Versuch einer Erweiterung

der

analytischen Geometrie

auf Grundlage eines

neu einzuführenden Algorithmus.

Von

Christian Doppler,

wirklichem Professor der Elementar-Mathematik und praktischen Geometrie, gewesenem ausserordentlichem Professor der höheren Mathematik am königl. böhm. technischen Institute, und ausserordentlichem Mitgliede der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.

Mit 9 lithographirten Tafeln.

Vorrede.

Man hat bisher nicht den geringsten Anstand genommen, der analytischen Geometrie, und durch sie der analytischen Mechanik, mehr selbst als irgend einer andern mathematischen Doctrin, das Attribut einer hohen wissenschaftlichen Ausbildung, einer in sich selbst abgeschlossenen methodischen Vollendung, so wie einer bewunderungswürdigen Eleganz in Darlegung ihrer Resultate, — kurz einer fast beispiellosen wissenschaftlichen Vorzüglichkeit beizulegen? — Ja es scheint allmälig und allenthalben sich die Überzeugung Eingang verschafft zu haben, dass jeder neue Fortschritt und jeder neue Fund in dieser Wissenschaft sich höchstens nur auf eine weitere Ausbildung schon vorhandener Lehren, oder wenn doch auf neue, stets nur auf solche erstrecken werde, welche innerhalb ihrer gegenwärtigen Begrenzung liegend, so zu sagen ihrem eigenen Grund und Boden entspriessen. — Man würde sich aber sehr irren, wenn man desshalb glauben wollte, es habe vielleicht bisher nur an einer hinreichend auffallenden Veranlassung oder Mahnung gefehlt, diesen festen Glauben an die Imperfectibilität und Ausreichbarkeit dieser Wissenschaft für alle vorkommenden Fälle einigermassen zu erschüttern. — Es fehlte in der That nicht, und zwar schon seit lange, an Problemen mancherlei Art, die zu lösen, an geometrisch-analytischen Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten, die zu beseitigen waren, und die insgesammt nur allzubestimmt darauf hinwiesen, dass Abhilfe und Behebung dieser Übelstände nimmermehr von einer bloss weiteren Ausbildung ihrer gegenwärtigen Lehren zu erwarten stehe. Der Verfasser der vorliegenden Abhandlung hat in der Vorrede zu einer seiner früheren Arbeiten *)

*) Versuch einer analytischen Behandlung beliebig begrenzter und zusammengesetzter Linien, Flächen und Körper, nebst einer Anwendung davon auf verschiedene Probleme der *Geometrie descriptive* und Prospective. Prag, 1839, bei Gottlieb Haase Söhne (im 1ten Bande der Vten Folge dieser Abhandlungen).

Objecte für analytische Behandlung zugänglich zu machen beabsichtigen, nicht für unnütze mathematische Speculationen füglich gehalten werden können. Bei Gelegenheit der dabei angestellten Voruntersuchungen gelangt man noch nebenher zu dem wichtigen Resultate, dass man bisher zwei wichtige Klassen von geometrischen Objecten durch Gleichungen zu repräsentiren ausser Acht liess. Es sind dieses nämlich die Flächen- und Körperräume. Man hat sich unter den Gleichungen der erstern jedoch weder die Formeln für den Flächeninhalt zu denken, noch auch beziehen sich jene der zweiten auf den körperlichen Inhalt eines geometrischen Objectes. Sie sind vielmehr die allgemeinen Repräsentanten für sämmtliche Punkte, aus denen man sich sowohl die Fläche als den Körperraum mit Rücksicht auf ihre bestimmte Begrenzung zusammengesetzt vorzustellen pflegt. — Der zweite dieser Grundgedanken ist jener der gleichzeitigen Darstellung mehrerer als zusammengehörig betrachteter Puknte, Linien und Figuren u. s. w., d. h. ganzer Systeme von geometrischen Objecten mittelst Gleichungen. Nach den Grundsätzen der analytischen Geometrie werden bekanntlich die Gleichungen zweier Linien oder Flächen u. s. w. nur desshalb mit einander verbunden, um die zur Lösung eines Problems nöthigen Bedingungsgleichungen zu erhalten. Allein Niemand wird wohl in Abrede stellen wollen, dass sich von der Gleichung eines ganzen Systems wenigstens eben dieselben Vortheile erwarten lassen, welche man durch die analytische Darstellung einer einzelnen unbegrenzten oder sich selbst begrenzenden Linie u. s. w. in der That bereits erreicht hat. Durch Anwendung dieses neuen Begriffes in Verbindung mit dem vorigen, sieht man sich aber sofort in den Stand gesetzt, sich die Gleichungen aller, aus geraden und krummen Linien und Flächen wie immer zusammengesetzter Objecte zu verschaffen, und sie nach denselben Vorschriften allen Untersuchungen zu unterziehen, nach denen man bisher nur die sich selbst begrenzenden oder unbegrenzten zu behandeln vermochte. Es verdient hier bemerkt zu werden, dass man bei allen aus geraden Linien und Ebenen zusammengesetzten Figuren und Körpern für die scheinbar grössere Complicität ihrer Gleichungen durch die Leichtigkeit ihrer combinatorischen Darstellung und dergemässen Behandlung reichlich entschädigt wird. Auch stellt es sich bei dieser Gelegenheit augenscheinlich genug heraus, dass sich für die combinatorische Analysis ein ganz neues Feld der Forschung eröffnet, und man sofort und in Zukunft die unbestimmten Probleme der Geometrie mit derselben Leichtigkeit werde zu behandeln vermögen, wie bisher jene der Analysis. —

Der dritte unserer Begriffe ist jener eines absolut unbeweglichen und unter allen Verhältnissen unveränderlichen Coordinatensystems sowohl in der Ebene wie im Raume. Zwar ermangelt man nicht, schon im Eingange zur analytischen Geometrie ausdrücklich eines fixen Coordinatensystems als der Basis für alle weiteren Untersuchungen zu erwähnen. Allein schon bei der Transformation der Coordinaten und mehreren anderen Gelegenheiten erlaubt man sich, ganz im Widerspruche mit dieser anfänglichen Feststellung, davon wieder abzugehen, indem man sich vorstellt, das Coordinatensystem werde in Bezug auf seine anfängliche Lage gewissen Bedingungen gemäss gedrehet, verrückt und somit verändert. Nun ist es zwar allerdings bei einem einzelnen geometrischen Objecte in Bezug auf den Erfolg völlig einerlei, ob man sich den Gegenstand in Bewegung und das Coordinatensystem in Ruhe, oder umgekehrt das Object in Ruhe, dagegen das Coordinatensystem in der entgegengesetzten Bewegung begriffen vorstellt. Allein diese Vorstellungsweise scheint uns, selbst abgesehen von dem wichtigen Umstande, dass sie in unzähligen Fällen völlig unzureichend befunden wird, schon desshalb eine unzulässige und unpassende zu seyn, weil sie dem einzig umwandelbaren Apparat, an den sich alle geometrischen Betrachtungen anschliessen, oder vielmehr durch welchen letztere selbst erst möglich werden, den Charakter der Veränderlichkeit aufdrückt, und jedenfalls der klaren Einsicht in den Vorgang der analytischen Behandlung störend in den Weg tritt. Zudem zeigt sich, wie gesagt, diese Vorstellungsweise überall dort als eine völlig unzureichende, wo es die Natur und Beschaffenheit eines Problems fordert, die Lage einzelner Figuren, ja einzelner Theile derselben, bei unveränderter Stellung aller übrigen beliebig abzuändern, d. h. eine partielle Ortsveränderung eintreten zu lassen. — Es ist daher sehr begreiflich, dass wir bei Ableitung der Formeln für die Transformation des Coordinatensystems von einer ganz anderen Vorstellungsweise auszugehen haben, als es bisher geschah, und dass das Problem der Ortsveränderung, von uns die Dislocation genannt, von jenem, das sich auf die Aenderung in der Art wie die Coordinaten gezählt und gerechnet werden sollen bezieht, strenge zu trennen, und jedes abgesondert und für sich zu behandeln sey. — Durch eine derartige Auffassung dieses Begriffes sehen wir uns, in Verbindung mit den beiden obigen, in den Stand gesetzt, beliebige Ortsveränderungen und Bewegungen mit den verschiedenen geometrischen Objecten und ihren Theilen bei völlig unveränderter Lage aller übrigen vorzunehmen. Durch Aufstellung der allgemeinen Dislocationsformeln erlangt demnach auch die Phoronomie eine rein analytische Basis. —

Der vierte der Anfangs erwähnten Begriffe ist endlich jener der Formänderung geometrischer Objecte oder der geometrischen Metamorphose. — Eine einfache Betrachtung der allgemeinen Dislocationsformeln, welche alle mögliche Ortsveränderungen der geometrischen Objecte in der Ebene wie im Raume in sich schliessen, zeigt nämlich ganz offenbar, dass diese Formeln ungeachtet ihrer universalen Bedeutung dennoch von einer äusserst einfachen und speciellen Form seyen und zu den sogenannten linearen Gleichungen gerechnet werden müssen. Ja sie umfassen selbst in ihrer grössten Allgemeinheit nicht einmal die ganze Classe der Gleichungen des ersten Grades zwischen zweien oder beziehungsweise dreien Variablen, indem die sämmtlichen Coefficienten solcher Formeln noch überdiess gewissen Bedingungen entsprechen müssen, falls sie eine blosse Ortsveränderung bewirken sollen. — Nichts kann daher natürlicher scheinen, als die Frage: was wohl die Wirkung einer Substitution seyn werde, welche durch Formeln bewerkstelliget wird, die diesen Bedingungen nicht entsprechen, oder die von einer anderen wesentlich verschiedenen Form sind? — Es leuchtet wohl von selbst ein, dass bei einem geometrischen Objecte im Coordinaten-Raume ausser seiner Ortsveränderung nur noch eine Aenderung in seiner Form denkbar ist, und man kann daher schon vor aller weiteren Untersuchung mit Bestimmtheit behaupten, dass eine solche Substitution entweder gar keine Wirkung oder stets nur eine Formänderung zur Folge haben müsse. Ersteres anzunehmen verbieten aber die allerersten Grundlehren der höhern Analysis. Es verbleibt uns demnach nur noch jene einer wirklichen Formänderung, die jedoch wohl noch immer mit einer gleichzeitigen Ortsveränderung verknüpft seyn muss. Unsere Untersuchungen setzen uns in den Stand, diese damit verbundene Ortsveränderung analytisch auszuscheiden, und die Formänderung sofort durch die metamorphosirte Gleichung in ihrer Reinheit darzustellen. — Bei der unendlichen Anzahl möglicher Substitutionen kann man ohne alle Uebertreibung behaupten, dass man jedes beliebige geometrische Object beinahe in jedes andere beliebige zu verwandeln vermögen wird, wenn man nur die geeigneten oder entsprechenden metamorphorisirenden Formeln aufzufinden weiss. Hierzu kommt noch der sehr wichtige Umstand, dass die Wirkung derselben formändernden Formeln auf verschiedene Objecte angewandt, eine so übereinstimmende und in die Augen springende ist, dass man meistentheils schon a priori den Erfolg einer solchen Substitution zu bestimmen vermag. Man kann bei den Untersuchungen von einem doppelten Gesichtspunkte ausgehen, indem man einmal nämlich um die formändernde Wirkung gewisser vorgelegter

Formeln frägt, ein andermal dagegen, indem man umgekehrt diejenigen Formeln kennen zu lernen wünscht, welche gewissen Formänderungen entsprechen und selbe herbeiführen. Es dürfte sich daher auch hier ein ganz neues Feld für Untersuchungen eröffnen, die weder für die Wissenschaft noch für die verschiedenen praktischen Zwecke völlig gleichgültig scheinen können.

Diess sind nun die erwähnten vier neuen Begriffe in derselben Ordnung, in welcher sie bei dem Verfasser, einer den andern gleichsam bedingend und hervorrufend, entstanden. Die drei ersten haben schon in einer frühern Abhandlung einen Gegenstand mehrfacher Untersuchungen abgegeben. Der vierte dagegen ist erst neuerlich und viel später zugewachsen, und zwar als unabweisbare Antwort auf eine sich von selbst aufdringende Frage. Sie alle zusammen bilden, wie gesagt, die Basis und die Ausgangspunkte eines neuen Algorithmus, welcher nichts Geringeres beabsichtigt, als die gänzliche Behebung der Eingangs erwähnten Unvollkommenheiten der analytischen Geometrie in ihrem gegenwärtigen Zustande. Was endlich die Anordnung des in vorliegender Abhandlung behandelten Stoffes anbelangt, so glaubt der Verfasser Nachfolgendes hierüber bemerken zu müssen. Der ganze Inhalt dieses Werkes zerfällt in drei Abschnitte, deren jedem eine besondere Aufgabe gestellt ist, die sich zn einem wissenschaftlichen Ganzen abschliesst. Gleichwohl ist die getroffene Aufeinanderfolge dieser Theile keine ganz willkürliche, sondern eine durch die Natur der Sache gebotene. Ihr Inhalt ist in Kürze der folgende:

Der erste Abschnitt, welcher als der einleitende Theil des Ganzen zu betrachten ist, beginnt mit einigen allgemeinen Bemerkungen über den Unterschied der synthetischen und der analytischen Geometrie. Es bietet sich dabei die Veranlassung dar, auf eine kurze, gleichsam summarische Kritik der analytischen Geometrie als Wissenschaft und nach ihrem gegenwärtigen Zustande überzugehen. Das Resultat dieser Untersuchung ist die Überzeugung, dass diese Wissenschaft als solche von dem Zustande wünschenswerther Vollendung dermalen noch sehr weit entfernt sei. Und da dieses Urtheil aus einer Gegenüberstellung und Vergleichung dessen, was die analytische Geometrie eigentlich leisten soll, und dessen, was sie wirklich leistet, hervorgeht: so werden dadurch zugleich die Mängel und Beschränkungen aufgedeckt, die ihr noch ankleben. — Von deren Kenntnissnahme aber zu dem Versuche, selbe zu beheben, ist natürlich nicht weit, und so kommt és, dass schon die nächsten Paragraphe sich mit den Mitteln beschäftigen, mit Zugrundelegung der oben namhaft gemachten und besprochenen vier Begriffe, einen

Algorithmus zu schaffen, geeignet, genannte Beschränkungen und Unvollkommenheiten in dieser Wissenschaft zu beheben. —

Der zweite Abschnitt in drei Capiteln ist der Ableitung derjenigen Formeln gewidmet, welche den Problemen der Dislocation, der Transformation der Coordinaten und der geometrischen Metamorphose oder Formänderung zum Grunde gelegt werden, und von denen namentlich im letzten oder vierten Abschnitte ein häufiger Gebrauch gemacht wird. Insbesondere machen wir auf das erste Capitel dieses Abschnittes aufmerksam, welches die möglichst vollständigen Formeln für beliebige Ortsveränderungen im Raume wie in der Ebene enthält, und mithin unsere frühere diessfallsige Arbeit ohne allen Vergleich an Anwendbarkeit und Vollständigkeit übertrifft. Von der geometrischen Formänderung finden sich im dritten Capitel nur die einfachsten Betrachtungen unter Hinweisung auf die im folgenden Abschnitte sich vorfindenden Aufgaben.

Der dritte Abschnitt ist endlich ausschliesslich der Anwendung der in den frühern drei Abschnitten besprochenen Begriffe bestimmt, und zwar enthält das erste Capitel Probleme über geometrische Objecte in der Ebene, das zweite dagegen über solche im Raume. Wir glauben unsere Leser insbesonders auf jene Probleme aufmerksam machen zu sollen, welche von der analytischen Bestimmung der Bahnfläche bewegter Linien, Flächen und Körper und von deren wechselseitiger Durchdringung handeln, so wie auch auf die höchst verschiedenartigen Anwendungen unserer allgemeinen Dislocationsformeln, da insbesondere die ersteren sich gut dazu eignen dürften, ein Zeugniss über die Brauchbarkeit unsers Algorithmus und der Dislocationsformeln abzulegen. Man wird zu bemerken Gelegenheit haben, dass sich der Verfasser mehrmals mit bloss allgemein analytischen Durchführungen, oder vielmehr mit einer symbolischen Darstellung aller vorzunehmenden Rechnungs-Operationen begnügte, wiewohl anderseits die Zahl der wirklich durchgeführten numerischen Beispiele keineswegs geringe zu nennen ist. Es geschah dieses theils der Kürze wegen, theils aber und insbesondere desshalb, weil es für den Zweck unserer Untersuchungen höchst unwesentlich erscheinen muss, ob die angezeigten Rechnungsoperationen immer und stets durchführbar seien oder nicht. Die analytische Geometrie als Wissenschaft hat unserer Meinung nach, namentlich in Bezug auf Probleme, lediglich bloss die Vorschriften anzugeben und den Weg vorzuzeichnen, welcher zur Lösung einer Aufgabe betreten werden muss. Anderes fällt anderen Wissenschaften anheim, und es hiesse offenbar, das Wesen dieser Wissenschaft völlig verkennen, wenn man an sie Anforderungen stellen wollte, welche zu erfüllen ihr nicht zukommt, sondern die an die Theorie der Gleichungen, an die combinatorische Analysis, die allgemeine Functionenlehre oder an die Infinitesimalrechnung zu überweisen sind. In der analytischen Geometrie ist es daher unsers Erachtens völlig erlaubt, jede Gleichung als auflösbar oder bereits aufgelöst, so wie jedes Differenziale als integrirbar oder bereits integrirt vorauszusetzen. Diess und nicht mehr haben wir durchwegs uns vorauszusetzen erlaubt. — Und damit schliesst sich also auch die Inhaltsanzeige unsers Werkes. Ein Vergleich mit unserm frühern Versuche, diesen Gegenstand betreffend, wird die Überzeugung feststellen, dass unser Algorithmus an Begründung, Anwendbarkeit, Allgemeinheit und selbst an Einfachheit nicht unbeträchtlich gewonnen habe, und gegenwärtige Abhandlung in der That nicht bloss als eine wiederholte Darstellung derselben Begriffe in einer veränderten Form zu betrachten sei.

Möchte diese Arbeit von Kennern mit derselben freundlichen Nachsicht aufgenommen werden und dieselbe gütige Beurtheilung und Prüfung erfahren, welcher sich der frühere Versuch zu erfreuen hatte.

Der Verfasser.

Christian Doppler's

Versuch einer Erweiterung

der

analytischen Geometrie.

Mais il s'agit ici, suivant nous, de bien autre chose; il ne s'agit pas moins que de commencer, pour la géometrie, une ere tout-à-fait nouvelle; il s'agit d'en mettre tous les anciens traités a peu pres au rebut, de leur substituer de traités d'une forme tout-à-fait différente, de traités vraiment philosophiques, . . . ; il s'agit en un mot, d'opérer dans la science une revolution aussi imperieusement necessaire, qu'elle a été jusqu'ici peu prevue.

(Gergonne d. s. Annal. Tom XVII pag. 273)

I. Abschnitt.

Kritische Bemerkungen über die analytische Geometrie als Wissenschaft, und Darlegung der wichtigsten Grundbegriffe eines neu einzuführenden Algorithmus.

§. 1.

Die analytische Geometrie stellt sich zur Aufgabe: die Erforschung der verschiedenen Eigenschaften gerader und krummer Linien und Flächen und der aus ihnen zusammengesetzten und gebildeten Figuren und Körper, so wie die numerische Bestimmung alles dessen, was sich an ihnen Messbares vorfindet. — Puncte, begrenzte oder unbegrenzte Linien, Flächen und Körper und ihre Zusammensetzungen, so wie ihre gegenseitigen Stellungen zu einander, sind daher die einzigen Objecte der analytisch-geometrischen Betrachtungen. In so ferne also hat diese Wissenschaft Zweck und Absicht, so wie Gegenstand mit der sogenannten synthetischen oder Euklidischen Geometrie gemein und sie unterscheidet sich auch in der That von jener nur bloss in der Methode, d. h. durch den Weg und die Mittel, durch welche sie diesen Zweck zu erreichen strebt. — Zweck, Gegenstand und Methode der analytischen Geometrie bilden daher den Inhalt dieser Einleitung, und den folgenden Abschnitten ist es vorbehalten, genannten Zweck selbst nach Möglichkeit und in so weit es der Raum einer Abhandlung gestattet, zu realisiren.

§. 2.

Niemand ist wohl so unerfahren oder von Natur aus so stiefmütterlich begabt, dass er das Krumme nicht von dem Geraden, einen Punct nicht von einer Linie, diese nicht von einer Fläche oder einem Körper zu unterscheiden vermöchte, — der nicht wüsste, dass es Drei-, Vier- und Vielecke u. s. w. gibt, und worin wenigstens ungefähr und überhaupt ihr Unterschied wohl bestehen dürfte. — Allein es ist sehr begreiflich, dass eine solche bloss beiläufige und oberflächliche Bekanntschaft mit den verschiedenen geometrischen Objecten, mag sie auch für den engen Wirkungskreis mancher Menschen zureichend befunden werden, keineswegs dort genügen kann, wo es sich um eine genauere Erforschung der oft sehr verborgen liegenden geometrischen Eigenschaften, d. h. um Erlangung gründlich geometrischer Kenntnisse handelt. In letzterem Falle erscheint es uns unerlässlich, diese verschiedenen Objecte noch vor ihrer weiteren Untersuchung genauer und nach allen Beziehungen und Verhältnissen zu betrachten, sie zweckmässig zu benennen und einzutheilen, sich über gewisse Begriffe zu verständigen, kurz sich alle und jede Kenntniss von ihnen zu verschaffen, in so ferne selbe durch das blosse Anschauungs- und Vorstellungsvermögen oder durch Aneignung allgemein gangbarer und bereits eingeführter Benennungen und Bezeichnungen gewonnen werden kann. — Alles dieses zusammengenommen bildet nun die sogenannte geometrische Anschauungslehre, — eine Kenntniss, welche ihrer Natur nach jeder synthetischen und analytischen Geometrie nothwendig vorangehen muss, und einen wesentlichen Bestandtheil des frühesten Jugendunterrichtes ausmachen könnte und sollte. — Hier soll davon vorzüglich nur dasjenige aufgenommen und besprochen werden, was von der gewöhnlichen Vorstellungsweise mehr oder weniger abweicht, oder für die folgenden Abschnitte von einiger Wichtigkeit zu seyn scheint. —

§. 3.

Die Methode, mittels welcher die analytische Geometrie ihren Zweck, nämlich Erkenntniss der den verschiedenen Linien, Flächen und Körpern und deren Verbindungen zukommenden wichtigen Eigenschaften, zu erreichen strebt, unterscheidet sich von jener, welcher sich die synthetische Geometrie zur Erreichung eben desselben Zweckes bedient, auf eine sehr auffallende Weise. Während nämlich die synthetische Geometrie bei Erforschung einer geometrischen Wahrheit gewisse Hilfslinien anwendet, die bei jeder Untersuchung einer anderen Eigenschaft auch wieder andere sind, und für deren Annahme sich durchaus keine Vorschrift oder Regel aufstellen lässt, — kurz während sich dieselbe bei ihren Untersuchungen lediglich bloss durch ganz zufällige Ansichten und glückliche Einfälle leiten lässt, die sie nur durch den günstigen Erfolg und sonst auf keine andere Weise zu rechtfertigen vermag, — zieht es dagegen die analytische Geometrie vor, sämmtliche Linien, Flächen und Körper ein für allemal und zum Voraus auf ein System unverrückbar feststehender Linien oder Ebenen, gleichsam als auf ein *tertium comparationis* zu beziehen, um bei herzukommender Veranlassung, d. h. bei Gelegenheit irgend einer vorzunehmenden Untersuchung sich desselben als eines Mittelgliedes zu bedienen, und die verschiedenen geometrischen Objecte sofort unmittelbar mit einander vergleichen zu können. Die synthetische Geometrie thut dieses nun unbezweifelt auch, und der ganze Unterschied besteht demnach lediglich bloss darin, dass bei unserer Wissenschaft jenes Mittelglied beständig dasselbe, bei der Geometrie der Alten dagegen fast bei jedem Lehrsatze ein anderes ist. — Die grosse Allgemeinheit, ja Universalität dieser Vorkehrung macht es aber der analytischen Geometrie möglich, eine gewisse gemeinsame Buchstabenbezeichnung einzuführen und auf selbe die allgemeinen Grundlehren der Analysis anzuwenden. Sie erlangt dadurch den entschiedenen und unendlich überwiegenden Vortheil einer viel gleichförmigeren, allgemeineren und vom Zufalle völlig unabhängigen Behandlungsweise ihres Gegenstandes, und sieht sich, vorausgesetzt, dass obengenannte Bedingungen in der That erfüllt sind, und ihr sonsthin die Analysis die nöthige Hilfe nicht versagt, in den Stand gesetzt, jede Aufgabe über die Erforschung gewisser Eigenschaften oder über die Berechnung der verschiedenen geometrischen Objecte auf directem Wege und ohne viele Schwierigkeiten aufzulösen. Ebenso bringt es die Gleichförmigkeit und Allgemeinheit der Behandlungsweise des vorliegenden Gegenstandes mit sich, dass auch die darauf bezüglichen analytischen Ausdrücke, insbesondere durch Einführung der combinatorischen Bezeichnungsweise eine ungewöhnliche Symmetrie und Regelmässigkeit zeigen, welche bei auszuführenden Rechnungen nicht ohne grossen erleichternden Nutzen sind, und nicht wenig dazu beitragen, den Geometer für die nothwendigerweise gewöhnlich etwas grössere Complizität der Formeln, gegenüber der synthetischen höchst speziellen Behandlungsweise in reichlichem Maasse schadlos zu halten. —

§. 4.

Ueberblickt man nun dasjenige, was bisher über den Unterschied der synthetischen von der analytischen Behandlungsweise gesagt wurde, so begreift man leicht, dass nur allein denjenigen geometrischen Objecten der Vortheil einer analytischen Betrachtung zugewendet werden kann, welche man auf das oben erwähnte feststehende System von Linien oder Ebenen (man nennt sie jene der Coordinaten) analytisch zu beziehen vermag, alle anderen aber davon ausgeschlossen bleiben müssen. So würde man z. B. um Polygone und Polyeder analytisch auf ihre Eigenschaften untersuchen zu können, vor Allem darnach zu trachten haben, sich ihre analytischen Repräsentanten oder Gleichungen zu verschaffen, und wofern man dieses nicht vermöchte, geradezu und wohl für immer die Hoffnung aufgeben müssen, auf diesem Wege wenigstens zu einer genaueren Bekanntschaft mit diesen wichtigen geometrischen Gegenständen zu gelangen. — Ja noch mehr, zur vollständigen Realisirung aller oben aufgezählten, ungemein wichtigen Vortheile ist es geradezu unerlässlich, sich nicht nur die Gleichungen aller einzelner geometrischer Gegenstände, sondern insbesondere auch und vorzüglich, jene beliebiger Zusammenstellungen aus ihnen, d. h. ganzer Systeme derselben zu verschaffen. Es erscheint ferner als völlig unabweislich, dass man sich die Mittel verschaffe, sowohl den einzelnen geometrischen Objecten als auch ganzen Gruppen aus ihnen, jede beliebige Stellung und Lage sowohl untereinander als auch im Coordinaten-Raume anzuweisen; — dass man es vermöge, Linien, Flächen und Körper willkührlich zu theilen, sie beliebig zu begrenzen, ihre Theile wieder anders zusammenzufügen und zu neuen Linien, Flächen und Körpern zu verbinden. — Man muss sich in den Stand gesetzt sehen, mit selben die verschiedenartigsten Bewegungen uud Drehungen um willkührliche Puncte, Linien oder andere geometrische Objecte auszuführen, ihre Form nach gewissen Bedingungen oder auch durch blosses Annähern an gewisse andere Linien und Flächen mannigfaltig sich ändern zu lassen und endlich Oberflächen Behufs gewisser Zwecke aus-, ein- und umzustülpen, oder zu jeder Form die ihr symmetrische Gegenform, wenn sie einer solchen fähig ist, zu finden, und alles dieses bei stets klarer Einsicht in den Vorgang der Rechnung; — kurz alle jene Veränderungen, die nur immer des Menschen Hand an den ihnen entsprechenden wirklichen oder körperlichen Gegenständen hervorzubringen vermöchte, durch rein analytische Behandlung und abseit selbst von jeder Mithilfe graphischer Darstellung an und mit den verschiedenen Objecten auszuführen. Diess ist es nun, was die analytische Geometrie als Wissenschaft, wenn sie das ist, was sie seyn soll und seyn kann zu leisten vermögen muss.

§. 5.

Frägt man aber, wie nahe man diesem idealen Zustande der analytischen Geometrie bisher gekommen sey, so fällt die Antwort hierauf nichts weniger als sehr befriedigend und beruhigend aus. Zwar ist es nicht zu läugnen, dass die Leistungen in dieser Wissenschaft, besonders in neuester Zeit und in Bezug auf diejenigen Grenzen, die ihr bis jetzt vorgezeichnet schienen, ganz ausserordentlich und wahrhaft bewunderungswürdig zu nennen sind. Auch muss man der Wahrheit das gerechte Wort sprechen, dass diese Doctrin einen fast sprichwörtlich gewordenen inneren Zusammenhang, eine Abgeschlossenheit und bei der grössten Eleganz ihrer Resultate gleichwohl eine Einfachheit und Allgemeinheit in der Anwendung darbietet, welche ihr vor allen anderen Wissenschaften die entschiedenste Anerkennung einer hohen Vollendung bei jedem Kenner verschaffen mussten. — Allein von dem im vorigen Paragraphe angedeuteten Standpuncte aus betrachtet, erleidet dieses Urtheil eine sehr bedeutende Beschränkung. Denn anerkennen muss man, dass man bis jetzt nur unbegrenzte oder sich selbst begrenzende, d. h. in sich selbst zurückkehrende Linien, Flächen und Figuren zum Gegenstande analytisch-geometrischer Untersuchungen gemacht und alle beliebig begrenzten und zusammengesetzten derartigen geometrischen Objecte, da zu ihrer Handhabung die nöthigen Hilfsmittel fehlten, von diesen Betrachtungen ausgeschlossen habe, wiewohl nicht in Abrede zu stellen seyn dürfte, dass gerade diese letzteren, wegen ihres häufigeren Vorkommens in den Künsten und Wissenschaften auf eine vorzugsweise Beachtung Anspruch zu machen haben. Es kann und darf nicht verkannt werden, dass man bisher weder die Flächen- noch Körperräume (man sehe m. Abh. pag. 55 u. 69) durch Gleichungen analytisch auszudrücken versuchte, noch selbst auch nur das Bedürfniss hierzu verspürte, obwohl eine grosse Zahl der wichtigsten Probleme dieses unmittelbar erheischet. Auch ist es allgemein bekannt, dass man bisher die gleichzeitige Darstellung mehrerer als zusammengehörig betrachteter Puncte, Linien, Figuren und Flächen, d. h. ganzer Systeme von geometrischen Objecten im Coordinaten-Raume mittels Gleichungen nicht versucht hat. Eben so wenig sah man sich bis jetzt im Stande, Ortsveränderungen mit einzelnen Objecten, ja mit den einzelnen Theilen eines und desselben Objectes bei unveränderter Lage aller übrigen vorzunehmen, oder sie um beliebige Puncte, Linien oder andere im Coordinaten-Raume befindliche Gegenstände drehen und bewegen zu lassen, wie dieses doch zur glücklichen Lösung vieler Probleme öfters nothwendig erscheint. Auch die Formänderung der verschiedenen geometrischen Objecte liess man bisher völlig zur Seite liegen. — Unter solchen Umständen muss nun, wer wollte es läugnen, eine Abhilfe, sie mag kommen woher immer, höchst wünschenswerth erscheinen. Die nachfolgenden Paragraphe dieses Abschnitts sollen nun dem Versuche, eine solche zu leisten, gewidmet seyn, und den folgenden Theilen ist es sofort vorbehalten, die Anwendung und weitere Ausführung der hier niedergelegten Grundzüge eines neuen Algorithmus auf sich zu nehmen.

