(\underset{2}{x}\right);$$

wo die nicht seitwärts sondern gerade unter die Abscissen x geschriebenen Indices anzeigen sollen, dass sowohl sie als auch die ihnen entsprechenden Ordinaten zu ganz verschiedenen Systemen gehören. Will man nun z. B. den Punkt finden, in welchem sich zwei solche Curven durchschneiden, so darf dieses begreiflich nicht auf die gewöhnliche Weise d. h. nicht zu Folge des Satzes geschehen, dass beide Curven für diesen Punkt gleiche Abscissen und Ordinaten besitzen, sondern es müssen die Bedingungen, unter welchen sich zwei Curven durchschneiden oder berühren können, insbesonders aufgesucht werden.

Ein Blick auf die Figur zeigt nun, dass, wenn die beiden Curven den Punkt M gemein haben sollen, nothwendig die Gleichungen:

$\left\{\begin{array}{l} x_2 - x_1 = y_1 \, Cos\, \gamma_1 - y_2 \, Cos\, \gamma_2 \\ y_1 \, sin\, \gamma_1 = y_2 \, sin\, \gamma_2 \end{array}\right\}$ statt finden müssen, wobei γ_1 und γ_2 die Neigungswinkel der Ordinaten zur gemeinschaftlichen Abscissenachse bezeichnen. Mit Zuziehung der beiden obigen Gleichungen erhält man somit als Bedingungsgleichungen eines Durchschnittes:

$\left\{\begin{array}{l} x_2 - x_1 = f\left(x_1\right) \, Cos\, \gamma_1 - \varphi\left(x_2\right) \, Cos\, \gamma_2 \\ f\left(x_1\right) \, sin\, \gamma_1 = \varphi\left(x_2\right) \, sin\, \gamma_2 \end{array}\right\}$; woraus man jederzeit die beiden Werthe x_1 und x_2 und mittelst ihrer sodann auch noch y_1 und y_2 finden kann.

Diese Gleichungen zeigen nun, und es ist in der That sehr begreiflich, dass es völlig gleichgiltig für das Resultat der Rechnung ist, ob man die zu verbindenden Gleichungen früher auf ein gemeinschaftliches Coordinatensystem bringt, oder ob man diese ungeändert lässt und dagegen die Bedingungsgleichungen der analytischen Beziehungen mittelst der bekannten Formeln transformirt. Dass aber letztere Methode öfters die Behandlung eines Problems ungemein erleichtert, soll gleichfalls im folgenden Abschnitte nachgewiesen werden.

V. Abschnitt.

Anwendung der so eben angestellten Betrachtungen auf einige Probleme der Dislocation und Transfiguration.

§. 31.

1. *Aufgabe.* Eine Gerade drehe sich um einen ausserhalb liegenden Punkt, indem sie zugleich mit ihrem Drehungspunkte ihren Ort verändert. Man suche aus dem gegebenen Drehungswinkel, den Coordinaten des anfänglichen und des verlegten Drehungspunktes sowie der gegebenen Gleichung der Geraden, die Gleichung dieser Geraden in ihrer neuen Stellung? —

Es sei Fig. 15, AB eine Gerade von bestimmter Begrenzung und ihre Gleichung:

$y = \left\{Ux + V\right\}_{\alpha}^{\alpha_2}$; wo U bekanntlich *tang* ω bedeutet.

Nach der im vorigen Abschnitte eingeführten Bezeichnung, besteht mithin die Lösung der Aufgabe in der Darstellung von:

$$y = \mathop{L_s}_{d,\,\delta}^{d',\,\delta'} \left\{Ux + V\right\}_{\alpha'}^{\alpha_2}.$$

Setzt man nun in diese Gleichung, um vorerst sie selbst, und dann erst die Grenzwerthe α_1 und α_2 zu transformiren, aus System A) II) des vorigen Abschnittes die Werthe für x und y, so erhält man nach den nöthigen Reductionen, indem man statt x' und y' sogleich wieder x, y schreibt:

$$y = tang\,(\omega + \varrho)\,x + \delta' - d'\,tang\,(\omega + \varrho) + \frac{(B - \delta)\,Cos\,\omega + d\,sin\,\omega}{Cos\,(\omega + \varrho)}$$

Setzt man nun auch in die erste Gleichung des Systems A) I) statt x, α_1 und α_2 so erhält man als transformirte Gleichung, zunächst ganz allgemein:

$$(1.)\ y = \left(d' + (\alpha_1 - d)\,Cos\,\varrho - (\beta_1 - \delta)\,sin\,\varrho\right)\left\{tang\,(\omega + \varrho)\,(x - d') + \delta' + \frac{(V - \delta)\,Cos\,\omega + d\,sin\,\omega}{Cos\,(\omega + \varrho)}\right\}\left(d' + (\alpha_2 - d)\,Cos\,\varrho - (\beta_2 - \delta)\,sin\,\varrho\right);$$

bei deren Ableitung vorzüglich auf die beiden für sich evidenten, zum Reduktionszweck sich eignenden Gleichungen:

$\beta_1 = \alpha_1\,tang\,\omega + V$; und $\beta_2 = \alpha_2\,tang\,\omega + V$ Rücksicht genommen wurde.

Besteht die Veränderung bloss in einer Drehung um einen in der Geraden selbst liegenden Punkt, so hat man wegen $d = d'$, $\delta' = \delta$; und $\delta = U\,d + V$, nach gehöriger Reduktion:

$$(2.)\ y = \left(d + (\alpha - d)\frac{Cos\,(\omega + \varrho)}{Cos\,\omega}\right)\left\{tang\,(\omega + \varrho)\,(x - d) + \delta\right\}\left(d + (\alpha' - d)\frac{Cos\,(\omega + \varrho)}{Cos\,\omega}\right).$$

Ist der Drehungspunkt zugleich der Punkt α, β, d. h. der Anfangspunkt der Geraden, so hat man wegen $d = \alpha$, $\delta = \beta$, die noch einfachere Gleichung:

$$(3.)\ y = (d)\left\{tang\,(\omega + \varrho)\,(x - d) + \delta\right\}\left(d + (\alpha' - d)\frac{Cos\,(\omega + \varrho)}{Cos\,\omega}\right).$$

Diese Gleichung kann zugleich, in wie ferne man dem ϱ alle Werthe von o bis $2\,\pi$ beilegt, als die Gleichung aller Radien eines Kreises, dessen Halbmesser gleich $\frac{\alpha' - d}{Cos\,\omega}$ ist, angesehen werden. Man findet letzteren Werth, wenn man $\omega + \varrho = o$ setzt, in welchem Falle der Radius mit der Abscissenachse parallel läuft. Wenn ϱ die genannten Werthe durchläuft, so beschreibt jeder Punkt der Linie einen Kreis. Um die Gleichung für die Bewegung des äussersten Punktes zu finden, setze man $x = d + (\alpha' - d)\,\frac{Cos\,(\omega + \varrho)}{Cos\,\varrho}$, d. h. dem oberen Grenzwerth. Man findet demnach für:

$$y = \delta + (\alpha' - d)\,\frac{sin\,(\omega + \varrho)}{Cos\,\omega};$$

Eliminirt man aus den so eben für x und y gefundenen Werthen die Grösse ϱ, so erhält man diese Gleichung unter der gewöhnlichen Form, nämlich durch die Coordinaten x und y bestimmt, oder:

$(y - \delta)^2 + (x - d)^2 = \left(\frac{\alpha' - d}{Cos\,\omega}\right)^2$; welche Gleichung offenbar jene eines Kreises ist, deren Radius durch $\frac{\alpha' - d}{Cos\,\omega}$ ausgedrückt wird.

Für $x = d$ findet man die Gleichung für den beschriebenen Weg des Anfangspunktes und findet, wie es auch sein muss, die Gleichung eines Punktes.

§. 32.

2. *Aufgabe.* Ein Punkt bewege sich mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit auf dem Umfange einer gegebenen Ellipse, welche sich dreht, und deren eine Brennpunkt sich mit gegebener Geschwindigkeit auf dem Umfange einer anderen gegebenen Ellipse fortbewegt. Wenn sich nun auch diese Ellipse auf gleiche Weise mit eigener Geschwindigkeit dreht und auf einer dritten Ellipse sich fortbewegt u. s. w., so frägt es sich:

a) welches ist der Ort, d. h. welche sind die Coordinaten des anfänglichen Punktes, und

b) wie findet man die Gleichung des durchlaufenen Weges unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der sich also bewegenden Ellipsen gleich n ist?

Man denke sich anfänglich die erste Ellipse mit ihrem Brennpunkte als Pol in den Ursprung des Coordinatensystems gebracht, und ihre grosse Achse mit der Abscissenachse zusammenlaufend, so ist bekanntlich deren Polargleichung:

$u = \pm \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1}$; wo a_1 die halbe grosse Achse, φ_1 den Polarwinkel und $\varepsilon = \frac{e_1}{a_1}$ bedeutet; e_1 bedeutet endlich die halbe Excentricität.

Man nehme hier, wie es die Aufgabe erheischt, den Focus als Drehungspunkt an, d. h. man setze in A) I), $d = o$, $\delta = o$. Wenn nun x', y', die Coordinaten eines bestimmten Punktes im Umfange der verlegten Ellipse bezeichnen, so hat man wegen:

$x = u \, Cos \, \varphi_1$; $y = u \, sin \, \varphi_1$, und $u = \pm \frac{a(1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1}$; offenbar

$$(1.) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \cdot Cos \, \varphi_1 \\ y &= \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \cdot sin \, \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

vor der Verlegung oder Dislocation der Ellipse; und durch Substitution dieser Werthe in A. I. (1.) und nach einer einfachen Reduktion:

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= d'_1 + \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \, Cos \, (\varphi_1 + \varrho_1) \\ y' &= \delta'_1 + \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \, sin \, (\varphi_1 + \varrho_1) \end{aligned} \right\}$$

nach Verlegung derselben;

und die Gleichung des Punktes selbst gemäss unserer eingeführten Bezeichnungsweise:

$$(3.) \; y' = \left(\delta'_1 + \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \, sin (\varphi_1 + \varrho_1) \right) \left\{ \frac{x'}{0} \equiv \frac{1}{0} \left(d'_1 + \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \, Cos \, (\varphi_1 + \varrho_1) \right) \right\} \left(\delta'_1 + \frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1} \, sin \, (\varphi_1 + \varrho_1) \right);$$

Aus den beiden Gleichungen (2) folgt unmittelbar durch ihre Verbindung noch die folgende:

$\left(x' - d'_1\right)^2 + \left(y' + \delta'_1\right)^2 = \left[\frac{a_1 (1 - \varepsilon_1^2)}{1 - \varepsilon_1 \, Cos \, \varphi_1}\right]^2$; woraus man deutlich sieht, dass die Formeln für die Dislocation ihre ganz richtige Anwendung gefunden haben. Wobei natürlich noch von jeder Abhängigkeit zwischen φ_1 und ϱ_1 abgesehen wird.

Lässt man nun den Drehungspunkt oder Fokus dieser Ellipse auf gleiche Weise auf einer zweiten im Allgemeinen von ersterer verschiedenen Ellipse sich bewegen, die sich zugleich dreht, so muss man nun zwischen den Grössen d', δ', dieselbe Bedingungsgleichung bestehen lassen, wie oben zwischen x und y. — Setzt man daher analog mit dem so eben angewandten Verfahren in die bezeichneten Formeln statt x', y', d' und δ' u. s. f.

$$\underset{1}{d'} = \underset{2}{d'} + \frac{a_2\,(1-\varepsilon_2{}^2)}{1-\varepsilon_2\,Cos\,\varphi_2}\,Cos\,(\varphi_2+\varrho_2)\,;\ \text{und}\ \underset{1}{\delta'} = \underset{2}{\delta'} + \frac{a_2\,(1-\varepsilon_2{}^2)}{1-\varepsilon_2\,Cos\,\varphi_2}\,sin\,(\varphi_2+\varrho_2)\,;$$

und durch Substitution in (2) erhält man:

$$(4.)\ \left\{\begin{aligned} x &= \underset{2}{d'} + \frac{a_1\,(1-\varepsilon_1{}^2)}{1-\varepsilon_1\,Cos\,\varphi_1}\,Cos\,(\varphi_1+\varrho_1) + \frac{a_2\,(1-\varepsilon_2{}^2)}{1-\varepsilon_2\,Cos\,\varphi_2}\,Cos\,(\varphi_2+\varrho_2) \\ y &= \delta' + \frac{a_1\,(1-\varepsilon_1{}^2)}{1-\varepsilon_2\,Cos\,\varphi_1}\,sin\,(\varphi_1+\varrho_1) + \frac{a_2\,(1-\varepsilon_2{}^2)}{1-\varepsilon_2\,Cos\,\varphi_2}\,sin\,(\varphi_2+\varrho_2) \end{aligned}\right\}$$

Das Gesetz, welches bei wiederholter Anwendung dieses Verfahrens in der Bildung dieser Ausdrücke hervortritt, ist so einfach und begreiflich, dass man ohne alle Schwierigkeit die entsprechenden Ausdrücke selbst für ein System von n Ellipsen nunmehr anzuschreiben vermag. Bedient man sich zugleich der Einfachheit im Ausdrucke wegen der gewöhnlichen combinatorischen Summenbezeichnung, so hat man ganz allgemein, wenn man die Coordinaten des letzten Drehungspunktes $\underset{n}{d}$, $\underset{n}{\delta}$, geradezu mit d und δ bezeichnet, für n Ellipsen:

$$(5.)\ \left\{\begin{aligned} x &= d + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{n.q}\left(\frac{a_q\,(1-\varepsilon_q^2)}{1-\varepsilon_q\,Cos\,\varphi_q}\,Cos\,(\varphi_q+\varrho_q)\right) \\ y &= \delta + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{n.q}\left(\frac{a_q\,(1-\varepsilon_q^2)}{1-\varepsilon_q\,Cos\,\varphi_q}\,sin\,(\varphi_q+\varrho_q)\right) \end{aligned}\right\}$$

Gehen die Ellipsen sämmtlich in Kreise über (Problem der sogenannten Epicykeln), so kann man, ohne der Allgemeinheit im Geringsten Abbruch zu thun, annehmen, dass sämmtliche ϱ, und somit auch $\varrho_q = o$ ist, so wie auch nothwendig diessfalls $\varepsilon_q = o$ sein muss. Man erhält sofort als Gleichung jenes Punktes (jedoch nicht des durch ihn beschriebenen Weges):

$$(6.)\ y = \left(\delta + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{n.q}(a_q\,sin\,\varphi_q)\right)\left\{\tfrac{x}{0} \equiv \tfrac{1}{0}\left(\delta + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{n.q}(a_q\,Cos\,\varphi_q)\right)\right\}\left(\delta + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{n.q}(a_q\,sin\,\varphi_q)\right)$$

Findet eine beliebige Anzahl solcher Systeme statt, von denen das eine n, ein zweites aus m und die folgenden aus $p, q, r \ldots\ldots$ Ellipsen bestehen, so hat man zufolge unserer eingeführten Bezeichnung, als allgemeinste Gleichung dieses Problems:

$$(7.)\ y = \mathop{\mathcal{C}}\limits_{(n,m,p,q\ldots)v}^{(n,m,p,q\ldots)v}\left(\overset{(v)}{\delta} + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{v.q}\left(\frac{\overset{(v)}{a_q}(1-(\overset{(v)}{\varepsilon_q})^2)}{1-\varepsilon_q^{(v)}Cos\,\varphi_q^{(v)}}\,sin\,(\overset{(v)}{\varphi_q}+\overset{(v)}{\varrho_q})\right)\right)\left\{\tfrac{x}{0} \equiv \tfrac{1}{0}\left(\overset{(v)}{d} + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{v.q}\left(\frac{\overset{(v)}{a_q}(1-(\overset{(v)}{\varepsilon_q})^2)}{1-\varepsilon_q^{(v)}Cos\,\varphi^{(v)}}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.Cos\,(\varphi_q^{(v)}+\varrho_q^{(v)})\right)\right\}\left(d_q^{(v)} + \mathop{\mathcal{S}}\limits_{1.q}^{v.q}\left(\frac{a_p^{(v)}(1-(\varepsilon_q^{(v)})^2)}{1-\varepsilon_q^{(v)}Cos\,\varphi_q^{(v)}}\,sin\,(\varphi_q^{(v)}+\varrho_q^{(v)})\right)\right)$$

Die hier gefundenen Formeln geben nicht nur jedesmal den Ort eines in einem solchen Systeme sich bewegenden Punktes an, sondern verhelfen auch unmittelbar, in so ferne die nöthige Rechnung durchgeführt werden kann, zu der Gleichung der Bahn des sich bewegenden Punktes. Da nämlich Bewegungen überhaupt nur in der Zeit vor sich gehen, d. h. da jede Bewegung eine gewisse Zeit erfordert, so sind sämmtliche Winkel φ und ϱ, jeder einzelne für sich eine gewisse Funktion der Zeit. Setzt man daher für genannte Winkel ihre Zeitfunktionen in die für x und y gefundenen Werthe, so erhält man durch Elimination der Zeit t aus obigen zwei Gleichungen eine, als Gleichung der Bahn des Punktes.

Doch ist die Elimination der Grösse t selbst in den einfachsten Fällen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft, und in geschlossenen Ausdrücken nach den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Analysis fast niemals darstellbar, in welchem Falle man es vorzieht, bei dem Systeme obiger zwei Gleichungen stehen zu bleiben. Die genannten zwei Gleichungen, oder was dasselbe ist, die Gleichung (7) enthält demnach schon die allgemeinste Auflösung für Bewegung beliebig vieler Punkte in einem wie immer zusammengesetzten Planetensysteme, so wie auch die Elemente zur unmittelbaren Berechnung der Gleichungen ihrer Bahnen selbst (oder vielmehr ihrer Projectionen). Es ist in dieser Beziehung noch zu bemerken, dass sodann die Winkel φ mittelst der respectiven Zeitgleichungen und die Winkel ϱ durch jene der Präcessionen gegeben sind.