§. 6.

Als der eigentliche Schauplatz aller geometrisch-analytischen Vorgänge und zugleich als der Ort für die geometrischen Anschauungen und Versinnlichungen muss derjenige Raum bezeichnet werden, welcher sich zwischen den vier Quadranten zweier in einer Ebene sich senkrecht durchschneidenden Linien, oder falls die Untersuchungen, wie man sich auszudrücken pflegt, im Raume geführt würden, zwischen den acht Octanten dreier in einem Puncte sich senkrecht durchschneidenden Ebenen, ins Unendliche ausbreitet. —

Hier ist es nun, wo die verschiedenen geometrischen Objecte mittelst eines Systems paralleler Linien oder auf eine andere Weise durch Gleichungen ausgedrückt werden.

So lange es hiebei bloss auf die analytische Darstellung unbegrenzter oder sich selbst begrenzender Linien und Flächen durch Gleichungen abgesehen ist, kann das ganze Verfahren ohne Anstand als bereits allgemein bekannt vorausgesetzt und mit Stillschweigen übergangen werden. Will man sich aber sofort anschicken, auch mit beliebig begrenzten und zusammengesetzten Objecten ein Gleiches vorzunehmen, so wird man gewahr, dass die uns zu Gebote stehenden Mittel nicht zureichen und das ganze Vorhaben bis auf Weiters zur Seite geschoben werden müsse. So gerade erging es auch uns, und gab die Veranlassung, auf Mittel zu sinnen, diesem Übelstande ein für allemal zu begegnen.

Unser Vorhaben, als wir an diesen Paragraph gingen, war, eine vollständige Aufzählung aller den verschiedenen räumlichen Objecten entsprechenden möglichen Functionsgleichungen vorzunehmen. Unter den erwähnten Umständen aber muss es sich der geehrte Leser mit uns wohl gefallen lassen, diese gewiss nicht unwichtige Untersuchung um ein Kleines aufzuschieben, und er möge nun vor Allem in den nächsten drei Paragraphen die Mittel in Beurtheilung ziehen, die wir zur radikalen Abhilfe dieses Übelstandes in Vorschlag bringen.

§. 7.

Bei allen Untersuchungen der analytischen Geometrie, so wie bei jenen der Analysis überhaupt, pflegt man bisher, mit vielleicht alleiniger Ausnahme der bestimmten Integrale, insgemein stillschweigend vorauszusetzen, dass sowohl die gesonderten Functionen als die ihnen zum Grunde liegenden absolut veränderlichen Grössen eines jeden Werthes ohne Unterschied fähig seien, insoferne derselbe nicht etwa durch die besondere Natur und Beschaffenheit der Function selbst sich als unmöglich oder unzulässig darstellet. So hält man z. B. in der Gleichung für die gerade Linie sowohl die Ordinate y als auch die Abscisse x eines jeden reellen Werthes ohne Ausnahme fähig, während dagegen in der Gleichung des Kreises wegen der Eigenthümlichkeit dieser Curve jene Werthe zwischen ganz bestimmte enge Grenzen eingeschlossen erscheinen. — Indem man aber die Beschränkung der Functionen lediglich bloss ihrer Natur und besondern Beschaffenheit, also etwas ganz Zufälligem überlässt, leistet man meines Erachtens ohne Noth und eigenwillig auf den grossen Vortheil Verzicht, diese bei herzukommenden Veranlassungen und Behufs gewisser Zwecke selbstthätig feststellen zu können. Um daher von dieser beherzigungswerthen Bemerkung Nutzen zu ziehen, wollen wir Nachfolgendes hierüber festsetzen:

1. Um anzuzeigen, dass irgend eine Function einer Veränderlichen, wie z. B. $y = \varphi(x)$, nur allein für jene Werthe von x gelten solle, welche zwischen den Werthen α und α' liegen, wollen und werden wir dieses durch die Bezeichnung $y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ und falls die Grenzwerthe α und α' zusammengesetzt wären, bloss durch: $y = (\alpha) \underset{\bullet}{\left\{} \varphi(x) \overset{\bullet}{\right\}} (\alpha')$; ausdrücken. Auch wollen wir vorläufig festsetzen, dass mit Ausnahme einiger später zu erwähnender Fälle, sowohl der untere als obere Grenzwerth inclusive zu verstehen sei. Durch diese Bestimmung und deren Bezeichnung wird daher jeder andere, wenn gleich sonst mögliche Werth der Function von aller und jeder Betrachtung ausgeschlossen und muss daher als unmöglich oder vielmehr als gar nicht vorhanden betrachtet werden. Öfters ist es dagegen mit nicht geringen Vortheilen verknüpft, von allen möglichen Werthen einer Function eine gewisse Partie derselben in der Weise auszuschliessen, dass sofort alle jene Werthe von $\varphi(x)$ oder y als nicht vorhanden betrachtet werden sollen, welche durch die Substitution eines zwischen α und α' liegenden Werthes von x erhalten werden. Wir können dieses sehr einfach durch eine etwas andere Bezeichnungsart der nämlichen Grenzklammer, nämlich durch die Bezeichnung $y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ oder $y = (\alpha') \overset{\bullet}{\left\{} \varphi(x) \underset{\bullet}{\right\}} (\alpha)$ erreichen. Wir halten es für nicht ganz überflüssig, das Gesagte durch einige Beispiele zu erläutern.

1. Bedeuten x und y, wie gewöhnlich, die Coordinaten, so sind die Gleichungen der in Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 und Fig. 4 vorgestellten geometrischen Objecte, d. i. jene einer beiderseits begrenzten endlichen geraden Linie, einer einseitig begrenzten, sodann einer durch eine endliche Strecke unterbrochenen beiderseits unbegrenzten geraden Linie, und endlich einer scheitellosen Parabel beziehungsweise die folgenden, nämlich:

$$1)\ y = \left\{ \tfrac{1}{3}x - 5 \right\}_{5}^{9};\quad 2)\ y = \left\{ \tfrac{1}{4}x + 8 \right\}_{4}^{+\infty};\quad 3)\ y = \left\{ \tfrac{1}{3}x - 5 \right\}_{9}^{5};\ \text{und}\ 4)\ y = \left\{ \pm\sqrt{7x} \right\}_{5}^{\infty}$$

2. Soll ferners eine Function eine solche Begrenzung erfahren, dass sie für mehrere Intervalle zugleich gelte oder auch nicht gelte: so wollen wir dieses in den einfachern, keiner Missdeutung fähigen Fällen und einstweilen bis uns der folgende Paragraph ein noch passenderes Mittel hierzu darbietet, durch folgende Bezeichnung anzeigen, nämlich:

$$y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha,\, \alpha'' \ldots}^{\alpha',\, \alpha''';\, \ldots\ldots} = (\alpha, \alpha'', \ldots) \underset{\bullet}{\left\{} \varphi(x) \overset{\bullet}{\right\}} (\alpha', \alpha''', \ldots);\ \text{und ebenso:}$$

$$y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha',\, \alpha''' \ldots}^{\alpha,\, \alpha'' \ldots} = (\alpha, \alpha'' \ldots) \overset{\bullet}{\left\{} \varphi(x) \underset{\bullet}{\right\}} (\alpha, \alpha''' \ldots.)$$

und als specielle Beispiele die den Fig. 5 und 6 entsprechenden Gleichungen, nämlich:

(5.) $y = {}_{3,8}\left\{ \tfrac{1}{3}x - 5 \right\}^{5,10}$; und (6.) $y = {}^{4,9}\left\{ \tfrac{1}{3}x - 5 \right\}_{6,15}$; d. h. von den z. B. durch Function (5) sich ergebenden Werthen sind nur jene beizubehalten, welche entweder aus einem zwischen 3 und 5 oder zwischen 8 und 10 liegenden Werth von x hervorgehen. —

3. Sehr häufig kömmt man ferners bei derartigen Untersuchungen in die Lage, die Grenzbezeichnung, anstatt sie auf die den Functions-Ausdrücken zum Grunde liegenden absolut veränderlichen Grössen zu beziehen, sie vielmehr auf die Functionen selbst anwenden zu müssen. Es wird uns dieses durch Anwendung und Einführung einer anders geformten, nämlich der doppelt gekerbten Grenzklammer jederzeit möglich werden. Um daher anzuzeigen, dass von allen Werthen, deren eine Function überhaupt fähig ist, nur ganz allein diejenigen zu gelten oder nicht zu gelten haben, welche zwischen den Grenzen β und β' liegen, wollen wir hinfüro uns der Bezeichnung:

$$y = {}_{\beta}\left\{ \varphi(x) \right\}^{\beta'} = \beta \left\{ \varphi(x) \right\} \beta'; \text{ und } y = {}^{\beta}\left\{ \varphi(x) \right\}_{\beta'} = \beta \left\{ \varphi(x) \right\} \beta'; \text{ bedienen. —}$$

4. Eine begrenzte Function oder auch ein derlei Zahlwerth soll von uns ein Progress genannt werden, wenn der obere Grenzwerth α' oder β' numerisch grösser ist, als der dazu gehörige untere α oder β. Findet das Gegentheil davon Statt, so soll er Regress heissen, gleichviel, ob sich die Grenzwerthe auf eine einfache oder doppelt gekerbte Grenzklammer beziehen. So wären z. B. ${}_{3}\left\{ \varphi(x) \right\}^{5}$ und ${}_{1}\left\{ \varphi(x) \right\}^{3}$ Progresse; und ${}_{6}\left\{ \varphi(x) \right\}^{2}$ und ${}_{7}\left\{ \varphi(x) \right\}^{5}$ dagegen Regresse. —

5. Da der Ausdruck ${}_{\beta}\left\{ y \right\}^{\beta'}$ eigentlich und dem Begriffe nach aussaget, dass der Werth von y zwar unbestimmt, dabei aber gleichwohl insoferne wiederum bestimmt ist, als er keines ausserhalb des Intervalls von β bis β' liegenden Werthes fähig seyn solle, der Werth von y also in Wahrheit eine begrenzte Unbestimmtheit darbietet: so erscheint es in jeder Weise als erlaubt, statt obigen Ausdrucks, falls man es für wünschenswerth erachtet, auch den nachfolgenden zu setzen, d. h. statt ${}_{\beta}\left\{ y \right\}^{\beta'}$; $y = {}_{\beta}\left\{ \tfrac{0}{0} \right\}^{\beta'}$: und somit in der Form einer Gleichung.

Dieses Raisonnement wird auch, wie es der letzte Abschnitt darthun wird, durch den Umstand als richtig erhärtet, dass man auch als reducirte Gleichung für eine begrenzte Senkrechte oder Ordinate, denselben Ausdruck $y = {}_{\beta}\left\{ \tfrac{0}{0} \right\}^{\beta'}$ unabhängig von gegenwärtiger Betrachtung erhält. —

6. Nach den bisherigen Feststellungen ist es nun in jedem vorkommenden Falle ganz leicht, über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines durch Specialisirung einer Function entstandenen Werthes schon auf den blossen Anblick hin zu entscheiden. So würde man keinen Augenblick anstehen, die Werthe $\left\{ \varphi(5) \right\}_{3}^{7}$ und $\left\{ \varphi(4) \right\}_{5}^{8}$ für mögliche und zulässige, dagegen $\left\{ \varphi(7) \right\}_{3}^{5}$ und $\left\{ \varphi(3) \right\}_{2}^{5}$ für unmögliche und abzuweisende oder vielmehr gar nicht vorhandene anzuerkennen, und ebenso: $\left\{ 11 \right\}_{6}^{12}$ und $\left\{ 10 \right\}_{3}^{9}$ für mögliche, dagegen $\left\{ 5 \right\}_{2}^{3}$ und $\left\{ 9 \right\}_{5}^{12}$ für unmögliche zu erklären.

7. In gleicher Weise dürften auch die nachfolgenden paarweise zusammengestellten Grenzausdrücke keiner weitern Erklärung mehr bedürfen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{c} \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\infty} \\ \left\{ \varphi(x) \right\}_{\beta}^{\infty} \end{array}\right| \begin{array}{c} \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\infty}^{\alpha'} \\ \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\infty}^{\beta'} \end{array} \left| \begin{array}{c} \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\infty}^{\infty} \\ \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\infty}^{\infty} \end{array} \right| \text{ und } \begin{array}{c} \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\infty}^{+\infty} \\ \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\infty}^{+\infty} \end{array}$$

und wir fügen nur noch die Bemerkung bei, dass wir für die beiden vorletzten Ausdrücke geradezu keine Function, für das letzte Paar dagegen stets die völlig gleichbedeutende einfachere Function $\varphi(x)$ schreiben werden. Da ferner jede Grösse mit x^0 unbeschadet ihres Werthes multiplicirt werden kann, so ist es auch erlaubt, ja dort, wo man Schwierigkeiten fände, sogar rathsam, statt $\left\{ b \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ das gleiche $\left\{ b\,x^0 \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ zu schreiben. Es ist daher z. B. $\left\{ 5 \right\}_{7}^{9}$ für alle Werthe x, welche zwischen 7 und 9 liegen, der Werth von $\left\{ 5 \right\}_{7}^{9} = 5$ zu setzen. Ist endlich der obere Grenzwerth dem untern gleich, d. h. $\alpha = \alpha'$; so hat die Function, d. h. $y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha}$ nur einen Werth, nämlich $y = \varphi(\alpha)$, und derselbe entspricht stets einem bestimmten Punkte. — Endlich kann noch bemerkt werden, dass stets der Ausdruck $\left(a \pm b\sqrt{-1}\right)\left\{ \tfrac{0}{0} \right\}\left(a' \pm b'\sqrt{-1}\right)$ nur wieder einem Ausdrucke von der Form $m \pm n\sqrt{-1}$ gleich seyn kann, da zwischen zwei unmöglichen Werthen nur wieder unmögliche liegen. —

8. Bei Functionen dreier Variablen wie z. B. $Z = F(x\,.\,y)$ kann eine doppelte Art der Begrenzung Statt finden; jene der absolut veränderlichen und jene der abhängig Veränder-

lichen. Als erstere lässt man gewöhnlich, wiewohl keineswegs nothwendig, die Abscisse x, für die abhängig Veränderliche dagegen aber die Ordinate y gelten. Die auf x sich beziehende Begrenzung ist unter dieser Voraussetzung constant, dagegen jene auf y gerichtete eine von x abhängige Function. Diess gilt natürlich im Allgemeinen. In gewissen speziellen Fällen kann auch die Begrenzung von y constant werden, worüber zu seiner Zeit das Nöthige gesagt werden soll. Von erwähnter Art wären z. B. die Functionen:

$$Z = \Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}\Big\{F(x,y)\Big\}_{\bullet}^{\bullet}\Big\{\varphi'(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''};\ \text{oder}\ Z = \Big\{\varphi(x)\Big\{F(y)\Big\}_{\bullet}^{\bullet}\varphi'(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'};\ \text{ebenso}\ Z = \Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}\Big\{\tfrac{0}{0}\Big\}_{\bullet}^{\bullet}\Big\{\varphi'(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$$

u. s. w. Wir werden ihrer bald eine noch grössere Zahl kennen lernen.

9. Obgleich wir erst etwas später von der Verwandlung der einfach gekerbten Grenzklammern in die doppelt gekerbten sprechen werden, so folgt doch schon aus der blossen Bedeutung der Zeichen und dem Begriffe der Begrenzung, dass in allen jenen Fällen, wo die begrenzte Function einfach die Variable selbst ist, man die beiden Grenzklammern unbeschadet mit einander vertauschen dürfe, d. h. $\Big\{y\Big\}_{\beta}^{\beta'} = \Big\{y\Big\}_{\beta}^{\beta'}$. Eben so folgt aus dem Begriffe, dass: $\Big\{ox\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} = \Big\{o\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} = 0$ und eben so auch $\varphi(x)\Big\{oy\Big\}_{\bullet}^{\bullet}\varphi'(x) = \varphi(x)\Big\{o\Big\}_{\bullet}^{\bullet}\varphi'(x) = 0$. Nothwendig aber finden wir es, schon hier zu erklären, dass nach der Natur der Sache die beiden Grenzbezeichnungen, nämlich mit einfach- oder doppeltgekerbten Grenzklammern niemals ein nothwendiges oder unbedingtes, sondern immer nur ein mögliches Stattfinden der zwischen den Grenzen liegenden Werthe der Functionen, d. h. ein blosses Zulassen derselben, falls sie sonst möglich sind, aussagen sollen und können. Letzteres hängt natürlich immer noch von der Beschaffenheit der Functionen selbst ab, und muss dieser überlassen werden. — Sind die bekannten Variablen x, y, z durch constante Grenzen *) zu begrenzen, so werden wir uns der Ordnung nach der Grössen α, β, γ mit den nöthigen Accentuirungen bedienen. —

§. 8.

Ein anderer, mit dem so eben Erwähnten in sehr naher Beziehung stehender, in der ganzen Mathematik nicht minder häufig vorkommender wichtiger Begriff, dem es gleichfalls noch an einer zweckmässigen Bezeichnung und an einer gehörigen Würdigung fehlt, ist jener des wirklichen Zugleichbestehens mehrerer Werthe für eine und dieselbe veränderliche oder

*) Die Begrenzung der Functionswerthe bietet, wie wir bei einer andern Gelegenheit zu zeigen nicht unterlassen werden, einen höchst überraschenden Uibergangspunkt von den allgemeinen analytischen polygonometrischen Gleichungen zu den bekannten zwei Fundamentalgleichungen der Polygonometrie dar, welche letztere sofort und zugleich mit ihnen alle übrigen Lehren dieser Wissenschaft, als ein wesentlicher Theil der analytischen Geometrie erscheinen, von der sie bisher in jeder Weise getrennt zu seyn und gleich der Trigonometrie eine für sich selbst bestehende eigene Wissenschaft vorzustellen schienen. —

auch nur unbekannte Grösse. Dort, wo es die unabweisliche Nothwendigkeit erheischte, ein derartiges oder doch ganz ähnliches Verhältniss mehrerer Grössen zu einer Dritten anzuzeigen, wie z. B. bei den verschiedenen combinatorischen Operationen, bei Aufzählung sämmtlicher Wurzeln einer Gleichung, oder endlich bei Angabe der Einzeln-Werthe einer vielförmigen und daher auch vieldeutigen Function u. s. w., begnügte man sich bisher, dieses gemeiniglich durch dazwischen gesetzte Komma auszudrücken. —

Aber abgesehen von dem gewiss nicht unwichtigen Umstande, dass eine derartige Bezeichnung leicht zu Missverständnissen aller Art führen kann, und sich mithin gar wenig zu dem beabsichtigten Zwecke eignen dürfte: scheinet man auch noch überdiess bis jetzt wenig Nutzen von einer geregelten Anwendung eines solchen Begriffszeichens erwartet zu haben. Ich aber meines Theils muss gestehen, dass ich nicht ganz dieser Meinung seyn kann, vielmehr durch mehrfach angestellte Betrachtungen und Untersuchungen, von denen ich schon früher einen Theil dem mathematischen Publicum zur Beurtheilung vorlegte, zur Überzeugung gekommen bin, dass sowohl dieser als auch der obenerwähnte Begriff der genauesten und sorgsamsten Beachtung, Prüfung und Erörterung rücksichtlich deren Brauchbarkeit als Grundlage eines neuen Algorithmus werth seyn dürften, — und Männer, denen ein Urtheil hierüber wohl zukommen möchte, sind öffentlich und privatim dieser meiner Meinung beigetreten. —

Um daher anzuzeigen, dass z. B. der Veränderlichen y die Werthe $A, B, C,$ u. s. w. zukommen, d. h.: dass sie dieser Werth fähig seyn solle, wollen wir uns des dazwischengesetzten Zeichens ω bedienen, und schreiben $y = A \,\omega\, B \,\omega\, C$; d. h.: y ist sowohl A, als auch B, als auch C u. s. w. — Würde man daher dieses Zeichen auf die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$; anwenden, so hätte man $x = 1 \,\omega\, 3 \,\omega\, 5$; eine Bezeichnungsweise, welche, hätte man sich ihrer in der Theorie der Gleichungen von jeher bedient, sicherlich vor manchen irrigen Behauptungen und vorgeblichen Widersprüchen zu bewahren vermocht hätte. Denn das ω *(Omega)* verbietet eben jede willkührliche und unmittelbare Verbindung der einzelnen Glieder, indem sie diese Werthe, wie die folgenden Paragraphe lehren werden, gewissermassen auseinander hält Die auf der einen Seite der Gleichung stehende Variable oder Unbekannte x, y oder z ist nämlich nicht bloss ein stellvertretendes Zeichen für einen, sondenn ein allgemeiner Repräsentant mehrerer und oft sogar unendlich vieler Werthe, und mithin eine vieldeutige Grösse, worauf man eben durch das Zeichen ω aufmerksam gemacht wird. So kann man für $y = \pm\sqrt{5}$, auch schreiben: $y = (+\sqrt{5}) \,\omega\, (-\sqrt{5})$; statt $y = \sqrt[3]{1} = 1 \,\omega \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \omega \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ oder, wenn $sin.x = y$, so ist bekanntlich: $x = arc.sin.y \,\omega\, arc.sin.(2\pi + y) \,\omega\, arc.sin.(4\pi + y) \,\omega \ldots$; denn durch die Reversion eines Ausdruckes entsteht fast immer ein vieldeutiger Functionswerth.

Unsers Wissens gebührt *Cauchy* das Verdienst, auf die bestimmte Darstellung mehrförmiger Functionen durch ein in die Augen fallendes Zeichen gedrungen zu haben. —

Schon aus dem bisher Gesagten ersieht man deutlich genug, dass das Zeichen ω, welches von uns das Disjunctiv-Zeichen, die einzelnen Theile $A, B, C,$ die es miteinander verbindet, dagegen Disjunctiv-Glieder genannt werden sollen, durchaus nicht mit dem Additionszeichen $+$ verwechselt werden darf, wiewohl es gleich jenem zugleich ein Qualitäts- und Operations-Zeichen ist, und nach ähnlichen, aber eigenthümlichen und aus der Natur dieses Begriffes selbst geschöpften Regeln angewendet werden muss. — Das jedem Disjunctiv-Gliede vorgesetzte Qualitätszeichen $+$ oder $-$ bezieht sich immer auf dieses selbst, und darf niemals dem unteren Grenzwerth zugeschrieben werden, falls letzterer, wegen seiner Complizität dem Disjunctivgliede vorangeschrieben würde. Man hätte in letzterem Falle denselben zur Vermeidung jeglichen Irrthums in gewöhnliche Klammern einzuschliessen. So z. B. bedeutet

$$y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{-\alpha}^{\alpha} = (-\alpha) \left\{ \varphi(x) \right\}_{\bullet}^{\bullet} (\alpha);\ \text{und}\ y = -\left\{ \varphi(x) \right\}_{-\alpha}^{\alpha} = -(-\alpha) \left\{ \varphi(x) \right\}_{\bullet}^{\bullet} (\alpha);\ \text{nicht aber auch}$$

gleich dem Ausdrucke: $(\alpha)\left\{ \varphi(x) \right\}_{\bullet}^{\bullet}(\alpha')$, wegen Verschmelzung der beiden Minus-Zeichen zu Plus u. s. w. Durch dieses Übereinkommen ist daher jeder Missdeutung vorgebeugt. Öfters lassen sich die sämmtlichen Disjunctiv-Glieder einer Gleichung von einem gemeinschaftlichen Index abhängig machen, und in diesem Falle können derlei Gleichungen immer unter einer höchst einfachen Form dargestellt werden. So werden wir hiefür statt der Gleichung $y = A_1 \omega A_2 \omega A_3 \omega \ldots A_n$ schreiben: $y = \mathop{\Omega}\limits_{1}^{n} \left(A_\varrho \right)$; oder wo ein Missverständniss zu befürchten wäre, lieber

$$y = \mathop{\Omega}\limits_{1,\varrho}^{n\varrho} \left(A_\varrho \right);\ \text{ferner statt}\ y = \mathop{\Omega}\limits_{\alpha}^{\alpha'} \left(A'_\varrho \right) \omega \mathop{\Omega}\limits_{\beta}^{\beta'} \left(A''_\varrho \right) \omega \mathop{\Omega}\limits_{\gamma}^{\gamma'} \left(A'''_\varrho \right) \omega \ldots\ldots$$

$$y = \mathop{\Omega}\limits_{(\alpha . \beta, \gamma . .), \varrho}^{(\alpha' . \beta', \gamma' . .) \varrho} \cdot \mathop{\Omega}\limits_{1,\pi}^{n,\pi} \left(A^\pi_\varrho \right).$$

Das Zeichen Ω welches sich, wie man sieht, lediglich bloss auf die Indices und niemals auf die allenfalls dem Disjunctiv-Gliede zum Grunde liegenden Variablen bezieht, wollen wir das grosse oder combinatorische Ω (Omega) nennen. — Indem wir aber auf diese Weise die analytische Geometrie den combinatorisch-analytischen Betrachtungen und Operationen zugänglich machen, eröffnen wir den letztern zugleich ein neues Feld, welches zumal für die Lösung unbestimmter geometrischer Probleme nicht anders als von der grössten Wichtigkeit sich erweisen dürfte. Wir haben diesem Theile unsers Algorithmus in unserer frühern Abhandlung über diesen Gegenstand ein besonderes Augenmerk geschenkt, wesshalb wir zur Vermeidung unnöthiger Wiederholungen unsere Leser auf jene Arbeit verweisen.

§. 9.

Durch die Annahme und den Gebrauch des Disjunctiv-Zeichens in Verbindung mit jenem für die willkührliche Begrenzung wird es begreiflicher Weise der analytischen Geometrie erst möglich, nicht nur Puncte, Linien, Flächen und Körper in beliebiger Lage zu einander, und somit als gleichzeitig im Coordinaten-Raume bestehend, d. h. ganze Systeme derselben durch Gleichungen darzustellen, sondern sie erlangt zugleich dadurch auch ein Mittel, sich die Gleichungen beliebig zusammengesetzter Figuren, Flächen und Körper zu verschaffen, und sie nach den gewöhnlichen analytischen Regeln der weitern Untersuchung sofort zu unterziehen. — Es wurde schon weiter oben ausdrücklich erwähnt, dass wir im Allgemeinen bei einer begrenzten Function stets voraus setzen werden, dass sowohl der untere als auch der obere Grenzwerth inclusive zu verstehen sey. In zwei Fällen aber leidet diese Voraussetzung eine nothwendige, aus der Natur der Sache selbst fliessende Ausnahme. Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn die beiden Grenzwerthe, der obere und untere, gleich gross sind. In diesem Falle nun, wo der Function als Object ein Punct entspricht, muss eben, weil nur das Bestehen eines einzigen Werthes ausgesagt wird, und die obere Grenze mit der untern zusammenfällt, die obere Grenze exclusive genommen werden. — Der zweite Fall tritt dann ein, wenn zwei Disjunctiv-Glieder solche Grenzwerthe haben, dass der untere des einen Gliedes dem oberen Grenzwerthe des andern gleich ist, und für diese Werthe beide Functionswerthe selbst einander gleich werden. In geometrischer Beziehung entspricht dieser Fall dem Zusammenstossen zweier Curven, wie in *Fig.* 11 und *Fig.* 12. Gleichwie nun hier der Punct B, wiewohl zu beiden Curven gehörig, nur einmal vorkömmt und gezählt werden kann, so bringt es die Eigenthümlichkeit unserer Grenzbezeichnung mit sich, auch in diesem zweiten Falle den obern Grenzwerth selbst von unserer Betrachtung auszuschliessen, und mithin exclusive zu verstehen. — In denjenigen Fällen nun, wo der obere und untere Grenzwerth gleich sind, oder wo der obere des einen Disjunctiv-Gliedes dem untern des nächst darauffolgenden gleich ist, werden wir stets der Abkürzung uns bedienen, von diesen gleichen Werthen nur den einen ausdrücklich anzuschreiben; d. h. statt $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha} = (\alpha)\left\{\varphi(x)\right\}_{\cdot}^{\cdot}$; und $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha''} = (\alpha)\left\{\varphi(x)\right\}_{\cdot}^{\cdot} \omega (\alpha') \left\{\varphi'(x)\right\}_{\cdot}^{\cdot} (\alpha'')$. Da öfters die Grenzwerthe selbst sehr zusammengesetzt sind, ja bei vielen Untersuchungen die Hauptrolle spielen, so wird sich diese Abkürzung von erheblichem Nutzen zeigen. —

Um schon jetzt einige der einfachsten, aber zugleich auch wichtigsten Fälle namhaft zu machen, in welchen die einzelnen Disjunctiv-Glieder in ein gewisses Verhältniss zu einander treten, wollen wir nachfolgende Betrachtungen anstellen:

1. Sind $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ und $y = \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}$ die Gleichungen zweier begrenzter Curvenstücke, so ist dem Gesagten zufolge $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}$ die Gleichung derselben, insofern sie gleichzeitig im Coordinaten-Raume gedacht werden. Es können hierbei nachfolgende

Fälle Statt finden. Setzt man beide Disjunctiv-Glieder als Progresse oder Regresse, d. h. gleichartig voraus, und sind unter den vier Grenzwerthen auch nicht zwei, welche gleich gross sind, so können diese Curventheile an ihren Anfangs- und Endpuncten durchaus nicht zusammenhängen. Sind überdiess beide Glieder Progresse und ist zugleich $\alpha' < \alpha''$, so können sie sich nicht einmal weder schneiden noch berühren, sondern haben eine Lage wie etwa *AB* und *CD* in Fig. 7. — Als besondere Beispiele wären die in Fig. 7 dargestellten geraden Linien, deren Gleichung: $y = \Big\{\frac{1}{3}x - 5\Big\}_{3}^{8} \omega \Big\{\frac{1}{2}x + 4\Big\}_{10}^{12}$ ist, aufzuführen.

2. Befinden sich unter den vier Grenzwerthen zwei gleich grosse, so ist dieses begreiflicherweise noch immer kein sicheres Kennzeichen, dass diese Curventheile in ihrem Anfangs- und Endpunkte zusammenstossen. Denn sie können noch immer eine Lage zu einander haben, wie etwa *AB* und *CD* in *Fig.* 9. — Ein specielles Beispiel bietet die Gleichung: $y = \Big\{-\frac{2}{3}x + 5\Big\}_{2}^{4} \omega \Big\{\frac{1}{5}x + 8\Big\}_{4}^{9}$, welche in Fig. 10 graphisch dargestellt ist. Es ist dieses natürlich jederzeit dann der Fall, weun die beiden Disjunctiv-Glieder für jene gleichen Grenzwerthe ungleiche Resultate geben. Diess ist in der That wegen $y = \Big\{\frac{7}{3}\Big\}_{2}^{4} \omega \Big\{\frac{44}{5}\Big\}_{4}^{9} = \Big\{\frac{7}{3}\Big\} \omega \Big\{\frac{44}{5}\Big\}$ in unserm Beispiele der Fall.

3. Sind unter diesen vier Werthen zwei gleich; ist nämlich z. B.: $\alpha' = \alpha''$ und ist noch überdiess $\varphi(\alpha') = \varphi'(\alpha')$, d. h. sind zugleich die den Grenzen $\alpha' = \alpha''$ entsprechenden β' und β'' einander gleich, so hängen genannte Linienstücke zusammen, und bilden eine gebrochene oder zusammenhängende Linie, wie z. B. in *Fig.* 11. In diesem Falle ist also die obere Grenze α' exclusive zu verstehen. Ein Beispiel einer solchen geradgebrochenen Linie wäre die in *Fig.* 12 dargestellte, deren Gleichung:

$$y = \Big\{\frac{1}{4}x - 5\Big\}_{7}^{12} \omega \Big\{-\frac{1}{2}x + 4\Big\}_{12}^{15}$$ ist. —

4. Wenn von den vier Grenzwerthen sich nicht zwei finden, welche einander gleich wären; so können gleichwohl diese Curvenstücke in einer Verbindung anderer Art stehen: nämlich sie können sich berühren oder sich schneiden. Ersterer Fall tritt ein, wenn der durch die Gleichstellung der beiden Disjunctivglieder gefundene Werth von x in ein oder die andere Gleichung gesetzt, genau einen der vier Grenzwerthe α, α', α'', α''' als Resultat der Substitution liefert. Der zweite Fall dagegen, wenn der für x gefundene Werth kleiner als jeder der beiden obern, und zugleich grösser als jeder der beiden untern Grenzwerthe ist, *Fig.* 13 und *Fig.* 14 liefern hiezu die graphischen Versinnlichungen. Wir werden später ganz allgemeine, auch auf Flächen anwendbare Regeln kennen lernen. —

Die in diesen drei letzten Paragraphen besprochenen allgemeinen Begriffe bilden nun, wie gesagt, die Hauptideen oder Ausgangspunkte eines Algorithmus, mit welchem wir nichts weniger beabsichtigen, als eine gänzliche Behebung der in dem Paragraphe 5. bezeichneten und dargelegten Mängel und Unvollkommenheiten in der Behandlungsweise der analytischen Geometrie. Sie reichen hin, diese wenigen Bemerkungen, um sofort wieder zur Bestimmung aller möglichen Functionsformen, die den geometrischen Objecten im Raume wie in der Ebene entsprechen sollen, zurückkehren zu können. Denn sie sind es ja, die den eigentlichen Stoff unserer folgenden Betrachtungen ausmachen werden. — Ist dieses erst geschehen, so werden wir nicht säumen, das Verhältniss dieser Grundbegriffe zu den verschiedenen anderen Rechnungsarten genauer zu bezeichnen, und überhaupt alle diejenigen aus der Natur der Sache fliessenden Operations- und Reductions-Regeln aufzustellen uns bemühen, welche nach Massgabe unseres gegenwärtigen Zweckes uns nothwendig und räthlich geschienen haben. —

§. 10.

Als der eigentliche Schauplatz aller geometrisch-analytischen Vorgänge (mit diesen Worten beginnt der Paragraph 6., zu dem wir nunmehr wieder zurückkehren), und zugleich als der Ort für die geometrischen Anschauungen und Versinnlichungen muss, wie bereits erwähnt wurde, derjenige Raum bezeichnet werden, welcher sich zwischen den vier Quadranten zweier in einer Ebene sich senkrecht durchschneidenden geraden Linien, oder falls die Untersuchungen im Körperraume geführt würden, zwischen den acht Octanten dreier in einem Puncte sich senkrecht durchschneidenden Ebenen ins Unendliche ausbreitet. Da es in dem Geiste einer rein analytischen Behandlungsweise liegt, bei Untersuchungen von den möglich allgemeinsten Voraussetzungen auszugehen, und erst hinterher auch die möglicherweise dabei stattfindenden speciellen Fälle in Betracht zu ziehen; so wollen auch wir, uns an diesem Grundsatze haltend, uns alsogleich den Raumesgrössen dreier Dimensionen zuwenden, und erst später auf Gegenstände, die in einer Ebene liegen, übergehen. Auch werden wir bei diesen nun folgenden Betrachtungen zur besseren Fixirung unserer Gedanken stets rechtwinklige Coordinaten, deren Anfangspunkt im Scheitel oder Durchschnittspunkte der drei sich durchschneidenden Ebenen liegend angenommen wird, voraussetzen, obwohl alles hier Vorgebrachte Wort für Wort auch von den schiefwinkligen, und mit geringen Aenderungen auch von anderen Coordinaten-Systemen gelten würde. —

Als das unbezweifelt allgemeinste, vollkommen begrenzte und bestimmte geometrische Object im Raume muss der Inbegriff aller jener Puncte bezeichnet werden, aus welchen man sich erlaubterweise die verschiedenen geometrischen Körper zusammengesetzt vorzustellen pflegt, und welchem Inbegriff von Puncten wir schon in unserer früheren Abhandlung den Namen Körperraum gegeben haben. Er unterscheidet sich von dem körperlichen Inhalte dadurch, dass ersterer zwar auch den Inbegriff sämmtlicher Puncte, jedoch mit genauer Rücksicht auf die Art der Begrenzung; letzterer dagegen denselben Inbegriff, jedoch ohne Rücksicht auf die Form oder Art der Begrenzung, dagegen aber mit Rücksichtsnahme auf eine zum Grunde gelegte Masseinheit darstellt. Auch von der den Körperraum begrenzenden Oberfläche unterscheidet sich der Körperraum sehr wesentlich, indem erstere nur einen geringen Theil derjenigen Puncte in sich begreift, welche der Körperraum sein eigen nennen kann. Verbindet man z. B. den Körperraum einer Kugel mit einer Ebene, so liefern die den beiden Objecten gemeinschaftlichen Puncte den Flächenraum eines Kreises, und verbindet man zwei beliebige ebene Flächenräume miteinander, so geben sie eine begrenzte gerade Linie. Kurz, der Körperraum enthält alle übrigen begrenzten geometrischen Objecte bis zur Linie und dem Puncte in der Ebene herab, als specielle Fälle in sich, wie die Folge zeigen wird. Die Ableitung des, diesem wichtigen geometrischen Objecte entsprechenden analytischen Repräsentanten, respective dessen Gleichung, welches nun sogleich geschehen soll, dürfte daher nicht mit Unrecht auf einige Beachtung von Seite des Lesers Anspruch zu machen haben. —

1. Bezeichnet z den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Ordinaten, so ist offenbar $z = (-\infty) \left\{ \frac{0}{0} \right\} (+\infty) = \frac{0}{0}$ die wahre Gleichung des ganzen unendlichen Raumes nach allen Richtungen der acht Octanten. Denn der genannte Ausdruck sagt seiner Natur nach aus, dass die Ordinate z, sie mag auf welchem Puncte immer errichtet sein, d. h. völlig unabhängig von einem bestimmten Werthe von x und y, und also für jeden Werth von x und y, von $-\infty$ bis zu $+\infty$ reichen, und somit sämmtliche Puncte, die im unendlichen Raume gedacht werden können, repräsentiren solle. — Was anders daher ist wohl dieser Ausdruck, wenn nicht die Gleichung des unendlichen Raumes selbst? — Setzt man ferners, um unserm Gegenstande näher zu rücken, statt jener unendlichen Grenzen von z zwei endliche γ und γ', so erhält man sofort die Gleichung $Z = \left\{ \frac{0}{0} \right\}_{\gamma}^{\gamma'}$, und diese entspricht offenbar demjenigen unendlichen Raume, welcher zwischen zweien zur Coordinaten-Ebene xy parallel laufenden Ebenen liegt, von denen die eine, einen senkrechten Abstand γ, die andere γ' hat, und die also von einander nun $(\gamma' - \gamma)$ abstehen. — Wäre nun die obere begrenzende Fläche mit der unteren nicht parallel, oder wäre eine von ihnen oder gar beide krumme Flächen, so begreift man leicht, dass die Grenzen γ, γ' von z, und somit auch ihr Intervall, d. h. ihre Differenz, unstreitig von dem Puncte, auf welchem man sich eben die Ordinate z errichtet denkt, abhängen muss. Allein sämmtliche Puncte der Ebene xy werden durch die beiden Coordinaten x und y selbst bestimmt; woraus sofort folgt, dass γ und γ' in diesem Falle als gewisse Functionen von x und y auftreten werden. Es ist daher offenbar: $Z = F(x, y) \left\{ \frac{0}{0} \right\} F'(x, y)$ *) die Gleichung jenes Theiles des unendlichen Körperraumes, welcher zwischen zwei im Allgemeinen krummen Flächen, welche durch $F(x, y)$ und $F'(x, y)$ repräsentirt werden, eingeschlossen ist. Dabei kann es nun geschehen, dass, wie im Falle *Fig.* 15, sich beide Flächen nach einer oder beiden Richtungen mehrmals durchschneiden, und so einen mehr oder weniger grossen, immer aber noch unend-

*) Dass der allgemeine Repräsentant einer Fläche durch $F(x, y)$ ausgedrückt werden könne, darf wohl bei einem jeden Vortrage über analytische Geometrie als ein aus der allgemeinen Functionenlehre fliessender Begriff vorausgesetzt werden.

lichen Raum einschliessen; — oder aber, wie durch *Fig.* 16 veranschaulicht wird, eine solche Beschaffenheit zeigen, dass die beiden begrenzenden Flächen nach allen Richtungen unmerklich und nach dem Gesetze der Continuität in einander übergehen, wie dieses bei Sphären, Ellipsoiden und unzähligen anderen geometrischen Gegenständen der Fall ist. — Bis hieher wurden die beiden Begrenzungsflächen als völlig unbegrenzt, oder als in einander übergehend, und somit vielmehr als eine einzige in sich zurückkehrende Oberfläche betrachtet. — Es kann aber auch geschehen, dass diese Körperräume eine absichtliche Begrenzung erhalten sollen, entweder dadurch, dass man sie von zwei oder mehreren krummen Flächen oder Ebenen einschliessen lässt, wie in *Fig.* 17, oder auch, dass man von den bisher betrachteten Körperräumen nur denjenigen Theil beizubehalten verlangt, welcher, wie in *Fig.* 18, durch die in der Ebene xy gegebene Projection angezeigt wird. Kurz, entweder überlässt man die gänzliche Begrenzung der Natur und besondern Beschaffenheit der beiden Functionen, oder aber man setzt diese Begrenzung Behufs gewisser Zwecke selbstthätig fest. Da der letztere Fall, mathematisch gesprochen, der allgemeinere ist, indem er den einen in sich schliesst, so wollen wir auch diesem unsere sofortige Aufmerksamkeit zuwenden.

Um die Art, wie die willkührliche Begrenzung zu geschehen hat, recht augenscheinlich zu zeigen, wollen wir unsern Blick auf *Fig.* 17 wenden. Hier sieht man nun, dass sowohl y als x, falls sie sich nur bloss auf den genannten Körper beziehen sollen, nothwendig begrenzt sein müssen. Denn nicht jedes Perpendikel *(z)* trifft auf Puncte des Körpers FGH, *Fig.* 17, sondern nur ein solches, welches innerhalb der Projection $G'H'F'$ desselben errichtet wird. Offenbar hängt aber die Begrenzung von y vorerst von x ab, weil für jeden besonderen Werth von x, z. B. für $x = a'$, auch die Grenzen PN und PN' des zugehörigen y, und folglich auch ihre Intervalle NN' selbst andere sind. Wir müssen daher offenbar y durch Functionen von x begrenzen, u. s. f., da jedem Werthe von x ein ganzes Intervall von Werthen des y entsprechen soll, statt y, $\varphi(x) \left\{ y \right\} \varphi'(x)$, schreiben.

Endlich aber ist auch die absolut, d. h. von keiner anderen Variablen mehr abhängige veränderliche Grösse x keineswegs eines jeden Werthes ohne Unterschied fähig, sondern vielmehr im Allgemeinen als zwischen sehr bestimmten, jedoch constanten Grenzen eingeschlossen zu betrachten. Sind diese Grenzen α und α', so erhält man als allgemeinste, d. h. alle übrigen in sich schliessende Gleichung eines Körperraumes:

$$(1.) \qquad Z = \underset{\alpha}{\Big\{} F\Big(x, \varphi(x) \left\{ y \right\} \varphi'(x)\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}} \left\{ \frac{o}{o} \right\} \underset{\alpha}{\Big\{} F'\Big(x, \varphi(x) \left\{ y \right\} \varphi'(x)\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}}.$$

Diese Gleichung ist zugleich auch vom rein analytischen Standpuncte aus betrachtet, die allgemeinste Relation, die nur überhaupt zwischen drei Variablen statt finden kann, von denen eine wenigstens immer als die absolut Veränderliche angesehen werden muss. Auch würde der Leser vermuthlich auch ohne unsere ausdrückliche Erwähnung einsehen, dass sowohl $F(x, y)$ als auch $F'(x, y)$ aus beliebig vielen Disjunctivgliedern bestehen kann, und oft auch wirklich besteht, wie unter andern z. B. bei den Gleichungen der Polyeder im Raume u. s. w.

Dass eine Gleichung von so grosser Allgemeinheit, ja Universalität nicht über Erwarten einfach ausfallen konnte, bedarf wohl kaum eines erläuternden Wortes. Doch darf auch hier nicht übersehen werden, dass in allen jenen Fällen, wo die Functionen $F(x, y)$ und $F'(x, y)$ durch ihre innere Natur und Beschaffenheit die Begrenzung auf sich nehmen, d. i. bei allen continuirlichen Oberflächen, sowohl die Grenzen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ von y, als auch jene α und α' von x, bei den meisten Untersuchungen weggelassen, und die dadurch vereinfachte Gleichung $Z = F(x, y) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ \frac{0}{0} \right\}}} F'(x . y)$ geschrieben werden kann. — Wir wollen nun von dieser Hauptgleichung auf die aus ihr folgenden speciellen übergehen.

2. Stellt man sich vor, dass der untere und obere Theil der Begrenzung immer mehr an einander rücken, wodurch natürlich der ganze Raumes-Inhalt gleichfalls fortwährend abnimmt, bis endlich die untere Begrenzung mit der oberen zusammenfällt: so sieht man ganz augenscheinlich, dass unter dieser Voraussetzung der Körperraum in eine krumme Fläche übergeht, da ja hinfüro nur diejenigen Puncte gelten sollen, welche der unteren mit der oberen Grenzfläche gemeinschaftlich angehören. In Beziehung auf die hier stattfindende Gleichung entspricht dieses einem fortwährenden Annähern und endlichen Gleichwerden der beiden Grenzfunctionen $F(x, y)$ und $F'(x . y)$ und da offenbar $Z = \overset{\gamma}{\underset{\gamma}{\left\{ \frac{0}{0} \right\}}}$ der Bedeutung nach genau mit $Z = \gamma$ übereinstimmt, so hat man wegen $F(x . y) = F'(x, y)$ offenbar

$$(2). \quad Z = \overset{\alpha'}{\underset{\alpha}{\Big\{}} F\Big((x, \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\{ y \}}} \varphi'(x)\Big)\Big\}$$

als die allgemeinste Gleichung einer beliebig begrenzten Fläche. Hiebei ist zu bemerken, dass Körperräume, deren obere und untere Begrenzung durch eine Function mit nur einem einzigen Disjunctivgliede dargestellt werden, bei ihrem Übergange in Flächen stets nur solche darbieten, die nicht in sich selbst zurückkehren. Körperräume dagegen, welche, wie z. B. ein hohles Ellipsoid zu ihrer analytischen Darstellung Grenzfunctionen mit wenigstens zwei Disjunctivgliedern erfordern, gehen sofort bei ihrem Übergange in Flächen in eigentliche Oberflächen über. Im Folgenden wird es nicht an Beispielen zur Erläuterung des Gesagten fehlen. — Hieher gehören nun auch die Gleichungen der sehr häufig vorkommenden, willkührlich begrenzten ebenen Flächenräume im Körperraume, z. B. jene der Polygone u. s. w.; ebenso auch die Gleichungen der verschiedenen Polyeder u. s. w.; wovon später ein Mehreres, besonders im dritten Abschnitte noch vorkommen wird.

3. Die mittelst der vorhergehenden Betrachtung gefundene Gleichung (2) lässt noch eine zweifache Specialisirung zu, die wir noch in diesem und dem folgenden Absatze besprechen werden. Wenn in der Gleichung (2) die beiden Grenzwerthe von y, nämlich

$\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ sich nur um eine constante Differenz unterscheiden, in der Weise, dass z. B. $\varphi'(x)-\varphi(x)=m$, also $\varphi'(x)=\varphi(x)+m$ und somit $Z=\Big\{F\Big(x,\varphi(x)\Big\{y\Big\}_{\cdot}^{\cdot}\Big(\varphi(x)+m\Big)\Big)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$; so entspricht diese Gleichung offenbar einem Objecte im Raume, welches man einen Flächenstreifen nennen könnte, dessen Fig. 19 horizontale Projection nach der Richtung der y durchaus die Breite m besitzt. Denkt man sich nun, dass dieser Streifen immer schmäler wird, welches einem Kleinerwerden von m entspricht und dass endlich $m=0$, d. h. $\varphi(x)=\varphi'(x)$ wird, so erhält man als Object eine beliebig begrenzte Curve im Raume, und als Gleichung für dieselbe nach der eingeführten Abkürzung: $Z=\Big\{F\Big(x,\varphi(x)\Big\{y\Big\}_{\cdot}^{\cdot}\Big)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$. Da in diesem Falle aber wegen $y=\varphi(x)$ aus $F(x.y)$, x selbst aus letzterer Gleichung hinweg geschafft oder eliminirt werden kann, so hat man sofort auch noch:

$$(3.)\quad Z=\Big\{F\Big(x,\varphi(x)\Big\{y\Big\}_{\cdot}^{\cdot}\Big)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}=\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}\Big\{\Phi(y)\Big\}_{\cdot}^{\cdot}$$

als allgemeinste Gleichung einer beliebig begrenzten Curve im Raume.

4. Endlich lässt sich die Beschränkung der Werthe von z noch um einen Schritt weiter, d. h. so weit treiben, dass demselben nur noch mehr ein einziger Werth zuerkannt wird. Es geschieht dieses durch das Gleichsetzen der beiden constanten Grenzwerthe von x, nämlich von α und α'. Und diess ist auch das Einzige, was an obiger Gleichung noch einer willkührlichen Beschränkung fähig ist. Allein dieses heisst in Bezug auf das räumliche Object offenbar nichts anderes, als von den unendlichen vielen Puncten einer Curve alle bis auf einen einzigen ausschliessen. Man erhält daher auf diesem Wege unstreitig die allgemeinste Gleichung eines Punctes im Raume, nämlich:

$$(4.)\quad Z=\Big\{F\Big(x,\varphi(x)\Big\{y\Big\}_{\cdot}^{\cdot}\Big)\Big\}_{\alpha}^{\alpha}=\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha}\Big\{\Phi(y)\Big\}_{\cdot}^{\cdot}.$$

Durch die bisher gefundenen vier Gleichungen sind nun auch zugleich alle möglichen, im Raume darstellbaren geometrischen Objecte repräsentirt, und alle Functionen dreier Variablen müssen, sollen ihnen geometrische Objecte entsprechen, mit einer dieser Functionen ihrer Form nach zusammenfallen. Die Gleichungen verrathen also auch bei dieser Darstellungsweise, welcher Classe von Raumobjecten sie zugehören.—

§. 11.

Die in dem vorigen Paragraphe abgeleiteten vier Gleichungen sind noch einer anderen Vereinfachung oder Specialisirung fähig, als durch eine weiter getriebene Beschränkung ihrer Werthe möglich ist. Wir meinen nämlich diejenige Vereinfachung, die sie unter der Voraussetzung erfahren, dass dieselben bloss auf Gegenstände, die in einer Ebene liegen, angewendet werden sollen. Betrachtet man daher die oben gefundenen, auf Objecte dreier Dimensionen bezüglichen vier Hauptgleichungen unter der Voraussetzung, dass in ihnen eine der drei Coordinaten, z. B. y, und zwar nicht bloss für vereinzelte Puncte, sondern für alle Werthe von x und z, mithin völlig unbedingt Null sey; so liefern jene vier Gleichungen, da die beiden letzteren von ihnen bei dieser Specialisirung augenscheinlich in eine einzige zusammenfallen, drei neue zwischen x und z, welche sofort als die eigentlichen Gleichungen sämmtlicher geometrischer in einer Ebene darstellbarer Objecte angesehen werden müssen. Setzen wir also in obige vier Formeln $y = 0$, und vertauschen wir hinterher z mit y, um dem herrschenden Gebrauche gemäss Gleichungen zwischen x und z zu erhalten; so bekömmt man, da zufolge der Bedeutung $\varphi(x) \left\{ 0 \right\}_{\cdot}^{\cdot} \varphi'(x) = 0$ ist, nach Vertauschung von z mit y aus Gleichung (1)

$$(5.) \qquad y = \left\{ F(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'} \left\{ {0 \atop 0} \right\}_{\cdot}^{\cdot} \left\{ F'(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$$

als Gleichung für beliebig begrenzte Flächenräume in die Ebene. Dieses lässt sich sehr leicht begreifen, wenn man bedenkt, dass die Wirkung des Nullsetzens von y darin besteht, alle jene Puncte zu erfahren, die irgend ein Körperraum mit der Ebene der $x\,z$ gemein hat. Diese bilden aber zusammen jedenfalls einen begrenzten Flächenraum, wesshalb wir auch diese Gleichung jene eines beliebig begrenzten Flächenraums nennen zu müssen glaubten, und nur darauf aufmerksam machen wollen, dass man sich unter derselben weder die Formel für die Berechnung des Flächeninhaltes einer Figur, noch auch die Gleichung ihrer Begrenzung zu denken hat. Sie ist vielmehr der allgemeine Repräsentant aller jener Puncte mit Rücksicht auf ihre Begrenzung, aus welchen man sich jene Fläche selbst zusammengesetzt vorzustellen pflegt. Setzt man ferners in der Gleichung (2) $y = 0$; und vertauschet man z mit y, so erhält man aus jener Gleichung für die Flächen im Raume, sofort die Gleichung für Curven in der Ebene, nämlich, da auch hier wieder $\varphi(x) \left\{ 0 \right\} \varphi'(x) = 0$ sofort:

$$(6.) \qquad y = \left\{ F(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$$

als allgemeine Gleichung einer beliebig begrenzten Curve in der Ebene. Setzt man endlich in Gleichung (4) $y = 0$, und vertauscht man hierauf wieder z mit y, so erhält man aus jener Gleichung des Punctes im Raume, die entsprechende für den Punct in der Ebene, nämlich:

$$(7.) \qquad y = \left\{ F(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha},$$

welche Gleichung auch unmittelbar aus (7) durch das Gleichsetzen von den Grenzen α und α' erhalten wird. — Man könnte auch die Gleichung (3) dazu benutzen, auf unsere Gleichung (7) überzugehen, und würde zu demselben Resultate gelangen. Nur insoferne würde sich die so erhaltene Function von der Gleichung (7) unterscheiden, als sie den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Durchgangspuncte und somit im Allgemeinen mehrerer Puncte zugleich vorstellen würde. — Diese drei Gleichungen (5), (6), (7) entsprechen nun sämmtlichen Objecten, die in einer Ebene möglicherweise vorkommen können. —

§. 12.

Nachdem wir nun in den unmittelbar vorhergehenden zwei Paragraphen die Aufgabe gelöst zu haben meinen, die allein möglichen, wesentlich verschiedenen geometrischen Objecte und ihre Gleichungen in ihrer genau vorgezeichneten Ableitbarkeit nachzuweisen, erlauben wir uns, das Ergebniss dieser Untersuchung in einer übersichtlichen Zusammenstellung aufzuführen, und an dieselbe einige sich von selbst darbietende Bemerkungen anzuknüpfen. Die gefundenen Gleichungen sind in ihrer natürlichen Ordnung die folgenden:

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & Z = \underset{\alpha}{\Big\{} F\Big(x, \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{(y)}} \varphi'(x)\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\Big\{\tfrac{0}{0}\Big\}}} \underset{\alpha}{\Big\{} F'\Big(x, \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{(y)}} \varphi'(x)\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}} \\[2ex]
2. & Z = \underset{\alpha}{\Big\{} F\Big(x, \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{(y)}} \varphi'(x)\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}} \\[2ex]
3. & Z = \underset{\alpha}{\Big\{} F\Big(x, \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{(y)}}\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}} = \underset{\alpha}{\Big\{} \varphi(x) \overset{\alpha'}{\Big\}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\Big\{\Phi(y)\Big\}}} \\[2ex]
4. & Z = \underset{\alpha}{\Big\{} F\Big(x, \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{(y)}}\Big) \overset{\alpha'}{\Big\}} = \underset{\alpha}{\Big\{} \varphi(x) \overset{\alpha'}{\Big\}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\Big\{\Phi(y)\Big\}}}
\end{array}\right\} \text{für den Raum.}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
5. & y = \underset{\alpha}{\Big\{} F(x) \overset{\alpha'}{\Big\}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\Big\{\tfrac{0}{0}\Big\}}} \underset{\alpha}{\Big\{} F(x) \overset{\alpha'}{\Big\}} \\[2ex]
6. & y = \underset{\alpha}{\Big\{} F(x) \overset{\alpha'}{\Big\}} \\[2ex]
7. & y = \underset{\alpha}{\Big\{} F(x) \overset{\alpha}{\Big\}}
\end{array}\right\} \text{für die Ebene.}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist: 1) die Gleichung für einen willkührlich begrenzten Körperraum, 2) jene für eine willkührlich begrenzte Fläche im Raume, 3) für eine begrenzte Curve von einfacher oder doppelter Krümmung, und 4) endlich jene für einen bestimmten Punct im Raume. In Bezug auf die Ebene stellt 5) die Gleichung eines willkührlich begrenzten Flächenraumes; 6) die einer beliebig begrenzten ebenen Curve oder Geraden: und 7) endlich die Gleichung eines beliebigen Punctes in der Ebene vor. —

Es kann wohl kaum übersehen werden, dass diese hier aufgezählten Gleichungen sowohl ihrer Zahl, als auch insbesondere ihrer Form und ihrem Inhalte nach, sich von den bisher gebräuchlichen der analytischen Geometrie sehr wesentlich und auffallend unterscheiden. — Was ihre Zahl anbelangt, so hat sich dieselbe gegen die bisher gebräuchliche Anzahl um zwei vermehrt, nämlich um die Gleichungen 1 und 5, wovon also die eine an der Spitze jener für den Raum, die andere dagegen zuvörderst der Gleichungen für die Ebene steht. Die Anzahl von vier Gleichungen für den Raum und von drei für die Ebene ist keineswegs eine willkührliche, sondern eine nothwendige. Um dieses besser einzusehen, müssen wir den Leser auf die doppelte Art der Begrenzung aufmerksam machen. Denn entweder entspricht jedem Werth von y nur ein einzelner Werth von x (zuweilen auch eine bestimmte endliche Anzahl), oder es entspricht jedem Werthe von y ein ganzes Intervall, d. h. unendlich viele Werthe von x. Ersteres findet statt, wenn die obere und untere Grenze einander gleich sind, letzteres, wenn sie verschieden sind. Das Gleiche gilt auch von x in Bezug auf die constante Begrenzung durch α und α', und in Ansehung z oder was hier dasselbe ist, auf $\left\{\frac{n}{0}\right\}$ durch $F(x,y)$ und $F'(x,y)$ *). —