Um indessen obige Gleichungen auf einen der einfachsten Fälle anzuwenden, wollen wir annehmen, es bewege sich ein Kreis auf der Peripherie eines zweiten, dessen Mittelpunkt zugleich im Ursprunge liegt; es ist mithin in (6) $d = o$ und $\delta = o$ zu setzen, oder:

$\left\{\begin{array}{l} x = a_2 \operatorname{Cos} \varphi_1 + a_2 \operatorname{Cos} \varphi_2 \\ y = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 \end{array}\right\}$; setzt man die Bestimmung fest, dass $a_1 \varphi_1 = m\, a_2 \varphi_2$, wobei offenbar, wenn nicht der Mittelpunkt, sondern die Peripherie des einen Kreises auf der Peripherie des andern sich fortbewegen soll $a_1 = R + r$, $a_2 = r$, somit $m\, r\, \varphi_2 = (R + r)\, \varphi_1$ sein muss; so hat man:

$$\left\{\begin{array}{l} x = (R + r) \operatorname{Cos} \varphi_1 + r \operatorname{Cos} m \dfrac{R + r}{r}\, \varphi_1 \\ y = (R + r) \sin \varphi_1 + r \sin m \dfrac{R + r}{r}\, \varphi_1 \end{array}\right\}$$

; welche Gleichungen bekanntlich der gemeinen, gestreckten oder verkürzten Epicycloide angehören, je nachdem m gleich, kleiner oder grösser als die Einheit ist,

§. 33.

3. *Aufgabe.* Es ist die Gleichung eines Polygons von n Seiten gegeben, man soll dieses Polygon durch Diagonallinien in die einzelnen Dreiecke, aus denen es sofort besteht, zerlegen, dieselben von einander absondern, und die Gleichung der einzelnen Dreiecke ohne Zuhilfeziehung der Figur aus der Gleichung des gegebenen Polygons analytisch finden? —

Bei allen Aufgaben, wo nur die Seiten und Polygonswinkel in Rechnung genommen werden, reicht man mit der bis jetzt von uns gebrauchten Bezeichnungsart jederzeit aus. Anders hingegen verhält es sich in jenen Fällen, wo auch noch die Diagonallinien berücksichtigt werden müssen, und man auch in diesem Falle von der combinatorischen Bezeichnung Gebrauch machen will. Eine in allen Fällen brauchbare Bezeichnungsart der Polygonsstücke muss nicht nur schon auf den ersten Anblick jede Seite von einer Diagonallinie bemerklich machen, sondern man muss auch ohne Mühe erkennen können, welche Seite oder Diagonallinie da gemeint sei. Auch darf bei einem etwaigen Wegbleiben einiger oder aller Diagonalen oder Seiten keine neue Bezeichnungsweise dadurch nothwendig werden, wie dieses bei einem blossen Abzählen der Fall sein würde. Wir setzen daher mit Beziehung auf Fig. 16 Folgendes ein für allemal fest, von dem wir glauben, dass es jeder Anforderung genügen werde:

Die n Polygonswinkel sollen von links gegen rechts gezählt mit $\underset{1}{\varepsilon}, \underset{2}{\varepsilon}, \underset{3}{\varepsilon}, \underset{4}{\varepsilon}, \ldots\ldots \underset{n}{\varepsilon}$, und die Coordinaten ihrer Scheitel, d. h. die Grenzwerthe der respectiven Seiten mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots$; die Polygonsseiten in der nämlichen Ordnung mit $s_{\frac{1}{2}}, s_{\frac{2}{3}}, s_{\frac{3}{4}} \ldots\ldots s_{\frac{n-1}{n}}$, d. h. die Seite, welche zwischen ε_1 und ε_2 liegt u. s. w. und nur wo keine Missdeutung zu befürchten wäre, mit $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots, s_n$. — Ferners die $(n-3)$ Diagonalen von ε_1 aus gezogen mit $\delta_{\frac{1}{3}}, \delta_{\frac{1}{4}}, \delta_{\frac{1}{5}} \ldots\ldots, \delta_{\frac{1}{n-1}}$, hingegen jene z. B. von ε_5 aus gezogen mit $\delta_{\frac{5}{7}}, \delta_{\frac{5}{8}}, \delta_{\frac{5}{9}}, \ldots\ldots \delta_{\frac{5}{n}}, \delta_{\frac{5}{1}}, \delta_{\frac{5}{2}}, \delta_{\frac{5}{3}}$. Mit $\delta_{\frac{7}{13}}$ würde man daher diejenige Diagonale bezeichnen, welche von ε_7 nach ε_{13} gezogen ist. Um endlich auch noch jede andere Verbindungslinie irgend eines Punktes des Umfangs mit irgend einem andern Punkte auf eine übereinstimmende Weise zu bezeichnen, wollen wir z. B. für eine zwischen einem Punkte der Seite $s_{\frac{3}{4}}$ und $s_{\frac{7}{8}}$ gezogene Linie schreiben $\delta_{\frac{3,4}{7,8}}$; also liegt diese Linie zwischen der 3. und 4. Ecke einerseits und der 7. und 8. anderseits. Die $(n-2)$ Dreiecke, welche durch das Ziehen der Diagonalen z. B. von ε_3 aus entstehen, wollen wir der Ordnung nach durch ${}^4\underset{3}{\triangle}{}^5, {}^5\underset{3}{\triangle}{}^6, {}^6\underset{3}{\triangle}{}^7 \ldots\ldots {}^1\underset{3}{\triangle}{}^{\dot{2}}$ bezeichnen, und so auch in allen übrigen Fällen. Nur wo keine Verwechselung zu befürchten ist, werden wir sie schlechtweg von links gegen rechts mit $\underset{1}{\triangle}, \underset{2}{\triangle}, \underset{3}{\triangle}$ u. s. w. benennen.

Diese gewiss sehr bequeme und bestimmte Bezeichnungsart dehnen wir auch noch dort, wo es Noth thut, auf die Gleichungen der Seiten, Diagonalen und anderer Theilungslinien aus, indem wir z. B. für die zwischen ε_1 und ε_2 liegende Seite: $y = \left\{U_{\frac{1}{2}}x + V_{\frac{1}{2}}\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ und für die von ε_3 zu ε_{13} gezogene Diagonale: $y = \left\{U_{\frac{3}{13}}x + V_{\frac{3}{13}}\right\}_{\alpha_3}^{\alpha_{13}}$ schreiben werden. Uebersteigt der Unterschied zwischen dem Zähler und Nenner des Indexes die Einheit, so bezieht sich die Gleichung, wie man sieht, auf eine Diagonale, sonst auf eine Seite. Endlich ist es begreiflich, dass, in so ferne man von der Nebendeutung des Zählens absieht, offenbar Ausdrücke, wie:

$y = \left\{U_{\frac{1}{3}}x + V_{\frac{1}{3}}\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ und $y = \left\{U_{\frac{3}{1}}x + V_{\frac{3}{1}}\right\}_{\alpha_2}^{\alpha_1}$ dasselbe bedeuten.

Es sei nun die Gleichung eines Polygons von n Seiten:

$$y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{\alpha_\varrho}^{n} \left\{ U_{\frac{\varrho}{\varrho+1}} x + V_{\frac{\varrho}{\varrho+1}} \right\}^{\alpha_{\varrho+1}}$$

, wo statt $n+1$, 1 zu setzen ist, wie schon früher erwähnt wurde. Die Gleichung der Diagonale $\delta_{\frac{p}{q}}$ ist, demnach dem Gesagten zufolge:

$$y = \left\{ U_{\frac{p}{q}} x + V_{\frac{p}{q}} \right\}_{\alpha_p}^{\alpha_q}; \text{ wobei bekanntlich: } \left\{ \begin{aligned} U_{\frac{p}{q}} &= \frac{\beta_p - \beta_q}{\alpha_p - \alpha_q} \\ V_{\frac{p}{q}} &= \frac{\alpha_p \beta_q - \alpha_q \beta_p}{\alpha_q - \alpha_p} \end{aligned} \right\}.$$

denkt man sich nun zuerst von einem gewissen Polygonswinkel aus, z. B. von ε_1 sämmtliche Diagonalen gezogen, so hat man:

$$(1.)\ y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{\alpha_\varrho}^{n} \left\{ U_{\frac{\varrho}{\varrho+1}} x + V_{\frac{\varrho}{\varrho+1}} \right\}^{\alpha_\varrho} \omega \mathop{\mathcal{CO}} \left\{ U_{\frac{1}{\varrho+1}} x + V_{\frac{1}{\varrho+1}} \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_{\varrho+2}};$$

welches somit die allgemeine Gleichung eines n Eckes mit seinen von ε_1 aus gezogenen $(n-3)$ Diagonallinien ist.

Werden endlich die Diagonallinien auch von allen übrigen Ecken aus gezogen, so hat man als Gleichung eines n Ecks mit seinen $n\left(\frac{n-3}{2}\right)$ Diagonalen, wobei jedoch jede zweimal vorkömmt:

$$(2.)\ y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{\alpha_\varrho}^{n} \left\{ U_{\frac{\varrho}{\varrho+1}} x + V_{\frac{\varrho}{\varrho+1}} \right\}^{\alpha_{\varrho+1}} \omega \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{1\cdot\psi,\,1\cdot\varrho}^{n\psi,\,(n-3)\varrho} \left\{ U_{\frac{\psi}{\varrho+2}} x + V_{\frac{\psi}{\varrho+2}} \right\}_{\alpha_\psi}^{\alpha_{\varrho+2}}.$$

Um zu unserer anfänglichen Aufgabe zurückzukehren, wollen wir annehmen, dass die Theilung von ε_1 aus geschehe. Denken wir uns nun jede Diagonale doppelt und nehmen wir sie einmal zu einem, das anderemal zum Nachbar-Dreiecke, so erhält man folgende Systeme von Gleichungen, und zwar:

als Gleichung von ${}^2\underset{1}{\triangle}{}^3$, $y = \left\{ U_{\frac{1}{2}} x + V_{\frac{1}{2}} \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2} \omega \left\{ U_{\frac{2}{3}} x + V_{\frac{2}{3}} \right\}_{\alpha_2}^{\alpha_3} \omega \left\{ U_{\frac{3}{1}} x + V_{\frac{3}{1}} \right\}_{\alpha_8}^{\alpha_1} = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{(1,2,3)\tau}^{(2,3,1)\pi} \left\{ U_{\frac{\tau}{\pi}} x + V_{\frac{\tau}{\pi}} \right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi};$

als Gleichung von ${}^3\underset{1}{\triangle}{}^4$, $y = \left\{ U_{\frac{1}{3}} x + V_{\frac{1}{3}} \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_3} \omega \left\{ U_{\frac{3}{4}} x + V_{\frac{3}{4}} \right\}_{\alpha_3}^{\alpha_4} \omega \left\{ U_{\frac{4}{1}} x + V_{\frac{4}{1}} \right\}_{\alpha_4}^{\alpha_1} = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{(1,3,4)\tau}^{(3,4,1)\pi} \left\{ U_{\frac{\tau}{\pi}} x + V_{\frac{\tau}{\pi}} \right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi};$

als Gleichung von ${}^4\underset{1}{\triangle}{}^5$, $y = \left\{ U_{\frac{1}{4}} x + V_{\frac{1}{4}} \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_4} \omega \left\{ U_{\frac{4}{5}} x + V_{\frac{4}{5}} \right\}_{\alpha_4}^{\alpha_5} \omega \left\{ U_{\frac{5}{1}} x + V_{\frac{5}{1}} \right\}_{\alpha_5}^{\alpha_1} = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{(1,4,5)\tau}^{(4.5,1)\pi} \left\{ U_{\frac{\tau}{\pi}} x + V_{\frac{\tau}{\pi}} \right\}_{\alpha_\pi}^{\alpha_\pi};$

als Gleichung von ${}^{5}\underset{1}{\triangle}{}^{6}$, $y=\left\{U_{\frac{1}{5}}x+V_{\frac{1}{5}}\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_5}\omega\left\{U_{\frac{5}{6}}x+V_{\frac{5}{6}}\right\}_{\alpha_5}^{\alpha_6}\omega\left\{U_{\frac{6}{1}}x+V_{\frac{6}{1}}\right\}_{\alpha_6}^{\alpha_1}=\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,5,6)\pi}^{(5,6,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}$;

u. s. w. . . . . und endlich als Gleichung von ${}^{n}\underset{1}{\triangle}{}^{(n-1)}$ $y=\left\{U_{\frac{1}{n-1}}x+V_{\frac{1}{n-1}}\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_{n-1}}\omega\left\{U_{\frac{n-1}{n}}x+V_{\frac{n-1}{n}}\right\}_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n}\omega\left\{U_{\frac{n}{1}}x+V_{\frac{n}{1}}\right\}_{\alpha_n}^{\alpha_1}=\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,n-1,n)\tau}^{(n-1,n,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\pi}^{\alpha_\pi}$;

Mithin die Gleichung der $(n-2)$ Dreiecke, in ihrer unveränderten Lage:

$$y=\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,2,3)\tau}^{(2,3,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\omega\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,3,4)\pi}^{(3,4,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\omega\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,4,5)\tau}^{(4,5,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\omega\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,5,6)\tau}^{(5,6,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\omega\ldots$$

$$\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,n-1,n)\tau}^{n-1,n,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi};$$

oder combinatorisch dargestellt:

$$(3.)\ y=\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{2\nu}^{(n-1)\nu}\ \mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,\nu,\nu+1)\tau}^{(\nu,\nu+1,\nu)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}.$$

Verändert nun jedes dieser Dreiecke seinen Ort, so muss diese Veränderung in Bezug auf die drei Seiten eines Dreiecks dieselbe sein und ist somit in dieser Beziehung eine Dislocation, rücksichtlich des ganzen Polygons hingegen, da es dadurch in Dreiecke aufgelöst wird, eine Transfiguration. Man hat daher nach unserer Bezeichnungsweise:

$$y=\mathop{\mathbf{L}^{s1}}\limits_{d_1,\delta_1}^{d_2,\delta_2}\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,2,3)\tau}^{(2,3,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\omega\mathop{\mathbf{L}^{s2}}\limits_{d_3,\delta_3}^{d_4,\delta_4}\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,3,4)\tau}^{(3,4,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\omega\mathop{\mathbf{L}^{s3}}\limits_{d_5,\delta_5}^{d_6,\delta_6}\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,4,5)\tau}^{(4,5,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}\ldots\ldots\omega$$

$$\mathop{\mathbf{L}^{sn-2}}\limits_{d_{2n-5},\delta_{2n-5}}^{d_{2n-4},\delta_{2n-4}}\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,n-1,n)\tau}^{(n-1,n1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi};$$

und somit combinatorisch dargestellt:

$$y=\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{2.\psi}^{(n-1)\psi}\mathop{\mathbf{L}^{s\varphi-1}}\limits_{d_{2\psi-5},\delta_{2\psi-5}}^{d_{2\psi-4},\delta_{2\psi-4}}\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1\psi,\psi+1)\tau}^{(\psi,\psi+1,1)\pi}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\pi}=\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{2\psi}^{(n-1)\psi}\mathop{\mathcal{C}\omega}\limits_{(1,\psi,\psi+1)\tau}^{(\psi,\psi+1,1)\pi}\mathop{\mathbf{L}^{s\varphi-1}}\limits_{d_{2\psi-5},\delta_{2\psi-5}}^{d_{2\psi-4},\delta_{2\psi-4}}\left\{\frac{U_\tau}{\pi}x+\frac{V_\tau}{\pi}\right\}_{\alpha_\tau}^{\alpha_\tau}:$$

Durch letztere, schon im vorigen Abschnitte besprochene Transposition ist es nun möglich, mittelst Anwendung der Dislocations-Formeln diese Aufgabe weiter fortzuführen und selbe in ihrer grössten Allgemeinheit vollends aufzulösen.

Verrichtet man nämlich mit Hilfe der Formeln A. I. und II. die angezeigte Dislocation, so erhält man:

$$(4.)\ y = \mathop{\omega}\limits_{2\psi}^{(n-1)\psi} . \mathop{\omega}\limits_{(1,\psi,\psi+1)\tau}^{(\psi,\psi+1,1)\pi} . \left(d_{2\psi-4} + (\alpha_\tau - d_{2\psi-5})\ Cos\ \varrho_{\psi-1} - \left(\frac{U_\tau}{\pi} \alpha_\tau + \frac{V_\tau}{\pi} \delta_{2\psi-5} \right) sin\ \varrho_{\psi-1} \right)$$

$$\left(\frac{ \frac{U_\tau}{\pi} \delta_{2\psi-5} + \frac{V_\tau}{\pi} + \delta_{2\psi-4} \left(Cos\ \varrho_{\psi-1} + \frac{U_\tau}{\pi} sin\ \varrho_{\psi-1} \right) }{ sin\ \frac{\varrho_{\psi-1}}{\pi} + \frac{U_\tau}{\pi} Cos\ \varrho_{\psi-1} } + x + d_{2\psi-4} \right)$$

$$\left(d_{2\psi-4} + (\alpha_\pi - d_{2\psi-5})\ Cos\ \varrho_{\psi+1} - \left(\frac{U_\tau}{\pi} \alpha_\pi + \frac{V_\tau}{\pi} - \delta_{2\psi-5} \right) sin\ \varrho_{\psi-1} \right)$$

Und diese Gleiehung enthält die allgemeinste Auflösung des Problems, jedes Polygon von n Seiten von einer Eeke aus in seine $(n-2)$ Dreiecke zu zerlegen, sie von einander abzusondern und sofort die Gleiehung sämmtlicher in beliebige Orte verlegter Dreiecke auf rein analytischem Wege zu finden.

Um hierüber auch ein specielles Beispiel anzuführen, sei das gegebene Polygon jenes im Abschnitte III. Aufgabe (1.) besprochene, dessen Gleiehung wie bekannt die folgende ist:

$$y = \left\{ 2x - 4 \right\}_{2\frac{1}{4}}^{1\frac{4}{3}} \omega \left\{ \tfrac{1}{2}x + 3 \right\}_{1\frac{4}{3}}^{4} \omega \left\{ -5x + 25 \right\}_{4}^{5} \omega \left\{ x - \varrho \right\}_{5}^{9} \omega \left\{ -\tfrac{2}{3}x + 16 \right\}_{9}^{2\frac{1}{4}} .$$

Soll nun dieses Fünfeek Fig. 3. von ε_3 aus in Dreiecke zerlegt werden, so hat man wegen: $y = \left\{ \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{10} \right\}_{2\frac{1}{4}}^{4}$ als Gleichung von $\delta_{\frac{3}{1}}$, und

$y = \left\{ 26x + 130 \right\}_{2\frac{1}{4}}^{4}$ als Gleiehung von $\delta_{\frac{3}{5}}$, nach dem oben Gesagten, wenn sowohl die Coordinaten der anfänglichen als verlegten Drehungswinkel willkührlich angenommen werden:

$$y = \mathop{L}\limits_{5,4}^{3,7}{}^{30^\circ} \left(\begin{matrix} \left\{ 2x - 4 \right\}_{2\frac{1}{4}}^{1\frac{4}{3}} \\ \left\{ \tfrac{1}{2}x + 3 \right\}_{1\frac{4}{3}}^{4} \\ \left\{ \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{10} \right\}_{4}^{2\frac{1}{4}} \end{matrix} \right) \omega \mathop{L}\limits_{1,5}^{7,13}{}^{60^\circ} \left(\begin{matrix} \left\{ \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{10} \right\}_{2\frac{1}{4}}^{4} \\ \left\{ -5x + 25 \right\}_{4}^{5} \\ \left\{ 26x + 130 \right\}_{5}^{1\frac{2}{4}} \end{matrix} \right) \omega \mathop{L}\limits_{11,2}^{-5,12}{}^{90^\circ} \left(\begin{matrix} \left\{ 26x + 130 \right\}_{2\frac{1}{4}}^{5} \\ \left\{ x - 5 \right\}_{5}^{9} \\ \left\{ -\tfrac{2}{3}x + 10 \right\}_{9}^{2\frac{1}{4}} \end{matrix} \right)$$

Werden nun die hier angezeigten Operationen vollführt, welches ohne alle Schwierigkeit und Zeitverlust entweder unmittelbar naeh den Formeln A., I. und II. oder durch Substitution in die Gleichung (4) dieses Paragraphes geschehen kann, so findet man:

$$y = \left(\begin{array}{l} (\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{3}) \Big\{ -(8+5\sqrt{3})\,x - (11\sqrt{3}+23) \Big\} (\frac{7}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{3}) \\ (\frac{7}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{3}) \Big\{ \Big(\frac{8+5\sqrt{3}}{11}\Big)x + \frac{59-3\sqrt{3}}{11} \Big\} (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \\ (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \Big\{ \Big(\frac{24+13\sqrt{3}}{3}\Big)x - \Big(\frac{51+59\sqrt{3}}{15}\Big) \Big\} (\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{3}) \end{array} \right)$$

$$\omega \left(\begin{array}{l} (\frac{73}{8} - \frac{111}{80}\sqrt{3}) \Big\{ \Big(\frac{5\sqrt{3}-12}{23}\Big)x + (2479+671\sqrt{3}) \Big\} (\frac{17}{2} - \frac{9}{20}\sqrt{3}) \\ (\frac{17}{2} - \frac{9}{20}\sqrt{3}) \Big\{ \Big(\frac{10-13\sqrt{3}}{37}\Big)x + \frac{817+207\sqrt{3}}{74} \Big\} (9 - \frac{5}{2}\sqrt{3}) \\ (9 - \frac{5}{2}\sqrt{3}) \Big\{ -\Big(\frac{104+677\sqrt{3}}{2027}\Big)x + \Big(\frac{27037+3647\sqrt{3}}{2027}\Big) \Big\} (\frac{73}{8} - \frac{111}{80}\sqrt{3}) \end{array} \right)$$

$$\omega \left(\begin{array}{l} -\Big(\frac{53{\cdot}9}{2}\Big) \Big\{ -\frac{1}{26}x - \frac{107}{26} \Big\} (-3) \\ -(3) \Big\{ -x + 3 \Big\} (-7) \\ -(7) \Big\{ \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \Big\} \Big(-\frac{53{\cdot}9}{2}\Big) \end{array} \right)$$

Einfacher stellt sich diese Gleichung dar, wenn sie näherungsweise mittelst Dezimalbrüchen ausgedrückt wird; man erhält nämlich:

$$(5.)\ y = \left(\begin{array}{l} \Big\{ -16{\cdot}66025\,x + 42{\cdot}05255 \Big\}_{1{\cdot}96651}^{2{\cdot}04466} \\ \Big\{ 1{\cdot}51456\,x + 4{\cdot}89126 \Big\}_{2{\cdot}0446}^{1.63398} \\ \Big\{ 15{\cdot}50555\,x - 10{\cdot}21273 \Big\}_{1{\cdot}63398}^{1{\cdot}96651} \end{array} \right) \omega \left(\begin{array}{l} \Big\{ -0{\cdot}14521\,x + 31{\cdot}66265 \Big\}_{6{\cdot}72178}^{7{\cdot}72058} \\ \Big\{ -0{\cdot}33829\,x + 15{\cdot}88554 \Big\}_{7{\cdot}72058}^{4{\cdot}66988} \\ \Big\{ -0{\cdot}62979\,x + 16{\cdot}45968 \Big\}_{4{\cdot}66988}^{6{\cdot}92187} \end{array} \right)$$

$$\omega \left(\begin{array}{l} \Big\{ -0{\cdot}03846\,x - 4{\cdot}11538 \Big\}_{-26{\cdot}95}^{-3} \\ \Big\{ -x + 3 \Big\}_{-3}^{-7} \\ \Big\{ 1{\cdot}5\,x + 5{\cdot}5 \Big\}_{-7}^{-26{\cdot}95} \end{array} \right)$$

Und diess ist die Gleichung der drei Dreiecke in ihrer neuen Lage. Zur nochmehrigen Verständigung des Gebrauches des Dislocationszeichens mögen noch folgende Probleme hier ihren Platz finden, deren (in Bezug auf die zwei nachfolgenden Aufgaben) numerische Ausführung jedoch, da sie sich von der obigen in nichts unterscheidet, der Kürze wegen nicht beigefügt wurde.

§. 34.

4. *Aufgabe.* Man soll die mit der Gleichung eines Dreiecks vorzunehmenden Rechnungsoperationen angeben, wenn *a)* das Dreieck als Ganzes seinen Ort verändert, *b)* wenn eine Seite von selben getrennt, und an einen gegebenen Ort verlegt wird, und *c)* wenn sich das ganze Dreieck in seine 3 Seiten auflöset, von denen 2 zugleich ihren Ort verändern?

a) Es sei das vorgelegte Dreieck jenes schon im ersten Abschnitte, Aufgabe 3, besprochene und in Fig. 2 construirte, dessen Gleichung die folgende ist:

$$y = \left\{\tfrac{1}{2}x + 2\right\}_{2}^{\frac{16}{3}} \,\omega\, \left\{2x - 6\right\}_{\frac{16}{3}}^{4} \,\omega\, \left\{-\tfrac{1}{2}x + 4\right\}_{4}^{2}.$$

Nimmt man nun als anfänglichen Drehungspunkt des ganzen Dreiecks den Punkt $\left\{\begin{matrix} d = 2 \\ \delta = 3 \end{matrix}\right\}$ und jenen des verlegten $\left\{\begin{matrix} d' = 5 \\ \delta' = 1 \end{matrix}\right\}$ so wie als Drehungswinkel 45°, so hat man dem gemäss:

$$(1.)\; y = \underset{2,3}{\overset{5,1}{\mathbf{L}_{45^\circ}}} \left[\left\{\tfrac{1}{2}x+2\right\}_{2}^{\frac{16}{3}} \omega \left\{2x-6\right\}_{\frac{16}{3}}^{4} \omega \left\{-\tfrac{1}{2}x+4\right\}_{4}^{2}\right] = \underset{2,3}{\overset{5,1}{\mathbf{L}_{45^\circ}}} \left\{\tfrac{1}{2}x+2\right\}_{2}^{\frac{16}{3}} \omega\, \underset{2,3}{\overset{5,1}{\mathbf{L}_{45^\circ}}} \left\{2x-6\right\}_{\frac{16}{3}}^{4} \omega$$

$$\omega\, \underset{2,3}{\overset{5,1}{\mathbf{L}_{45^\circ}}} \left\{-\tfrac{1}{2}x+4\right\}_{4}^{2};$$

und das verlegte Dreieck erlangt eine Lage wie die in Fig. 12 dargestellte, wo ABC das gegebene, $A'B'C'$ hingegen das verlegte vorstellt.

b) Soll die Seite AB vom Dreiecke getrennt und verlegt werden, wodurch sie eine Lage wie die in Fig. 14 dargestellte gegen das Dreieck erlangt, so hat man:

$$(2.)\; y = \left\{\tfrac{1}{2}x + 2\right\}_{2}^{\frac{16}{3}} \omega \left\{2x - 6\right\}_{\frac{16}{3}}^{4} \omega\, \underset{2,3}{\overset{3,6}{\mathbf{L}_{90^\circ}}} \left\{-\tfrac{1}{2}x + 4\right\}_{4}^{2}$$

: und wenn endlich

c.) zwei ihrer Seiten weggenommen und in verschiedene Lagen gebracht werden, etwa wie die in Fig. 13 vorgestellte, so muss diessfalls gesetzt werden:

$$(3.)\; y = \left\{\tfrac{1}{2}x + 2\right\}_{2}^{\frac{16}{3}} \omega\, \underset{8,4}{\overset{10,-2}{\mathbf{L}_{45^\circ}}} \left\{2x - 6\right\}_{\frac{16}{3}}^{4} \omega\, \underset{2,3}{\overset{3,6}{\mathbf{L}_{90^\circ}}} \left\{-\tfrac{1}{2}x + 4\right\}_{4}^{2}.$$

§. 35.

5. *Aufgabe.* Es ist ein Polygon gegeben, man soll dasselbe durch eine beliebige Theilungslinie, die keine Diagonale ist, in zwei andere Polygone zerlegen und sie von einander trennen? —

Wir wollen die Art der Behandlung solcher Aufgaben sogleich an einem speziellen Beispiele nachweisen, wozu wir uns des schon öfter erwähnten Fünfeckes bedienen werden, dessen Gleichung die folgende ist:

$$y = \left\{-5x+25\right\}_{4}^{5} \omega \left\{x-5\right\}_{5}^{9} \omega \left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}_{9}^{\frac{21}{4}} \omega \left\{2x-4\right\}_{\frac{21}{4}}^{\frac{14}{3}} \omega \left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{\frac{14}{3}}^{4}.$$

Dieses Fünfeck werde nun durch die Theilungslinie $\delta_{\frac{5,1}{3,4}}$ in zwei andere Flächen getheilt und zwar für $\alpha_{5.1} = \frac{22}{5}$ und $\alpha_{3,4} = 7$. Man erhält für diese Annahme nachfolgende Werthe und zwar für $\beta_{5,1} = 3$, und $\beta_{3,4} = \frac{16}{3}$. Diese Daten verhelfen sofort unmittelbar zur Gleichung von $\delta_{\frac{5,1}{3,4}}$, nämlich zu:

$$y = \left\{\tfrac{35}{39}x + \tfrac{37}{39}\right\}^{7}; \text{ mithin hat man:}$$

$$y = \left(\left\{-5x+25\right\}_{4}^{\frac{22}{5}} \omega \left\{\tfrac{35}{39}x - \tfrac{37}{39}\right\}_{\frac{22}{5}}^{7} \omega \left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}_{7}^{\frac{21}{4}} \omega \left\{2x-4\right\}_{\frac{21}{4}}^{\frac{14}{3}} \omega \left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{\frac{14}{3}}^{4}\right)$$
$$\omega \left(\left\{-5x+25\right\}_{\frac{22}{5}}^{5} \omega \left\{x-5\right\}_{5}^{9} \omega \left\{-\tfrac{2}{9}x+10\right\}_{9}^{7} \omega \left\{\tfrac{35}{39}x - \tfrac{37}{39}\right\}_{7}^{\frac{22}{5}}\right)$$

Das genannte Fünfeck ist demnach durch jene Theilungslinie in ein Fünfeck und in ein Viereck zerlegt.

Werden diese Figuren ferners auch noch dislocirt, so erhält man folgende der Abbildung in Fig. 18 entsprechende Gleichung, deren numerische Ausführung jedoch aus oben erwähntem Grunde unterbleibt:

$$(1.)\quad y = \mathop{L_{30^\circ}}_{2,3}^{1,5} \begin{pmatrix} \left\{-5x+25\right\}_{4}^{\frac{22}{5}} \\ \left\{\tfrac{35}{39}x - \tfrac{37}{39}\right\}_{\frac{22}{5}}^{7} \\ \left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}^{\frac{21}{4}} \\ \left\{2x-4\right\}_{\frac{21}{4}}^{\frac{14}{3}} \\ \left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{\frac{14}{3}}^{4} \end{pmatrix} \omega \mathop{L_{45^\circ}}_{3,4}^{5,1} \begin{pmatrix} \left\{-5x+25\right\}_{\frac{22}{5}}^{5} \\ \left\{x-5\right\}_{5}^{9} \\ \left\{-\tfrac{2}{9}x+10\right\}_{9}^{7} \\ \left\{\tfrac{35}{39}x + \tfrac{37}{39}\right\}_{7}^{\frac{22}{5}} \end{pmatrix}$$

§. 36.

6. *Aufgabe.* Man soll mittelst der Gleichung für die gemeine Parabel, die Gleichung einer parabolischen Curve mit zwei Wendungspunkten ableiten? —

Diese Aufgabe, welche sich besonders dazu eignet, die Brauchbarkeit der Dislocationsformeln in allen jenen Fällen vor Augen zu legen, wo man sich genöthigt sieht, in Ermangelung geeigneter krummer Linien, solche theilweise aus bekannten einfacheren zusammen zu setzen, bedarf zur Verständigung noch Folgendes.

Es sei Fig. 19. BAC eine gemeine Parabel, deren Brennpunkt in F sich befindet. An den Endpunkten der im Focus errichteten Ordinaten seien zu der Curve die Tangenten GI und HE gezogen. Denkt man sich nun das unterhalb der Abscissenachse liegende Stück der Parabel HB dergestalt nach GM verlegt, dass die mit dem Parabelstück unveränderlich verbundenen Tangenten auf einander fallen, und die Convexität der Curve gegen die Abscissenaxe zugekehrt ist, so erhält man, wenn mit dem Curvenaste GC ein Gleiches geschieht, eine Curve, welche in allen ihren Theilen der Parabel angehört, aber in G und H einen Wendepunkt hat, und deren Aeste oder Zweige im Gegensatze zu der gewöhnlichen Parabel immer mehr der senkrechten Lage zustreben. Die Gleichung dieser neuen Curve wird nun auf folgende Weise erhalten:

Da für die Gleichung der gemeinen Parabel $y = px$, bekanntlich $tg\,\omega = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, und somit für $y = \frac{p}{2}$, $tang\ \omega = 1$ oder $\omega = 45^0$ ist, so hat man, da bei der Dislocation der Bögen, eine Drehung um den Winkel $= 2\omega$ und somit um 90^0, und eine Verlegung des Drehungspunktes von $d = \frac{p}{4}$, $\delta = -\frac{p}{2}$ nach $d' = \frac{p}{4}$, $\delta' = \frac{p}{2}$ erfolgt, offenbar als Gleichung der besprochenen Curve:

$$\text{wegen } y = \Big\{ \sqrt{px} \Big\}_{0}^{\frac{p}{4}} \omega \Big\{ \sqrt{px} \Big\}_{\frac{p}{4}}^{\infty}; \qquad y = \Big\{ \sqrt{px} \Big\}_{0}^{\frac{p}{4}} \omega \mathop{\mathbf{L}_{90^\circ}}_{\frac{p}{4},-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{4},\frac{p}{2}} \Big\{ \sqrt{px} \Big\}_{\frac{p}{4}}^{\infty};$$

wendet man nun hierauf die bekannten Formeln an, so erhält man nach Ausführung der angezeigten Operation:

$$(1.)\ y = \Big\{ \pm\sqrt{px} \Big\}_{0}^{\frac{p}{4}} \omega \pm \Big\{ \tfrac{1}{p^2}x^2 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{5}{16}p \Big\}_{\frac{p}{4}}^{\infty};$$ welches die Gleichung der in Fig. 19 dargestellten parabolischen Curve ist. Es ist endlich begreiflich, dass man die vorgenommene Veränderung mit der Parabel auch an jedem anderen Punkte und zwar beliebig oft hätte vornehmen können.

§. 37.