Nun finden bei einer Function dreier Variablen x, y, z nur nachfolgende Fälle statt. Entweder sind z, y und x in zweiter Art begrenzt, oder nur y und x, oder ferners nur x; oder endlich keine derselben, während die übrigen in ersterer Weise in ihren Werthen beschränkt sind. Diese Betrachtung liefert sofort die vier ersten Gleichungen. — Zwischen zweien Variablen einer Gleichung sind ferners folgende drei Fälle möglich: entweder sind x und y (oder x und $\left\{\frac{n}{0}\right\}$) zugleich in zweiter Weise begrenzt, oder es ist es nur x allein, oder endlich keine von beiden, wobei jedoch wenigstens im Allgemeinen die eine stets in erstgenannter Weise begrenzt erscheint. Also wieder drei und somit im Ganzen sieben Gleichungen. — Es sind daher durch unsere Betrachtung der analytischen Geometrie zwei neue geometrische Objecte und eben so viele Gleichungen zugewachsen, nämlich jene für einen beliebigen begrenzten Körperraum und für einen eben solchen Flächenraum. Wir hoffen mit aller Zuversicht, dass niemand die Wichtigkeit dieser neuen geometrischen Objecte sowohl für das System der Wissenschaft, als auch für die analytische Behandlung der verschiedenen Probleme der Constructions-, Perspective- und Schattenlehre, insbesondere aber des sogenannten Steinschnittes in Abrede stellen oder auch nur verkennen

*) Diese doppelte Art, Variable zu begrenzen, macht sich insbesonders auch in der Integralrechnung durch ein ganz abweichendes, nothwendig werdendes Verfahren geltend. Man hat schon öfters gefragt, warum man bei der Complanation, Cubirung etc. sich nicht des für die Integration nach zwei oder mehreren Variablen (der doppelten und mehrfachen Integralen) vorgeschriebenen gewöhnlichen Verfahrens bedienen dürfe, sondern einen abweichenden Weg betreten müsse? — Schon *Euler* hat zwar diese Frage in »*Novi Commentari Acad. Scientiar. Petropolitanae, Tom. XIV. Pars I. pag.* 72 — 103, dahin beantwortet, dass dieses hier nothwendig sich zeigende Ausdehnen des Integrals von einem zum andern veränderlichen Werthe aus der Natur der Sache folge. — Gleichwohl scheint mir die nachfolgende Hindeutung keinen unwichtigen Zusatz zu dieser Erklärung zu bilden: Functionen mit einer Begrenzung der ersten Art folgen, falls sie einer Integration zum Grunde gelegt werden, den gewöhnlichen Regeln, solche mit Begrenzungen der zweiten Art dagegen, jenen der eben erwähnten Ausnahmsvorschriften. —

wird, und wir leugnen nicht, dass wir es uns in der That zu einigem Verdienste anrechnen, auf diese Objecte aufmerksam gemacht zu haben. — Was ferners den Inhalt der sämmtlichen sieben Gleichungen anbelangt, so ist es augenscheinlich, dass ihnen eine viel grössere Allgemeinheit und eine ungleich weitere Bedeutung zukömmt, als jenen mit ihnen gleichen Namen führenden der bisherigen Geometrie, die insgesammt in ihnen nur als specielle Fälle enthalten erscheinen. — Alle nämlich tragen an sich, als ein wesentliches Element ihrer Complexion, den Charakter einer durchaus willkührlichen Begrenzung, und unterscheiden sich hierdurch höchst auffallend und vortheilhaft von den bisherigen Gleichungen, bei denen man es lediglich in jedem speciellen Falle der besondern Beschaffenheit der Function überlassen musste, wo sie beginne und aufhöre, und in welcher Weise sie sich von ihrer Umgebung abgrenze. Dass Gleichungen ersterer Art einen entschiedenen Vorzug vor den bisherigen besitzen, ist, ich hoffe es mit Zuversicht, nicht eine blosse Meinung von mir, und wird namentlich im dritten Abschnitte praktisch gerechtfertigt erscheinen. Dazu kömmt noch, dass man mit Hilfe des Disjunctiv-Zeichens nunmehr im Stande ist, wie immer zusammengesetzte Linien, Flächen und Körper durch Gleichungen analytisch darzustellen. — Man war bisher gewohnt, die Fläche durch eine, die Linie im Raume durch zwei und den Punct durch ein System dreier zusammengehörigen Gleichungen dargestellt zu sehen. Es kann daher nichts anders als auffallen, eben dieselben Objecte und noch um eines mehr, ihrer äusseren Form nach übereinstimmend jedes durch nur eine einzige Gleichung zwischen den drei Coordinaten x, y, z dargestellt zu finden. Von unserem Standpunkte aus betrachtet, erscheint uns die bisher übliche analytische Darstellungsweise dieser Gegenstände als eine noch *unfertige* und eben desshalb auch mangelhafte und unvollkommene, und es lässt sich gewiss nicht verkennen, dass unsere Darstellungsweise es nicht nur möglich macht, geometrische Gegenstände der verschiedensten Art als System durch eine einzige Gleichung darzustellen, sondern sie auch gemeinschaftlich denselben Regeln der Analysis auf eine gleichförmige Weise zu unterziehen. Nicht in ihrer äusseren Form können sich füglich die Gleichungen der verschiedenartigen geometrischen Objecte von einander unterscheiden, denn sie alle sind ja Functionen dreier Coordinaten, sondern vielmehr in denjenigen Beschränkungen ihrer Werthe, die in ihrem Innern selbst sich ausgesprochen finden. — Zwar werden auch wir, überall dort, wo es durch die Umstände geboten erscheint, diese unsere Functionsausdrücke in ihre in ihnen selbst liegenden Bedingungs-Gleichungen aufzulösen, nicht unterlassen, und demnach könnte es scheinen, als ob durch diese unsere Zurückführung auf immer nur eine Gleichung, wenigstens abgesehen von den Vortheilen der willkührlichen Begrenzung eben nicht viel gewonnen wäre. Allein einstheils sind diese Auflösungen in die Bedingungsgleichungen nur vorübergehende, durch einen vorliegenden Zweck gebotene und verhältnissmässig selten vorkommende Operationen, anderntheils ist es nur allein auf diese Weise möglich, der oben namhaft gemachten Vortheile theilhaft zu werden. — Übrigens bewähren sich, wie die Folge zeigen wird, alle unsere Functionsausdrücke in jeder Beziehung als wahre Gleichungen der durch sie vorgestellten Objecte, indem sie den verschiedenartigen geometrisch-analytischen Untersuchungen, z. B. der Rectification, Quadratur und Cubatur zum Grunde gelegt stets zu richtigen Resultaten führen, wie wir dieses zwar schon in unserer früheren Abhandlung gezeigt zu haben glauben, noch mehr aber durch gegenwärtige Arbeiten darzuthun hoffen. — Jetzt aber wollen wir das in den letzten Paragraphen Vorgebrachte durch Anführung einiger speziellen Beispiele zu erläutern suchen. —

§. 13.

Der gegenwärtige Paragraph ist, wie so eben erwähnt wurde, der Angabe einiger numerischer Beispiele als Belege für unsere Behauptungen gewidmet, und wir glauben unsere verehrten Leser darauf aufmerksam machen zu sollen, dass dieser ganze Paragraph ohne Beeinträchtigung des wissenschaftlichen Zusammenhangs einstweilens übergangen, und einer spätern Nachlese vorbehalten bleiben kann. —

Wir wollen hier in der verkehrten Ordnung vorgehen, nach welcher die allgemeinen Formeln abgeleitet wurden, und daher wie folgt beginnen:

A. Für Gegenstände in der Ebene, und zwar:

a) Beispiele über Flächenräume in der Ebene.

1. Man stelle die Gleichung auf für den in *Fig.* 26 dargestellten trapezartigen Flächenraum: Es ist diese:

(1) $y = {}_{5}\left\{9 - x\right\}^{12} {}_{\bullet}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} {}_{5}\left\{3x + 4\right\}^{12}$; für $x = 6$ z. B. findet man $y = 3 \; {}_{\bullet}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} \; 22$,

d. h. für $x = 6$ erhält man für y alle jene Werthe, welche zwischen den Zahlen 3 und 22 liegen.

2. Es soll die Gleichung des in *Fig.* 26 dargestellten, nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden Flächenstreifen $ABCD$ aufgestellt werden: es ist diese augenscheinlich, im Allgemein (2) in Bezug auf *Fig.* 26 (3), d. h.

(2) $y = {}_{\alpha}\left\{-\infty . x^0\right\}^{\alpha'} {}_{\bullet}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} {}_{\alpha}\left\{+\infty\, x^0\right\}^{\alpha'}$; und (3) $y = {}_{7}\left\{-\infty\, x^0\right\}^{15} {}_{\bullet}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} {}_{7}\left\{+\infty\, x^0\right\}^{15}$.

3. Es ist jene des in Fig. 27 dargestellten Objectes anzugeben:

$$(4) \qquad y = {}_{0}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} {}_{7}\left\{+\infty\, x^0\right\}^{15}.$$

4. Die Gleichung des in Fig. 28 vorgestellten unendlichen Flächenstreifens allgemein (5) sowohl wie speciell (6) ist sofort, wenn man sich erinnert, dass die Begrenzung von $-\infty$ bis $+\infty$ gar nicht angezeigt zu werden braucht.

(5) $y = (Ux + V) {}_{\bullet}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} (Ux + V')$ und (6) $y = \left(\frac{x}{2} - 8\right) {}_{\bullet}\left\{\tfrac{0}{0}\right\}^{\bullet} \left(\frac{x}{2} - 12\right)$.

5. Die Gleichung des in Fig. 29 dargestellten, damit verwandten Objectes, ist speciell:

(7) $y=\underset{24}{\overset{+\infty}{\left\{\frac{x}{2}-12\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{16}{\overset{+\infty}{\left\{\frac{x}{2}-8\right\}}}$; oder strenge und unreduirt eigentlich

$$(8)\qquad y=\left(\underset{16}{\overset{24}{\left\{0\right\}}}\;\omega\;\underset{24}{\overset{\infty}{\left\{\frac{x}{2}-12\right\}}}\right)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{16}{\overset{+\infty}{\left(\frac{x}{2}-8\right)}}.$$

6. Man soll die Gleichung des in Fig. 30 dargestellten, die frühern in sich schliessenden Flächenraumes unter der doppelten Voraussetzung aufstellen, erstlich dass die beiden Winkelflächen und sodann, dass nur eine, z. B. die untere, repräsentirt werden sollen. Man erhält in angezeigter Ordnung 9 und 10, d. i.

$$(9)\quad y=(x+5)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}(2x-5)\quad\text{und}\quad(10)\; y=\underset{-\infty}{\overset{10}{\left\{x+5\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{-\infty}{\overset{10}{\left\{2x-5\right\}}}.$$

7. Es soll die Gleichung des Flächenraums eines Rechteckes $ABCD$ Fig. 31 aufgestellt werden, dessen Basis von α bis α' und dessen Höhe von β bis β' reicht, sowohl allgemein (11) als auch in Bezug auf Fig. 31 speciell (12). Man wird haben

$$(11)\quad y=\underset{\alpha}{\overset{\alpha'}{\left\{\beta x^0\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{\alpha}{\overset{\alpha'}{\left\{\beta' x^0\right\}}};\ \text{und speciell}\quad(12)\; y=\underset{5}{\overset{8}{\left\{7x^0\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{5}{\overset{8}{\left\{20x^0\right\}}}.$$

8. Wollte man dagegen denjenigen Theil des unendlichen Raumes analytisch darstellen, welcher durch Fig. 32 dargestellt ist, so hätte man allgemein (13) und speciell (14):

$$(13)\quad y=\underset{\alpha}{\overset{\alpha'}{\left\{\beta x^0\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{\alpha}{\overset{\alpha'}{\left\{\infty x^0\right\}}}\quad\text{und}\quad(14)\; y=\underset{5}{\overset{8}{\left\{7x^0\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\underset{5}{\overset{8}{\left\{\infty x^0\right\}}}$$

9. Die Gleichung für den Flächenraum eines Kreises, wie ihn Fig. 33 darstellt, ist:

$$(15)\qquad y=\left(7-\sqrt{10x-9-x^2}\right)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\left(7+\sqrt{10x-9-x^2}\right).$$

Die Begrenzung von x, welche 1 und 9 wäre, ist hier überflüssig, da diese die Function selbst auf sich nimmt.

10. Die Gleichung der Dreiecksfläche ABC Fig. 34 ist sofort:

$$(16)\qquad y=\underset{2}{\overset{\frac{16}{3}}{\left\{\tfrac{1}{2}x+2\right\}}}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}\left(\underset{\frac{16}{3}}{\overset{4}{\left\{2x-6\right\}}}\;\omega\;\underset{\bullet}{\overset{2}{\left\{-\tfrac{1}{2}x+4\right\}}}\right).$$

11. Man soll die Gleichung sämmtlicher unendlich vieler Quadrate von einer Seite $=\delta$, mit denen man sich nach Fig. 35 den ganzen unendlichen Raum einer Ebene bedeckt vorstellen kann, angeben. Es ist diese, wie eine leichte Überlegung lehrt, mit Voraussetzung der combinatorischen Bezeichnungsweise offenbar:

$$(17)\quad y=\mathop{\mathcal{C}}\limits_{0\psi}^{1\psi}\;\mathop{\mathcal{C}}\limits_{0\nu}^{\pm\infty\nu}\;\mathop{\mathcal{C}}\limits_{0\varrho}^{\pm\infty\varrho}\left((2\nu+\psi)\delta\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{(2\varrho+\psi)\delta x^0\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\left\{\frac{0}{0}\right\}}}(2\varrho+\psi+1)\,\delta x^0\right\}}}(2\nu+\psi+1)\delta\right).$$

12. Man soll die Gleichung sämmtlicher in einer unendlichen Ebene sich wechselseitig berührender Kreisflächen vom Radius r, wie Fig. 36 darstellt, angeben. Sie ist:

$$(18)\quad y = \underset{0\varrho}{\overset{\pm\infty\varrho}{\mathcal{W}}} \underset{0\nu}{\overset{\pm\infty\nu}{\mathcal{W}}} \left(\left(2\varrho r - \sqrt{r^2-(x-2\nu r)^2}\right) \left\{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right\}^{\bullet}_{\bullet} \left(2\varrho r + \sqrt{r^2-(x-2\nu r)^2}\right)\right).$$

13. Endlich soll man die Gleichung des zwischen einer Parabel und einer Ellipse liegenden Raumes Fig. 37 aufstellen. Man hat diessfalls:

$$(19)\quad y = \left\{\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{40x - x^2 - 300}\right\}_{10}^{30} \left\{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right\}^{\bullet}_{\bullet} \left\{\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-100}\right\}_{10}^{\infty}.$$

Dass man auch die Gleichungen der complementären geometrischen Flächenräume zu den bisherigen durch eine Abänderung in der Begrenzung augenblicklich sich verschaffen könnte, leuchtet von selbst ein. —

b) Beispiele über begrenzte und zusammengesetzte Figuren, Curven und einzelne Puncte.

1. Man suche die Gleichung der in Fig. 38 dargestellten parabolischen Curve, deren Curvenäste von G und H an sich um ihre daselbst gezogene Tangente nach aussen gewendet haben. Da es sich hier noch nicht darum handelt, die Methode der Darstellung solcher Gleichungen zu zeigen, sondern bloss die Übereinstimmung der analytischen Repräsentanten mit unsern allgemeinen Functionsformeln durch einige Beispiele zu erläutern, so können wir unsere Leser gar wohl auf unsere frühere Abhandlung verweisen, wo sich diese Aufgabe pag. 52 §. 36 vollständig abgehandelt findet, und nur hier bemerken, dass als deren Gleichung die nachfolgende gefunden wurde, nämlich:

$$(1.)\quad y = \left\{\pm\sqrt{px}\right\}_{0}^{\frac{p}{4}} \,\omega\, \pm \left\{\frac{1}{p^2}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{5}{16}p\right\}_{\frac{p}{4}}^{\infty}.$$

2. Man soll die Gleichung des in Fig. 39 vorgestellten Fünfeckes aufstellen. Man hat für dieselbe:

$$(2.)\quad y = \left\{-5x+25\right\}_{4}^{\bullet} \,\omega\, \left\{x-5\right\}_{5}^{\bullet} \,\omega\, \left\{-\tfrac{2}{3}x+10\right\}_{9}^{\bullet} \,\omega\, \left\{2x-4\right\}_{2\frac{1}{4}}^{\bullet} \,\omega\, \left\{\tfrac{1}{2}x+3\right\}_{1\frac{4}{3}}^{4}.$$

Hier also, wie im ersten Beispiele, hat $F(x.y)$ mehrere Disjunctivglieder:

3. Man soll die Gleichung des in Fig. 40 vorgestellten elliptischen Bogens AB darstellen:

$$(3.)\quad y = \left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}\right\}_{-2}^{+8}.$$

4. Man soll die Gleichung eines Punctes in der Ebene, dessen Coordinaten $\alpha = 5$, $\beta = 11$ sind, aufstellen. Dieses kann natürlich auf unzählige Arten geschehen; so z. B.

$$(4.)\quad y = {}_{\alpha}\Big\{ \frac{\beta}{\alpha}\, x \Big\}^{\bullet} \quad \text{und somit} \quad (5.)\quad y = {}_{5}\Big\{ \tfrac{11}{5}\, x \Big\}^{\bullet}.$$

Wir wollen jetzt nur noch einige Beispiele von Objecten im Körperraume beibringen.

B. Für Gegenstände im Raume.

a) Beispiele über die Körperräume.

1. Man gebe die Gleichung für einen parallelepipedischen Körperraum, dessen Länge Fig. 20 (nach x) von 3 bis 12, dessen Breite (nach y) von 10 bis 18, und dessen Höhe (nach z) von 15 bis 19 reicht; man hat diessfalls

$$(1.)\quad z = {}_{3}\Big\{ 10x^0 \Big\{ 15y^0 \Big\}_{\bullet}^{\bullet} 18x^0 \Big\}^{12} \Big\{ \tfrac{0}{0} \Big\}_{\bullet}^{\bullet} {}_{3}\Big\{ 10x^0 \Big\{ 19y^0 \Big\}_{\bullet}^{\bullet} 18x^0 \Big\}^{12};$$

2. Man soll die Gleichung des ganzen unendlichen Raumes angeben, welcher abwechselweise mit erfüllten und leeren Parallelepipeden von einer Länge (nach x) a, einer Breite (nach y) b, und einer Höhe (nach z) von c Einheiten. Setzt man die combinatorische Bezeichnung als bekannt voraus, worüber auch meine frühere Abhandlung über diesen Gegenstand ein Mehreres enthält, so hat man als Gleichung des in Fig. 21 dargestellten geometrischen Objectes

$$(2.)\quad z = \mathop{\mathcal{C}}_{(0\psi,\,0\varrho,\,0\nu,\,0\varphi)}^{(1.\psi,\,\pm\infty\varrho,\,\pm\infty\nu,\,\pm\infty\varphi)}\!\!{}^{4} \Bigg[{}_{(2\varrho+\psi)a}\Big\{ \Big((2\nu+\psi)\,bx^0\Big) \Big\{ (2\varphi+\psi)\,cy^0 \Big\}_{\bullet}^{\bullet} \Big((2\nu+\varphi+1)\,bx^0\Big) \Big\}^{(2\varrho+\psi+1)a}$$
$$\Big\{ \tfrac{0}{0} \Big\}_{\bullet}^{\bullet} {}_{(2\varrho+\psi)a}\Big\{ \Big((2\nu+\psi)\,bx^0\Big) \Big\{ (2\varphi+\psi+1)\,cy^0 \Big\}_{\bullet}^{\bullet} \Big((2\nu+\psi+1)\,bx^0\Big) \Big\}^{(2\varrho+\psi+1)a} \Bigg]$$

Würde man statt 2ν, 2ϱ, 2φ überall 4ν, 4ϱ und 4φ etc. setzen, so erhielte man die Gleichung des in Fig. 22 vorgestellten, mit gegenwärtigem verwandten Raumgegenstandes.

3. Man soll die Gleichung eines hyperbolisch-conoidischen Körperraumes mit zwei Ästen angeben:

$$(3.)\quad z = \Big(\pm \frac{a}{b}(b^2 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\Big) \Big\{ \tfrac{0}{0} \Big\}_{\bullet}^{\infty}.$$

4. Man soll die Gleichungen für den Körperraum eines parabolischen Conoides (4 und einer Kugel (5) angeben:

$$(4.)\quad z = \Big(\frac{x^2 + y^2}{p}\Big) \Big\{ \tfrac{0}{0} \Big\}_{\bullet}^{\infty}; \quad \text{und}$$

$$(5.)\quad z = \Big(c - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\Big) \Big\{ \tfrac{0}{0} \Big\}_{\bullet}^{\bullet} \Big(c + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\Big).$$

In der Gleichung des hyperbolischen und parabolischen Conoides könnten x und y einen jeden Werth annehmen; in der Gleichung des Kugelraumes dagegen muss $x^2+y^2<r^2$ seyn, widrigenfalls man $\left(c-m\sqrt{-1}\right)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{\tfrac{0}{0}\right\}}}\left(c+m\sqrt{-1}\right)$ erhalten würde, welches wie schon oben gesagt wurde, immer einem unmöglichen Werth entspricht.

5. Man soll die Gleichung desjenigen keilförmigen Körperraumes finden, welcher wie in Fig. 23 durch den Schnitt eines parabolischen Cylinders von den obigen parabolischen Conoid, oder wie in Fig. 24 von dem oben erwähnten Kugelraume getrennt wird, man hat demnach der Ordnung nach:

$$(6.)\quad z=\left\{_{0}\frac{1}{p}\left(x^2+(\sqrt{px})\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y^2\right\}}}(-\sqrt{px})\right)\right\}^{\infty}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{\tfrac{0}{0}\right\}}}(\infty);\ \text{und}$$

$$(7.)\quad z=\left\{_{0}c-\sqrt{r^2-x^2-(\sqrt{px})\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y^2\right\}}}(-\sqrt{px})}\right\}^{r}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{\tfrac{0}{0}\right\}}}\left\{_{0}c+\sqrt{r^2-x^2(\sqrt{px})\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y^2\right\}}}(-\sqrt{px})}\right\}^{r}$$

6. Man kann endlich auch umgekehrt beliebig angeschriebene Gleichungen von der aufgestellten Beschaffenheit geradezu annehmen, und sie sofort auf ihre Form untersuchen So z. B. die Gleichung:

$$(8.)\quad z=\left\{_{3}7x+4-(3x-5)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y\right\}}}(8x^2-2)\right\}^{10}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{\tfrac{0}{0}\right\}}}\left\{_{3}3x^2-2x+(3x-5)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y\right\}}}(8x^2-2)\right\}^{10};$$

welche einem Körperraume entspricht, dessen Länge nach x von 3 bis 10; die Breite nach y von 4 bis zu 798 Einheiten, und dessen Höhe nach z von -773 Einheiten bis zu 821 reichet. Setzt man für x z. B. 5, so erhält man: $z=\left(39-10\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y\right\}}}198\right)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{\tfrac{0}{0}\right\}}}\left(65+10\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y\right\}}}198\right)$. Dem $x=5$ entsprechen daher alle zwischen 10 und 198 liegenden Werthe von y; setzt man nun $y=30$, so wird $z=9\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{\tfrac{0}{0}\right\}}}75$, mithin alle zwischen 9 und 75 liegenden Werthe. —

b) Beispiele über begrenzte Flächen im Raume.

1. Man soll die Gleichung desjenigen Theils der Kugeloberfläche aufstellen, der wie in Fig. 24, von einem parabolischen Cylinder abgeschnitten wird. Es ist diese offenbar (1), so wie jene des in Fig. 23 vorgestellten parabolisch-conoidischen Flächentheils (2).

$$(1.)\quad z=\left\{_{0}c\pm\sqrt{p^2-x^2-(\sqrt{px})\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y^2\right\}}}(-\sqrt{px})}\right\}^{r}\ \text{und}\ (2.)\ z=\left\{_{0}\frac{1}{p}\left(x^2+(\sqrt{px})\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{y^2\right\}}}(-\sqrt{px})\right)\right\}^{\infty}$$

2. Man stelle die Gleichung für sämmtliche ebenen Flächenräume im Körperraume auf, und wende diese allgemeine Gleichung sofort an, auf die Darstellung der Gleichung

eines elliptischen ebenen Flächenraumes im Raume. Die allgemeine Gleichung eines begrenzten ebenen Flächenraumes im Körperraume ist:

$$(3.)\quad z = \left\{ P + Qx + \varphi(x) \left\{ \dot{Ry} \right\} \varphi^{1}(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha^{1}};$$

Von der Beschaffenheit von $\varphi\,(x)$ und $\varphi^{1}(x)$ hängt es nur ab, auf welche Weise die ebene Figur begrenzt ist. Als specielles Beispiel dient Fig. 25 die Ellipse, deren Projection ein Kreis sei, und die in einer zur Ebene xy schiefen Lage sich befindet. Ihre Gleichung ist sofort:

$$(4.\quad z = \left\{ 30 - 2x - (6 - \sqrt{10x - x^{2} - 9}) \left(\tfrac{2}{3}y\right) (6 + \sqrt{10x - x^{2} - 9}) \right\}_{1}^{11}$$

3. Man stelle die allgemeine Gleichung für sämmtliche ebene Flächenräume im Körperraume auf, die von grädlinigen Polygonen begrenzt sind. Es ist diese Gleichung:

$$(5.)\quad z = \left\{ P + Qx + \left(\mathcal{C}^{\eta} \left\{ U_{\varrho} x + V_{\varrho} \right\}_{\alpha_{\varrho}}^{\alpha_{\varrho+1}} \right) \left\{ Ry \right\} \left(\mathcal{C}^{n}_{\eta} \left\{ U_{\varrho} x + V_{\varrho} \right\}_{\alpha_{\varrho}}^{\alpha_{\varrho+1}} \right) \right.$$

4. Man stelle die Gleichung eines im Raume befindlichen ebenen Dreieckes auf: Eine solche ist z. B.

$$(6.)\quad z = 25 - 3x - \left((2) \left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) \left(\tfrac{16}{3}\right) \right) \left\{ y \right\} \left(\left(\tfrac{16}{3}\right) (2x - 6) (4)\ \omega \left(\tfrac{1}{2}x + 4\right) (2) \right);$$

c) Beispiele über begrenzte Curven und Puncte im Raume.

1. Die Gleichung eines auf der Achse der y senkrecht stehenden Kreisbogens von bestimmter Länge ist:

$$(1.)\quad z = \left\{ \sqrt{100 - x^{2} - (8)\left(y^{2}\right)} \right\}_{5}^{9};$$

2. Man soll die Gleichung einer durch den Schnitt eines ungleichachsigen Ellipsoides mit einer Ebene entstandenen begrenzten Curve aufstellen: Es ist diese:

$$(2.)\quad z = \left\{ \pm \tfrac{6}{25} \left(2500 - 100x^{2} - (2x + 9) \left(25y^{2}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}_{-2}^{5}.$$

3. Die Gleichung eines Punctes im Raume, dessen Coordinaten 3, 5, 0, und die eines andern, dessen Coordinaten 2, 6 und 30 sind, soll aufgestellt werden; es ist nämlich diessfalls:

$$(3.)\quad z = \left\{ \frac{x}{6} - (5) \left(\frac{y}{10}\right) \right\}_{3};\ \text{und}\ \ (4.)\quad z = (2) \left\{ 3x \right\} \left\{ 5y \right\}.$$

§. 14.

Gleichwie es zum glücklichen Betriebe irgend einer Kunst keineswegs genügt, bloss im Allgemeinen die Mittel und den Stoff zu kennen, ohne von der Verfahrungsweise und dem Gebrauche der letzteren die nöthige Kenntniss zu besitzen; ebenso wenig würde es uns für die Anwendung unseres Algorithums auf die analytische Behandlung geometrischer Probleme viel nützen, den Stoff, d. i. die neuen Gleichungen und die neuen Zeichen und Begriffe kennen gelernt zu haben, so lange sich damit eine völlige Unbekanntschaft des Gebrauches derselben verbinden würde. Es muss uns daher vor Allem daran gelegen seyn, das Verhältniss der von uns oben auseinandergesetzten Grundbegriffe zu den übrigen bekannten Rechnungsarten zu bezeichnen, die nöthigsten Operations- und Reductions-Regeln aufzustellen, kurz ihren Gebrauch und ihre Anwendung auf unsere, der Form nach wenigstens, neu zu nennenden Functionsgleichungen ohne weiteren Aufschub zu lehren. — Soll nun aber dieser Abschnitt, welcher gleichsam die Einleitung bildet, nicht selbst schon zu einem eigenen selbstständigen Werke werden, so müssen wir nunmehr schon gleich von Vorneherein die Rechtfertigung und Erläuterung, namentlich der leichteren Relationen und Behauptungen, dem eigenen Nachdenken unserer Leser überlassen, zumal da die meisten derselben schon in unserer früheren Abhandlung ihre Begründung erhalten haben. Wir wollen daher schon in diesem Paragraphe einige wichtige Beziehungen unserer Begriffszeichen aufstellen, und es den nächstfolgenden Paragraphen überlassen, dieselben noch weiter zu vervollständigen.

1. Wenn man durch irgend einen Vorgang der Rechnung auf Ausdrüche von der Form (1) gelangt, und es ist z. B. α'' der grösste untere, und α' etwa der kleinste obere Grenzwerth, so findet stets nachfolgende Relation statt, nämlich es ist

$$(1.)\quad y = \left\{ \left\{ \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'} \right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha''}^{\alpha'};$$

d. h. wenn sich mehrere Grenzbezeichnungen über eine und dieselbe Function erstrecken, so gilt die Function nur für Werthe, die zwischen der grössten unteren und kleinsten oberen Grenze liegen. So ist es erlaubt zu schreiben, statt:

$$y = \left\{ \left\{ \left\{ \varphi(x) \right\}_{5}^{10} \right\}_{8}^{16} \right\}_{3}^{15} = \left\{ \varphi(x) \right\}_{8}^{10}.$$

Würde dagegen aus dem Progresse ein Regress oder umgekehrt entstehen, welches jedesmal dann stattfände, wenn der kleinste obere Grenzwerth kleiner wäre, als der grösste untere, so müsste ein solcher durch Reduction entstandener Ausdruck der Natur der Sache nach als unmöglich oder vielmehr als gar nicht vorhanden angesehen werden. So würde offenbar der Werth $y = \left\{ \left\{ \varphi(x) \right\}_{3}^{5} \right\}_{1}^{2}$ unmöglich und folglich irreducibel seyn, und es wäre unstreitig gefehlt, wenn man an seiner Stelle etwa $\left\{ \varphi(x) \right\}_{3}^{2}$ setzen würde. Unsere Reductionsregel findet daher nur unter der Voraussetzung ihre Anwendung, wenn der grösste untere Grenzwerth noch immer kleiner ist, als der kleinste obere. Findet diese Eigenschaft nicht statt, so ist der ganze Ausdruck überhaupt als gar nicht vorhanden zu betrachten, da wie im obigen Beispiele, vermöge einer gewissen Bedingung x nur allein die Werthe zwischen 3 und 5, vermöge einer anderen aber nur jene zwischen 1 und 2 haben soll. — Man sieht hieraus, dass Ausdrücke obiger Form durchaus nicht mit solchen von der Art:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{1;3}^{2,5} = (1\,\omega\,3)\left\{\varphi(x)\right\}_{\bullet}^{\bullet}(2\,\omega\,5) = \left\{\varphi(x)\right\}_{1}^{2}\,\omega\left\{\varphi(x)\right\}_{3}^{5};$$ verwechselt werden dürfen.

2. Wenn eine Disjunctivgleichung in Worten ausgedrückt werden soll, deren Disjunctivglieder vermöge ihrer Grenzbezeichnung sich nicht durchaus ausschliessen, so geschieht dieses, wie schon gesagt wurde, mit dem Ausdrucke »sowohl, als auch« oder: »nicht nur, sondern auch« ; — schliessen sich aber dagegen sämmtliche Glieder wechselweise aus, wodurch jener Begriff des gleichzeitigen Vorhandenseyns in den weniger allgemeinen des bedingten Nebeneinanderseyns übergeht, so wird man sich in diesem Falle recht eigentlich der grammatikalischen Disjunction »entweder, oder« zu bedienen haben. So z. B. würde man bei:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{1}^{9}\,\omega\left\{\varphi'(x)\right\}_{3}^{8};$$ sagen, y sey innerhalb der bezeichneten Grenzen sowohl des Werthes $\varphi(x)$ als auch jenes von $\varphi'(x)$ fähig; — während man dagegen bei dem Ausdrucke:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{3}^{5}\,\omega\left\{\varphi'(x)\right\}_{7}^{10};$$ sich dahin auszudrücken hätte, dass y innerhalb gewisser Grenzen entweder dem Werthe $\varphi(x)$ oder jenem von $\varphi'(x)$ gleich komme. —

§. 15.

Es ist eine von Analysten schon öfters mit Vortheil gebrauchte Bezeichnung, mehrmals nacheinander auszuführende Substitutionen, oder eine mehrfach zu wiederholende Rechnungsoperation durch Indices vor dem Functionszeichen anzudeuten. Von diesem Gebrauche ausgehend ergibt sich sofort auch ganz leicht die Bedeutung der negativen Functions-Indices. So z. B. bedeutet, wie es sich auch sogleich zeigen wird, $\varphi^{-1}(\alpha)$ nichts anderes als die durch Reversion oder Umkehrung entstandene Werthbestimmung, oder mit anderen Worten: den durch Auflösung der Gleichung $\alpha = \varphi(\beta)$ gefundenen Werth von β. Es ist also erlaubt, die Functionsindices mit verkehrten Zeichen von einer Seite einer Gleichung auf die andere zu übertragen. Wir werden vorzüglich im vierten Abschnitte von diesen Grundsätzen einen sehr häufigen und nützlichen Gebrauch zu machen wissen, und uns desshalb hier etwas länger, als es vielleicht manchem nothwendig scheinen möchte, dabei aufhalten. Dem Gesagten zu Folge hat man sofort, wenn

1. $\beta = \varphi(\alpha)$ ist: $\varphi(\beta) = \varphi\,.\,\varphi(\alpha) = \varphi^2(\alpha)$; $\varphi^2(\beta) = \varphi^3(\alpha)$ und allgemein $\varphi^{n-1}(\beta) = \varphi^n(\alpha)$; setzt man nun $n = 0$, so erhält man aus letzterer Gleichung $\varphi^{-1}(\beta) = \alpha$, welches sofort mit

$\beta = \varphi(\alpha)$ verglichen die Bedeutung von $\varphi^{-1}(\beta)$ genugsam aufhellt. — Ist z. B. $y = 3ax - b = \varphi(x)$; so ist $x = \varphi^{-1}(y) = \frac{b+y}{3a}$, oder ist $y = \frac{3}{a}\sqrt{8x^3 - 7b^2} = \varphi(x)$; so ist wiederum $x = \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{6}\sqrt[3]{3a^2y^2 - 189b^2}$. —

2. Auch die oftmaligen aufeinanderfolgenden Substitutionen einer Function führen zu höchst interessanten, ganz unerwarteten und sehr brauchbaren Resultaten. Ist die zum Grunde liegende Function von einer solchen Beschaffenheit, dass der Werth der fortgesetzten Substitutionen erweislichermassen einem constanten Werthe nach den Anforderungen der Convergenz fortwährend zustrebt, so kann dieses Verfahren sehr wohl dazu dienen, die Wurzeln einer Gleichung zu finden. — Ist z. B. $y = Ax = \varphi(x)$; so ist $\varphi^n(x) = A^n x$. — Ist dagegen $\varphi(x) = Ax^m$; so ist $\varphi^n(x) = A^\varrho x^m$, wobei $\varrho = \frac{m^n - 1}{m - 1}$ bedeutet. — Ist endlich $\varphi(x) = Ax + B$, so erhält man $\varphi^n(x) = \left(\frac{A^n - 1}{A - 1}\right) B + A^n x$. — Letztere Formel auf $y = \frac{1}{2}x + 5 = \varphi(x)$ angewendet, gibt für $n = \infty$ wegen $(\frac{1}{2})^\infty = 0$, $\varphi^\infty(x) = 10$, wie dieses auch die freilich hier leicht aufzulösende Gleichung $-\frac{1}{2}x + 5 = 0$ bestätigt.

3. Auch auf bereits vorhandene Functionszeichen wendet man neue an, wie z. B. wenn $\varphi(x) = f(y)$; so ist auch $F(\varphi(x)) = F(f(x))$ u. s. w. — Ebenso findet man durch Übertragung der Functionszeichen aus $\varphi(x) = f(y)$, sowohl $x = \varphi^{-1}(f(y))$ oder auch $y = f^{-1}(\varphi(x))$. Ist z. B. $\varphi(x) = 3x^2 - 7x + 3$ und $f(y) = 5y - 8$ und folglich $3x^2 - 7x + 3 = 5y - 8$; so findet man für $f^{-1}(\varphi(x)) = \frac{3}{5}x - \frac{7}{8}x + \frac{11}{5}$ und für $\varphi^{-1}(f(y)) = \frac{7 \pm \sqrt{60y - 83}}{6}$.

4. Es bedarf keiner eigenen Erklärung, dass nachfolgende Gleichungen uud Relationen bestehen, nämlich: $F(F^{-1}(x)) = F^{-1}(F(x)) = x$, dagegen aber bei ungleichen Functionszeichen kann $\varphi(f(x))$ bald $\gtrless f(\varphi(x))$ seyn. Es müssen daher die verschiedenen Functionszeichen in derselben Ordnung auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden. Ist daher z. B. $y = \Phi^{-1}(F^{-2}(f(x)))$, so hat man sofort $x = f^{-1}(F^2(\Phi(y)))$ u. s. w. Da die analytische Geometrie als solche stets berechtigt ist, bei ihren verschiedenen Untersuchungen die Solubilität der Gleichungen, mit denen sie es zu thun hat, vorauszusetzen; so können die vorerwähnten Functionsbezeichnungen ganz passend dazu verwendet werden, verschiedene Probleme auf Grundlage allgemeiner Functionsformen aufzulösen, wie im dritten Abschnitt gezeigt werden soll.

§. 16.

1. Es ist öfters von grösster Wichtigkeit, Functionsausdrücke mit einfach gekerbten Grenzklammern in andere mit doppelt gekerbten Klammern ohne Veränderung ihres Werthes zu verwandeln. Die hierauf bezügliche Relation ist in nachfolgender Bedingungsgleichung ausgedrückt. Wenn $\beta = \varphi(\alpha)$ und somit $\alpha = \varphi^{-1}(\beta)$, so hat man:

$$(1.)\ \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \left\{\varphi(x)\right\}_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha')};\ \text{und umgekehrt}\ (2.)\ \left\{\varphi(x)\right\}_{\beta}^{\beta'} = \left(\varphi^{-1}(\beta)\right)\left\{\varphi(x)\right\}_{\cdot}^{\cdot}\left(\varphi^{-1}(\beta')\right).$$

Nach eben dieser Gleichung ist daher, was auch schon früher angeführt wurde, wenn x bloss die einfach veränderlichen Grösse, nicht aber selbst eine Function bezeichnet, offenbar: $\left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$. Hierbei ist aber ausdrücklich zu bemerken, dass $\varphi(x)$ für alle zwischen α und α' liegenden Werthe von x weder ein Maximum noch ein Minimum werden darf. Wäre dieses der Fall, so müsste man früher jenes Glied in zwei oder mehrere einfache Disjunctivglieder von erwähnter Eigenschaft auflösen, und mit jedem derselben nach der Relation (1) verfahren. — Gesetzt, man hätte die Gleichung $y = \left\{\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 29)\right\}_{3}^{\pm\infty}$, welche Gleichung der in Fig. 41 vorgestellten Parabel entspricht. Nach den Grundsätzen der Differenzialrechnung, und oft auch ohne dieselbe, lassen sich nun jederzeit die verschiedenen Maxima und Minima auffinden. In unserm Falle gibt es nur ein Minimum und zwar für $x = 3$. Um daher von obiger Gleichung auf die doppelt gekerbte Grenzklammer überzugehen, hätte man folgende Rechnung zu führen:

$$y = \left\{\tfrac{1}{4}(x^2 - 6x + 29)\right\}_{3}^{\pm\infty} = \left\{\tfrac{1}{4}(x^2 - 6x + 29)\right\}_{3}^{+\infty} \omega \left\{\tfrac{1}{4}(x^2 - 6x + 29)\right\}_{3}^{-\infty};$$

und somit wegen (1) nach gehöriger Zusammenziehung $y = \left\{\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 29)\right\}_{5}^{\infty^2}$, da nämlich beide Disjunctivglieder wegen $(+\infty)^2 = (-\infty)^2 = \infty^2$ dasselbe geben. —

2. Das bisher Gesagte setzt uns nun sofort auch in den Stand, aus einer Functionsgleichung, welche aus beliebig vielen Disjunctivgliedern besteht, die absolut veränderliche Grösse x durch eine andere Disjunctivgleichung von der Variablen y auszudrücken, kurz, aus einer derartigen Gleichung x zu suchen. Ist z. B. die Gleichung $y = \left\{\varphi(x)\right\}_{m}^{n} \omega \left\{f(x)\right\}_{p}^{q}$ gegeben, und soll daraus x gesucht und mit Beachtung der Grenzen durch y ausgedrückt werden, so kann man vorerst nach obigem derselben eine andere Form geben und schreiben:

$y = \varphi(m)\left\{\varphi(x)\right\}\varphi(n) \,\omega\, f(p)\left\{f(x)\right\}f(q)$; vermöge des ersten Disjunctivgliedes hat man

$y = \varphi(m)\left\{\varphi(x)\right\}\varphi(n)$ und hieraus $x = \varphi(m)\left\{\varphi^{-1}(y)\right\}\varphi(n)$ und vermöge des zweiten

$y = f(p)\left\{f(x)\right\}f(q)$ und hieraus $x = f(p)\left\{f^{-1}(y)\right\}f(q)$; daher die ganze durch Reversion entstandene Gleichung: $x = \varphi(m)\left\{\varphi^{-1}(y)\right\}\varphi(n) \,\omega\, f(p)\left\{f^{-1}(y)\right\}f(q)$.

Es sey z. B. die Gleichung einer begrenzten geraden Linie und ein Stück einer Parabel gegeben, ihre Gleichuug sey:

$y = \left\{5x-8\right\}_{3}^{8} \omega \left\{\sqrt{5x}\right\}_{5}^{20}$; so folgt hieraus unmittelbar: $y = \left\{5x-8\right\}_{7}^{32} \omega \left\{\sqrt{5x}\right\}_{5}^{10}$ und sofort nach obiger Vorschrift:

$$x = \left\{\tfrac{1}{5}(y+8)\right\}_{7}^{32} \omega \left\{\frac{y^2}{5}\right\}_{5}^{10};$$ welches die verlangte Gleichung ist. —

3. Endlich begreift man sehr leicht, dass $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha} = \left\{\varphi(x)\right\}_{-\infty}^{+\infty} = \varphi(x)$; z. B. $\left\{3x-2\right\}_{5}^{13} \omega \left\{3x-2\right\}_{13}^{5} = 3x-2$. Ebenso wenig scheint es einer weiteren Erklärung zu bedürfen, dass man sich statt des Ausdruckes $\left\{a\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ jederzeit gesetzt denken darf und gewissermassen muss: $\left\{a x^0\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$, weil sich die Grenzwerthe α und α' nur auf die Variable beziehen können, und der Ausdruck sonst keinen Sinn hätte. Der Ausdruck $\left\{5\right\}_{2}^{6}$ heisst daher nur so viel: Diese Grösse hat für alle zwischen 2 und 6 liegenden Werthe von x den Werth 5, für andere Werthe von x ist sie als gar nicht vorhanden anzusehen.

§. 17.

Das Verhältniss der beiden von uns eingeführten Begriffszeichen zu den übrigen bekannten Rechnungsarten soll nun noch weiter in diesem und den folgenden Paragraphen betrachtet werden. Vorerst dürften die nachfolgenden Regeln als für sich klar, keiner weitern Rechtfertigung und Erörterung bedürfen:

1) $y = \left\{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex_4 + \ldots + Vx^n\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \left\{Ax^0\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{Bx\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{Cx^2\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{Dx^3\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \ldots \left\{Vx^n\right\}_{\alpha}^{\alpha'}$.

Z. B. $y = \left\{7 - 8x + \tfrac{3}{2}x^3\right\}_{3}^{5} = \left\{7x^0\right\}_{3}^{5} - \left\{8x\right\}_{3}^{5} + \left\{\tfrac{3}{2}x^3\right\}_{3}^{5}$.

2) $y = \left\{F(a,b,x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} = F\left(\left\{ax^0\right\}_{\alpha}^{\alpha'}, \left\{bx^0\right\}_{\alpha}^{\alpha'}, \left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\right) = F\left(a, b, \left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\right)$ *) letzteres da-

*) Da nämlich nicht nur die mit x behafteten Glieder, sondern überhaupt der ganze Ausdruck, d. h. die Gesammtheit der Glieder für alle zwischen α und α' liegende Werthe von x als vorhanden, dagegen für alle ausserhalb des Intervalls von $\alpha\,\alpha'$ liegende als nicht vorhanden betrachtet werden sollen: so würde

gegen nur bei richtiger Deutung und wo kein Irrthum zu befürchten ist. — Als Beispiel sey gegeben:

$$y = \Big\{3x - \frac{5}{x} + 3\sqrt{4x}\Big\}_1^4 = \Big\{3x\Big\}_1^4 - \Big\{\frac{5}{x}\Big\}_1^4 + \Big\{3\sqrt{4x}\Big\}_1^4; \text{ oder}$$

$$y = \Big\{8 - 4x - log.\frac{x}{a}\Big\}_3^7 = \Big\{8\Big\}_3^7 - \Big\{4x\Big\}_3^7 - \Big\{log.\frac{x}{a}\Big\}_3^7.$$

3). $y = \Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} = \Big\{\varphi(x-n)\Big\}_{\alpha+n}^{\alpha'+n}$, wobei n jede constante Grösse bedeuten kann, z. B.

$$y = \Big\{8x^2 - 4x + 3\Big\}_2^5 = \Big\{8x^2 - 52x + 15\Big\}_5^8; \text{ oder}$$

$$y = \Big(2 - m\Big)\Big\{3\,log.(x+m) - 3x\Big\}\Big(4 - m\Big) = \Big\{3\,log.x - 3(x^1 - m)\Big\}_2^4.$$

Diese Relation ist von hoher Wichtigkeit, und gestattet oft bedeutende Reductionen. —

Mit der Disjunctivgleichung und deren Gliedern können ferner noch nachfolgende Veränderungen völlig unbeschadet ihres Werthes vorgenommen werden, und zwar wenn:

$$y = \Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \Big\{\varphi'(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \Big\{\varphi''(x)\Big\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \Big\{\varphi'''(x)\Big\}_{\alpha^{VI}}^{\alpha^{VII}} \omega \ldots\ldots, \text{ so ist}$$

4) $$y \pm A = \Big\{\varphi(x) \pm A\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \Big\{\varphi'(x) \pm A\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \Big\{\varphi''(x) \pm A\Big\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots$$

5) $$Ay = \Big\{A\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \Big\{A\varphi'(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \Big\{A\varphi''(x)\Big\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots\ldots$$

es ein grosser Fehler seyn, die von x völlig freie Grösse, z. B. A völlig ohne Grenze anzuführen, da sie gegen die Absicht der Begrenzung selbst in dem Falle zurückbleiben würde, wo für gewisse Werthe von x alle übrigen Glieder wegfielen. Man darf also in keiner Weise statt $\Big\{A + Bx\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$, $A + \Big\{Bx\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$, wohl aber bei richtiger Deutung des ersten Gliedes dafür $\Big\{A\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} + \Big\{Bx\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$ schreiben. Erscheint eine Constante aber als Factor von x, so reicht es hin, nur letztere allein zu begrenzen, was z. B. statt $\Big\{Bx\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} = B\Big\{x\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}$. — Wir ersuchen daher die Besitzer unserer frühern Abhandlung, die pag. 15 eingeschlichenen Fehler zu verbessern. Ein Gleiches gilt auch von den Formeln 4 und 5 derselben Seite.

$$6)\quad \frac{y}{A}=\left\{\frac{\varphi(x)}{A}\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\;\omega\;\left\{\frac{\varphi'(x)}{A}\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\;\omega\;\left\{\frac{\varphi''(x)}{A}\right\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\;\omega\;\ldots\ldots$$

$$7)\quad y^{n}=\left\{\varphi\,(\overset{-n}{x})\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\;\omega\;\left\{\varphi'\,(\overset{-n}{x})\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\;\omega\;\left\{\varphi''\,(\overset{-n}{x})\right\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\;\omega\;\ldots\ldots$$

$$8)\quad \sqrt[n]{y}=\left\{\sqrt[n]{\varphi(x)}\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\;\omega\;\left\{\sqrt[n]{\varphi'(x)}\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\;\omega\;\left\{\sqrt[n]{\varphi''(x)}\right\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\;\omega\ldots\ldots$$ und überhaupt ganz allgemein

$$9)\quad F(y)=\left\{F(\varphi(x))\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\;\omega\;\left\{F(\varphi'(x))\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\;\omega\;\left\{F(\varphi''(x))\right\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\;\omega\;\ldots\ldots$$

d. h. alle Veränderungen, welche mit der relativ veränderlichen Grösse y vorgenommen werden, müssen auch in gleicher Weise mit jedem einzelnen Disjunctivgliede vorgenommen werden.

Setzt man in der Gleichung 9 statt y seinen anfänglichen Werth und nimmt man wie oben an, dass sämmtliche Grenzintervalle sich wechselseitig ausschliessen, so erhält man diese Relation noch augenscheinlicher unter der Form einer neuen Regel, nämlich:

$$10)\quad F\left(\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\omega\left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\omega\left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\omega\ldots\right)=\left\{F(\varphi(x))\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\omega\left\{F(\varphi'(x))\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\omega\left\{F(\varphi''(x))\right\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\omega\ldots\ldots$$

und somit überhaupt: $f(A\,\omega\,B\,\omega\,C\,\omega\,D\,\omega\ldots)=f(A)\,\omega\,f(B)\,\omega\,f(C)\,\omega\,f(D)\,\omega\ldots\ldots$

$$11)\quad \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\;\omega\;\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha''}\;\omega\;\left\{\varphi\;x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\;\omega\;\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'''}^{\alpha^{\mathrm{IV}}}=\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha^{\mathrm{IV}}}.$$

$$12)\quad \left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\beta}^{\beta'}\;\omega\;\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\beta'}^{\beta''}\;\omega\;\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\beta''}^{\beta'''}\;\omega\;\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\beta'''}^{\beta^{\mathrm{IV}}}=\left\{\tfrac{0}{0}\right\}_{\beta}^{\beta^{\mathrm{IV}}}.$$

Bei (12) ist zu bemerken, dass man hierbei voraussetzt, zwischen β und β^{IV} befinde sich kein Maximum oder Minimum, widrigenfalls müsste man die Glieder diesen gemäss zusammenfassen. —

$$13)\quad \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\left\{F(x)\right\}_{m}^{n}\;\omega\;\left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\left\{F(x)\right\}_{m}^{n}=\left(\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\;\omega\;\left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\right)\left\{F(x)\right\}_{m}^{n}$$

und falls die Grenzenintervalle α, α' und α'', α''' sich wechselseitig ausschliessen, auch sogar:

$$14)\quad \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}\left\{F(x)\right\}_{m}^{n}\;\omega\;\left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\left\{F(x)\right\}_{m}^{n}=\left(\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'}+\left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha''}\right)\left\{F(x)\right\}_{m}^{n}.$$

Wir wollen nun noch zum Schlusse dieses Paragraphs einige specielle Beispiele über mehrere der hier aufgezählten Fälle beifügen. Es ist nämlich dem Gesagten gemäss, wenn:

$$y=\left\{5x-8\right\}_{5}^{8}\;\omega\;\left\{\sqrt{3x}\right\}_{7}^{9};\text{ auch } y-5=\left\{5x-13\right\}_{5}^{8}\;\omega\;\left\{\sqrt{3x}-5\right\}_{7}^{9};\text{ oder auch:}$$

$$\frac{y}{10} = \left\{\frac{x}{2} - \frac{4}{5}\right\}_5^8 \omega \left\{\frac{\sqrt{3x}}{10}\right\}_7^9; \text{ oder auch } \sqrt[3]{y} = \left\{\sqrt[3]{5x-8}\right\}_5^8 \omega \left\{\sqrt[6]{3x}\right\}_7^9.$$

Ferners ist auch noch nach Relation 10:

$$tang.\left(\left\{5x-8\right\}_5^8 \omega \left\{\sqrt{3x}\right\}_8^9\right) = \left\{tang.(5x-8)\right\}_5^8 \omega \left\{tang.\sqrt{3x}\right\}_8^9;$$

ebenso kann man auch schreiben statt: $log.(5\,\omega\,8\,\omega\,15) = log.5\,\omega\, log.8\,\omega\, log.15$, und z. B. $sin.(\varphi^0\omega\psi^0\omega\varrho^0) = sin.\varphi^0\omega\, sin.\psi^0\omega\, sin.\varrho^0$, und viceversa, vorausgesetzt jedoch, dass die entsprechenden Grenzwerthe sich wechselseitig ausschliessen.

§. 18.

Nach den bisher gepflogenen Betrachtungen könnte es zwar auf den ersten Augenblick völlig gleichgiltig scheinen, welcher von den beiden Grenzwerthen als oberer und welcher als unterer angeschrieben würde, und so lange es sich nur um die blosse Ausscheidung gewisser Werthe der Function handelt, ist dieses allerdings auch der Fall. — Da aber in vielen Fällen die Grenzwerthe nebst dem Intervalle der möglichen oder unmöglichen Werthe auch noch die Ordnung, in der diese Functionswerthe aufeinander folgen, anzuzeigen haben: so ist es im Allgemeinen und insbesondere bei jedem noch nicht bis zu Ende geführten Calcül durchaus unstatthaft, eine derartige Verwechslung mit ihnen vorzunehmen. — In der That wird man bei einer genauern Erwägung nicht umhin können, anzuerkennen, dass Ausdrücke wie: $\left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'}$ und $\left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha}$; sich bei jeder Summirung oder Integration, denen sie zum Grunde gelegt werden, wie ein Zählen nach entgegengesetzter Richtung und somit wie positive und negative Grössen zu einander verhalten. —

Auf die Wichtigkeit dieses Unterschiedes hin haben wir auch schon gleich anfänglich darauf Bedacht genommen, und zur Bezeichnung derselben die Benennungen Progresse und Regresse eingeführt. Aus den verwandten Begriffen des Zählens und Summirens oder Integrirens ergeben sich nun ohne Weiters auf eine nothwendige Weise nachfolgende Relationen:

$$1)\quad \sum \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'} = -\sum \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha}; \qquad 2)\quad \int \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'} dx = -\int \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha} dx;$$

$$3)\quad \sum \omega \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'} = +\sum \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'}; \qquad 4)\quad \int \omega \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'} dx = +\int \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'} dx;$$

daher verwandelt sich eine Disjunctivgleichung von der Form:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_\alpha^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha^{IV}}^{\alpha^{V}} \omega \ldots .$$

in eine Summe, wenn sie obigen Operationen unterzogen wird, nämlich:

$$5.\quad \sum y = \sum\Big(\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}\,\omega\,\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\,\omega\,\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\,\omega\ldots\Big) = \sum\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} + \sum\Big\{\varphi'(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''} + \sum\Big\{\varphi''(x)\Big\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}} + \ldots.$$

$$6.\quad \int y\,dx = \int\Big(\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}\,\omega\,\Big\{\varphi'(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''}\,\omega\,\Big\{\varphi''(x)\Big\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}\,\omega\ldots\Big)dx = \int\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}dx + \int\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha''}^{\alpha'''}dx + \int\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha^{\mathrm{IV}}}^{\alpha^{\mathrm{V}}}dx + \ldots.$$

Man sieht hieraus, dass die Wirkung eines Summirungs- oder Integralzeichens auf das Zeichen ω darin besteht, dasselbe, wenn es vor einem Progresse steht, in ein $+$ (Plus-) Zeichen, und wenn es vor einem Regresse steht, in ein $-$ (Minus-) Zeichen zu verwandeln. — Auch begreift man leicht, dass zwischen dem Integrale einer begrenzten Function, nämlich zwischen $\int\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}dx$ und dem bestimmten, zwischen gegebenen Grenzen zu nehmenden Integrale $\int_{\alpha}^{\alpha'}\varphi(x)\,dx$, ein sehr wesentlicher und für die Anwendung wichtiger Unterschied besteht; indem das letztere eine bestimmte Forderung, das erstere dagegen nur im Allgemeinen die Möglichkeit ausspricht, einer solchen Forderung nach Massgabe der Begrenzung Genüge zu leisten; denn das Integrale unterliegt derselben Grenzbestimmung, als die der Integration oder Summation zum Grunde gelegte Function. — Kommen daher Ausdrücke von der Form $\int_{m}^{n}\Big\{\varphi(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'}dx$ vor, und liegen m und n nicht beide zugleich innerhalb der Grenzen α und α', so ist begreiflicherweise die Integration in der bezeichneten und verlangten Ausdehnung gar nicht möglich. — Auch müssen noch vor einer Integration die beiden Grenzbestimmungen, falls sie es nicht schon wären, in obigem Sinne gleichartig gemacht, d. h. beide progressiv oder beide regressiv geordnet werden.

Legt man nun irgend eine der von uns aufgestellten Gleichungen mit beliebig vielen Disjunctivgliedern und Begrenzungszeichen den verschiedenen Problemen, zu deren Lösung die Integralrechnung oder die Summirung erforderlich ist, zum Grunde, und behandelt dieselbe den hier ausgesprochenen Principien gemäss: so gelangt man stets, wie ich auch schon in meiner frühern Abhandlung gezeigt habe, zu vollkommen richtigen, mit der Natur der Sache ganz übereinstimmenden Resultaten und unsere eben namhaft gemachten Gleichungen oder Functionen erweisen sich mithin auch in dieser Beziehung als wahre Repräsentanten der durch sie vorgestellten geometrischen Objecte.

§. 19.

Obgleich es nach dem bisher Vorgekommenen den Anschein hat, als vermöchten die einzelnen Glieder einer Disjunctivgleichung, da sie durch das Zeichen ω aus einander gehalten werden, niemals und unter keiner Bedingung eine Verbindung unter einander einzugehen: so gestattet doch auch diese Regel ihre Ausnahmen. Insbesonders ist dieses überall der Fall, wo es sich bloss um rein numerische Grössenbestimmungen der Veränderlichen x, y, z handelt. — Eine nicht geringe Anzahl von Reductionsregeln, Abkürzungen und Kunstgriffen bei Anwendung der Analysis auf die Geometrie insbesonders beruht auf sogenannten zufälligen Ansichten, deren sich die Analysis, sobald sie dieselben gerechtfertigt hat, ungescheut bedienen darf.

1. Vorerst mag bemerkt werden, dass in allen jenen Fällen, wo die einzelnen Disjunctivglieder vermöge ihrer Begrenzung sich wechselseitig ausschliessen, man überall statt des Zeichens ω das Zeichen $+$ setzen darf, z. B.

$$y = \left\{5x-2\right\}_{3}^{8} \omega \left\{x-8\right\}_{10}^{11} \omega \left\{8\right\}_{1}^{2} = \left\{5x-2\right\}_{3}^{8} + \left\{x-8\right\}_{10}^{11} + \left\{8\right\}_{1}^{2} = \left\{5x\right\}_{3}^{8} + \left\{x\right\}_{10}^{11} + \left\{8\right\}_{1}^{2} - \left\{8\right\}_{10}^{11} - \left\{2\right\}_{3}^{8}$$

oder:

$$(1)\quad y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha''} \omega \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha'''}^{\alpha^{IV}} \omega \ldots\ldots = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} + \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha''} + \left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} + \ldots.$$

Letztere Gleichung entspricht einer solchen Zusammensetzung gerader oder krummer Linienstücke, wie sie in Fig. 42 und in Fig. 43 mittelst geraden Linien vorgestellt wurde. Sind die den verschiedenen α, α', α'' .... entsprechenden Werthe der Functionen, d. h. die verschiedenen β, β', β'' .... u. s. w. je zwei nachbarlich, nachbarliche nämlich, gleich, so bezieht sich obige Gleichung auf Fig. 42, wo nicht auf Fig. 43. — Dass sich mittelst dieser Befugniss öfters mit Zuziehung der früher entwickelten Sätze bedeutende Reductionen ergeben, wird die Folge zeigen.