Die im letzten Paragraphe des vorigen Abschnittes ausgesprochene Bemerkung biethet ein sehr bequemes Mittel dar, die Gleichungen für die Polygone unter einer anderen sehr einfachen Form darzustellen. Wir wollen zuerst die Gleichung eines Dreieckes suchen, und setzen daher fest, dass der Winkel, den jede der drei Seiten mit der Abscissenachse macht, zugleich dem Coordinatenwinkel des entsprechenden Systems gleich sei, und dass daher sämmtlichen Ordinaten einer Seite eine und dieselbe Abscisse entspreche. Es seien daher ω_1, ω_2, ω_3 die drei Winkel, welche die drei Seiten mit der Abscissenachse machen; α_1, α_2, α_3, die ihnen entsprechenden Abschnitte und respektiven Grenzen; β_1 β_2 β_3 β_4 β_5 β_6 die Ordinaten für die Anfangs- und Endpunkte der Seiten d. h. die Grenzwerthe derselben, ferners s_1' s_2 s_3 die Seiten und π_1 π_2 π_3 die Dreieckswinkel selbst. Man hat daher nach dem bereits im 30. Paragraphe vorigen Abschnittes Erwähnten als Gleichung des Dreiecks:

$$(1.)\quad y = \left\{\frac{x_1 \equiv \alpha_1}{0}\right\}_{\beta_1}^{\beta_2} \omega \left\{\frac{x_2 \equiv \alpha_2}{0}\right\}_{\beta_3}^{\beta_4} \omega \left\{\frac{x \equiv \alpha_3}{0}\right\}_{\beta_5}^{\beta_6} = \mathop{\mathcal{CW}}^{2} \left\{\frac{x_\varrho \equiv \alpha_\varrho}{0}\right\}_{\beta_{2\varrho-1}}^{\beta_{2\varrho}};$$

wozu noch folgende Bedingungsgleichungen kommen:

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = \beta_2 - \beta_1 \\ s_2 = \beta_4 - \beta_3 \\ s_3 = \beta_6 - \beta_5 \end{array}\right\} \text{ oder combinatorisch: } (2.)\ \mathop{\mathcal{CW}} \left\{ s_\varrho = \beta_{2\varrho} - \beta_{2\varrho-1} \right\}$$

Ferners da für den Durchschnittspunkt je zweier Seiten offenbar $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $y_1 = \beta_2$, $y_3 = \beta_3$ u. s. w. ist, so hat man für jeden Durchschnitt s_1 mit s_2 offenbar:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 \ Cos\,\omega_1 - \beta_3 \ Cos\,\omega_2 \\ \beta_2 \sin\omega_1 = \beta_3 \sin\omega_2 \end{array}\right\} \text{ woraus man erhält: } \left\{\begin{array}{l} \beta_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) \dfrac{\sin\omega_2}{\sin(\omega_2 - \omega_1)} \\ \beta_3 = (\alpha_2 - \alpha_1) \dfrac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_2 - \omega_1)} \end{array}\right\}$$

in Allem somit sechs Gleichungen, welche sich in folgenden Systemen darstellen:

$$(2.)\quad \mathop{\mathcal{CW}}_{1\varrho,\,1q}^{3\varrho,\,2q \atop 2} \left\{ \beta_{2\varrho+q-1} = \left(\alpha_{\varrho+1} - \alpha_\varrho\right) \frac{\sin\omega_{\varrho-q+1}}{\sin\omega\left(\omega_{\varrho+1} - \omega_\varrho\right)} \right\} \text{ und wobei } \alpha_4 = \alpha_1 \text{ ist, wie früher.}$$

Endlich ist auch noch wegen:

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 180^\circ \\ \pi_2 + \omega_3 = \omega_2 \\ \omega_1 = \pi_1 + \omega_3 \end{array}\right\}; \qquad (3.) \left\{\begin{array}{l} \pi_1 = \omega_1 - \omega_3 \\ \pi_2 = \omega_2 - \omega_3 \\ \pi_3 = 180 - (\alpha_1 + \omega_2) \end{array}\right\}$$

Diess so eben Gesagte angewendet auf ein Polygon von n Seiten, gibt folgende Systeme von Gleichungen:

$$(4.)\quad y = \mathop{\mathcal{CW}} \left\{\frac{x_\varrho \equiv \alpha_\varrho}{0}\right\}_{\beta_{2\varrho-1}}^{\beta_\varrho},$$ als Gleichung eines n Ecks mit nachfolgenden Bedingungsgleichungen:

$$(5.)\quad \mathop{\mathcal{CW}}_{1\varrho,\,1q}^{n\varrho,\,2q} \left\{ \beta_{2\varrho+q-1} = \left(\alpha_{\varrho+q-1} - \alpha_\varrho\right) \frac{\sin\omega_{\varrho-q+1}}{\sin\left(\omega_{\varrho+1} - \omega_\varrho\right)} \right.;$$

$$(6.)\quad \overset{n}{\mathfrak{C}}\left\{s_\varrho = \beta_{2\varrho} - \beta_{2\varrho-1}\right\}$$; und endlich

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l} \overset{n}{\mathfrak{C}}\left\{\pi_\varrho = \omega_\varrho - \omega_{\varrho-1}\right\} \\ \pi_1' + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \ldots \pi_n = (n-2)\, 2R \end{array}\right\}$$

Bezeichnet man den Umfang des Polygons mit U, so hat man als Formel für denselben die Gleichung:

$$(8.)\quad U = \overset{n}{\underset{1}{\mathfrak{P}}}\left\{\beta_{2\varrho} - \beta_{2\varrho-1}\right\};$$

Schneidet eine Gerade, deren Gleichung; $y = \left\{\frac{x' \equiv \alpha'}{0}\right\}_{\beta'}^{\beta''}$ sein soll, das obige Polygon, so hat man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte folgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha' - \alpha_\varrho = y_\varrho\ Cos\ \omega_\varrho - y'\ Cos\ \omega' \\ y_\varrho\ sin\ \omega_\varrho = y'\ sin\ \omega' \end{array}\right\};$$

Bestimmt man hieraus y_ϱ und y', und überträgt man die entsprechenden Grenzen auf die gefundenen Werthe von y_ϱ und y', wie die Natur der Sache fordert, so hat man:

$$(9.)\quad \left\{\begin{array}{l} y_\varrho = \left\{(\alpha' - \alpha_\varrho)\dfrac{sin\ \omega'}{sin\,(\omega_\varrho - \omega')}\right\}_{\beta_{2\varrho-1}}^{\beta_{2\varrho}} \\[2ex] y' = \left\{(\alpha' - \alpha_\varrho)\dfrac{sin\ \omega_\varrho}{sin\,(\omega_\varrho - \omega')}\right\}_{\beta_1}^{\beta'} \end{array}\right\}$$

Substituirt man nun nach und nach die verschiedenen speciellen Werthe von α, β, ω; so werden diese Gleichungen (9.) in allen Fällen angeben, ob und in welchen Punkten das Polygon von jener Geraden geschnitten wird.

Das Problem, aus gegebenen Dreiecken ein Polygon zu bilden, dessen Lösung nach den bisher entwickelten Lehren wohl keiner weitern Schwierigkeit unterliegt, ist in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, begreiflicher Weise eine unbestimmte Aufgabe und gestattet mehrere Auflösungen. In Verbindung mit der 3. Aufgabe dieses Abschnittes bildet sie die Grundlage für die analytische Lösung der Aufgabe: „Ein Polygon durch Theilung seiner Fläche und Zusammensetzung der Theile in ein anderes Polygon von gegebener Form zu verwandeln" eines Problems, welches zu lösen, wie schon in der Vorrede erwähnt wurde, sich weder die Synthesis, noch die so weit vorgedrungene Analysis anheischig macht. Und in der That liess sich wohl auch so lange keine analytische und directe Behandlung dieses Problems erwarten, bis man es versuchte, auch für Polygone und Dreiecke Gleichungen aufzustellen und sie den combinatorischen Operationen zugänglich zu machen.

Der Zweck dieser Abhandlung gestattet es gleichwohl nicht, die durch die Discussion aller möglichen Wechselfälle etwas ins Breite gehende Lösung dieser interessanten Aufgabe hier aufzunehmen. In einer vollständigen analytischen Polygonometrie darf sie freilich nicht vermisst werden. Hier indessen möge es genügen, die Möglichkeit der Lösung dieser und ähnlicher Probleme auf dem hier bezeichneten Wege im Allgemeinen gezeigt zu haben. —

VI. Abschnitt.

Von den Gleichungen begrenzter geraden Linien im Raume; von der Gleichung einer Fläche in der Ebene, und von den begrenzten krummen Flächen im Raume.

§. 38.

Die in den früheren Abschnitten neu eingeführten Begriffszeichen der völlig willkührlichen Begrenzung und des Nebeneinander- oder Zugleich-Bestehens beliebig vieler geometrischer Objekte im Coordinatensysteme, finden natürlich nicht bloss in der Ebene, sondern auch, und zwar besonders, im Raume eine ungemein nützliche Anwendung. In der That waren es ja Untersuchungen im Raume, welche die unzureichende und mangelhafte Seite der analytischen Geometrie zuerst fühlbar machten und sie gewissermassen aufdeckten, und so die unmittelbare Veranlassung wurden, zur Erfindung oder wenigstens totalen Umstaltung einer eigenen Wissenschaft, der sogenannten *Geometrie descriptive*, durch *Monge* und *Hachette*.

Obgleich nun nicht in Abrede zu stellen ist, dass durch diese so schöne und zu so hoher Vollendung gediehene Wissenschaft den dringendsten Bedürfnissen, vorzüglich in technischer Beziehung, grösstentheils abgeholfen wurde, so muss doch auch anderseits zugestanden werden, dass eine rein analytische Behandlung dieser Probleme desshalb noch immer sehr wünschenswerth bleibt, und dass letztere Methode in vielen Fällen unstreitig den entschiedensten Vorzug verdienen würde. Da nun aber eine vollständige Durchführung des vorhin erwähnten Gegenstandes ausser dem Zwecke einer vorläufigen Mittheilung liegt: so muss ich mich hier begnügen, nur überhaupt den Weg zu bezeichnen, der diessfalls zu betreten sein dürfte.

Um uns daher von der gewöhnlichen Bezeichnungsweise nicht ohne Noth zu entfernen, wollen wir uns der unter (1) aufgeführten Gleichungen für eine gerade Linie im Raume bedienen, und bemerken hierbei bloss, dass die hierbei gebrauchten Grössen α und β mit den früheren Grenzwerthen nicht verwechselt werden dürfen, mit denen sie auch, wenigstens bei jenen Aufgaben, die ich hier zu behandeln gedenke, auf keine Weise in Collision kommen. Zur Bezeichnung der Grenzen in Bezug auf die hier zu Grunde liegende absolut veränderliche Grösse z wollen wir uns dem früheren Uebereinkommen gemäss des Buchstabens γ bedienen.

§. 39.

1. *Aufgabe.* Es ist die Gleichung einer begrenzten Linie im Raume zu suchen und ihre Länge zu bestimmen?

Es sei nun die Gleichung der unbegrenzten geraden Linie im Raume:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \text{; so ist die einer begrenzten: (2.)} \left\{\begin{aligned} x &= \Big\{az + \alpha\Big\}_{\gamma_1}^{\gamma_2} \\ y &= \Big\{bz + \beta\Big\}_{\gamma_1}^{\gamma_2} \end{aligned}\right.$$

Vorerst ist begreiflich, dass die Grenzwerthe in beiden zusammengehörigen Gleichungen, da sie sich genau auf dieselbe Variable z beziehen, dieselben sein müssen. Eben so ersichtlich ist es ferners auch, dass durch die blosse Begrenzung von z, als der zu Grunde liegenden absolut veränderlichen Grösse, zugleich auch die relativ veränderlichen x und y, und somit die ganze Linie selbst vollkommen begrenzt sein müsse. Die Grenzen von x und y, falls man sie bedarf, findet man mittelst der Gleichung (1.) und zwar:

$$\Big\{x\Big\}_{a\gamma_1+\alpha}^{a\gamma_2+\alpha} \quad \text{und} \quad \Big\{y\Big\}_{a\gamma_1+\beta}^{b\gamma_2+\beta}$$

Sind daher n solcher Linien im Raume gegeben, so hat man nach der combinatorischen Bezeichnungsweise:

$$\text{(I.)} \left\{\begin{aligned} x &= \overset{n}{\mathcal{CO}} \Big\{a_\varrho z + \alpha_\varrho\Big\}_{\gamma_{2\varrho-1}}^{\gamma_{2\varrho}} \\ y &= \overset{n}{\mathcal{CO}} \Big\{b_\varrho z + \beta_\varrho\Big\}_{\gamma_{2\varrho-1}}^{\gamma_{1\varrho}} \end{aligned}\right\}$$

als Gleichung eines Systems von n begrenzten Geraden im Raume.

Wegen: $x' - x'' = a\ (\gamma_2 - \gamma_1)$; $y' - y'' = b\ (\gamma_2 - \gamma_1)$; und $z' - z'' = \gamma_2 - \gamma_1$, welche Resultate unmittelbar aus der Gleichung (2) fliessen, hat man für die Länge der Linie (2) offenbar:

(3.) $D = (\gamma_2 - \gamma_1)\sqrt{a_\varrho^2 + b_\varrho^2 + 1}$; und für ein System von n solchen Linien.

$$\text{(II.)}\ D = \overset{n}{\mathcal{CO}} \left((\gamma_{2\varrho} - \gamma_{2\varrho-1}) \sqrt{a_\varrho^3 + b_\varrho^2 + 1}\right).$$

§. 40.

2. *Aufgabe.* Man suche die Gleichung einer aus n Geraden bestehenden sogenannten gebrochenen Linie im Raume, und zwar sowohl für den Fall, wo sämmtliche Gerade oder nur einige in derselben Ebene liegen, und die Linie eine geschlossene Figur bildet, als auch wo dieses nicht der Fall ist? —

Es seien vorerst zwei Linien im Raume gegeben, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben. Ihre Gleichungen seien:

$$(1.)\left\{\begin{aligned} x &= \left\{az+\alpha\right\}_{\gamma_1}^{\gamma_2} \\ y &= \left\{bz+\beta\right\}_{\gamma_1'}^{\gamma_2} \end{aligned}\right\} \text{ und } (2.)\left\{\begin{aligned} x &= \left\{a'z+\alpha'\right\}_{\gamma_1'}^{\gamma_2'} \\ y &= \left\{b'z+\beta'\right\}_{\gamma_1'}^{\gamma_2'} \end{aligned}\right\}$$

Sollen sie sich in der That durchschneiden, oder einen Punkt gemein haben, so muss nothwendig für diesen $z = \gamma_2 = \gamma'_1$ sein; und ferners noch:

$$\gamma_2 - \gamma'_1 = \frac{a-a'}{\alpha-\alpha'} = \frac{b-b'}{\beta-\beta'}.$$

Für ein System von n solchen zusammenhängenden Linien wird man somit haben:

$$\text{III.)}\left\{\begin{aligned} x &= \mathop{\mathcal{C}\mathcal{O}}\limits^{n} \left\{a_\varrho z+\alpha_\varrho\right\}_{\gamma_\varrho}^{\gamma_{\varrho+1}} \\ y &= \mathop{\mathcal{C}\mathcal{O}}\limits^{n} \left\{b_\varrho z+\beta_\varrho\right\}_{\gamma_\varrho}^{\gamma_{\varrho+1}} \end{aligned}\right\}$$ als Gleichung eines Systems von n zusammenhängenden Linien im Raume.

Nebenbei bestehen aber die Bedingungsgleichungen:

$$(1.)\ \mathop{\mathcal{C}\mathcal{O}}\limits^{n}\left(\gamma_\varrho = \frac{a_\varrho - a_{\varrho+1}}{\alpha_\varrho - \alpha_{\varrho+1}} = \frac{b_\varrho - b_{\varrho+1}}{\beta_\varrho - \beta_{\varrho+1}}\right);$$ wenn die gebrochene Linie geschlossen ist; und:

$$(2.)\ \mathop{\mathcal{C}\mathcal{O}}\limits^{n-1}\left(\gamma_{\varrho+1} = \frac{a_\varrho - a_{\varrho+1}}{\alpha_\varrho - \alpha_{\varrho+1}} = \frac{b_\varrho - b_{\varrho+1}}{\beta_\varrho - \beta_{\varrho+1}}\right);$$ wenn sie nicht geschlossen ist.

Bei ungeschlossener Figur sind mithin $(n-1)$ Bedingungsgleichungen vorhanden, bei geschlossener hingegen sind deren so viele, als Seiten, d. h. n. Da nun im Ganzen $4n$ konstante Grössen vorkommen, so bleiben im ersten Falle noch $3n$, im zweiten hingegen noch $(3n+1)$ willkührlich oder unbestimmt.

Soll noch die Bedingung ausgedrückt werden, dass jene gebrochene Linie in einer und derselben Ebene von gegebener Lage liegen soll, so müssen nebst obigen Bedingungsgleichungen auch noch die folgenden $2n$ Gleichungen erfüllt werden:

$$(3.)\ \mathop{\mathcal{C}\mathcal{O}}\limits^{n}\left\{\begin{aligned} A\alpha_\varrho + B\beta_\varrho + D &= 0 \\ Aa_\varrho + Bb_\varrho + C &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Da nun bekanntlich in der Gleichung einer Ebene vier konstante Grössen auftreten, von denen jedoch nur drei unbestimmt, die vierte hingegen völlig willkührlich angenommen werden kann, somit auf die Lage der Ebene keinen Einfluss hat, so sind demnach bei einer Anzahl von $(4n+3)$ Unbekannten, wenn die Figur geschlossen, und von $(4n+5)$ Unbekannten, wenn sie nicht geschlossen ist, in beiden Fällen $2n$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen, wobei im ersteren Falle noch $(2n+3)$, im zweiten hingegen $(2n+5)$ jener Grössen unbestimmt bleiben.

Liegen endlich nur einige dieser Linien in einer Ebene, die übrigen nicht, so hat man aus jedem der beiden Systeme (2) und (3) die entsprechende Zahl der Bedingungsgleichungen zu entnehmen.

§. 41.

3. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung eines Systems paralleler Linien im Raume finden?

Sollen die durch Gleichung (1) und (2) dargestellten Linien im Raume parallel laufen, so müssen:

$$(1.)\left\{\begin{array}{l} x = \Big\{az+\alpha\Big\}_{\gamma_1}^{\gamma_2} \\ y = \Big\{bz+\beta\Big\}_{\gamma_1}^{\gamma_2} \end{array}\right\} \text{ und } (2.)\left\{\begin{array}{l} x = \Big\{a'z+\alpha'\Big\}_{\gamma_1}^{\gamma_2} \\ y = \Big\{b'z+\beta'\Big\}_{\gamma_1}^{\gamma'_2} \end{array}\right\} \text{ nothwendig: } \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array};$$

Benützt man daher diese Bedingungsgleichungen sogleich dazu, um aus dem Systeme von n Linien $(2n-2)$ der in ihren Gleichungen vorkommenden Unbekannten wegzuschaffen, so erhält man für dieses System nachfolgende Gleichung:

$$\text{IV.)}\left\{\begin{array}{l} x = \overset{n}{\mathcal{C}\!\mathcal{O}} \Big\{a_\varrho z+\alpha_\varrho\Big\}_{\gamma_{2\varrho-1}}^{\gamma_{2\varrho}} \\ y = \overset{n}{\mathcal{C}\!\mathcal{O}} \Big\{b_\varrho z+\beta_\varrho\Big\}_{\gamma_{2\varrho-1}}^{\gamma_{2\varrho}} \end{array}\right\}$$

als Gleichung eines Systems paralleler Linien im Raume.

In diesem Systseme sind daher nur mehr $6n-(2n-2) = 4n+2)$ unbestimmte Constante vorhanden.

§. 42.

4. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung eines Systems von n senkrecht auf einander stehender begrenzter Linien im Raume finden, sowohl wenn sie in derselben Ebene, als auch wenn sie in verschiedenen Ebenen liegend angenommen werden?