2. Der Hinblick auf Fig. 42 und Fig. 43 lehrt ferner noch, ohne einer besondern Rechtfertigung zu bedürfen, dass unter obiger Voraussetzung auch geschrieben werden dürfe:

$$y = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha'} \omega \left\{\varphi'(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha''} \omega \left\{\varphi''(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha'''} \omega \ldots \left\{\varphi^{(n)}(x)\right\}_{\alpha^{n}}^{\alpha^{n+1}} = \left\{\varphi(x)\right\}_{\alpha}^{\alpha(n)} + \left\{\varphi'(x) - \varphi(x)\right\}_{\alpha'}^{\alpha(n)} + \left\{\varphi''(x) - \varphi'(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha(n)}$$

$$+ \left\{\varphi'''(x) - \varphi''(x)\right\}_{\alpha''}^{\alpha\, n)} + \ldots\ldots$$

Ist daher z. B. gegeben:

$$y = \left\{5-3x^{2}\right\}_{0} \omega \left\{5+4x-3x^{2}\right\}_{2}^{3} \omega \left\{10+5x-3x^{2}\right\}_{3}^{6} \omega \left\{10+5x-2x^{2}\right\}_{6}^{11};$$

so erhält man hier die ganz gleiche, nur weit einfachere:

$$y=\left\{5-3x^2\right\}_{0}^{11}+\left\{4x\right\}_{2}^{11}+\left\{5+x\right\}_{3}^{11}+\left\{x^2\right\}_{6}^{11}.$$

Das Gesagte ist übrigens nur als ein erster Versuch anzusehen, die Disjunctivglieder gegenseitig zu reduciren. Da unter andern Objecten die Polygone Gleichungen liefern, welche den verlangten Bedingungen stets entsprechen; so können dieselben, wie viele Seiten sie auch haben mögen, stets auf zwei Disjunctivglieder zurückgeführt werden, wovon das eine sämmtliche Progresse, das andere dagegen sämmtliche Regresse repräsentirt.

§. 20.

Es ist gewiss höchst wichtig und belehrend, die Beziehungen kennen zu lernen, in denen begrenzte Variablen zu den unbegrenzten stehen, und auf welche Weise sie wechselseitig in einander verwandelt werden können. Eine genauere Betrachtung dieses Gegenstandes zeigt nämlich klar, dass sich für jede einzelne begrenzte Variable stets leicht eine einfache unbegrenzte Function angeben lasse, die aus den beiden Grenzwerthen der frühern und einer völlig unbegrenzten, aller Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähigen andern Variablen zusammengesetzt ist. Diess ist nämlich stets der Fall, wenn man setzt:

$$(1)\qquad \left\{x\right\}_{\alpha}^{\alpha'}=\frac{\alpha' w^2+\alpha}{w^2+1}.$$

Sucht man nun einerseits den Unterschied dieses Bruches von der obern Grenze α', anderseits jenen des untern Grenzwerthes von dem Bruche, wobei man beziehungsweise die Differenzen $\frac{\alpha'-\alpha}{w^2+1}$ und $\frac{(\alpha'-\alpha)\,w^2}{w^2+1}$ findet: so erkennt man gar leicht aus der Beschaffenheit dieser Reste, dass wie gross oder klein man auch nur immer w annehmen mag, der Werth jenes Bruches wohl zwar den Werthen α und α' sich beliebig annähern, niemals aber unter jenen erstern herabsinken oder über den zweiten sich erheben kann. —

Da nun überdiess diese Function (1) eine continuirliche ist, so gibt es für jeden möglichen, d. h. innerhalb der Grenzen von α und α' liegenden Werth von x, und auch nur allein für solche, einen entsprechenden Werth von w. Man findet diesen, indem man mittelst Gleichung (1) w sucht:

$$(2)\qquad w=\left\{\sqrt{\frac{x-\alpha}{\alpha'-x}}\right\}_{\alpha}^{\alpha'}.$$

So ist z. B. $\left\{x\right\}_{7}^{12}=\frac{12w^2+7}{w^2+1}$, und hieraus $w=\left\{\sqrt{\frac{x-7}{12-x}}\right\}_{7}^{12}$. Wollte man daher z. B. die Gleichung eines begrenzten Flächenraumes von ihren Grenzklammern befreien, so hätte man wegen:

$$(3)\quad y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'} \left\{ \tfrac{0}{0} \right\} \left\{ \varphi'(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'}; \text{ da } \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \varphi\left(\binom{\alpha}{(x)} \right) = \varphi\left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right)$$

und ebenso $\left\{ \varphi'(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'} = \varphi'\left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right)$; also

$$(4)\quad y = \varphi\left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right) \left\{ \tfrac{0}{0} \right\}_{\cdot}^{\cdot} \varphi'\left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right),$$

und daher das nämliche Verfahren auf y oder $\left\{ \tfrac{0}{0} \right\}$ angewendet, gibt:

$$(5)\quad y = \varphi'\left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right) \left(\frac{w^2}{w^2 + 1} \right) + \varphi\left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right) \left(\frac{1}{w^2 + 1} \right).$$

Dies ist nun die Gleichung für eine begrenzte ebene Fläche, wobei zwar w und ϱ nicht die Bedeutung von Coordinaten haben und eines jeden Werthes fähig sind; dagegen wegen $x = \left(\frac{\alpha' \varrho^2 + \alpha}{\varrho^2 + 1} \right)$ mit der geringsten Mühe sich auf jene augenblicklich zurückführen lassen. Man hat daher eine Gleichung zwischen zwei begrenzten Variablen in zwei Gleichungen, wenn man so will, zwischen vier Veränderlichen aufgelöst, wovon zwei, nämlich w und ϱ, eines jeden Werthes fähig, alle vier aber völlig frei von jeder willkürlichen Begrenzung sind. — Eine Gleichung von drei Variablen kann daher eine begrenzte Curve, eine von fünf unbegrenzten Variablen eine begrenzte Fläche im Raume, und eine solche von sechs Variablen einen begrenzten Körperraum bedeuten und darstellen. Und nun zum Beschlusse dieser Betrachtungen noch ein specielles Beispiel.

Ist Fig. 44 $ABCD$ ein Ast einer Parabel, und CD eine Sehne, so ist die entsprechende Gleichung des Flächenraums zwischen der Sehne und dem Bogen:

$$(6)\quad y = \left\{ \frac{24\,x}{25} + \frac{1}{10} \right\}_{5}^{20} \left\{ \tfrac{0}{0} \right\}_{\cdot}^{\cdot} \left\{ \sqrt{5\,x} \right\}_{5}^{20}$$

und diese Gleichung nach obigen Vorschriften von den Grenzwerthen befreit, führt auf die gleichbedeutende Gleichung:

$$(7)\quad \begin{cases} y = \left(\dfrac{100\,\varrho^2 + 25}{\varrho^2 + 1} \right) \left(\dfrac{w^2}{w^2 + 1} \right) + \left(\dfrac{193\,\varrho^2 + 49}{10\,(\varrho^2 + 1)\,(w^2 + 1)} \right) = \dfrac{(1000\,\varrho^2 + 250)\,w^2 + 193\,\varrho^2 + 49}{10\,(\varrho^2 + 1)\,(w^2 + 1)}, \\[2ex] x = \left(\dfrac{20\,\varrho^2 + 5}{\varrho^2 + 1} \right). \end{cases}$$

Hierbei ist nur zu bemerken, dass eigentlich schon die erste Gleichung jene Fläche repräsentirt, d. h. sämmtliche Puncte enthält und darstellt, und der Werth von x nur beigefügt ist, um für jede Substitution nicht nur y, sondern auch zugleich das entsprechende x zu finden, da die geometrische Bedeutung von w und ϱ unbekannt, und daher diese Variablen für sich nicht genügen, uns eine Anschauung des Gegenstandes zu verschaffen. — Übrigens scheint hier eine reichhaltige Quelle für Untersuchungen mehrfacher Art sich zu öffnen, auf die hinzudeuten ich nicht umhin konnte*). — Wir kehren nun wieder nach Darlegung dieser Grundbegriffe zu dem in den Paragraphen 6 und 10 beschriebenen Schauplatz unserer Betrachtungen zurück.

§. 21.

Als denjenigen Apparat, welcher bei allen möglichen Ortsveränderungen, Bewegungen und Formänderungen der verschiedenen Objecte, die man sich in Gedanken mit ihnen vorgenommen denkt, als unveränderlich und unverrückt betrachtet wird, müssen wir im Rückblicke auf §. 6 und §. 10 bei Raumsobjecten die drei in einem Puncte sich senkrecht durchschneidenden Ebenen oder bei Gegenständen zweier Dimensionen, die zwei in einem Puncte sich senkrecht treffenden sogenannten Achsen nennen. — An sie knüpft man auch das wandelbare Coordinaten-System an, indem man nämlich gewisse Bedingungen festsetzt: »wie, in welcher Weise und von wo aus,« die Coordinaten genommen und gezählt werden sollen. Diese Coordinaten bilden also gleichsam unendlich viele Vermittlungslinien, mittelst welcher die verschiedenen Objecte mit den allein feststehenden Ebenen oder Linien des Coordinaten-Raumes in Verbindung gesetzt und aller Veränderungen ungeachtet, die mit ihnen vorgehen, stets in engster Verbindung bleibend erhalten werden. Findet man es daher zweckdienlich, Coordinaten anderer Art, statt der rechtwinkligen z. B. schiefwinklige oder gar polare Coordinaten einzuführen: so ist dieses nur eine Änderung in der Art und Weise, die Coordinaten zu nehmen und zu zählen, die ganz innerhalb jener Ebenen im Coordinaten-Raume vor sich geht, und natürlich nicht die geringste Änderung in der Lage jener feststehenden Ebenen hervorzubringen vermag. Vielmehr dienen sie ja selbst hierbei als das *tertium comparationis*, um von den einen Coordinaten auf die anderen überzugehen. — Überhaupt muss man sich hüten, den Einfluss des Coordinaten-Systems für zu hoch anzuschlagen oder demselben etwas zuzumuthen, was es niemals zu leisten vermag. Die glückliche Wahl eines passenden Coordinaten-Systems kann in einzelnen Fällen allerdings bewirken, dass die betreffenden Formeln einfacher und tractabler werden, und insofern verdient diese Wahl immer die grösste Beachtung und genaueste Erwägung. Niemals aber wird man durch das eine System neue Eigenschaften, Verhältnisse oder Beziehungen entdecken, die sich nicht ebenso gewiss, wiewohl mit oft viel grössern Schwierigkeiten, auch bei Zugrundelegung eines andern Systems hätten finden lassen. — Ganz anders dagegen verhält es sich mit dem Umstande, welchen Ort man den verschiedenen Objecten im Raume anweist, welche Stellung und Lage sie gegen einander haben, welche Bewegungen man sich mit ihnen vorgenommen denkt, und in welcher Weise man sie ihre Form ändern lässt. Alles dieses sind Vorgänge, durch welche sich ihre wechselseitigen Verhältnisse sehr ändern und Eigenschaften an ihnen entdecken lassen, die früher gar nicht vorhanden waren.

*) Es ist hoffentlich nicht bloss eine Meinung von mir, wenn ich mit Zuversicht die Hoffnung ausspreche, dass die beiden Grundbegriffe meines Algorithmus, nämlich jener der Disjunctiv-Bezeichnung und der freien und willkürlichen Begrenzung auch in den übrigen Theilen der Analysis eine wichtige und fruchtbare Anwendung finden dürften.

Man hat zwar bisher allgemein, wir wissen es gar wohl, das Problem für die Coordinaten-Änderung gleichzeitig und unter Einem mit jenem für die Ortsveränderung im Coordinaten-Raume abgehandelt, indem man dabei von der Ansicht ausgeht, dass jede Aenderung in der Lage einer Figur gegen das Coordinaten-System sich auch umgekehrt durch eine Umlegung oder Verlegung des letztern herbeiführen lassen müsse. Allein wenn man auch völlig unberücksichtigt lässt, dass eine solche erkünstelte Vorstellungsweise niemals eine völlig klare Einsicht in den Gang der Rechnung und eine sichere und leichte Anwendung gestattet, ja eigentlich sogar mit der stillschweigend vorausgesetzten Annahme feststehender Coordinaten-Achsen und Ebenen in einem offenbaren Widerspruche steht: so ist sie auch noch überdiess in allen jenen Fällen völlig unzureichend und unbrauchbar, wo einzelne Figuren oder selbst Theile derselben ihre Lage gegen einander ändern sollen. — Nach der im §. 4 aufgestellten Übersicht derjenigen Forderungen, welche man, meiner Meinung nach, an die analytische Geometrie als vollendete Wissenschaft zu stellen vollkommen berechtigt ist, kömmt man nämlich sehr häufig in die Lage, mehrere Puncte, Linien, Flächen, Figuren und Körper als gleichzeitig im Coordinaten-Raume bestehend, d. h. als ein System betrachten zu müssen. Im Verlaufe der weitern Betrachtungen stellt sich sodann öfters die Nothwendigkeit ein, entweder alle Objecte eines Systems gleichmässig zu verlegen, und ihnen als System eine andere Stelle im Raume anzuweisen, oder aber nur einzelne aus ihnen oder gar nur einzelne Theile derselben, oder endlich wohl auch alle, jedoch nicht auf eine gleichartige Weise ihre Lage ändern zu lassen. Die erstere Veränderung werden wir schlechtweg die Ortsveränderung oder Dislocation, die zweite dagegen, da mit ihr in der That eine Formänderung wenigstens des Systems verknüpft ist, die Transfiguration nennen. — Sowohl die eine als die andere Veränderung kann an den verschiedenen Objecten gedacht und mit ihnen vorgenommen werden, ohne auch nur im Geringsten eine Änderung in der Lage der Coordinaten gegen einander und zu den besagten Ebenen nothwendig voraussetzen zu müssen. — Von diesem Standpuncte aus betrachtet, halten wir es für eine unabweisbare Forderung der Consequenz, uns jeder cumulativen Behandlungsweise der beiden so heterogenen Probleme, nämlich jenes der Dislocation und der ihr innig verwandten Transfiguration einerseits, und der sogenannten Transformation der Coordinaten anderseits, durchaus und in jeder Beziehung strenge zu enthalten. Wir wollen nun ohne weiteren Aufschub auf unsere Ansicht über Ortsveränderung und auf die Mittel, selbe zu vollführen, übergehen.

§. 22.

Wenn ein geometrisches Object in der Ebene oder im Raume einen Ort einnimmt, den es früher nicht inne hatte, so kann es an diesen zweiten Ort nur in Folge einer Bewegung gelangt seyn. - Die Bewegung kann eine solche gewesen seyn, dass dabei sämmtliche Puncte vollkommen congruible Wege zurücklegten, und in diesem Falle haben alle Puncte von den Orten, von denen sie ausgingen, oder die sie früher einnahmen, gleichen Abstand. Man würde daher in diesem Falle, nach der noch in diesem Abschnitte von uns aufzustellenden und zu rechtfertigenden Definition des Parallelismus sagen, der Gegenstand habe sich parallel zu seiner anfänglichen Lage fortbewegt, und seine zweite Lage sei somit zu seiner anfänglichen parallel: oder es legen die verschiedenen Puncte, indem sie dabei immerfort in derselben Ebene verbleiben, ungleiche Wege zurück, jedoch so, dass hierbei sämmtliche Puncte von einem gewissen unbeweglichen Puncte gleichen Abstand beibehalten, und in diesem Falle würde man sagen: der Gegenstand habe sich bloss allein gedreht. — Oder endlich, es kann sich das Object nebst dem, dass es sich um einen gewissen Punct dreht, zugleich auch mit ihm parallel zur anfänglichen Lage fortbewegen, d. h. an beiden Arten von Bewegungen Theil nehmen. In diesem letztern Falle kann man unbeschadet der möglichsten Allgemeinheit den ganzen Vorgang immer so betrachten, als ob die genannten zwei Ortsveränderungen statt gleichzeitig, nach einander vor sich gingen, d. h. als ob sich das Object zuerst bis zu einem gewissen Puncte parallel fortbewegte, und sodann erst drehte. Man kann daher mit Recht diese Bewegung eine gemischte oder aus beiden zusammengesetzte nennen. Zur Erläuterung des Gesagten mag hier noch Folgendes angeführt werden. Es sei Fig. 45 und 46 *ABCD* irgend eine ebene Curve mit mehreren Wendungspuncten als Bahn eines im Puncte *O* auf diese senkrecht stehenden Objectes, z. B. der Linie *NM*, deren Schwerpunct, was hier nebenher bemerkt werden soll, sich in *O* befinden mag. Bewegt sich nun diese Linie in der Weise, dass sie in jedem Puncte ihrer Bahn, wie diess in Fig. 46 angezeigt ist, eine im obenerwähnten Sinne parallele Lage zu ihrer anfänglichen Stellung annimmt: so ist diese Bewegung als eine reine fortschreitende anzusehen, und ein dem vorwärtsschreitenden Schwerpuncte der Linie *O* aufstossendes, unüberwindliches Hinderniss würde die ganze Linie *NM* selbst augenblicklich zur Ruhe bringen. Ganz Anderes dagegen würde geschehen, wenn die Linie *NM* in der Weise fortschritte, dass sie dabei in jedem Puncte ihrer Bahn auf diese, wie Fig. 45 darstellet, senkrecht stünde; denn hier wohl könnte man nicht läugnen, dass mit der fortschreitenden zugleich auch eine drehende, bald in diesem, bald in jenem Sinne verbunden wäre, und wollte man es ja nicht zugestehen, die Natur der Sache selbst würde jeden gar bald dazu bringen; denn träte in diesem Falle dem Schwerpuncte 0, 0′, 0″ Fig. 45 ein Hinderniss entgegen, stark genug, um diesen Punct z. B. in 0′ zum Stillstand zu vermögen, was würde wohl geschehen? Gewiss nichts anders, als dass jene Linie, da den Puncten *N* und *M*, abgesehen von ihrer fortschreitenden Bewegung, auch noch eine drehende Bewegung in einem entgegengesetzten Sinne zukömmt, die nach Behebung der fortschreitenden zurückbleibt, augenblicklich eine drehende Bewegung in der in der Figur angezeigten Richtung annehmen würde. Es ist merkwürdig genug, dass selbst so einfache Begriffe, wie der des Paralismus und der Drehung so häufig verkannt werden konnten; und wohl keinem meiner verehrlichen Leser kann es unbekannt seyn, mit welchem Eifer, ja Leidenschaftlichkeit, noch vor nicht gar langer Zeit Streit darüber erhoben wurde, ob man dem Monde nebst seiner fortschreitenden Bewegung in der Bahn, auch noch eine drehende zuschreiben müsse oder nicht *). Der Begriff

*) Wir verdanken diese Anwendung der von uns oben aufgestellten und vertretenen Grundwahrheit auf die eben berührte Streitfrage einer zufällig vernommenen Aeusserung des Herrn Prof. Dr. *Bolzano*. Es sei uns gestattet, die Anwendung obiger Ansichten auf den vorliegenden Fall in nachfolgende Worte zusammenzufassen. Da der Mond bei seiner fortschreitenden Bewegung um die Erde, abgerechnet seine Libration, derselben immer dieselbe Seite zuwendet, so muss er in verschiedenen Puncten seiner Bahn, z. B. in 0 und 0′ eine Lage annehmen, wie z. B. in Fig. 47, und es unterliegt keinem Zweifel, dass alle jene Theile des Mon-

des Parallelismus, so wie jener der geraden Linie ist für unsere Untersuchungen, namentlich für jene des zweiten und dritten Abschnitts, so ungemein wichtig und folgenreich, und unsere Ansicht hierüber ist zugleich eine von den gewöhnlichen so abweichende, dass wir nicht umhin konnten, ihnen hier eine ausführlichere Betrachtung zu widmen. — Der Zweck dieses Paragraphes war kein anderer, als zu zeigen, dass (wenigstens vorerst für Objecte in der Ebene) jede Ortsveränderung eines Objectes sich in ein paralleles Fortbewegen und allenfallsiges gleichzeitiges Drehen auflösen lasse. — Und nun werden wir uns beeilen, unsern Lesern vor Allem die Grundansicht mitzutheilen, die allen Dislocationen in der Ebene und im Raume zum Grunde liegt.

§. 23.

Von der schon im vorigen Paragraphe gerechtfertigten Ansicht ausgehend, dass sich jede Veränderung in der Lage eines Objectes in der Ebene durch ein Drehen um einen beliebigen Punct und durch Verlegung dieses Drehungspunctes herbeiführen lasse: wollen wir mit Bezugnahme auf Fig. 48 Nachfolgendes feststellen. Es sei M Fig. 48 irgend ein beliebiges Object in der Ebene, und 0 irgend ein innerhalb oder ausserhalb liegender Punct, welchen wir mit dem Objecte in der Weise fix verbunden uns denken wollen, dass er mit selbem sich bewegt oder ruht, ohne seine Lage gegen M im Geringsten zu ändern. Seine Lage soll durch die Coordinaten d und δ festgesetzt seyn. Diesen Punkt 0 nun wollen wir als den willkürlichen Drehungspunct für das Object M ansehen. Zugleich denke man sich zu diesem Puncte 0 von einem beliebigen Puncte des Gegenstandes eine gerade Verbindungslinie $A0$ gezogen, die mit der Abscissenachse irgend einen Winkel einschliesst, und uns dienen wird, die Grösse des Drehungswinkels, den wir ϱ nennen wollen, zu beurtheilen. Nun denke man sich diesen Drehungspunct zugleich mit seinem Objecte, und parallel zu seiner anfänglichen Lage von 0 nach $0'$, dessen Coordinaten d' und δ' seyn mögen, übertragen, wobei M nunmehr nach M' gelangt, und nachdem dieses geschehen, drehe sich das Object M um den Winkel ϱ, wodurch es nach M'' verlegt wird. Unter dieser doppelten Voraussetzung lässt sich jede gegebene oder beabsichtigte Verlegung eines Objectes nicht bloss auf eine einzige bestimmte, sondern auf unzählige Weise bewerkstelligt denken, und wir können natürlich darunter immer diejenige wählen, welche den vorliegenden Umständen am meisten zusagt. Nichts ist dabei natürlicher, als dass sich bei dieser Bewegung das anfängliche Verhältniss zwischen der Abscisse x und der Ordinate y, wie es in der vorliegenden Gleichung ausgesprochen ist, bedeutend ändern muss, so jedoch, dass diese Änderung lediglich nur von den Grössen d, δ, d', δ' und ϱ abhängen kann. Durch derartige Betrachtungen stellt sich nun klar heraus, dass es unzählige ihrer Form, insbesonders aber ihren numerischen Werthbestimmungen nach, wesentlich verschiedene Functionen geben werde, die

des, welche ein für allemal von der Erde abgewandt sind und bleiben, eine grössere absolute Geschwindigkeit haben, als der Schwerpunct selbst, die der Erde zugewandten eine um eben so viel kleinere als der Schwerpunct. Würde daher der Mond plötzlich in seiner fortschreitenden Bewegung gehemmt, so müsste derselbe augenblicklich in dem in Fig. 47 bezeichneten Sinne rotiren. — Es unterliegt daher nicht dem geringsten Zweifel, dass unser Mond, ausser seiner fortschreitenden, noch eine drehende Bewegung besitzt. —

gleichwohl insgesammt nur einem und demselben geometrischen Objecte entsprechen, deren Verschiedenheit also höchstens etwa nur durch dessen verschiedene Lage im Coordinaten-Raume bedingt ist. — Im zweiten Abschnitte, der sich alle hieher gehörigen Untersuchungen über Dislocation und Transfiguration zur Hauptaufgabe gemacht hat, wird gezeigt werden, dass jede Ortsveränderung eines Objectes in seiner entsprechenden Gleichung eine Veränderung bewirket, die sich analytisch jederzeit dadurch herbeiführen lässt, dass man für die Werthe x und y die nachfolgenden Werthausdrücke substituirt, nämlich:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a + b x' + c y' \\ y &= a_1 + b_1 x' + c_1 y', \end{aligned}$$

wobei x' und y' die neuen Coordinaten, a, b, c, a', b', c' dagegen durchaus von d, δ, d', δ' und ϱ abhängige und aus ihnen auf eine bestimmte Weise zusammengesetzte Werthe bedeuten. Um die geeigneten Formeln auch für die constanten Grenzwerthe zu finden, müssen diese Formeln umgekehrt, d. h. die Werthe x' und y' durch jene von x und y bestimmt und ausgedrückt werden, da das Verfahren der Substitution gerade das umgekehrte des vorigen ist, d. h. da man im erstern Falle obige Werthe in die vorliegende Function, im zweiten Falle dagegen die constanten Grenzwerthe der vorliegenden Function zum Behufe ihrer Veränderung in die besagten Formeln gesetzt werden sollen. Man sieht daher, dass man bei allen Problemen über die Dislocation stets zweier Systeme von Formeln bedarf, von denen die einen sich auf die Function und veränderlichen Grenzen, die andern dagegen auf die constanten Grenzwerthe beziehen.

Auf diesem Standpunkte der Betrachtung befanden wir uns zur Zeit der Bearbeitung unserer frühern Abhandlung, und wir nehmen keinen Anstand, zu gestehen, dass wir sie damals überhaupt für die möglichst allgemeinste, allen Raumesverhältnissen vollkommen zusagendste Vorstellungsweise hielten, in welcher Ansicht uns wohl auch die grosse Leichtigkeit bestärken mochte, mit der wir schon damals sehr schwierige und complicirte Aufgaben über Dislocation und Transfiguration zu lösen vermochten. — Allein nicht nur haben wir seither eine ungleich einfachere Ableitungsart der darauf bezüglichen Formeln gefunden, sondern sind auch noch überdiess bei Gelegenheit, als wir von den im folgenden Paragraphe zu erwähnenden allgemeinern Dislocationsformeln für den Raum auf jene der Ebene übergingen, zu der Überzeugung gelangt, dass unsere bisher festgehaltene Ansicht über Ortsveränderungen in der Ebene und somit auch die davon abhängigen Dislocations-Formeln noch einer grössern Verallgemeinerung fähig seien. Denn um unsere Leser hierüber nicht lange in Ungewissheit zu lassen, geben wir zu bedenken, dass unsere oben festgesetzten Voraussetzungen uns nimmermehr in den Stand setzten, diejenige Veränderung an den Objecten analytisch auszudrücken, welche einem Umschlagen eines Objectes um eine beliebige Linie als Achse entspricht, und wobei der Gegenstand aus der Ebene xy sich erhebend heraustritt, um die Rückseite gegen Vorne hin wendend, sich in selbe wieder niederzulassen. — Wir werden daher im ersten Capitel des folgenden Abschnitts nicht ermangeln, nebst den obigen gewöhnlichen, auch die eben berührten allgemeineren Formeln abzuleiten, und dabei von folgenden Voraussetzungen ausgehen. — Es sei nämlich Fig. 49 M das Object in seiner anfänglichen Lage, O

der anfängliche Drehungspunct, dessen Coordinaten wie oben d und δ; OP die Drehungsachse, die mit der Abscissenachse einen Winkel ψ vor und ψ' nach der Verlegung machen soll; d', δ' endlich seyen die Coordinaten des verlegten Dreh- oder Anfangspunctes der Achse. Diess vorausgesetzt, findet man sowohl für den Fall, dass das Object sich zugleich um die Achse OP umschlägt, als auch für jenen, wo dieses nicht geschieht, mit den Formeln (1) ganz ähnliche Formeln, wobei die Coefficienten nunmehr von den Grössen $d\,\delta$, $d'\,\delta'$, ψ und ψ' abhängen. Man begreift, dass für den zweiten Fall diese gegenwärtigen Formeln mit jenen in (1) identisch werden, da $\psi' - \psi = \varrho$ ist.

§. 24.

In Beziehung auf Ortsveränderungen im Raume dreier Dimensionen werden wir von nachfolgenden, den obigen ganz analogen Voraussetzungen ausgehen. Man denke sich Fig. 50 irgend ein Object im Raume, ferner eine willkührlich angenommene Linie OP von unbestimmter Länge, aber bestimmtem Anfangspuncte O, dessen Coordinaten wir mit α, β, γ bezeichnen wollen. Die Lage der Linie OP selbst, welche wir die Achse nennen werden, sey noch weiters durch die nachfolgenden Bestimmungsstücke festgestellt, nämlich erstlich durch den Winkel φ, welchen die Projection dieser Achse mit der Achse der x einschliesst, und durch den Winkel ψ, oder den Neigungswinkel der Achse OP zur Ebene xy. — Nun denke man sich diese Achse OP und mit ihr das Object M selbst eine solche Lage annehmend, dass die Coordinaten α, β, γ des Anfangspunctes in α', β', γ' die Winkel φ und ψ in φ' und ψ' übergehen und das Object M (man mag sich zu diesem Behufe von dem Objecte auf die Achse irgend eine Senkrechte gezogen denken) um die Achse OP eine Drehung um den Winkel ϑ mache. Sucht man, wie im ersten Capitel des folgenden Abschnitts in der That geschehen ist, diejenigen Formeln, welche die dieser Ortsveränderung entsprechenden Änderungen in den betreffenden Functionsgleichungen durch einfache Substitution hervorbringen, so erhält man ihrer analytischen Form nach höchst einfache, den obigen (1) analoge Formeln, nämlich:

$$(1)\quad \begin{cases} x = a + b\,x' + c\,y' + d\,z', \\ y = a_1 + b_1 x' + c_1 y' + d_1 z', \\ z = a_2 + b_2 x' + c_2 y' + d_2 z', \end{cases}$$

wobei wieder sämmtliche Coefficienten als aus den Grössen α, β, γ, α', β', γ', φ, φ', ψ, ψ', ϑ zusammengesetzt oder vielmehr als gewisse Functionen dieser Bestimmungsstücke erscheinen.

Da sich unter diesen namhaft gemachten eilf Bestimmungsstücken fünf, nämlich α, β, γ, φ und ψ als völlig und in jeder Beziehung willkürliche herausstellen, so begreift man wohl von selbst, dass sich demnach jede beliebige Lage eines Objectes nicht etwa bloss auf eine einzige, sondern auf unendlich viele verschiedene Weisen bewerkstelligen lasse. Wenn daher der Hinblick auf die im zweiten Abschnitte, Capitel 1, §. 5 aufgestellten eigentlichen Werthe der Coefficienten a, b, c u. s. w. (oder wie sie dort heissen P, Q, R u. s. w.) im ersten Augenblicke den Gedanken erwecken sollte, als wären diese Dislocationsformeln im Vergleich mit unsern bisher gebräuchlichen sogenannten Transformationsformeln der analytischen Geometrie überwiegend zusammengesetzt; so muss hierauf erwidert werden, dass dieses nur scheinbar ist, und dass diese Formeln, noch vor irgend einer Substitution oder sonstigen Anwendung, nämlich sobald man sich nur über die anfängliche Lage der Dislocationsachse entschieden hat, mit den bisherigen Transformationsformeln ihrer äussern Complexion nach ganz übereinstimmen. Welchen unschätzbaren Werth und Vorzug aber derartige Formeln mit unbestimmten und willkürlichen Grössen bei analytischen Untersuchungen darbieten, ist bereits so allgemein anerkannt, dass wir es gar nicht einmal für nothwendig halten, auf die Aufgaben des dritten Abschnitts hinzudeuten. — Dass auch hier wieder ein System von Gegenformeln für die Berechnung constanter Grenzwerthe nothwendig erscheint, bedarf kaum noch einer eigenen Erwähnung.

§ 25.

Diese sehr allgemeinen Dislocationsformeln bewähren sich für alle Arten analytisch-geometrischer Untersuchungen nicht nur als ein ausserordentliches und unschätzbares Erleichterungsmittel, sondern sie bieten denselben zugleich auch eine unerschöpfliche bis zu gegenwärtigen Untersuchungen völlig verborgen gelegene Fundgrube der wichtigsten mathematischen Wahrheiten dar. Es kann natürlich hier nicht erwartet werden, eine vollständige Aufzählung aller derjenigen Classen von Untersuchungen, die sich hier schon nach dem gegenwärtigen Standpuncte erschliessen, niedergelegt zu finden; obwohl wir nicht ermangeln werden, auf einige der vorzüglichsten noch in diesem Paragraphe hinzuweisen, und in den folgenden Abschnitten in Ausführung zu bringen. — Hätte man ja bis zu gegenwärtigem Augenblicke die Formeln für Transformation der Coordinaten im Raume zu etwas anderem, als zu blossen Vereinfachungen und Reductionen vorliegender zusammengesetzter Functionsausdrücke, und was damit unmittelbar zusammenhängt, verwendet, oder vielmehr die Veranlassung und Mittel hierzu gehabt, so würde man gewiss, man darf keinen Augenblick daran zweifeln, bald genug das Unzukömmliche und Verwirrende einer solchen cumulativen Behandlung völlig fremdartiger Probleme gefühlt, und diesem Übelstand ungefähr auf demselben Wege wie wir abzuhelfen gesucht haben.

Zum grossen Nachtheile für diese Angelegenheit aber war gerade diese Anwendung auf Vereinfachung vorliegender Functionsausdrücke (wie z. B. bei der Discussion von Gleichungen) eine solche, die sowohl von einer Ortsveränderung des Objectes, als auch von einem Wechsel der Coordinaten erwartet werden konnte, und gewiss nur desshalb entging diese ungeeignete Verbindung dieser beiden wichtigen Probleme. — Uns dagegen, der wir uns vor Allem anschickten, beliebig viele Objecte in beliebigen Lagen zu einander, d. h. ganze Systeme derselben durch eine einzige Gleichung analytisch zu repräsentiren, und sofort auch mit ihnen beliebige Ortsveränderungen u. s. w. vorzunehmen, musste eine Entwirrung des sogenannten Transformationsproblems und eine abgesonderte Behandlung dieser beiden Probleme als eine *conditio sine qua non* entgegentreten.

Wird das Problem der Dislocation statt auf alle Objecte gleichförmig nur auf einige von ihnen oder gar nur auf einzelne Theile oder wenn auf alle, doch auf verschiedene verschieden angewendet, so erhält man das, was wir die Transfiguration genannt haben. Durch sie ist man im Stande, Linien, Figuren, Flächen und Flächenräume, Oberflächen und Körperräume der mannigfaltigsten Art und Zusammensetzung zu bilden, d. i. analytisch darzustellen, Probleme über die Theilung durchzuführen und eine grosse Zahl unbestimmt analytisch geometrischer Aufgaben aufzulösen, von der Art, wie wir sie in der Vorrede zu unserer frühern Abhandlung anzuführen uns veranlasst fanden. Eine andere Anwendung unserer Dislocations-Formeln beruhet auf der zulässigen und erlaubten Annahme, dass auch die bis dahin als unveränderlich und von einander völlig unabhängig angenommenen constanten Bestimmungsstücke als von einander auf bestimmte Weise abhängig und sie sowohl wie sämmtliche Winkel als Functionen der Zeit betrachtet werden können. Hierdurch nun setzt man sich sofort in den Stand, selbst die complicirtesten und schwierigsten Probleme über Bewegungen der verschiedenen Objecte mit voller Sicherheit und Bestimmtheit aufzulösen, wenn anders nicht die Analysis ihre Hilfe versagt, ein Umstand, der natürlich nicht der analytischen Geometrie als solcher, sondern lediglich nur der erstern selbst zum Vorwurfe gemacht werden könnte. Ebenso können die Dislocationsformeln dazu verwendet werden, zu untersuchen, ob zwei verschiedene Functionsausdrücke einem und demselben geometrischen Objecte entsprechen oder nicht. Kann nämlich die eine von ihnen für keinen Werth der Bestimmungsgrössen bei Anwendung jener Formeln mit der andern identisch werden, so ist sie von ihr wesentlich verschieden, und entspricht einem andern Objecte.

Wir haben nicht ermangelt, Aufgaben der eben bezeichneten Art in schicklicher Auswahl im dritten Abschnitte zusammenzustellen, und glauben hier einer weitern Exposition dieses Gegenstandes um so mehr überhoben zu seyn, als wir es vorziehen, die Sache selbst hierüber sprechen zu lassen.

Bevor wir jedoch noch Einiges über die Veränderung der Coordinaten und über die geometrischen Formänderungen, als über das, was sich dem Gesagten zunächst anschliesst, beifügen, müssen wir im folgenden Paragraphe einige allgemeine und nicht ganz unwichtige Bemerkungen folgen lassen.

§. 26.

Die von uns in Anwendung gebrachte Methode, analytische Untersuchungen zu behandeln, bringt die Nothwendigkeit mit sich, sowohl von in sich selbst zurückkehrenden, als auch von beliebig begrenzten Objecten die Projection derselben auf die Achse x oder auf die Ebene xy finden zu können; denn diese bieten ja die Grenzwerthe der Function selbst dar. Man kann hierbei auf eine doppelte Art verfahren. Sind z. B. Functionen von der Form $y = F(x)$ oder $Z = F(x, y)$ gegeben, wovon die eine im Allgemeinen eine Curve, die andere eine krumme Fläche repräsentirt; sollen beide einen Raum abschliessen, d. h. soll die Function $y = F(x)$ eine in sich zurückkehrende Curve, die Function $z = F(x, y)$ eine, einen Körperraum einschliessende Oberfläche repräsentiren: so müssen diese Functionen stets vielförmige, wenigstens aber zweiförmige seyn, welches bekanntlich daran erkannt werden kann, dass jedem einzelnen Werthe von x, oder beziehungsweise von x und y mehrere Werthe von y oder z

entsprechen. Von dieser Regel sind nur allein jene Puncte ausgenommen, die der obern und untern Begrenzungscurve oder Fläche zugleich angehören, und diese sind es daher auch, welche als äusserste Puncte der Projection entprechen. Zerlegt man daher diese zweiförmigen Functionen, worauf auch schon *Cauchy* der Analysis wegen drang, in ihre einfachen Functionswerthe, d. h. setzt man z. B.

$$(1)\quad y = F(x) = \varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x) \quad \text{und} \quad (2)\quad Z = F(x, y) = f(x, y)\,\omega\,f^{1}(x, y);$$

so liefert die Gleichung

$$(3)\quad \varphi(x) = \varphi'(x) \quad \text{und} \quad (4)\quad f(x, y) = f^{1}(x, y)$$

die eigentlichen Projecten und beziehungsweisen Grenzwerthe für (1) und (2). — Nimmt man an, dass man aus der Gleichung (3) $x = \alpha\,\omega\,\alpha'$ findet, aus (4) dagegen $y = \psi(x)\,\omega\,\psi'(x)$, so hätte man sofort:

$$(5)\quad y = \Big\{F(x)\Big\}_{\alpha}^{\alpha'} \quad \text{und} \quad (6)\quad Z = \psi(x)\Big\{F(x, y)\Big\}\psi'(x). —$$

Bei sehr vielen Curven und krummen Flächen besteht die Vieldeutigkeit der Functionen lediglich in dem doppelten Vorzeichen einer Wurzelgrösse, wie z. B. durch:

$$y = A \pm \sqrt{M} = (A + \sqrt{M})\,\omega\,(A - \sqrt{M}).$$

In diesem Falle hat man nach obiger allgemeinen Regel:

$$A + \sqrt{M} = A - \sqrt{M}, \text{ woraus } 2\sqrt{M} = 0 \text{ oder } M = 0, \text{ d. h.}$$

in diesem Falle braucht man nur die unter den Wurzelzeichen stehende Grösse gleich Null zu setzen, um die verlangten Grenzwerthe zu erhalten. — Ein anderes, öfters mit Vortheil anzuwendendes Verfahren beruht auf dem Umstande, dass für eben diese Puncte des Objectes die trigonometrische Tangente unendlich und somit die Cotangente gleich Null seyn müsse. Man wird daher zu setzen haben:

$$\left(1 : \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)\right) = 0, \text{ d. h. } \frac{d\,x}{d\,y} = 0.$$

Die Vielförmigkeit der Functionen bringt es auch mit sich, dass bei den Ortsveränderungen solcher Objecte jedem einzelnen Grenzwerthe von x nach der Dislocation mehrere solche entsprechen können; denn da man, um das veränderte α, d. h. um α' zu finden, in Formeln von der Form (1) §. 23 und 24 nicht nur das alte α, sondern auch das diesem α entsprechende $\beta = \varphi(\alpha)$ zu setzen hat, so wird α' dem Werthe einer vielförmigen Function gleich, und mithin mehrere im Allgemeinen verschiedene Werthe haben. Und so muss es auch seyn, wenn unsere Formeln mit der Wahrheit übereinstimmen sollen. Fig. 51 und Fig. 52 zeigen augenscheinlich, wie dem Grenzwerthe α in Fig. 51 vier neue in Fig. 52 entsprechen. —

Nach dieser kleinen Diversion wollen wir zur Verfolgung unserer oben abgebrochenen Betrachtungen zurückkehren.

§. 27.

Obgleich wir bereits schon früher nicht umhin konnten, zu bemerken, dass die Wahl des Coordinaten-Systems, d. h. die Art und Weise, wie die sämmtlichen Puncte eines Objectes mit den feststehenden Achsen und Ebenen des Coordinaten-Raumes in Verbindung gebracht werden, wenn auch nicht gleichgiltig, doch von sehr untergeordneter Wichtigkeit sey, da ihnen schon durch diese auf alle Puncte gleichmässig sich erstreckende und somit systematische Vorkehrung allein alle Vortheile einer analytischen Behandlungsweise zufliessen: so darf man es sich doch nicht verhehlen, dass anderseits eine passende Wahl desselben der ganzen Untersuchung den Charakter einer besondern Einfachheit, Leichtigkeit und Zierlichkeit aufzudrücken vermag, und dass man eben desshalb auch sich nicht bloss auf die bisher gebräuchlichen geradlinigen und polaren Systeme beschränken sollte. — Auch scheint uns, in der Voraussetzung, dass alle Functionsgleichungen, die eine Verbindung unter einander eingehen sollen, sich nothwendig auf dasselbe geradlinige oder polare Coordinaten-System beziehen sollen, eine unnöthige und die freie analytische Bewegung hemmende Beschränkung zu liegen, deren man sich gar wohl entheben kann; denn nichts ist wohl begreiflicher, als dass man jeden verlangten Zweck auch dadurch erreichen könne, dass man mit Belassung ihrer verschiedenartigen Coordinaten die Bedingungsgleichungen ihrer Verbindung selbst, diesen gemäss abändert, und so lassen sich gar wohl entweder Gleichungen, die sich auf verschiedene Polar- oder geradlinige Systeme beziehen, oder auch diese unter einander in eine Gleichung zusammenfassen. Das zweite Capitel des folgenden Abschnittes wird mehreres hieher Gehörige enthalten, und wir begnügen uns nur noch bezüglich eines sehr brauchbaren Systems, welches gleichsam aus dem geradlinigen und dem Polar-System zusammengesetzt ist, eine kurze Erwähnung zu thun. Es sey MQ Fig. 53 irgend ein in der Ebene befindliches geometrisches Object, 0 ein willkürlicher, im Coordinaten-Raume befindlicher, durch seine Coordinaten d und δ gegebener Punct als Pol; OP als Achse eines selbstständigen Polar-Systems, von welcher aus man die Polarwinkel v zählt, ϱ der Neigungswinkel der Achse gegen x, und u der Radiusvector des Punctes M, so wie x, y dessen rechtwinklige Coordinaten. Setzt man überhaupt die Lage des Poles im rechtwinkligen Coordinaten-Raume ein für allemal als bekannt voraus, so kann man mit leichter Mühe sich eine Gleichung zwischen y uud v, oder wohl auch zwischen x und v aufstellen, welche alle Vortheile des geradlinigen und polaren Systems in sich zu vereinen scheint, und von der man auch ohne viele Umstände auf das eine wie das andere System zurückgehen kann. Wir haben von diesem Systeme in unserer frühern und der gegenwärtigen Abhandlung mit Vortheil Gebrauch gemacht. —

Die in der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zu beantwortende Aufgabe besteht unsers Erachtens darin: eine vorliegende Gleichung bei geänderter Bedeutung der Variablen x und y in eine solche zu verwandeln, welche noch immer demselben Objecte in der frühern Lage im Raume entspricht.

Die Transformation der Coordinaten *in sensu strictiori* oder die Verwandlung der Coordinaten bewirkt also weder eine Änderung in der Lage, noch in der Form der betreffenden Objecte, und darf eben desshalb mit dem Dislocations-Probleme nicht verwechselt werden. — Und nun wollen wir noch zu denjenigen Betrachtungen übergehen, welche gewissermassen den Schluss unserer gegenwärtigen Aufgabe machen, nämlich zu jenen der freiwilligen und absichtlichen Formänderung. —

§. 28.

Aus unsern frühern Betrachtungen geht zur Genüge hervor, dass die Substitution gewisser Functionswerthe für x und y in eine vorliegende Gleichung, einer blossen Ortsveränderung des gegebenen Objectes entspreche, und es wurde dabei ausdrücklich erwähnt, dass die Form dieser Formeln stets eine lineare sey, deren constante Coefficienten von gewissen Bestimmungsstücken abhingen. Im zweiten Abschnitte, wo diese Abhängigkeit selbst genau dargethan und nachgewiesen werden wird, kann man sich augenscheinlich überzeugen, dass alle möglichen Ortsveränderungen nicht einmal die Ordnung der linearen Functionen völlig erschöpfen, und dass es somit selbst der linearen Gleichungen unzählige geben müsse, welche jedenfalls in Folge ihrer Substitution bei einer vorliegenden Gleichung ganz etwas Anderem, als einer blossen Ortsveränderung des Objectes entsprechen werden. Nun aber bilden die linearen Functionen von x und y nur die allerkleinste Zahl aller möglichen Functionsausdrücke, die für x und y in eine Gleichung gesetzt werden können, und es entsteht daher die unabweisbare und ungemein wichtige Frage: welche Veränderungen an den Objecten wohl die Substitution solcher Formeln hervorbringen mag, die, wie dieses in unzähligen Fällen eintritt, den Bedingungen der Dislocationsformeln nicht entsprechen? — Da in allen diesen unendlichmal häufigern Fällen von einer blossen Ortsveränderung des Objectes nicht die Rede seyn kann, so scheint die Vermuthung völlig gerechtfertigt, und wird durch die folgenden Untersuchungen bis zur Evidenz erhoben, dass hier nur von Formänderungen der Objecte die Rede seyn könne. Und hier nun eröffnet sich der Untersuchung und Forschung ein neues unermessliches Feld. — Da nämlich, wie es sich schon wohl zum Voraus vermuthen liess, der formändernde Functionsausdruck seine Wirkung auf alle Objecte ohne Ausnahme auf eine sehr analoge Weise ausübt und dieselbe sich fast immer schon zum Voraus bei den verschiedensten Objecten voraussagen lässt, so darf man mit aller Zuversicht hoffen, dass diese Classe von Untersuchungen nicht minder wie alle andern in der analytischen Geometrie einer festen wissenschaftlichen Begründung fähig seyn werde. — Während nämlich einige Functionswerthe durch ihre Substitution, jedes Object in ihre symmetrische Gegenform oder in die durch eine totale Umstülpung entstandene verwandeln, wie z. B. eine rechts gewundene Schraubenlinie in eine derlei linksgewundene, ein ungleichwinkliges Trieder in das durch Verlängerung der Ebenen über den Scheitel hinaus mit ihm symmetrische u. s. w.; haben wieder andere die Wirkung an gewissen Stellen, Schleifenlinien und Flächen zu bilden, andere, gewisse Ein- und Ausstülpungen hervorzubringen; wieder andere, die Objecte zu verdrehen, zu krümmen, zu verkürzen oder zu strecken u. s. w., kurz jede beliebige Veränderung mit ihnen vorzunehmen. Ein Mehres hierüber wird der Leser im dritten Capitel des zweiten Abschnitts, insbesondere aber im dritten Abschnitte selbst finden, und dabei sich von demjenigen nachsichtsvollen Urtheile leiten lassen, auf welches die allerersten Anfänge einer völlig neuen Classe von Untersuchungen gerechten Anspruch haben. —

Und mit diesem Paragraphe nun möge der geehrte Leser unsern eigentlichen Vorwurf für geschlossen betrachten. In der That konnte uns nur der Umstand, dass es sich hier um das sichere Verständniss des Folgenden handelt, dazu vermögen, einige der wichtigsten Begriffe einer vorgängigen Erörterung zu unterziehen. —

II. Abschnitt.

Von der Dislocation und Transfiguration geometrischer Objecte in der Ebene und insbesondere im Raume; von der Transformation oder Änderung der Coordinaten und von der Formänderung der geometrischen Objecte.

I. Capitel.

Die allgemeine Lehre von der theilweisen und totalen Ortsveränderung geometrischer Objecte.

§. 1.

Wenn Puncte, Linien, Figuren, Flächen und Körper oder auch beliebige Zusammenstellungen aus ihnen, d. h. ganze Systeme derselben ihre Lage gegen die ursprünglich als fest angenommenen Coordinaten-Achsen oder bei räumlichen Objecten gegen die Coordinaten-Ebenen ändern, so behalten sie entweder ihre frühere Stellung gegen einander bei, oder es ändern zugleich alle oder auch nur einige von ihnen ihre Lage zu einander. — Die erstere Veränderung der Objecte wollen wir, wie dieses auch schon früher geschehen ist, die Dislocation, jene zweite dagegen, da sie in der That eine Formänderung, wenn auch nicht der einzelnen Objecte, doch jedenfalls jenes Systems nothwendig herbeiführt, die Transfiguration nennen. Es ist sehr begreiflich, dass sowohl das Problem der Dislocation, als auch jenes der mit ihr innig verwandten Transfiguration von der Art und Weise, wie die Coordinaten gezählt werden, und ob man sich der rechtwinkeligen, schiefwinkeligen oder der Polar-Coordinaten bediene, völlig unabhängig ist, wesshalb wir auch nicht umhin können, die Untersuchungen über die Coordinaten-Veränderungen von unseren gegenwärtigen Betrachtungen strenge zu trennen, und sie einem eigenen Capitel zu überweisen. So kann man sich z. B. recht wohl ein oder mehrere Polygone oder auch Polyeder allein oder mit andern Objecten gleichzeitig in der Ebene oder im Raume aus ihrer anfänglichen Lage verrückt und an andere Orte hin verlegt denken, ohne dass sich weder an diesen Objecten selbst, noch auch in ihrer gegenseitigen Stellung zu einander im Geringsten etwas zu ändern braucht, — während wieder dagegen ein andersmal auch ihre Stellung sich ändert; ja sogar einzelne Objecte in ihre Bestandtheile sich auflösen, und zu neuen geometrischen Figuren sich gruppiren. Sowohl die eine, als die andere Veränderung kann an geometrischen Objecten gedacht und vorgenommen werden, ohne auch nur, wie gesagt, im Geringsten eine Änderung in der Lage der Coordinaten gegeneinander nothwendig voraussetzen zu müssen. Wenn man daher demungeachtet das Problem der Dislocation (denn der Transfiguration bedurfte man bis jetzt überhaupt nicht) gleichzeitig mit jenem für die Änderung der Lage der Coordinaten unter der gemeinschaftlichen Benennung der Transformation des Coordinaten-Systems zusammen zu fassen und zu behandeln pflegte: so kann ein solches Verfahren zwar von unserem Gesichtspuncte aus in keiner Weise gebilligt werden, dürfte aber übrigens durch den Umstand entschuldigt werden, dass bei der bisherigen, höchst beschränkten Anwendung dieser Formeln das Bedürfniss einer solchen getrennten Behandlungsweise dieser schon ihrer Natur nach, heterogenen Probleme nicht stark genug fühlbar werden mochte.

§. 2.

In Bezug auf die Ableitung der Dislocationsformeln für Gegenstände in der Ebene verweisen wir auf unsere frühere Abhandlung, und was die vollständige Aufzählung der in ihnen enthaltenen speciellen Fälle anbelangt, gleichfalls auf unsere frühere Abhandlung pag. 36 — 38, und bemerken hier nur, dass der Übereinstimmung mit dem Folgenden wegen, statt der Grössen d, δ, d' δ', die beziehungsweise gleichbedeutenden α, β, α', β', eingeführt werden sollen. Man hat demnach:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x' = \alpha' + (x-\alpha)\cos.\varrho - (y-\beta)\sin.\varrho \\ y' = \beta' + (x-\alpha)\sin.\varrho + (y-\beta)\cos.\varrho \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{II.}\ \begin{cases} x = \alpha + (y'-\beta')\sin.\varrho + (x'-\alpha')\cos.\varrho \\ y = \beta + (y'-\beta')\cos.\varrho - (x'-\alpha')\cos.\varrho. \end{cases}$$

Ist $\alpha = \alpha' = 0$ und $\beta = \beta' = 0$, so entspricht dieses dem von uns schon im nächsten Paragraphe in Anwendung gebrachten Falle, wo das Object sich einfach um den Ursprung des Systems dreht, und man erhält diessfalls:

$$(3)\ \begin{cases} x' = x.\cos.\varrho - y.\sin.\varrho \\ y' = x.\sin.\varrho + y.\cos.\varrho \end{cases} \quad \text{und} \quad (4)\ \begin{cases} x = y'\sin.\varrho + x'\cos.\varrho. \\ y = y'\cos.\varrho - x'\cos.\varrho. \end{cases}$$

Bei Aufzählung der unter I. und II. begriffenen speciellen Fälle verdient noch eigens bemerkt zu werden, dass man bei keinerlei Annahme der Grössen α, α', β, β' und ϱ, aus obigen Formeln gleichzeitig $x' = x$ und $y' = -y$ erhält, und wie später gezeigt werden soll, erhalten könne.

Bei vielen Problemen lässt sich zwar der Drehungswinkel ϱ nicht unmittelbar angeben, man kennt aber in diesen Fällen fast immer irgend eine mit dem Objecte in fixer Verbindung gedachte, völlig bestimmte Linie OM, Fig. 55, deren Lage auch noch nach der Verlegung und Drehung sich durch Coordinatenbestimmungen leicht angeben lässt. — Da es sich nun hier lediglich um die Bestimmung des Winkels ϱ handelt, so erhält man mittelst der gewöhnlichen trigonometrischen Formel, wenn α, β und α', β' die untern, und α'', β'' und α''', β''' dagegen die obern Grenzen der Coordinaten bezeichnen, offenbar:

$$(5)\quad \tang.\varrho = \frac{(\alpha''-\alpha)(\beta'''-\beta')-(\alpha'''-\alpha')(\beta''-\beta)}{(\alpha'''-\alpha')(\alpha''-\alpha)+(\beta'''-\beta)(\beta''-\beta)};$$

wodurch sofort auch $sin.\varrho$ und $cos.\varrho$ ihrem Werthe nach bestimmt, und in obige Formeln I. und II. gesetzt werden können. — Die hier und im Frühern aufgezählten Hilfsmittel reichen vollkommen hin, um jede beliebige Stellung eines Objectes im Coordinatenraume einer Ebene ohne alle Schwierigkeit und meistentheils sogar auf eine mehrfache Weise herbeizuführen.

§. 3.

Auf eine völlig analoge Weise, wie bei der Ableitung der Dislocationsformeln für die Ebene, hat man bisher auch das Problem über die Ortsveränderungen geometrischer Objecte im Raume gleichzeitig mit der Transformation für die Coordinaten aufzulösen gesucht. Man geht hiebei noch immer von der Ansicht aus, dass sich jede Veränderung in der Lage eines geometrischen Gegenstandes und zwar auch bei einer allenfalls gleichzeitigen Veränderung des Coordinaten-Systems, jederzeit durch eine veränderte Neigung der Coordinaten-Ebenen bezüglich ihrer anfänglichen Lage und durch eine gleichzeitige Verlegung ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes oder Ursprungs erreichen lassen müsse. — Will man indessen die dadurch erlangten Formeln noch zu etwas Anderem als zur blossen Discussion von Gleichungen und zu deren allenfallsigen Vereinfachung benützen: so reichen dieselben, abgesehen davon, dass ihnen überdiess alle Anschaulichkeit mangelt, durchaus nicht mehr hin; denn in unzählig vielen Fällen wird man es nothwendig finden, den verschiedenen geometrischen Objecten, oder sogar einzelnen Theilen derselben, eine verschiedene Lage oder Stellung anzuweisen, ohne die Lage gewisser anderer zum Systeme gehörigen Puncte, Linien und Flächen oder Körper im Geringsten abzuändern. Will man daher in diesen Fällen nicht zu den unnatürlichsten und jeder klaren Einsicht völlig unzugänglichen Vorstellungsweisen seine Zuflucht nehmen, so reichen die auf dem bisherigen, eben erwähnten Wege gefundenen Formeln durchaus und in keiner Weise mehr aus, und es stellt sich noch weit dringender, als bei den Untersuchungen in der Ebene, die unabweisliche Forderung fest, auch für die verschiedenen Untersuchungen im Raume eine zweckmässige Methode anzugeben, genannte Transformationen und Dislocationen bei stets klarer Einsicht in den Vorgang der Rechnung vorzunehmen. Um daher zu den geeigneten Formeln zu gelangen, wollen wir von den nachfolgenden Betrachtungen ausgehen. —

Es sey Q, Fig. 56, irgend ein im Coordinaten-Raume befindlicher geometrischer Gegenstand, NM eine mit ihm unveränderlich verbunden gedachte Linie von beliebiger Länge und Richtung, deren Lage durch die nöthigen Bestimmungsstücke, und zwar in unserm Falle, nebst den Coordinaten α, β, γ des Anfangspunktes N noch durch den Winkel φ, welchen ihre horizontale Projection OP mit der Achse x, so wie weiter durch den Winkel ψ, den die Linie MN selbst mit der Ebene xy, oder was dasselbe ist, mit ihrer Projection oder jeder zu ihr parallel gezogenen NK einschliesst, gegeben ist. Statt durch die beiden Winkel ψ und φ, kann die Linie NM, welche wir sofort die Achse nennen werden, auch noch durch die Coordinaten a, b, c eines zweiten ihrer Puncte festgestellt werden, welchen Fall wir am geeigneten Orte eigens berücksichtigen werden. — Diese Achse nun kann je nach Umständen ganz oder zum Theile ausserhalb des Gegenstandes, und von ihm völlig getrennt, oder auch ganz in demselben liegend, angenommen und gedacht werden. Immer aber muss man sich vorstellen, dass ihre Lage sich gegen das geometrische Object nicht verändere.

Denkt man sich nun die Linie MN mit ihrem Objecte Q dergestalt von ihrer Stelle gerückt, dass dabei die Linie NM als Drehachse eine im Allgemeinen völlig verschiedene, den Bestimmungsstücken α', β', γ', φ', ψ' entsprechende Lage annimmt, und lässt man zugleich das Object Q sich um die Achse NM von dem Winkel θ auf θ' und somit um den Winkel $\theta' - \theta = \vartheta$ drehen; so ist es sehr begreiflich, dass man mit Leichtigkeit, und zwar auf unendlich verschiedene Weisen, das geometrische Object Q jede beliebige oder nothwendig erachtete Lage im Coordinaten-Raume einnehmen lassen kann. — Bei Anwendung der bisherigen Transformations-Formeln konnte bekanntlich eine bestimmte Stellung eines Gegenstandes nur auf eine einzige Weise erzweckt werden, welches selbst abgesehen von der obwaltenden Dunkelheit im Vorgange, der allgemeinen Anwendbarkeit dieser Formeln einen ungemeinen Abbruch thut. — Wenn daher die von uns abgeleiteten und aufgestellten Dislocations-Formeln in ihrer grössten Allgemeinheit ungleich complicirter erscheinen, als die bisher gebräuchlichen, und in ihnen nicht weniger als sechs völlig unbestimmte und somit willkürliche Grössen auftreten (nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \theta$); so kann dieser Umstand in keiner Weise als eine Unvollkommenheit, wohl aber vielmehr als ein grosser und wichtiger Vorzug unserer Formeln vor den bisherigen bezeichnet werden, zumal da unsere Formeln nicht nur in jedem speciellen Falle von selbst sich ungemein vereinfachen, sondern man auch durch die so ausserordentlich erleichterte Anwendung derselben mehr als zur Genüge dafür entschädigt wird *).

§. 4.

Um der Lösung unserer wichtigen Aufgabe näher zu rücken, wollen wir nach einander noch folgende Betrachtungen anstellen. Vorerst aber wollen wir noch bemerken, dass wir den verschiedenen Veränderungen, welche die Coordinaten x, y, z eines anfänglichen Punctes nach und nach erleiden, durch x', y', z' und x'', y'', z'' anzeigen und nur erst, wenn wir zu den verlangten Endformeln gelangt seyn werden, anstatt x'', y'', z'' die einfachen x, y, z dafür setzen werden, da von dort an keine störende Verwechslung mehr zu befürchten ist. Auch wird es von uns für eine Sache, die keiner weitern Erörterung bedarf, angesehen, dass man überall, wo von einer bloss parallelen Ortsveränderung die Rede ist, nur statt x, y, z die Werthe $(x - \alpha)$, $y - \beta$ und $z - \beta$ u. s. w. zu setzen brauche.