Liegen die Linien nicht in derselben Ebene, so hat man offenbar, wenn sie sich zugleich schneiden, und die Figur sich schliesst:

$$\text{V.)}\left\{\begin{array}{l} x = \overset{n}{\mathcal{C}\!\mathcal{O}} \Big\{a_\varrho z+\alpha_\varrho\Big\}_{\gamma_\varrho}^{\gamma_{\varrho+1}} \\ y = \overset{n}{\mathcal{C}\!\mathcal{O}} \Big\{b_\varrho z+\beta_\varrho\Big\}_{\gamma_\varrho}^{\gamma_{\varrho+1}} \end{array}\right\};$$

nebst den Bedingungsgleichungen:

$$(1.)\quad \underset{\rho}{\overset{n}{\mathcal{CO}}}\left(a_\rho\, a_{\rho+1} + b_\rho\, b_{\rho+1} + 1 = 0\right)$$

$$(2.)\quad \underset{\rho}{\overset{n}{\mathcal{CO}}}\left(\gamma_\rho = \frac{a_\rho - a_{\rho+1}}{\alpha_\rho - \alpha_{\rho+1}} = \frac{b_\rho - b_{\rho+1}}{\beta_\rho - \beta_{\rho+1}}\right)$$

In diesem Falle sind daher von den 6 konstanten Grössen $2n$ durch die Bedingungsgleichungen bestimmbar, uud somit nur $4n$ wirklich unbestimmt. Ist die Figur nicht geschlossen, so ist die Anzahl der noch unbestimmten Grössen offenbar $(4n+3)$.

Liegen sie noch überdiess alle in derselben Ebene, so hat man nebst den Gleichungen der Systeme (1) und (2) auch noch folgenden (3) Genüge zu leisten:

$$(3.)\quad \underset{\rho}{\overset{n}{\mathcal{CO}}}\left\{\begin{matrix} A\alpha_\rho + B\beta_\rho + D = 0 \\ Aa_\rho + Bb_\rho + C = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Es sind mithin diessfalls, wegen einem Zuwachse von 3 neuen Constanten, nur noch mehr $3n+3$ jener Grössen als unbestimmt ansehen. Liegt endlich nur eine Partie dieser Linien in einer Ebene, andere hingegen in einer zweiten Ebene, so hat man nachfolgende Bedingungsgleichungen an der Stelle von (3) aufzustellen:

$$(4.)\quad \underset{(1,5,9)}{\overset{(1,7,15)}{\mathcal{CO}}}\left\{\begin{matrix} A\alpha_\rho + B\beta_\rho + D = 0 \\ Aa_\rho + Bb_\rho + C = 0 \end{matrix}\right\} \text{ und } \underset{(2,8,16)}{\overset{(4,8,n)}{\mathcal{CO}}}\left\{\begin{matrix} A'\alpha_\rho + B'\beta_\rho + D' = 0 \\ A'a_\rho + B'b_\rho + C' = 0 \end{matrix}\right\};$$

welches nach unserer früheren Feststellung der Zeichen ausdrückt, dass die 1., 5., 6., 7., 9., 10., 11., 12., 13., 14., 15. Linie in einer, und die 2., 3., 4., 8., 16. bis n. in einer zweiten von ersterer verschiedenen Ebene liegen. Diese wenigen Aufgaben reichen schon hin, um die Anwendbarkeit unserer Bezeichnung auch bei Untersuchungen im Raume hinreichend vor Augen zu führen, indem das Prinzip der willkührlichen Begrenzung auch auf ganz gleiche Weise sich bei Linien mit doppelter Krümmung anwenden lässt. Demnach liesse sich z. B. ohne Schwierigkeit die Gleichung für die Kanten irgend eines Polyeders, wie etwa des *Dodekaëder's* aufstellen, oder überhaupt die Gleichung einer jeden aus geraden und krummen Linien wie immer zusammengesetzten räumlichen Figur bilden. Von ganz anderer Beschaffenheit sind dagegen die Gleichungen willkührlich begrenzter Flächen im Raume, sie mögen nun eben oder krumm sein. Die Möglichkeit ihrer Aufstellung hängt unmittelbar und zunächst damit zusammen, die Gleichung einer beliebigen von geraden, krummen oder gemischten Linien begrenzten Fläche in der Ebene aufzustellen. Eine Aufgabe, die uns nun sogleich im nächsten Paragraphe beschäftigen soll.

§. 43.

Eine dem ersten Anscheine nach ziemlich unfruchtbare Aufgabe ist die Aufstellung einer Gleichung für die Fläche irgend einer in der Ebene liegenden Figur. Man hat sich, wie ich schon in der Einleitung Gelegenheit fand zu bemerken, unter dieser Gleichung keineswegs die Formel für den Flächeninhalt dieser Figur zu denken, sondern sie ist recht eigentlich die Gleichung für sämmtliche Punkte dieser Fläche mit steter Rücksicht auf ihre Begrenzung.

Die Gleichung einer gewissen Fläche, z. B. einer gegebenen Dreiecksfläche finden, heisst demnach nichts anderes, als eine solche Funktion auffinden, welche die Ordinaten der sämmtlichen, der Abscisse x entsprechenden Punkte angibt. So müsste man z. B. in Fig. 20 aus der, die Fläche ABC repräsentirenden Funktion für $x = op$ oder op' die Ordinaten der sämmtlichen diesen Abscissen entsprechenden Punkte, d. h. aller zwischen m und m' oder im zweiten Falle zwischen n und n' liegenden Punkte der Fläche entnehmen können. Da aber begreiflicher Weise in allen diesen Fällen es unendlich viele Punkte gibt, die alle der nämlichen Abscisse entsprechen und die zugleich der Fläche angehören, so ist eine Angabe derselben nur dadurch möglich, dass man die Grenzen feststellt, zwischen welchen sie liegen. Man müsste demnach in Bezug auf unser angeführtes Dreieck sagen, dass alle der Abscisse op entsprechenden Punkte des Dreieckes zwischen m und m' und somit auch ihre Ordinaten zwischen mp und $m'p$ liegen, und dass das Gleiche mit den Grenzwerthen np' und $n'p'$ bezüglich der Abscisse op' zu gelten habe. Da die beiden Grenzwerthe immer von je zwei geraden oder krummen Linien ausgehen, von denen die eine, unserer Bezeichnung gemäss ein Progress, die andere dagegen ein Regress genannt werden muss, so wollen wir hier, wo wo wir im Begriffe stehen, Anwendung von ihnen zu machen, die schon früher gegebene Erklärung dieser Begriffe durch nachfolgende Bemerkungen ergänzen.

Unter einem *Progresse* versteht man jedes beliebige Stück des oberen, d. h. von der Abscissenachse mehr entfernten Theils des Umfangs einer Figur, in wie ferne es in der Richtung von der Ordinatenachse geradeweg und somit im ersten Quadranten links gegen rechts gezählt wird. *Regress* hingegen heisst jedes Stück des unteren, d. h. der Abscissenachse näher liegenden Theils des Umfangs, in wie ferne es gegen die Ordinatenachse zu, und somit z. B. im ersten Quadranten von rechts gegen links gezählt wird. Hieraus sieht man nun, dass die ganze Folge von Progressen von sämmtlichen Regressen durch zwei Ordinaten geschieden werden, von denen die eine der kleinsten, die andere hingegen jederzeit der grössten aller Abscissen entspricht. Bei Figuren, die bloss aus geraden Linien zusammengesetzt sind, können diese Werthe für die grösste und kleinste Abscisse bei jeder Stellung gegen die Abscissenachse aus den Grenzwerthen der Seiten selbst unmittelbar entnommen werden, so wie dieses auch bei allen jenen, aus geraden und krummen Linien zusammengesetzten Figuren der Fall ist, bei welchen die Anfangs- und Schluss-Progresse gerade Linien sind. In diesen Fällen entspricht immer der kleinste und grösste vorkommende Grenzwerth zugleich auch dem kleinsten und grössten Werth der Abscissen, oder sind diese vielmehr selbst.

Anders dagegen verhält es sich, wenn das Anfangs- oder Schlussglied der Progresse eine krumme Linie ist. In diesem Falle besteht diese Linie aus einem Theile der zu den Progressen, und aus einem andern, der zu den Regressen gezählt werden muss, und es bleibt nichts anderes übrig, als das Maximum und Minimum der Abscisse x nach den Hilfsmitteln, welche die Differenzialrechnung darbietet, zu bestimmen. Die in Fig. 21 und Fig. 22 dargestellten Fälle veranschaulichen das Gesagte, und machen bemerklich, dass zwar in

Fig. 21 sämmtliche Grenzwerthe schon durch die Gleichung der Figur, in Fig. 22 hingegen zwar die Grenzwerthe bezüglich der Punkte B, k, und E, g, so wie auch der übrigen Vereinigungspunkte, keineswegs jedoch auch jene der Punkte A und F gegeben sind, sondern letztere erst auf dem angezeigten Wege gefunden werden müssen.

§. 44.

5. *Aufgabe.* Man soll die Gleichung für die Fläche eines Polygons von n Seiten finden?

Es sei nun die Gleichung des Polygons, für deren Fläche die Gleichung gesucht werden soll, die folgende:

$$y = \mathop{\boldsymbol{\omega}}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} ; \text{ wo bekanntlich } \alpha_\varrho = \frac{V_\varrho - V_{\varrho+1}}{U_{\varrho+1} - U_\varrho} \text{ ist;}$$

Nimmt man nun an, dass sämmtliche Disjunctivglieder vom ersten bis zum η^{ten} inclusive Progresse, und von diesem wieder bis zum n^{ten} inclusive Regresse, so wird obige Gleichung in seine Progresse und Regresse zerlegt, folgende Form annehmen:

$$y = \mathop{\boldsymbol{\omega}}^{\eta} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \omega \mathop{\boldsymbol{\omega}}_{\eta}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} ;$$

wobei offenbar der kleinste Werth von $x = \alpha_1 = \alpha_{n+1}$, und der grösste gleich $\alpha_{\eta+1}$ ist, als obere Grenze des η^{ten} Gliedes.

Da nun in der Gleichung für die Polygonsfläche jedem Werthe von x unendlich viele von y entsprechen, und es somit unentschieden oder unbestimmt bleibt, welcher der unendlich vielen Werthe von y der gemeinte sei, so muss die Ordinate y mit dem Charakter der Unbestimmtheit bezeichnet werden, und somit offenbar $y = \frac{0}{0}$ gesetzt werden. Aber diese Unbestimmtheit hat ihre ganz bestimmten Grenzen, und um sie daher zu beschränken, werden wir schreiben $y = \left\{ \frac{0}{0} \right\}_{\beta_1}^{\beta_2}$. Durch dieses Symbol wird nun angezeigt, dass ein gewisses y aller Werthe zwischen $y = \beta_1$ und $y = \beta_2$ fähig sei. Sind nun diese Grenzen selbst Funktionen der Abscisse x, so eignet sich dieser Ausdruck ganz zum allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Punkte der Polygonsfläche, oder auch irgend einer anderen Fläche. Dem Gesagten zu Folge hat man demnach, ohne einer weiteren Rechtfertigung zu bedürfen:

$$(1.)\; y = \mathop{\boldsymbol{\omega}}_{\eta}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \left\{ \frac{0}{0} \right\}_{\cdot}^{\cdot} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} ; \text{ als Gleichung einer Polygonsfläche von } n \text{ Seiten.}$$

Wendet man diese Formel auf das schon mehrmals erwähnte Fünfeck an, so hat man, die Gleichung des Fünfecks als bekannt vorausgesetzt:

$$(2.)\ y=\left(\left\{-5x+15\right\}_{4}^{5}\ \omega\left\{x-5\right\}_{5}^{9}\right)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\bullet}^{\bullet}\left(\left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}_{9}^{2\frac{1}{4}}\omega\left\{2x-4\right\}_{2\frac{1}{4}}^{1\frac{4}{3}}\omega\left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{1\frac{1}{3}}^{4}\right);$$

als Gleichung der Fünfecksfläche.

Für $x=8$, und $x=6$ erhält man der Ordnung nach $y=3\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\bullet}^{\bullet}1\tfrac{4}{3}$, und $y=1\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\bullet}^{\bullet}6$; d. h. alle beziehungsweise zwischen 3 und $1\frac{4}{3}$, und 1 und 6 liegenden Punkte der entsprechenden Ordinaten sind Punkte der Fünfecksfläche.

In jedem Dreiecke bilden immer zwei Seiten zusammen den Progress und die dritte den Regress, oder umgekehrt. Man hat daher z. B.

$$(3.)\ y=\left\{\tfrac{1}{2}x+2\right\}_{2}^{1\frac{6}{4}}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\bullet}^{\bullet}\left(\left\{2x-6\right\}_{1\frac{6}{3}}^{4}\omega\left\{-\tfrac{1}{2}x+4\right\}_{4}^{2}\right);$$ als Gleichung der in Fig. 2 dargestellten Dreiecksfläche.

§. 15.

Mit dem vorigen in unmittelbarem Zusammenhange steht die schon im zweiten Abschnitte erwähnte Gleichung für die Lamellen. Man hat sich unter einer Lamelle denjenigen Theil einer Ordinate zu denken, welcher ganz innerhalb der Figur sich befindet, und somit zwischen dem obern und untern Theile des Umfanges einer Figur liegt. Hieraus ergibt sich sofort unmittelbar, dass der allgemeine Ausdruck, die Formel, oder, wie man sie hier wohl auch noch nennen kann, die Gleichung der Lamellenlänge dem Unterschiede zwischen sämmtlichen Progressen und Regressen gleich ist. In Bezug auf obiges Polygon hat man daher:

$$\lambda=\mathop{\mathcal{W}}\limits^{n}\left\{U_{\varrho}x+V_{\varrho}\right\}_{\alpha_{\varrho}}^{\alpha_{\varrho+1}}-\mathop{\mathcal{W}}\limits_{\eta}^{n}\left\{U_{\varrho}x+V_{\varrho}\right\}_{\alpha_{\varrho}}^{\alpha_{\varrho+1}};$$ als Gleichung oder Formel für die Lamellenlänge eines Polygons.

Es verdient hier bemerkt zu werden, dass sich bei diesen Ausdrücken für die Lamellenlänge nach den Grundsätzen der früheren Abschnitte oft sehr bedeutende Reduktionen anwenden lassen, wo dieses auch in dem sogleich anzuführenden Beispiele der Fall ist.

Auf obiges Fünfeck Fig. 3, dessen Gleichung bekannt ist, angewendet, hat man vorerst:

$$\lambda=\left[\left\{-5x+15\right\}_{4}^{5}\ \omega\ \left\{x+10\right\}_{5}^{9}\right]-\left[\left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}_{9}^{2\frac{1}{4}}\omega\left\{2x-4\right\}_{2\frac{1}{2}}^{1\frac{4}{3}}\omega\left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{1\frac{4}{2}}^{4}\right];$$

und nach einer ganz leichten Reduktion, wobei die einzelnen Disjunctionsglieder in solche aufgelöst werden, mit gleicher Grenzbezeichnung findet man:

$$(2.)\ \lambda=\left\{-\tfrac{5}{3}x+15\right\}_{9}^{5}\ \omega\ \left\{1\tfrac{3}{3}x-15\right\}_{5}^{2\frac{1}{4}}\omega\left\{7x-29\right\}_{2\frac{1}{4}}^{1\frac{1}{3}}\omega\left\{1\tfrac{1}{2}x-22\right\}_{1\frac{1}{3}}^{4};$$

für $x=8$, erhält man für $\lambda=\frac{5}{3}$.

Nach dieser Digression wollen wir nun sofort wieder zum eigentlichen Gegenstande unserer Betrachtung zurückkehren.

§. 46.

Die im vorletzten Paragraphe aufgelöste Aufgabe: „Die Gleichung irgend einer, wie immer begrenzten Fläche, in so ferne sie in der Ebene liegt, zu finden,“ setzt uns nunmehr auch in den Stand, nicht nur die Gleichung irgend einer beliebig begrenzten ebenen Fläche im Raume aufzustellen, sondern verhilft uns auch zur Gleichung einer wie immer begrenzten, krummen Fläche im Raume.

Es sei demnach $z = \varphi\,(x, y)$ die allgemeine Gleichung irgend einer krummen Fläche im Raume, und $y = F\,(x)$ die allgemeine Gleichung einer in der Ebene $x\,y$ liegenden Curve oder wie immer zusammengesetzten Figur $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3, \ldots$ Fig. 23, als horizontale Projektion der auf der krummen Fläche liegenden, und einen Theil derselben begrenzenden Curve von doppelter Krümmung $E_1\ E_2\ E_3 \ldots E_n$. — Bezeichnet man nun durch $f\,(x)$ alle progressiven Disjunctivglieder und durch $f'\,(x)$ sämmtliche Regresse, so hat man offenbar:

$y = F(x) = f(x)\ \omega\, f'\,(x)$; und nach dem Paragraphe (44) hat man demnach als allgemeine Gleichung der Fläche $E_1\ E_2\ E_3 \ldots E_n$:

$y = f(x) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} f'\,(x)$; aber schon in dem angeführten Paragraphe wurde gezeigt, dass $y = \frac{0}{0}$ ist. Da nun bei der Gleichung einer krummen Fläche sowohl x als auch y absolut, und daher y nicht mehr wie oben relativ veränderlich ist, so ist es vorzuziehen, statt $\frac{0}{0}$, y zu setzen, wesshalb, der Begrenzung von y wegen, die Gleichung der krummen Fläche unter folgender Form erscheint:

$z = \varphi\left(x, f\,(x) \left\{ \dot{y} \right\} f'(x)\right)$; und da im Allgemeinen auch x begrenzt ist, so erhält man, wenn die gemeinschaftlichen Grenzen sämmtlicher x durch α_1 und α_2 ausgedrückt werden:

(1.) $z = \left\{ \varphi\,(x, f(x) \left\{ \dot{y} \right\} f'\,(x)) \right\}_{\alpha_1}^{\alpha_2}$; als allgemeine Gleichung einer jeden begrenzten krummen Fläche. Wir wollen nun das hier Gesagte auf einige mehr specielle Fälle anwenden.

§. 47.

6. *Aufgabe.* Man suche die Gleichung einer durch ein Polygon begrenzten Ebene, wenn die Gleichung der Ebene und jene der Projektion des Polygons gegeben ist? —

Nach Paragraph (44) ist die Gleichung der Polygonsfläche, wenn die Progresse vom 1^{ten} bis η^{ten} Gliede gehen:

$$y = \mathop{\omega}_{\eta}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} \mathop{\omega}_{\prime}^{\eta} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}$$

Die Gleichung einer Ebene ist bekanntlich: $z = Mx + Ny + P$. Ist sie dagegen Fig. 24, durch das Polygon $ABC\ldots$ begrenzt, so hat man nach dem vorigen Paragraphe, wenn man zugleich berücksichtiget, dass α_1 den kleinsten, und α_η den grössten Werth, dessen x fähig ist, bedeutet:

$$(1.)\ y = M\left\{x\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_\eta} + P + N\left(\mathcal{CO}_{\eta}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \left\{y\right\} \mathcal{CO}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}\right);$$ als

Gleichung einer durch ein Polygon begrenzten Ebene.

§. 48.

7. *Aufgabe.* Man suche die Gleichung einer n seitigen schiefen Pyramide, wenn die Gleichung der Basis und die Coordinaten der Spitze gegeben sind?

Es sei die Gleichung der Basis, als jene eines Polygons von n Seiten, zugleich in ihre Progresse und Regresse getheilt:

$$(1.)\ y = \mathcal{CO}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} = \mathcal{CO}_{\eta}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \omega\ \mathcal{CO}^{\eta}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};$$

und die drei Coordinaten der Spitze seien a, b, c. Die Gleichung einer Ebene, die durch jene Spitze geht, ist mithin:

$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = o$; oder auch (2.) $A'(x-a) + B'(y-b) + z - c = o$. Für $z = o$ erhält man die Gleichung für die Knotenlinie in der Ebene XY. Soll nun diese Knotenlinie mit der Linie $y = Ux + V$ identisch sein: so müssen wegen

$y = -\frac{A'}{B'}x + \frac{aA' + c}{B'} + b$, wie sich diessfalls obige Gleichung gestaltet: nothwendig die folgenden beiden Gleichungen erfüllt werden, nämlich:

$U = -\frac{A'}{B'}$, und $V = \frac{aA' + c}{B'} + b$; hieraus folgt für

$A' = -\frac{cU}{aU + V - b}$; und $B' = \frac{c}{aU + V - b}$.

Bestimmt man nun aus Gleichung (2) die Grösse z und substituirt in selbe die so eben gefundenen Werthe für A' und B', so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$(3.)\ z = \frac{c}{aU + V - b}\left[V + Ux - y\right];$$

und als allgemeine Gleichung für sämmtliche Ebenen, welche durch die Spitze der Pyramide und durch die Polygonsseiten gehen, wird man somit haben:

$$(4.)\ z = \mathcal{CO}^{n}\left(\frac{c}{aU_\varrho + V_\varrho - b}\left[V_\varrho + U_\varrho x - y\right]\right).$$

Um nun diese Ebenen auch gehörig zu begrenzen, sind noch nachfolgende Betrachtungen anzustellen:

Die Projektionen sämmtlicher Seitenflächen der Pyramide sind gleichfalls wieder Dreiecke, deren eine Seite immer eine Polygonsseite, die beiden anderen Seiten hingegen die Verbindungslinien bilden, welche man von den Endpunkten dieser Seite zur Projektion der Spitze ziehet. Die Gleichungen dieser beiden Linien sind offenbar nach bekannten Gründen:

$$y = {}_{\alpha_1}\left\{ b + \left(\frac{U\alpha_1 + V - b}{\alpha_1 - a}\right)(x-a) \right\}^{a}$$

$$y = {}_{\alpha_2}\left\{ b + \left(\frac{U\alpha_2 + V - b}{\alpha_2 - a}\right)(x-a) \right\}^{a}$$

wozu noch die dritte Dreiecksseite als correspondirende Polygonsseite kommt, nämlich:

$$y = {}_{\alpha_1}\left\{ Ux + V \right\}^{\alpha_2}$$

Obgleich man nun zwar im Allgemeinen nicht bestimmen kann, welches von den Grenzintervallen das grösste ist, und sonach welches von den drei Disjunctivgliedern als Progress oder Regress allein zu stehen kömmt, so können wir doch, der grössten Allgemeinheit unbeschadet annehmen, dass dieses bei dem mit den Grenzwerthen α_1, α_2 behafteten Gliede der Fall sei, weil in jedem speziellen Falle kein Zweifel hierüber obwaltet. Begrenzt man daher obige Gleichung (4) in der Art, dass die durch sie bezeichneten Ebenen als die Seitenflächen der Pyramide auftreten, so erhält man sofort:

$$(5.)\; z = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{1.\varrho}^{n.\varrho} \left[\frac{c}{aU_\varrho + V_\varrho - b} \left(V_\varrho + U_\varrho\, {}_{\alpha_\varrho}\left\{ x \right\}^{\alpha_{\varrho+1}} - {}_{\alpha_\varrho}\left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}^{\alpha_{\varrho+1}} {}_{\bullet}\left\{ y \right\}^{\bullet} \right.\right.$$
$$\left.\left. \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{0}^{1} {}_{\alpha_{\varrho+\psi}}\left\{ b + \left(\frac{U_{\varrho+\psi}\alpha + V_\varrho - b}{\alpha_{\varrho+\psi} - a}\right)(x-a) \right\}^{a} \right) \right];$$

als allgemeine Gleichung einer jeden $n$seitigen schiefen Pyramide.

§. 49.

8. *Aufgabe.* Eine schiefe Pyramide von n Seiten werde durch eine beliebige Ebene geschnitten; man suche die Gleichung für die Projektion des Durchschnitts? —

Es sei die Gleichung der schneidenden Ebene $z = Mx + Ny + P$. Dem allgemeinen Verfahren gemäss wird man daher diese Gleichung mit jener der Pyramide verbinden, die Grösse z aliminiren und auf eine Gleichung zwischen x und y übergehen, welche sofort auch die verlangte Gleichung des Schnittes, oder vielmehr der Projektion desselben ist.

Der Umstand aber, dass die Grösse y, bei diesem Uebergange von der Gleichung einer Fläche auf jene einer Linie die Eigenschaft, wenn gleich nur innerhalb gewisser Grenzen absolut veränderlich zu sein, einbüsst, und sofort zu einer bloss von x abhängigen relativ veränderlichen Grösse wird, gebietet die auf y sich beziehende Begrenzung nicht mehr zu beachten. Man hat daher dem Gesagten zu Folge:

$$Mx + Ny + P = \mathop{\mathcal{CO}}\limits_{1.\varrho}^{n.\varrho}\left[\frac{c}{aU_\varrho + V_\varrho - b}\,(V_\varrho + U_\varrho x - y)\right];\ \text{oder auch}$$

$$\mathop{\mathcal{CO}}\limits_{1.\varrho}^{n.\varrho}\left[Mx + Ny + P = \frac{c}{aU_\varrho + V_\varrho - b}\Big(V_\varrho + U_\varrho x - y\Big)\right].$$

Hieraus erhält man, wenn y gesucht wird:

$$\mathop{\mathcal{CO}}\limits_{1.\varrho}^{n.\varrho}\left[y = \frac{1}{c + N(aU_\varrho + V_\varrho - b)}\Big(cV_\varrho - P\,(aU_\varrho + V_\varrho - b) + \big(cU_\varrho - M(aU_\varrho + V_\varrho - b)\big)\,x\Big)\right];$$

oder auch:

$$(1.)\ y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits^{n}\left\{\frac{cV_\varrho - P\,(aU_\varrho + V_\varrho - b) + (cU_\varrho - M(aU_\varrho + V_\varrho - b))\,x}{c + N\,(cU_\varrho + V_\varrho - b)}\right\} = \mathcal{CO}\Big(K_\varrho x + L_\varrho\Big).$$

Um nun auch in Beziehung auf x die entsprechenden Grenzen zu finden, ist bloss nöthig zu bemerken, dass sie sich aus der so eben gefundenen Gleichung in Verbindung mit dem Systeme von Gleichungen, deren schon im vorigen Paragraphe gedacht wurde, ergeben, nämlich des Systems:

$$y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits^{n}\left(b + \frac{U\alpha_\varrho + V - b}{\alpha_\psi - a}\,(x - a)\right).$$

Bestimmt man daher aus genannten Gleichungen die Werthe für x, welche sofort auch die Grenzwerthe dieser Variablen sind, so hat man ganz allgemein:

$$(2.)\ y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits^{n}\left(\frac{(\alpha_\varrho - a)(L_\varrho - b) + (U_\varrho a_\varrho + V_\varrho - b)\,a}{(U_\varrho \alpha_\varrho + V_\varrho - b) - (\alpha_\varrho - a)\,K_\varrho}\right)\Big\{K x_\varrho + L\Big\}$$

$$\left(\frac{(\alpha_{\varrho+1} - a)\,(L_\varrho - b) + (U_\varrho \alpha_{\varrho+1} + V_\varrho - b)\,a}{(U_\varrho \alpha_{\varrho+1} + V_\varrho - b) - (\alpha_{\varrho+1} - a)\,K_\varrho}\right);$$ als allgemeine Gleichung des Durchschnittes einer Ebene mit einer $n$seitigen Pyramide. Die Bedeutung von L_ϱ und K_ϱ bedarf der obigen unter (1.) angegebenen Gleichstellung wegen, keiner besonderen Erklärung mehr.

Läuft die schneidende Ebene mit der Basis parallel d. h. ist in (1.) $M = o$ und $N = o$, so erhält man für $K_\varrho = U_\varrho$, und da die Scheitel der entsprechenden Winkel in den Verbindungslinien liegen, so beweist dieser Umstand unwidersprechlich, dass diessfalls das durch den Schnitt entstandene Polygon der Basis ähnlich sei. Setzt man endlich auch noch $P = o$ d. h. lässt man die Ebene XY selbst die schneidende Ebene sein, so erhält man aus Gleichung (2) geradezu die Gleichung:

$$y = \mathop{\mathcal{CO}}\limits^{n}\Big\{U_\varrho x + V_\varrho\Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};$$ d. h. die Gleichung der Basis, wie es auch sein muss.

Die in den beiden letzten Paragraphen behandelten Aufgaben bieten mithin schon eine Methode dar, Probleme über die Perspektivlehre analytisch aufzulösen.

§. 50.

9. *Aufgabe.* Man suche die Gleichung eines $n$seitigen schiefen Prisma?

Es sei die Gleichung der Basis wieder:

$$y = \mathop{\mathcal{W}}\limits_{,}^{n} \Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha^{\varrho \div 1}} = \mathop{\mathcal{W}}\limits_{,}^{n} \Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha^{\varrho \div 1}} \omega \mathop{\mathcal{W}}\limits_{\eta}^{n} \Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha^{\varrho \div 1}}.$$

Man nehme ferners an, sämmtliche Kanten des schiefen Prisma sollen mit einer durch den Ursprung gezogenen Linie, deren Gleichungen $x = a z$, $y = b z$ sind, parallel laufen. Die Projektionen sämmtlicher Kanten müssen demnach gleichfalls parallel laufen mit der Projektion jener Geraden, d. h. mit $y = \frac{b}{a} x$.

Um nun vor Allem die allgemeine Gleichung für die noch unbegrenzten Seitenflächen zu finden, sei die Gleichung:

$Ax + By + Cz + D = o$, oder $A'x + B'y + z + D' = o$ gegeben. Da jede der Seitenebenen mit der durch den Ursprung gezogenen Geraden d. h. mit $\left\{ \begin{matrix} x = az \\ y = bz \end{matrix} \right\}$ parallel laufen muss, so findet ganz allgemein die Bedingungsgleichung statt:

$$1.)\ A'a + B'b + 1 = o.$$

Da zur Bestimmung von A', B' und D' noch zwei Gleichungen nöthig sind, so bedenke man, dass der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene XY mit den Seiten des Polygons zusammenfallen müssen.

Um daher die entsprechenden Knotenlinien zu finden, setze man in obiger Gleichung $z = o$, so hat man:

$$A'x + B'y + D = o \text{ und hieraus } y = -\frac{A}{B'} x = \frac{D'}{B'}$$

Durch Vergleichung mit $y = Ux + V$ ergibt sich:

$$2.)\ U = -\frac{A}{B'} \text{ und } (3.)\ V = -\frac{D'}{B'}.$$

Mittelst dieser drei Gleichungen lassen sich sofort die genannten drei Unbekannten finden. Man findet nämlich.

$$A' = -\frac{U}{aU - b};\ B' = \frac{1}{aU - b},\ \text{und } D' = -\frac{V}{aU - b}$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung der Ebene und bestimmt man hieraus z, so erhält man:

$$z = \frac{1}{a\,U - b}(Ux - y + V);\ \text{und somit allgemein: } (1.)\ z = \mathop{\mathcal{W}}\limits_{,}^{n} \left(\frac{V_\varrho + U_\varrho x - y}{a\,U_\varrho - b} \right)$$

Um die entsprechenden Grenzwerthe zu finden, berücksichtige man, dass die Projektion einer jeden Seitenfläche gebildet wird von einer Polygonsseite und zweien unter sich und mit der Linie $y = \frac{a}{b}x$ parallel laufenden Geraden, von denen die eine durch den Anfangs-, die andere durch den Endepunkt der Polygonsseite geht. Diese Andeutung dürfte hinreichen, die nachfolgende Gleichung als für die Projektion einer Seitenfläche ohne viele Mühe zu finden:

$$(2.)\; y = \left(\Big\{ Ux + V \Big\}_{\alpha_1}^{\alpha_2} \omega \Big\{ \Big(U + \frac{b}{a} \Big) \alpha_2 + V - \frac{b}{a} x \Big\}_{\alpha_2}^{\infty} \right) \Big\{ \frac{0}{0} \Big\}_{\cdot}^{\cdot} \left(\Big\{ \Big(U + \frac{b}{a} \Big) \alpha_1 + V - \frac{b}{a} x \Big\}_{\alpha_1}^{\infty} \right).$$

Bezeichnet man durch α_1 den kleinsten Grenzwerth in numerischer Beziehung, so hat man sofort mit Hilfe von Gleichung (1.) und (2.):

$$(3.)\; z = \overset{n}{\underset{,}{\mathcal{C}}} \left[\frac{1}{a U_\varrho - b} \left(V_\varrho + U_\varrho \Big\{ x \Big\}_{\alpha_1}^{\infty} - \left(\Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \omega \Big\{ \Big(U_\varrho + \frac{b}{a} \Big) \alpha_{\varrho+1} + V_\varrho - \frac{b}{a} x \Big\}_{\alpha_{\varrho+1}}^{\infty} \right) \right. \right.$$
$$\left. \left. \Big\{ y \Big\}_{\cdot} \left(\Big\{ \Big(U_\varrho + \frac{b}{a} \Big) \alpha_\varrho + V_\varrho - \frac{b}{a} x \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\infty} \right) \right) \right];$$

als die allgemeinste Gleichung eines n seitigen schiefen Prisma.

Diess dürfte hinreichen, auch die Behandlungsweise in Beziehung auf Probleme von der sogenannten Durchdringung zweier Körper im Allgemeinen begreiflich zu machen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes soll noch Einiges über die Gleichung eines begrenzten Körperraumes, deren schon in der Vorrede gedacht wurde, ergänzungsweise gesagt werden.

§. 51.

Gleichwie man in den früheren Paragraphen die Gleichung des Umfangs einer Figur dazu benützte, auf die Gleichung der Fläche selbst (siehe §. 43 u. d. f.) überzugehen, und mit Hilfe dieser letzteren sodann die Gleichung einer jeden begrenzten und wie immer zusammengesetzten krummen Fläche aufzustellen: so gestattet das Ergebniss dieser Untersuchungen und die Natur der Sache noch eine abermalige Steigerung dieses Problems; nämlich die Aufstellung der Gleichung für einen begrenzten Körperraum. Man hat sich unter der Gleichung für den Körperraum, wie schon in der Vorrede erinnert und hier abermals ausdrücklich wiederholt wird, weder die Gleichung für die Oberfläche noch auch für den Rauminhalt zu denken; vielmehr hat man darunter den analytischen Ausdruck für sämmtliche Punkte zu verstehen, aus denen man sich den Körperraum, jedoch mit strenger Rücksicht auf die Lage der einzelnen Punkte und somit auf die Art der Begrenzung des Körpers, zusammengesetzt vorzustellen pflegt. Verbindet man sodann z. B. die Gleichung des Kugelraumes mit der Gleichung einer Ebene, so erhält man die ihnen gemeinschaftlichen

Punkte, nämlich die Gleichung einer Kreisfläche. — Verbindet man dagegen die Gleichungen zweier Körperräume z. B. jene eines Ellipsoides und einer Pyramide, so erhält man die Gleichung desjenigen Körperraums, der ihnen gemeinschaftlich ist. Da man nun aber mit Leichtigkeit von dieser Gleichung auf jene für die Oberfläche und von der auf die Gleichung der Kanten und noch weiter selbst auf jene der Ecken zurückgehen kann: so enthält diese Gleichung gewissermassen alle andern genannten Gleichungen involvirt in sich, und kann daher als der vollendetste Ausdruck oder analytische Repräsentant aller räumlichen Verhältnisse eines Körpers angesehen werden. — Bemerkt kann endlich noch werden, dass das endliche Integral von dem Unterschiede zwischen ihren Progressen und Regressen sofort auch noch den Raumesinhalt des Körpers liefert.

Um nun die Methode, zu derlei Gleichungen zu gelangen, wenigstens doch an einem Beispiele zu zeigen, möge nachfolgende Aufgabe hier noch eine Stelle finden:

§. 52.

Aufgabe. Man suche die Gleichung für den Körperraum einer Kugel?

Es sei die Gleichung für die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Achse z liegt: $x^2 + y^2 + (z-h)^2 = r^2$; so hat man vorerst:

$$z = h \pm \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\text{; und somit:}$$

$$(1.)\quad z = \left(h + \sqrt{r^2-(x^2+y^3)}\right)\left\{\substack{\bullet\\0\\0\\\bullet}\right\}\left(h - \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\right)$$

; als Gleichung des Kugelraums ohne Begrenzung.

Da nun x absolut, dagegen y relativ veränderlich ist, so muss noch durch eine Gleichung die Abhängigkeit des y von x ausgedrückt werden. Diese ergibt sich, indem man in obige Gleichung $z = h$ setzet, so erhält man: $x^2 + y^2 = r^2$, und somit $y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$; da nun x, wenn gleich absolut, doch nicht unbegrenzt veränderlich ist, viemehr stets zwischen $-r$ und $+r$ liegen muss; so hat man vorerst:

$$y = \left\{\pm\sqrt{r^2-x^2}\right\}_{-r}^{r}$$

; und indem man diese Begenzungen in Gleichung (1.) einführt, erhält man:

$$(2.)\quad z = {}_{r}\left\{\left(h + \left[r^{*} - x^2 - \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)\left\{\substack{\bullet\\y^2\\\bullet}\right\}\left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)\left\{\substack{\bullet\\0\\0\\\bullet}\right\}\left(h - \left[r^2 - x^2 - \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)\left\{\substack{\bullet\\y^2\\\bullet}\right\}\left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^{-r}$$

welche Gleichung jene für den Körperraum einer Kugel ist.

VII. Abschnitt.

Einige Aufgaben über die Rectification, Quadratur und Complanation zusammengesetzter und begrenzter geometrischer Objecte.

§. 53.

Die bis jetzt eingeführten und aufgestellten Gleichungen für zusammengesetzte und begrenzte geometrische Objecte erweisen sich auch bei der Anwendung der Integral-Rechnung auf ihre Rectification, Quadratur und Cubatur als wahre Gleichungen des durch sie gezeichneten Gegenstandes, indem dieselben nach den gewöhnlichen Vorschriften und Formeln behandelt, zu Resultaten führen, welche mit der Wahrheit und der Natur der Sache vollkommen übereinstimmen. Indem ich mich aber rücksichtlich des Verhältnisses zwischen einer begrenzten Funktion und einem bestimmten Integrale, so wie auch des Einflusses eines Integralzeichens auf die Disjunctivglieder u. s. w. auf das schon im zweiten Abschnitte hierüber Gesagte berufe, kann ich doch nicht umhin, im Verlaufe der folgenden Aufgaben einige Bemerkungen als Ergänzung des bereits hierüber Gesagten gelegenheitlich beizufügen.

§. 54.

1. *Aufgabe.* Man soll ein Polygon von n Seiten, dessen Gleichung gegeben ist, rektificiren, d. h. den Umfang desselben finden? —

Es sei die Gleichung des gegebenen n Ecks: $y = \overset{n}{\mathcal{CS}} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}$;

Zufolge der bekannten Formel ist aber $s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Nun ist aber offenbar: $\frac{dy}{dx} = U_\varrho$, und da sich die Grenzen α_ϱ und $\alpha_{\varrho+1}$ lediglich bloss auf x und durchaus nicht auf dx beziehen können zufolge des Begriffes dieser Grösse; so hat man ganz allgemein:

$$s = \overset{n}{\mathcal{CS}} \int dx \sqrt{1 - U_\varrho^2} = \overset{n}{\mathcal{CS}} \left(\left(x\sqrt{1 + U_\varrho^2} \right) + C \right);$$ da nämlich U_ϱ von x völlig unabhängig, und der Bedeutung nach $U_\varrho = tang\, \omega_\varrho$ ist. Zur Bestimmung der Constanten reicht auch hier die gewöhnliche Bemerkung hin, dass für $x = \alpha_\varrho$ oder dem Anfangswerth eines Disjunctivgliedes offenbar der diesem Gliede entsprechende Werth von s gleich Null ist. Man hat daher diessfalls $0 = \overset{n}{\mathcal{CS}} \alpha_\varrho \sqrt{1 + U_\varrho^2} + C$ oder $C = -\overset{n}{\mathcal{CS}} \alpha_\varrho \sqrt{1 - U_\varrho^2}$; somit:

$$(1.)\ s = \overset{n}{\mathcal{CS}} (x - \alpha_\varrho)\sqrt{1 + U_\varrho^2} = \overset{n}{\mathcal{CS}} \left(\frac{x - \alpha_\varrho}{Cos\, \omega_\varrho} \right).$$

Indem aber zu Folge der im zweiten Abschnitte besprochenen Beziehung des Integralzeichens zum Disjunctivzeichen ω, jedes Disjunctivglied in ein Summenglied übergeht, so stellt nunmehr das Zeichen $\mathop{\Large\omega}$ in der That eine algebraische Summe vor und kann sofort mit dem Zeichen $\mathop{\mathcal{S}}$ vertauscht werden. Man hat demnach in Berücksichtigung dieser Bemerkung:

$$(2.)\ s = \mathop{\mathcal{S}}_{\prime}^{n} (x - \alpha_\varrho)\sqrt{1 + \overline{U}_\varrho^2} = \mathop{\mathcal{S}}_{\prime}^{n}\left(\frac{x - \alpha_\varrho}{Cos\ \omega_\varrho}\right);$$ als Gleichung für den Umfang

eines Polygons von n Seiten.

Ich glaube diese Formel noch mit dem Namen einer Gleichung bezeichnen zu dürfen, da sie die noch immer veränderliche Abscisse x enthält, um sie sofort auch von dem Ausdruck für den Umfang zu unterscheiden. Setzt man nämlich für x auch noch die obere Grenze eines jeden Gliedes d. h. $x = \alpha_{\varrho+1}$, so erhält man den ganzen Umfang des Polygons, nämlich:

$$(3.)\ s = \mathop{\mathcal{S}}_{\prime}^{n} (\alpha_{\varrho+1} - \alpha_\varrho)\sqrt{1 + \overline{U}_\varrho^2} = \mathop{\mathcal{S}}_{\prime}^{n}\left(\frac{\alpha_{\varrho+1} - \alpha_\varrho}{Cos\ \omega_\varrho}\right);$$ ein Resultat, welches,

wie man sieht, mit der Natur der Sache vollkommen übereinstimmt.

§. 55.

2. *Aufgabe.* Es ist die Gleichung für den Flächeninhalt eines Polygons von n Seiten zu finden? —

Unter der Gleichung des Flächeninhaltes einer Figur, welche Benennung ich hier gleichfalls wieder usurpire, wollen wir diejenige Funktion der Abscisse x verstehen, welche die Grösse des Flächenraums des diesseits der im Punkte x errichteten Ordinate liegenden Theils der Figur angibt. Es sei daher wieder die Gleichung des Polygons von n Seiten:

$$y = \mathop{\Large\omega}_{\prime}^{n} \Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};$$

gegeben, wobei, wie schon früher erinnert wurde, statt α_{n+1} α_1 u. s. w. zu setzen ist, und die Grenzen a_ϱ und $\alpha_{\varrho+1}$ in der im Abschnitte III, Aufgabe 1, angegebenen Weise von U_ϱ und V_ϱ abhängen, mithin von x völlig unabhängig sind. Bezeichnet man nun mit F die Fläche, so ist bekanntlich das Differenzial der Fläche:

$$d.F = y\,dx \text{ und somit: } F = \int y\,dx.$$

Dieses nun angewendet auf unsere Gleichung gibt, indem man das im II. Abschnitte §. 9 und §. 12 Gesagte berücksichtiget:

$$F = \int y\,dx = \int \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{n} \Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} dx = \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}} \int \Big\{ U_\varrho x + V_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} dx =$$

$$= \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{n} \Big\{ \int (U_\varrho x + V_\varrho)\,dx \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} = \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{n} \Big\{ U_\varrho \tfrac{x^2}{2} + V_\varrho x + C \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};$$

und endlich:

$$(1.)\ F = \mathop{\mathcal{P}}_{1}^{n} \pm \Big\{ U_\varrho \tfrac{x^2}{2} + V_\varrho x + C \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}.$$

Um nun die Constante C zu bestimmen, berücksichtige man den Umstand, dass für $x = \alpha_\varrho$, d. h. dem kleineren Grenzwerth eines jeden Gliedes, offenbar dieses Glied selbst Null ist, und somit:

$$0 = \mathop{\mathcal{P}}_{1}^{n} \pm \Big\{ U_\varrho \tfrac{\alpha_\varrho^2}{2} + V_\varrho + C \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};\ \text{mithin } C = -\mathop{\mathcal{P}}_{1}^{n} \Big\{ U_\varrho \tfrac{\alpha_\varrho^2}{2} + V_\varrho \alpha_\varrho \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};$$

und durch Substitution:

$$(2.)\ F = \mathop{\mathcal{P}}_{1}^{n} \left(\pm \Big\{ \tfrac{1}{2} U_\varrho (x^2 - \alpha_\varrho^2) + V_\varrho (x - \alpha_\varrho) \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \right);$$ als Gleichung für den Flächeninhalt eines n Ecks.

Es ist jedoch hierbei, so wie auch in Bezug auf die erste Aufgabe ausdrücklich zu bemerken, dass in allen jenen Fällen, wo der statt x zu setzende spezielle Werth die obere Grenze übersteigt, man dafür diese obere Grenze selbst zu setzen habe, wie dieses die nunmehr modifizirte Bedeutung von x unabweislich fordert.

Das doppelte Vorzeichen bezieht sich auf den Umstand, ob das entsprechende Glied ein Progress oder ein Regress ist, d. h. ob $\alpha_\varrho < \alpha_{\varrho+1}$ oder $\alpha_\varrho > \alpha_{\varrho+1}$ ist. Im ersteren Falle gilt $+$, im zweiten hingegen $-$. Dieses stimmt auch alles recht gut mit der Natur der Sache zusammen, indem wie Fig. 25 zeigt, die Regresse, die sich als Trapetze darstellen von jenen, die den Progressen entsprechen, nothwendig abgezogen werden müssen. Bei Polygonen dagegen, die zum Theile oberhalb, zum Theile unterhalb der Abscissenachse liegen, wie z. B. in Fig. 26 verkehren sich die Zeichen abermals und die Regresse, die unterhalb der Abscissenachse liegen, werden wegen ihrer negativen Ordinate y ohne weiteres Zuthun als blosses Ergebniss der Formel wieder positiv, wie es auch in der That seyn muss.

Setzt man in den vorigen Ausdruck für x den grössten vorkommenden Grenzwerth, er heisse α_η, so findet man, wenn das oben Gesagte in Bezug auf Deutung der Formel berücksichtigt wird, als Flächeninhalt des ganzen Polygons:

$$(3.)\ F = \mathop{\mathcal{P}}^{n} \left(\pm \Big\{ \tfrac{1}{2} U_\varrho (\alpha_\eta^2 - \alpha_\varrho^2) + V_\varrho (\alpha_\eta - \alpha_\varrho) \Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} \right).$$

Als spezielles Beispiel möge das schon mehrmals erwähnte Fünfeck Fig. 3 dienen, dessen Gleichung die folgende ist:

$$y = \left\{-5x+25\right\}_{4}^{5} \omega \left\{x-5\right\}_{5}^{9} \omega \left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}_{9}^{\frac{21}{4}} \omega \left\{2x-4\right\}_{\frac{21}{4}}^{\frac{14}{3}} \omega \left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{\frac{14}{3}}^{4};$$

Wendet man die allgemeine Formel darauf an, so findet man als Gleichung dieser Fünfecksfläche:

$$(4.)\ F = \left(\begin{array}{l} \left\{-\tfrac{5}{2}x^2+25x-60\right\}_{4}^{5} + \left\{\tfrac{x^2}{2}-5x+\tfrac{25}{2}\right\}_{5}^{9} \\ -\left\{\tfrac{1}{2}x^2+3x-20\right\}_{4}^{\frac{14}{3}} - \left\{x^2-4x-\tfrac{28}{9}\right\}_{\frac{14}{3}}^{\frac{21}{4}} - \left\{-\tfrac{x^2}{3}+10x-\tfrac{693}{16}\right\}_{\frac{21}{4}}^{9} \end{array} \right)$$

und für die grösste Abscisse oder für $x = 9$ findet man als Flächeninhalt für das ganze in Fig. 3 dargestellte Fünfeck:

$$F = 17^{\square}\!\cdot 52777.$$

§. 56.

3. *Aufgabe.* Man suche die Gleichung für den Flächeninhalt der in Fig. 19 dargestellten parabolischen Linie mit zwei Wendungspunkten? —

Die Gleichung dieser Linie ist bekanntlich:

$$y = \left\{\pm\sqrt{px}\right\}_{0}^{\frac{p}{4}} \omega \pm \left\{\frac{x^2}{p^2}+\frac{x}{2}+\tfrac{5}{16}p\right\}_{\frac{p}{4}}^{\infty}$$

Obgleich diese Curve keine geschlossene oder in sich zurückkehrende Linie ist, so müssen wir dennoch, wenn wir von den obigen nur für solche geltenden Formeln Gebrauch machen wollen, den untern Ast dieser Curve als einen zurückkehrenden oder als einen Regress ansehen und eigentlich schreiben:

$$y = \left\{\sqrt{px}\right\}_{0}^{\frac{p}{4}} \omega \left\{\frac{x^2}{p^2}+\frac{x}{2}+\tfrac{5p}{16}\right\}_{\frac{p}{4}}^{\infty} \omega - \left\{\frac{x^2}{p}+\frac{x}{2}+\tfrac{5p}{16}\right\}_{\infty}^{\frac{p}{4}} \omega - \left\{\sqrt{px}\right\}_{\frac{p}{4}}^{0};$$

wo sodann die beiden letzten negativen Glieder, weil sie Regresse sind, bei der Integration positiv werden, und zu den beiden ersten addirt diese doppelt geben. Die Nothwendigkeit dieser Annahme ist aber auch durch die Sache selbst geboten, indem in der That jederzeit durch die am Endpunkte der Abscisse errichtete Ordinate jene Curve in jedem bestimmten Falle zu einer geschlossenen wird. Verfährt man demnach nach der Formel für den Flächeninhalt, so findet man:

$$F = 2\left[\int\left\{\sqrt{px}\right\}_{0}^{\frac{p}{4}} dx + \int\left\{\frac{x^2}{p^2}+\frac{x}{2}+\tfrac{5p}{16}\right\}_{\frac{p}{4}}^{\infty} dx\right] = 2\left[\left\{\tfrac{2}{3}\sqrt{p\cdot x}^{\frac{3}{2}}+C\right\}_{0}^{\frac{p}{4}} + \left\{\frac{x^3}{3p^2}+\frac{x^2}{4}+\frac{5px}{16}+C'\right\}_{\frac{p}{4}}^{\infty}\right]$$

Dem gewöhnlichen Verfahren entsprechend, findet man $C = 0$ und $C' = \left(\tfrac{p}{192}+\tfrac{3p^2}{32}\right)$ demnach:

$$(1.)\ F = 2\left\{\tfrac{2}{3}\sqrt{p}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right\}_{0}^{\frac{p}{4}} + 2\left\{\frac{x^3}{3p^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{5px}{16} + \frac{3p^2}{32} + \frac{p}{192}\right\}_{\frac{p}{4}}^{\infty};$$ als Gleichung für den Flächeninhalt jener Curve.

§. 57.

4. *Aufgabe.* Man soll den Flächeninhalt einer im Raume befindlichen und von einem Polygone begrenzten ebenen Figur *A, B, C, D* . . . . Fig. 24 finden? —

Es sei die Gleichung dieser Polygonfläche nach §. 47, Gleichung (1.) des vorigen Abschnittes:

$$(1.)\ z = M\left\{x\right\}_{\alpha_1}^{\alpha_\eta} + N\left[\mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}_{\eta}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}\left\{y\right\}\mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{\eta}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}\right] + P;$$

wobei also die Gleichung der Polygonsebene $z = Mx + Ny + P$, und die Projektion des Polygons: $y = \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}$ vorausgesetzt ist.

Zufolge der bekannten Formel ist aber:

$F = \iint dx\,.\,dy\,.\,\sqrt{1+p^2+q^2};$ es ist aber $p = \frac{dz}{dx} = M$, und $q = \frac{dz}{dy} = N$.

Demnach erhält man, wenn man zugleich berücksichtiget, dass M und N konstante Grössen sind:

$$F = \iint dx\,.\,dy\,.\,\sqrt{M^2+N^2+1} = \sqrt{M^2+N^2+1})\iint dx\,.\,dy = \sqrt{M^2+N^2+1})\int y\,.\,dx\,.$$

Obgleich nun dy offenbar als von x gar nicht abhängig auch keine Beziehung zu den Grenzen von y haben kann, so verhält sich doch ganz anders mit dem Resultate der Integration d. h. mit y, welche Grösse nunmehr zufolge der Bedingungsgleichung:

$$y = \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}};$$

als eine eigentliche Funktion von x auftritt. Soll demnach die Integration fortgesetzt und vollendet werden können, so muss statt y dessen Werth gesetzt werden. Man hat demnach:

$$(2.)\ F = \sqrt{M^2+N^2+1}\int\mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}^{n}\left\{U_\varrho x + V_\varrho\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}} dx = \sqrt{M^2+N^2+1})$$
$$\left(\mathop{\mathcal{P}}^{n} \pm \left\{\tfrac{1}{2}\,U_\varrho\,(x^2-\alpha_\varrho^2) + V_\varrho\,(x-\alpha_\varrho)\right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}\right);$$

als Gleichung der Polygonsfläche.

Der letztere Ausdruck ist, wie wir in der zweiten Aufgabe dieses Abschnittes gesehen haben, der Flächeninhalt des Polygons:

$$y = \mathop{\mathcal{C}\!\!\mathcal{O}}_{\alpha_\varrho}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}^{\alpha_{\varrho+1}};$$

und somit in Beziehung auf unsere gegenwärtige Aufgabe, die Fläche der Projektion jenes Polygons. Betrachtet man ferners den Ausdruck $\sqrt{M^2+N^2+1}$, welcher, wenn man auf die Form der Ebene $Ax+By+Cz+D=0$ übergeht, offenbar gleich $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C}$ wird, und berücksichtiget man anderseits, dass der Neigungswinkel einer Ebene I gegen die Ebene XY mittelst $Cos\,(I.xy) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ gefunden wird: so sagt unsere Gleichung mit der Wahrheit vollkommen übereinstimmend aus: dass der Flächeninhalt F eines Polygons im Raume gefunden wird, wenn man den Flächeninhalt ihrer Projection durch den *Cosinus* des Neigungswinkels der Ebene dividirt. Diese schöne Uibereinstimmung des Resultates, mit einer auf ganz anderem Wege gefundenen Wahrheit kann nur dazu beitragen, noch mehr einzusehen, dass unsere für Polygone und andere zusammengesetzte Figuren aufgestellten analytischen Ausdrücke den Namen von Gleichungen in jeder Beziehung und mit vollem Rechte verdienen.

§. 58.

5. *Aufgabe.* Es soll der Flächeninhalt desjenigen Theils einer Kugelfläche gefunden werden, der von einem vielseitigen Prisma abgeschnitten wird? —

Vorerst muss bemerkt werden, dass wir, ohne der Allgemeinheit der Auflösung Etwas zu vergeben, annehmen können, dass jenes Prisma wie in Fig. 27 auf der Ebene XY senkrecht stehe, da man diese Voraussetzung durch Umlegung desselben mit der Kugelfläche stets wahr machen kann. Es sei demnach Fig. 27. $ABCDEF\ldots$ jener Theil der Kugeloberfläche, dessen Inhalt gefunden werden soll, und $a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots\ldots$ die Grundfläche des Prisma, oder was dasselbe ist, die Projektion der Begrenzungslinie, welche hier, wie man sieht, aus einzelnen Kreisbogen von verschiedenen Radien zusammengesetzt ist. Es sei demnach die Gleichung der Basis:

$$(1.)\ y = \mathop{\mathcal{C}\!\!\mathcal{O}}_{\alpha_\varrho}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}^{\alpha_{\varrho+1}}.$$

Die bekannte Formel für den Flächeninhalt ist bekanntlich:

$F = \iint dx\,.\,dy \sqrt{1+p^2+q^2}$; die Gleichung der Kugel: $z^2+x^2+y^2=r^2$: somit $p = \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$; $q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$; folglich:

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{\sqrt{r^2}}{z} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2+y^2}}$$

Man hat daher:

$$F = \iint \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \int dx \int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \int dx \,.\, \text{arc sin}\, \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Vermöge Gleichung (1.) ist aber $y = \mathcal{C}\!\!\int_{\alpha_\varrho}^{n\;\;\alpha_{\varrho+1}} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}$, wofür wir einstweilen, wie wir es schon öfter thaten, der Kürze wegen bloss $y = Ux + V$ schreiben werden. Man hat daher diessfalls:

$$F = \int dx \,.\, \text{arc} \,.\, \text{sin}. \frac{(Ux + V)}{\sqrt{r^2 - (Ux + V)^2}}.$$

Um dieses Integral zu finden, gehe man von nachfolgendem Integrale aus, welches durch Anwendung einiger Kunstgriffe gefunden wird, und von dessen Richtigkeit man sich leicht durch Differensation überzeugen kann. Es ist nämlich:

$$\int dy \,.\, \text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = y\, \text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}} + 2r\, \text{arc tang} \frac{\sqrt{r^2 - 2y^2}}{r};$$

setzt man nun statt $y = Ux + V$, und dividirt durch U, so erhält man:

$$F = \int dx\, \text{arc sin} \frac{(Ux + V)}{\sqrt{r^2 - (Ux + V)^2}} = \frac{1}{U} \left[(Ux + V)\, \text{arc sin} \frac{(Ux + V)}{\sqrt{r^2 - (Ux + V)^2}} \right.$$
$$\left. + 2r\, \text{arc tang} \frac{\sqrt{r^2 - 2(Ux + V)^2}}{r} \right],$$

und somit ganz allgemein:

$$(2.)\; F = \mathcal{S}^{n} \pm \frac{1}{U_\varrho} \left[(U_\varrho x + V_\varrho)\, \text{arc sin} \frac{(U_\varrho x + V_\varrho)}{\sqrt{r^2 - (U_\varrho x - V_\varrho)^2}} \right.$$
$$\left. + 2r\, \text{arc tang} \frac{\sqrt{r^2 - 2(U_\varrho x + V_\varrho)^2)}}{r} \right] + C;$$

welcher Ausdruck sofort die Gleichung ist, für den Flächeninhalt des Kugeltheils $ABCD$.... Fig. 27.

§. 59.

6. *Aufgabe.* Man soll im Allgemeinen die Methode angeben, wie der Inhalt krummer Flächen, die wie immer begrenzt sein mögen, und gleicherweise auch wie der körperliche Inhalt eines Körpers gefunden wird, der von irgend einer krummen Fläche und von den Seitenflächen eines Prisma begrenzt wird?

Es sei die Gleichung der krummen Fläche:

$$(1.)\; z = f(x \,.\, y);$$

und Gleichung der Projektion der jene krumme Fläche begrenzenden Linie, die im Allgemeinen eine Linie von doppelter Krümmung sein wird:

$$(2.)\; y = \psi(x) = \varphi(x)\; \omega\; \varphi'(x)\; \omega\; \varphi''(x)\; \omega \ldots.$$

Zufolge der Formel:

$F = \iint dx \,.\, dy \sqrt{1+p^2+q^2}$, erhält man nun, nachdem man aus (1.) für p und q die Werthe gesetzt hat:

$$F = \int dx \int dy \sqrt{1+p^2+q^2};$$

und setzt man $\int dy \sqrt{1+p^2+q^2} = \Phi(y)$, so hat man:

$$F = \int dx \,.\, \Phi(y);\ \text{aber wegen (2.) auch:}\ \int dx\, \Phi(y) = \int dx\, \Phi(\varphi(x))$$

$$F = \int dx \Big[\Phi(\varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x)\,\omega\,\varphi''(x)\,\omega \ldots\ldots) \Big];$$

aber nach dem, was im zweiten Abschnitte hierüber gesagt wurde:

$$F = \int dx \Big(\Phi(\varphi(x))\,\omega\,\Phi(\varphi'(x))\,\omega\,\Phi(\varphi''(x))\,\omega \ldots\Big) = \int dx\, \Phi(\varphi(x)) + \int dx\, \Phi(\varphi'(x)) + \int dx\, \Phi(\varphi''(x)) + \ldots$$

Da aber meistentheils die Disjunctivglieder begrenzt sind, und von dieser Begrenzung auch das Zeichen des Integrals abhängt, so wird man als allgemeinen Ausdruck für einen solchen Flächeninhalt erhalten, wenn die einzelnen Integrale durch $\pi\,(x)$ ausgedrückt werden:

$$(3.)\ F = \mathcal{P}_{1}^{n} \pm \Big\{ \pi_\varrho(x) \Big\}_{\alpha_{2\varrho-1}}^{\alpha_{2\varrho}}.$$

In Beziehung auf den zweiten Theil der Aufgabe lässt es sich zeigen, dass die Behandlungsweise bei Berechnung von Körperinhalten ganz analog ist mit jener für die Berechnung krummer Flächen mit bestimmter Begrenzung.

Hat man in der Formel $\iint z dx \,.\, dy$ statt z seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die Oberfläche gesetzt, so hat man es wie früher mit einem Doppelintegral zu thun.

Hat man nun, wie oben die Integration nach y verrichtet, so setzt man statt dieser Veränderlichen die entsprechende Funktion von x, wodurch man durch abermalige Integration zum Ausdruck für den Körperinhalt gelangt.

Bis jetzt wurde die Gleichung der krummen Fläche nämlich $z = f(x,y)$ als einfach d. h. als aus einem Disjunctivgliede bestehend angenommen. Legt man aber dagegen eine Funktion allgemeiner Art, also eine mit einer beliebigen Anzahl solcher Glieder den obigen Rechnungen zu Grunde, so ist man im Stande, bei gehöriger Annahme der Disjunctivglieder sowohl die ganze Oberfläche, als auch den ganzen Körperinhalt irgend eines von allen Seiten wie immer begrenzten Körpers zu finden, und somit das Problem der Complanation und Cubatur in der grösstmöglichsten Allgemeinheit aufzulösen; — ein Vortheil, den man wohl kaum ohne die neu eingeführten Begriffszeichen zu erreichen im Stande sein dürfte.

§. 60.

Und mit diesen Bemerkungen möge sich denn nun auch der Inhalt dieses Abschnittes, und mit ihm diese Abhandlung selbst schliessen. Der umsichtige Leser dürfte durch diese Betrachtungen und durch die verhältnissmässig häufigen Anwendungen, wenn gleich nur in Beziehung auf Geometrie, sich in den Stand gesetzt sehen, über die Brauchbarkeit dieser Begriffe sowohl in der Geometrie, als auch in den übrigen Theilen der Analysis und insbesondere der Mechanik abzuurtheilen und somit zu entscheiden, ob dieselben eine weitere Bearbeitung verdienen oder nicht.

Wie aber auch immer die Entscheidung hierüber ausfallen möge, so kann sich der Verfasser dieser Blätter jedenfalls mit der unbestrittenen Wahrheit trösten, dass im weiten Bereiche der mathematischen Wissenschaften keine Untersuchung, welche die Aufhellung und Beleuchtung eines häufig vorkommenden Begriffes beabsichtiget, für das Gedeihen der Wissenschaften, als völlig nutz- und erfolglos für alle Zukunft angesehen werden könne.

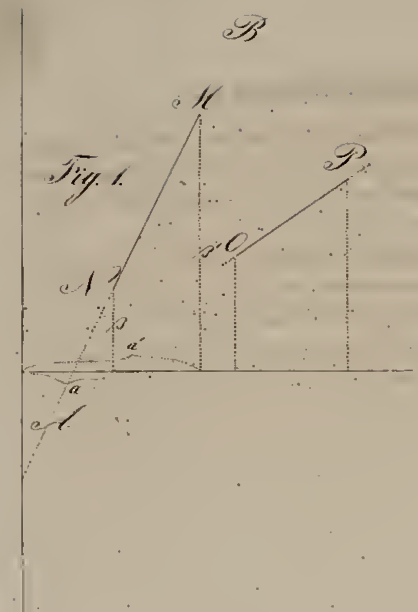

Fig. 1.

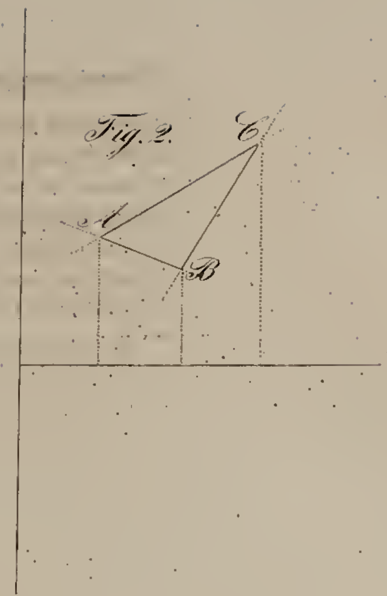

Fig. 2.

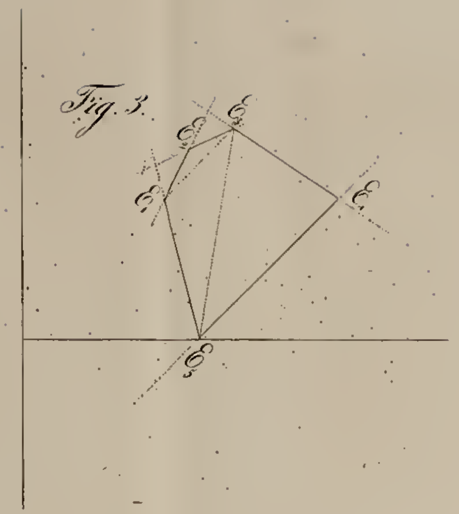

Fig. 3.

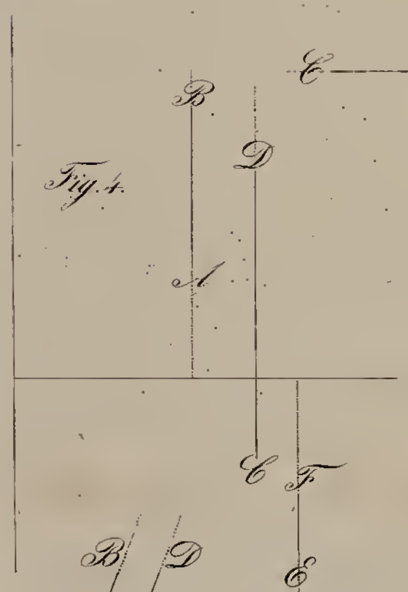

Fig. 4.

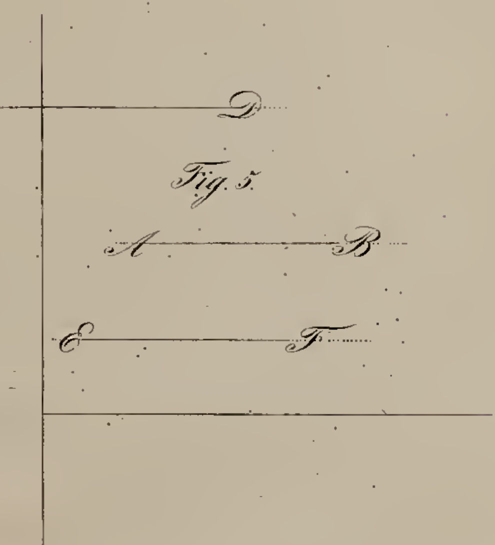

Fig. 5.

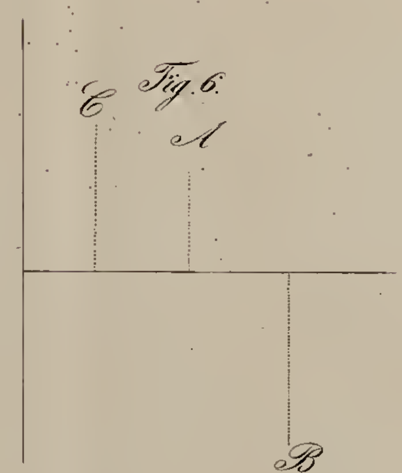

Fig. 6.

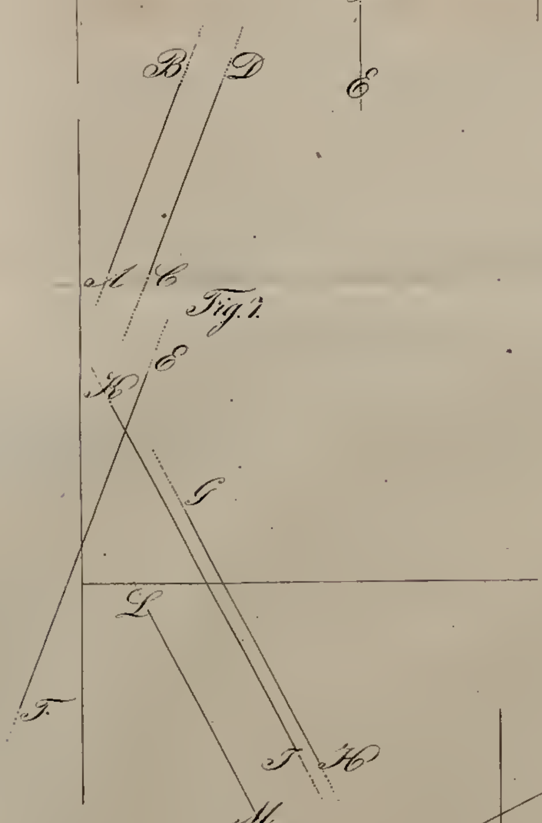

Fig. 7.

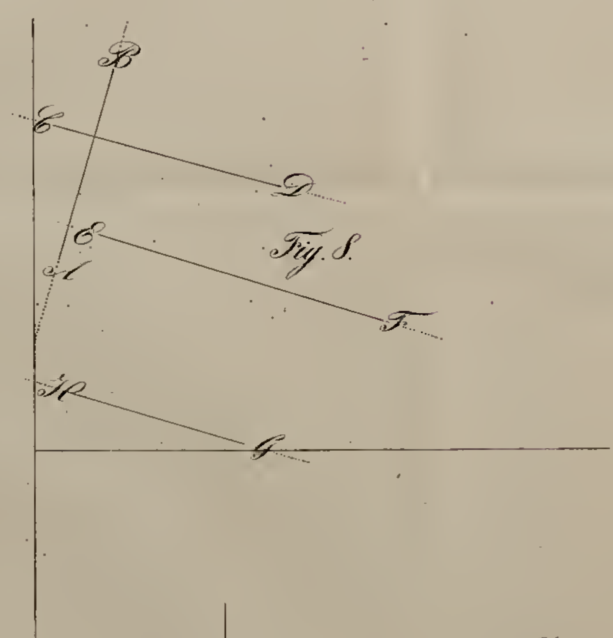

Fig. 8.

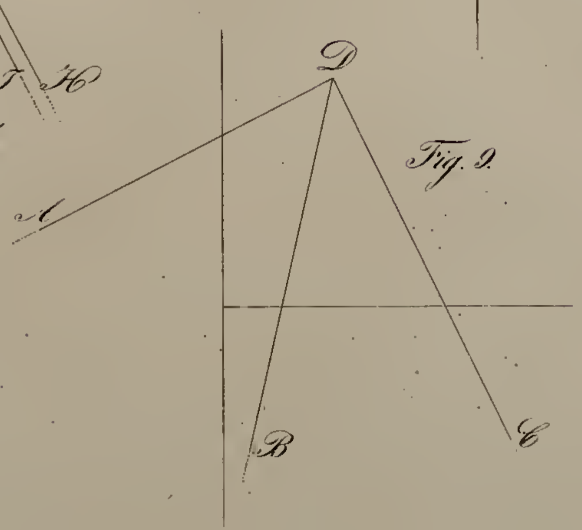

Fig. 9.

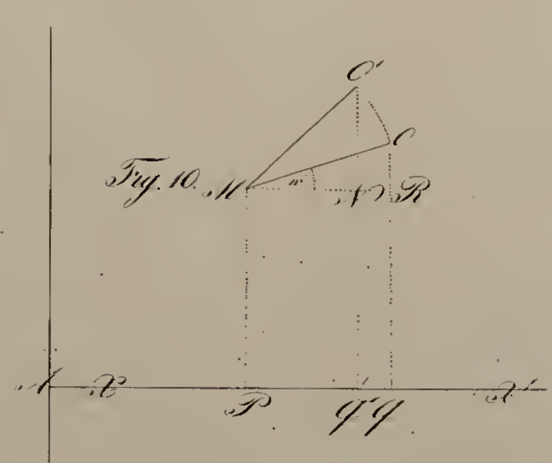

Fig. 10.

Zeitschrift/Journal: Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der königl.- böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften

Jahr/Year: 1840

Band/Volume: 5_1

Autor(en)/Author(s): Doppler Christian Andreas

Artikel/Article: Versuch einer analytischen Behandlung beliebig begrenzter und zusammengesetzter Linien, Fllächen und Körper. 1-78