Man denke sich nun irgend einen Punct im Raume, z. B. S, Fig. 57, dessen Coordinaten x, y, z seyn mögen, und die Achse der x, d. h. die Linie Ax selbst als anfängliche Drehungs-

*) Es dürfte wohl kaum mehr nöthig erscheinen, diese Behauptung noch weiters zu rechtfertigen, da sicherlich jeder meiner verehrten Leser, auch ohne mein Zuthun, mit mir überzeugt seyn dürfte, dass diese grössere Complicität der Formeln in der That im eigentlichen Sinne nur eine scheinbare ist, indem diese Formeln in jedem speciellen Falle noch vor aller Anwendung durch Feststellung der willkürlichen Grössen auf die gewöhnliche Ausdehnung der bisherigen Transformations-Formeln, mit denen sie überdiess ihrer Form nach nahe übereinstimmen, zurückgebracht werden.

achse. Wir wollen nun annehmen, das geometrische Object, dessen einen Punct S wir sofort im Auge behalten, bewege, d. h. drehe sich dergestalt um die Achse x, dass in Folge dieser Drehung der Punct S nach S' gelangt, und demnach die gedachte Verbindungslinie in SP einen Winkel θ beschreibt. Es ist hierbei klar, dass unter diesen Voraussetzungen sich wohl die Coordinaten y und z verändern und in $O'P=y'$ und $S'O'=z'$ übergehen, AP oder x dagegen unverändert bleibt. Nimmt man daher, um diese Änderungen zu ermitteln, zu den oben §. 2 aufgestellten Gleichungen seine Zuflucht, so findet man sofort, da der Bedeutung nach das dortige x mit y und y mit z hier zu verwechseln ist:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = x, \\ y' = cos.\theta y - sin.\theta x, \\ z' = sin.\theta y + cos.\theta x, \end{cases}$$

welche Gleichungen der in Fig. 57 dargestellten Veränderung entsprechen.

Hierauf nun denke man sich die Achse x oder Ax, oder wenn es die Vorstellung unterstützt, die ganze Coordinaten-Ebene xz selbst, jedoch dergestalt sich in der Ebene xy fortbewegend (wobei die Ebene xz sich um die Achse z drehend gedacht werden muss), dass mit ihr auch jener ins Auge gefasste Punct S und somit auch seine mit der Achse x in fester Verbindung gedachten Coordinaten x', y', z' an dieser Bewegung gleichzeitig Theil nehmen, und nunmehr vorerst eine Lage einnehmen, wie sie in Fig. 58 durch S' bezeichnet ist. Der Winkel selbst, um den sich die Achse Ax hierbei fortbewegt, nämlich xAx' soll mit φ bezeichnet werden. — Hier angelangt, erhebe sich nun die Achse Ax' in ihrer Projections-Ebene, d. h. in der Ebene zAx', und zwar um den Winkel $P'AP=\psi$, wodurch, da der Punct S' auch an dieser Bewegung Theil nimmt, offenbar S' nach S'' gelangt. — Vorerst ist so viel klar, dass, da die Linien $O'P$, $S'R$, $O''P'$, $S''R'$, gleich lange sind, und sämmtlich auf der Ebene $x'Az$ senkrecht stehen, auch deren sämmtliche Projectionen und mithin auch $O'''T$ gleich lang und senkrecht auf Ax' selbst stehen müssen. Diess vorausgesetzt, ergeben sich nun folgende Bestimmungen:

$$AP = x = x' \text{ und mit } AP \text{ in Fig. 57 einerlei;}$$
$$O'P = y' = O'''T \text{ und mit } O'P \text{ in Fig. 57 einerlei;}$$
$$RP = O'S' = z' = O''S'' \text{ und mit } O'S' \text{ einerlei;}$$

ferner ist offenbar:

$$AP''' = x'';$$
$$P'''O''' = y'';$$
$$S'''O''' = z'' = TR';$$

und endlich möge $AT = \xi$ bezeichnet werden.

Um nun zuvörderst den Vorgang in der Ebene zAx' bezüglich der Puncte R und R' zu ermitteln, kehren wir nochmals zur Anwendung der Formeln des §. 2 zurück, wobei es klar ist, dass wir in selben statt $\varrho = \psi$ für $x' = \xi$, statt $x = x'$ und für $y' = z''$ zu setzen haben. Diess vorausgesetzt, erhalten wir sofort

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = x'.cos.\psi - z' sin.\psi; \\ z'' = x'.sin.\psi + z' cos.\psi. \end{cases}$$

Nun ist aber offenbar, der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke wegen

$\triangle AP''' V \backsim \triangle O''' TV$ wegen, da $\llcorner O''' = \llcorner A = \varphi$ ist; $AV = \xi - y' \, tang. \varphi$, dagegen ist nun aber: $x'' = AV cos. \varphi$, $y'' = AV sin. \varphi + y' sec. \varphi$; und aus obigen Gleichungen die betreffenden Werthe gesetzt, hat man sofort nach gehöriger Reduction:

$$(3)\ {}^{*)} \left\{ \begin{aligned} x'' &= cos.\varphi\, cos.\psi . x' - sin.\psi\, cos.\varphi . z' - sin.\varphi\, y'; \\ y'' &= cos.\psi\, sin.\varphi . x' - sin.\varphi\, sin.\psi . z' + cos.\varphi\, y'; \\ z'' &= sin.\psi\, x' + cos.\psi\, z'. \end{aligned} \right.$$

Substituirt man nun in die gegenwärtigen Formeln (3) für x', y' und z' aus den Gleichungen (1) die betreffenden Werthe, so erhält man ein System von Gleichungen von der Form:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} x'' &= A_1 x + A_2 y + A_3 z; \\ y'' &= B_1 x + B_2 y + B_3 z; \\ z'' &= C_1 x + C_2 y + C_3 z; \end{aligned} \right.$$

wobei die Coefficienten nachfolgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} A_1 &= cos.\varphi\, cos.\psi; \\ A_2 &= -(sin.\varphi\, cos.\theta + sin.\psi\, cos.\varphi\, sin\ \theta); \\ A_3 &= sin.\varphi\, sin.\theta - cos.\varphi\, sin.\psi\, cos.\theta; \\ B_1 &= sin.\varphi\, cos.\psi; \\ B_2 &= cos.\varphi\, cos.\theta - sin.\varphi\, sin.\psi\, sin.\theta; \\ B_3 &= (cos.\varphi\, sin.\theta + sin.\varphi\, sin.\psi\, cos.\theta); \\ C_1 &= sin\,\psi; \\ C_2 &= cos.\psi\, sin.\theta; \\ C_3 &= cos.\psi\, cos.\theta; \end{aligned}$$

Verlegt man endlich den Anfangspunct der gegenwärtigen Drehungsachse, und mit ihm sie selbst, und das geometrische Object zu ihrer jetzigen Lage parallel, vom Ursprunge, nach einem Puncte des Raumes, dessen Coordinaten wir durch α, β, γ bezeichnen wollen, und bestimmt man sodann auch noch die den directen Gleichungen entsprechenden Gegengleichungen, so erhält man nachfolgende zwei Systeme von Formeln, für welche obige aufgeführte Werthe von A_1, A_2, A_3 u. s. w. noch in gleicher Weise ihre Geltung haben, nämlich:

$$\mathbf{a.}\ (1) \left\{ \begin{aligned} x'' - \alpha &= A_1 x + A_2 y + A_3 z; \\ y'' - \beta &= B_1 x + B_2 y + B_3 z; \\ z'' - \gamma &= C_1 x + C_2 y + C_3 z; \quad \text{und} \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{a.}\ (2) \left\{ \begin{aligned} x &= A_1 (x'' - \alpha) + B_1 (y'' - \beta) + C_1 (z'' - \gamma); \\ y &= A_2 (x'' - \alpha) + B_2 (y' - \beta) + C_2 (z'' - \gamma); \\ z &= A_3 (x'' - \alpha) + B_3 (y'' - \beta) + C_3 (z'' - \gamma). \end{aligned} \right.$$

Das erste System dient, wie wir noch weiter sehen werden, zur Bestimmung der constanten Grenzwerthe, das zweite dagegen zur Verwandlung der Functionsgleichungen selbst.

Die vorstehenden Formeln, wiewohl von den gewöhnlichen Transformationsformeln ihrem innern Wesen nach völlig verschieden, reichen nun in der That vollkommen hin, um

*) Es ist kaum zu bezweifeln, dass sich diese Fundamental-Gleichungen auch auf rein analytischem, und wahrscheinlich noch einfacherem Wege werden ableiten lassen.

jede beliebige Lage eines geometrischen Objects im Coordinaten-Raume herbeizuführen. Werden indess diese Formeln nicht bloss, wie es bisher fast ausschliesslich geschah, dazu benützt, bei der Discussion einer Gleichung, dieselbe zur leichtern Ermittlung ihrer Eigenschaften zu vereinfachen, wobei man also die neue Lage des Gegenstandes erst durch den Gang der Untersuchung selbst kennen lernt; sondern wünscht man von Vorneherein dem Gegenstande, wie dieses einestheils, bei den von uns behandelten Problemen der Fall ist, sowohl gegen andere geometrische Objecte, als auch an und für sich im Coordinaten-Raume anzuweisen: so würde man sich noch immer selbst bei Anwendung unserer bisher abgeleiteten, geschweige denn erst bei jener der gewöhnlichen Transformationsformeln in nicht geringer Verlegenheit befinden, für einen bestimmten vorliegenden Fall die betreffenden Werthe von α, β, γ, φ, ψ, θ anzugeben.

Um daher unseren Formeln die möglichste Anwendbarkeit zu verschaffen, müssen wir unsere Betrachtungen noch um einen Schritt weiter fortführen.

§. 5.

Es ist nämlich unstreitig eine sehr einfache und jedenfalls erlaubte Voraussetzung, wenn man annimmt, dass derselbe geometrische Gegenstand Q, nebstdem, dass er zugleich mit seiner Drehungsachse an irgend einen Ort, z. B. N, hin verlegt wurde, ein zweitesmal nach einem andern Orte N' übertragen werde, und man begreift leicht, dass die diessfälligen Dislocationsformeln sich lediglich nur in den speciellen Werthen der Bestimmungsstücke, keineswegs aber in der Form derselben, von einander unterscheiden können. Bezeichnet man daher die Coordinaten des Objectes in dieser neuen Lage mit x''', y''', z''', und versieht sowohl die Coefficienten als auch die ihnen zum Grunde liegenden Bestimmungsstücke mit Accenten, so erhält man ohne weiters zu obigen zwei Systemen a. (1) und (2) noch folgende zwei, nämlich:

$$\textbf{b.}\ (1)\quad \begin{cases} x'''-\alpha' = A_1'\,x + A_2'\,y + A_3'\,z; \\ y'''-\beta' = B_1'\,x + B_2'\,y + B_3'\,z; \\ z'''-\gamma' = C_1'\,x + C_2'\,y + C_3'\,z; \quad \text{und} \end{cases}$$

$$\textbf{b.}\ (2)\quad \begin{cases} x = A_1'\,(x'''-\alpha') + B_1'\,(y'''-\beta') + C_1'\,(z'''-\gamma'); \\ y = A_2'\,(x'''-\alpha') + B_2'\,(y'''-\beta') + C_2'\,(z'''-\gamma'); \\ z = A_3'\,(x'''-\alpha') + B_3'\,(y'''-\beta') + C_3'\,(z'''-\gamma'). \end{cases}$$

Eliminirt man nun, da x, y, z in den vier Systemen von Gleichungen, nämlich in a. (1) und (2) und b. (1) und (2) dieselbe Bedeutung haben, diese Variablen durch wechselseitige Substitution aus den genannten Formeln, so erhält man sofort zwei neue Systeme von Gleichungen, zwischen den Veränderlichen x'', y'', z'' und x''', y''', z''', für welche erstere wir jedoch, da nunmehr unsere Rechnung beendigt und kein Irrthum mehr zu befürchten ist, schlechtweg x, y, z, für die letztern dagegen x', y', z' schreiben werden. Man erhält unter dieser Voraussetzung:

$$\textbf{A.}\ \text{I.}\quad \begin{cases} x' = \alpha' + P(x-\alpha) + P'(y-\beta) + P''(z-\gamma); \\ y' = \beta' + Q(x-\alpha) + Q'(y-\beta) + Q''(z-\gamma); \\ z' = \gamma' + R(x-\alpha) + R'(y-\beta) + R''(z-\gamma); \quad \text{und} \end{cases}$$

$$\text{A. II.}\left\{\begin{array}{l} x=\alpha+P\,(x'-\alpha')+Q\,(y'-\beta')+R\,(z'-\gamma');\\ y=\beta+P'(x'-\alpha')+Q'\,(y'-\beta')+R'\,(z'-\gamma');\\ z=\gamma+P''(x'-\alpha')+Q''(y'-\beta')+R''(z'-\gamma');\quad \text{wo}\end{array}\right.$$

$$P=cos.\,\varphi\, cos.\,\varphi'\, cos.\,\psi\, cos.\,\psi'+sin.\,\varphi\, sin.\,\varphi'\, cos.\,(\theta'-\theta)+cos.\,\varphi\, cos.\,\varphi'\, sin.\,\psi\, sin.\,\psi'\, cos.\,(\theta'-\theta)$$
$$+sin.\,\varphi\, cos.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, sin.\,(\theta'-\theta)-cos.\,\varphi\, sin.\,\psi\, sin.\,\varphi'\, sin.\,(\theta'-\theta);$$
$$P'=cos.\,\varphi'\, cos.\,\psi'\, cos.\,\psi\, sin.\,\varphi-cos.\,\varphi\, sin.\,\varphi'\, cos.\,(\theta'-\theta)-cos.\,\varphi\, cos.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, sin.\,(\theta'-\theta)$$
$$-sin.\,\varphi\, sin.\,\varphi'\, sin.\,\psi\, sin.\,(\theta'-\theta)+sin.\,\varphi\, sin.\,\psi\, cos.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, cos.\,(\theta'-\theta);$$
$$P''=cos.\,\varphi'\, cos.\,\psi'\, sin.\,\psi+sin.\,\varphi'\, cos.\,\psi\, sin.\,(\theta'-\theta)-cos.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, cos.\,\psi\, cos.\,(\theta'-\theta);$$
$$Q=cos.\,\psi'\, sin.\,\varphi'\, cos.\,\varphi\, cos.\,\psi-sin.\,\varphi\, cos.\,\varphi'\, cos.\,(\theta'-\theta)+sin.\,\varphi\, sin.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, sin.\,(\theta'-\theta)$$
$$+cos.\,\varphi'\, cos.\,\varphi\, sin.\,\psi\, sin.\,(\theta'-\theta)+sin.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, sin.\,\psi\, cos.\,\varphi\, cos.\,(\theta'-\theta);$$
$$Q'=cos.\,\psi\, sin.\,\varphi\, cos.\,\psi'\, sin.\,\varphi'+cos.\,\varphi'\, cos.\,\varphi\, cos.\,(\theta'-\theta)-sin.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, cos.\,\varphi\, sin.\,(\theta'-\theta)$$
$$+cos.\,\varphi'\, sin.\,\varphi\, sin.\,\psi\, sin.\,(\theta'-\theta)+sin.\,\varphi'\, sin.\,\psi'\, sin.\,\varphi\, sin.\,\psi\, cos.\,(\theta'-\theta).$$
$$Q''=cos.\,\psi'\, sin.\,\varphi'\, sin.\,\psi-cos.\,\varphi'\, cos.\,\psi\, sin.\,(\theta'-\theta)-sin.\,\varphi\, sin.\,\psi'\, cos.\,\psi\, cos.\,(\theta'-\theta);$$
$$R=sin.\,\psi'\, cos.\,\varphi\, cos.\,\psi-cos.\,\psi'\, sin.\,\varphi\, sin.\,(\theta'-\theta)-cos.\,\psi'\, sin.\,\psi\, cos.\,\varphi\, cos.\,(\theta'-\theta);$$
$$R'=sin.\,\psi'\, cos.\,\psi\, sin.\,\varphi+cos.\,\psi'\, cos.\,\varphi\, sin.\,(\theta'-\theta)-cos.\,\psi'\, sin.\,\psi\, sin.\,\varphi\, cos.\,(\theta'-\theta);$$
$$R''=sin.\,\psi\, sin.\,\psi'+cos.\,\psi\, cos.\,\psi'\, cos.\,(\theta'-\theta).$$

Bei Gelegenheit dieser Eliminationen ergeben sich bezüglich der Coefficienten von a. (1) und 2), und b. (1) und (2) ganz analoge Relationen, wie bei den gewöhnlichen Transformations-Formeln. Es zeigt sich nämlich, dass:

$$\begin{array}{ll} A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2=1. & A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.\\ A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2=1. & A_1A_3+B_1B_3+C_1C_3=0.\\ A_3{}^2+B_3{}^2+C_3{}^2=1. & A_2A_3+B_2B_3+C_2C_3=0.\\ A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2=1. & A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=0.\\ B_1{}^2+B_2{}^2+B_3{}^2=1. & A_1C_1+A_2B_2+A_3C_3=0.\\ C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2=1. & B_1C_1+B_2C_2+B_3C_3=0 \end{array}$$

und in gleicher Weise auch bei den accenturirten Coefficienten der Gleichungen b. (1) und (2). — Noch bemerkenswerther ist es indessen, dass ganz dieselben Relationen auch in Bezug auf die so sehr complicirten Coefficienten der Gleichungen A. I. Statt finden. Es ist nämlich:

$$\begin{array}{ll} P^2+P_{\prime}{}^2+P_{\prime\prime}{}^2=1. & PQ+P'Q'+P''Q''=0.\\ Q^2+Q_{\prime}{}^2+Q_{\prime\prime}{}^2=1. & PR+P'R'+P''R''=0.\\ R^2+R_{\prime}{}^2+R_{\prime\prime}{}^2=1. & QR+Q'R'+Q''R''=0.\quad \text{Aber auch}\\ P^2+Q^2+R^2=1. & PP'+QQ'+RR'=0.\\ P_{\prime}{}^2+Q_{\prime}{}^2+R_{\prime}{}^2=1. & PP''+QQ''+RR''=0.\\ P_{\prime\prime}{}^2+Q_{\prime\prime}{}^2+R_{\prime\prime}{}^2=1. & P'P''+Q'Q''+R'R''=0\ {}^*). \end{array}$$

*) Man kann sich von der Richtigkeit und dem Stattfinden dieser überaus merkwürdigen Relationen auf einem viel einfachern Wege, als jenem durch unmittelbare Substitution, nämlich durch folgendes, mehr indirectes Verfahren überzeugen. Nachdem man nämlich auf oben erwähnte Weise die beiden Systeme von Gleichungen I. und II. gefunden hat, multiplicire man die drei Gleichungen des Systems I. beziehungsweise mit P, Q, R,

Diese unter A. I. und A. II. aufgestellten Gleichungen sind nun die gesuchten Dislocations-Formeln in ihrer allgemeinsten Form, und es erübrigt nur noch, zu bemerken, dass die Formeln des Systems I. für die constanten Grenzwerthe, jene in II. dagegen für die veränderlichen Functionen selbst in Anwendung zu bringen sind. Substituirt man endlich aus den beiden Systemen I. und II. die Werthe wechselseitig in einander, so erhält man, wie dieses auch der Natur der Sache nach seyn muss, ganz einfach $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, welches zugleich für eine Probe der richtig durchgeführten Rechnung gelten kann. — Da ferner $\theta' - \theta$ bloss den Unterschied der beiden Drehungswinkel bezeichnet, und dieser allein hier, wie man sieht, in Rechnung kommt, so werden wir öfters denselben durch ϑ bezeichnen.

§. 6.

Hat man nun irgend einem geometrischen Objecte im Raume, es sey dieses ein Punct, eine Linie, Fläche oder ein Körper, eine neue und bestimmte Lage anzuweisen, und ist beispielsweise die demselben entsprechende Gleichung etwa

$$z = \Big\{_{\alpha}^{\alpha'} \varphi\Big(x, f(x)\Big\{\dot{y}\Big\} f'(x)\Big)\Big\}$$

so setze man, sobald man einmal in Bezug auf die willkürlichen Grössen α, β, γ, φ, ψ, θ, eine Bestimmung getroffen hat, sowohl in die Gleichung des unbegrenztes Objectes, nämlich in $z = \varphi(x, y)$, als auch in die Gleichung des veränderlichen Grenzwerthes von y, nämlich in $y = f(x) \,\omega\, f'(x)$, welche bei den verschiedenen Disjunctivgliedern sehr häufig nur die einzelnen Functionswerthe einer zweiwerthigen Function $F(x)$ vorstellen, die betreffenden Werthe aus System A. II, und bestimmt hieraus wieder in der erstern Gleichung z und in der Grenzgleichung y, wobei in letzterer Beziehung zu bemerken ist, dass man mit Zuhilfeziehung der erstern oder Hauptgleichung, jedesmal auf einen Functionswerth zwischen x und y gelangt, der sofort die neue Grenze für die veränderliche y darbietet. Die constanten Grenzwerthe, z. B. von x, nämlich α und α', oder auch wenn dieses der Fall wäre, jene von y und z müssen durch Substitution in die Gleichungen des Systems A. I. transformirt werden, wie alles dieses im vierten Abschnitt an vielen Beispielen noch bestimmter nachgewiesen werden wird.

§. 7.

Auch bei Untersuchungen im Raume gewährt es öfter eine namhafte Erleichterung, die Lage sowohl der anfänglichen, als der verlegten Drehungsachse statt durch Winkel, noch

sodann aber auch durch P', Q', R' und P'', Q'', R'', und addire sie in jedem einzelnen Falle zusammen. Man erhält in ersterem Falle, wenn man der Kürze wegen, statt $(x - \alpha)$, $(y - \beta)$ und $(z - \gamma)$, ξ, v, ζ, mit und ohne Accente schreibt:

$$P\xi' + Qv' + R\zeta' = (P^2 + Q^2 + R^2)\xi + (PP' + QQ' + RR')v + (PP'' + QQ'' + RR'')\zeta.$$

Da nun aber der vorstehende Ausdruck rechts des Gleichheitzeichens zufolge Systems II gleich ξ seyn muss; so muss $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$; $PP' + QQ' + RR' = 0$ und $PP'' + QQ'' + RR'' = 0$.
Auf gleiche Weise ergeben sich die übrigen der angeführten Relationen.

durch die weitere Angabe eines Punctes festzustellen. In diesem Falle ist es leicht, die Werthe von φ, ψ, so wie jene von φ' und ψ' durch die Coordinaten der neuen Puncte auszudrücken. Werden diese beziehungsweise durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ angedeutet, so hat man, wie für sich klar ist:

$$1)\quad \sin.\varphi = \frac{\mathfrak{b}-\beta}{\sqrt{(\mathfrak{a}-\alpha)^2+(\mathfrak{b}-\beta)^2}}; \qquad \cos.\varphi = \frac{\mathfrak{a}-\alpha}{\sqrt{(\mathfrak{a}-\alpha)^2+(\mathfrak{b}-\beta)^2}};$$

$$\sin.\psi = \frac{\mathfrak{c}-\gamma}{\sqrt{(\mathfrak{a}-\alpha)^2+(\mathfrak{b}-\beta)^2+(\mathfrak{c}-\gamma)^2}}; \quad \cos.\psi = \sqrt{\frac{(\mathfrak{a}-\alpha)^2+(\mathfrak{b}-\beta)^2}{(\mathfrak{a}-\alpha)^2+(\mathfrak{b}-\beta)^2+(\mathfrak{c}-\gamma)^2}}$$

zu setzen, und dieselben Ausdrücke in Bezug auf φ' und ψ' nur accentuirt. — Da es aber gewöhnlich nicht sowohl um eine unmittelbare Substitution in die obigen Formeln, als vielmehr um die Ausmittlung der numerischen Werthe von φ und ψ und ebenso von φ' und ψ' zu thun ist, so kann man sich viel bequemer der nachfolgenden Ausdrücke bedienen, nämlich:

$$\mathrm{tang.}\varphi = \frac{\mathfrak{b}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha} \quad \text{und} \quad \mathrm{tang.}\psi = \frac{\mathfrak{c}-\gamma}{\sqrt{(\mathfrak{a}-\alpha)^2+(\mathfrak{b}-\beta)^2}}.$$

Endlich kann es wohl Niemanden entgehen, dass die Winkel θ' und θ nur als Differenz $\theta'-\theta=\vartheta$, in sämmtlichen hier abgeleiteten Formeln auftreten, welcher Umstand deutlich genug beweist, dass nur wieder (wie schon bei jenen für die Ebene) bloss der eigentliche Drehungswinkel, und mithin völlig abgesehen davon, von wo aus die Winkel $\theta'-\theta$ gerechnet werden, einen Einfluss auf das Resultat ausübet. Auch liesse sich selbst dieser Winkel durch die weitere Angabe eines dritten Punctes ohne viele Schwierigkeit aus genannten Formeln eliminiren, und somit wäre auch für den Fall gesorgt, wo drei willkürlich angenommene Puncte eines Objectes nach der Verlegung wieder bestimmte Stellen im Raume einzunehmen hätten.

§. 8.

Bei der grossen Allgemeinheit unserer Dislocationsformeln ist es in der That eine Sache von grosser Wichtigkeit, sich einestheils durch Specialisirung derselben ihrer Anwendbarkeit und Brauchbarkeit klarer bewusst zu werden; anderntheils aber auch für vorkommende Bedürfnisse zum Vorneherein zu sorgen. Wir müssen uns daher auch hier wieder auf das Wichtigste beschränken und eine vollständigere Auseinandersetzung der Zukunft überweisen.

1) Setzt man $\alpha=\beta=\gamma=0$ und $\varphi=0$, $\psi=0$ und $\theta=0$, so erhält man, wie sich zum Voraus erwarten lässt, die Accentuirung abgerechnet, genau wieder die Formeln a. (1) und (2), d. h. man findet $P=A_1$; $P'=A_2$; $P''=A_3$; $Q=B_1$; $Q'=B_2$ und $Q''=B_3$ u. s. w.

2) Ist $\alpha=\alpha'$; $\beta=\beta'$; $\gamma=\gamma'$; $\varphi=\varphi$; $\psi=\psi'$ und $\theta=\theta'$; so verbleibt das Object an seiner anfänglichen Stelle, und in der That erhält man auch aus obigen Formeln ganz einfach $x'=x$; $y'=y$ und $z'=z$.

3) Soll das geometrische Object zwar beliebig seinen Ort verändern, ohne jedoch eine Drehung um die Achse zu machen, so ist diessfalls lediglich bloss $\theta'=\theta$ oder $\vartheta=0$ zu setzen und man erhält für den Coefficienten folgende Werthe:

$$P = \sin.\varphi \sin.\varphi' + \cos.\varphi \cos.\varphi' \cos.(\psi' - \psi).$$
$$P' = \sin.\varphi \cos.\varphi' \cos.(\psi' - \psi) - \sin.\varphi' \cos.\varphi.$$
$$P'' = -\cos.\varphi' \sin.(\psi' - \psi).$$
$$Q = \sin.\varphi' \cos.\varphi \cos.(\psi' - \psi) - \sin.\varphi \cos.\varphi'.$$
$$Q' = \sin.\varphi \sin.\varphi' \cos.(\psi' - \psi) + \cos.\varphi \cos.\varphi'.$$
$$Q'' = -\sin.\varphi' \sin.(\psi' - \psi).$$
$$R = \cos.\varphi \sin.(\psi' - \psi).$$
$$R' = +\sin.\varphi \sin.(\psi' - \psi).$$
$$R'' = \sin.(\psi' - \psi).$$

4) Soll dagegen gerade der dem vorhergehenden entgegengesetzte Fall eintreten, d. i. soll das geometrische Object als solches seinen Ort nicht verlassen, dagegen sich um eine beliebig angenommene Achse, um einen beliebigen Winkel $\theta' - \theta = \vartheta$ drehen, so hat man $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$ zu setzen, und man erhält demnach für diesen wichtigen und häufig vorkommenden Fall, bezüglich der Coefficienten folgende Werthe:

$$\textbf{B. I.} \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha + P(x - \alpha) + P'(y + \beta) + P''(z - \gamma); \\ y' = \beta + Q(x - \alpha) + Q'(y - \beta) + Q''(z - \gamma); \quad \text{und} \\ z' = \gamma + R(x - \alpha) + R'(y - \beta) + R''(z - \gamma); \end{array} \right.$$

$$\textbf{B. II.} \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + P(x' - \alpha) + Q(y' - \beta) + R(z' - \gamma); \\ y = \beta + P'(x' - \alpha) + Q'(y' - \beta) + R'(z' - \gamma); \\ z = \gamma + P''(x' - \alpha) + Q''(y' - \beta) + R''(z' - \gamma); \quad \text{wobei} \end{array} \right.$$

$$P = 2\overline{\cos.\varphi}^2\, \overline{\cos.\psi}^2\, \overline{\sin.\frac{\vartheta}{2}}^2 + \cos.\vartheta;$$

$$P' = 2\sin.\varphi \cos.\varphi\, \overline{\cos.\psi}^2\, \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 - \sin.\psi \sin.\vartheta;$$

$$P'' = 2\cos.\varphi \sin.\psi \cos.\psi\, \overline{\sin.\frac{\vartheta}{2}}^2 + \sin.\varphi \cos.\psi \sin.\vartheta;$$

$$Q = 2\sin.\varphi \cos.\varphi\, \overline{\cos.\psi}^2\, \overline{\sin.\frac{\vartheta}{2}}^2 + \sin.\psi \sin.\vartheta;$$

$$Q' = 2\overline{\sin.\varphi}^2\, \overline{\cos.\psi}^2\, \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \cos.\vartheta;$$

$$Q'' = 2\sin.\varphi \sin.\psi \cos.\psi\, \overline{\sin.\frac{\vartheta}{2}}^2 - \cos.\varphi \cos.\psi \sin.\vartheta:$$

$$R = 2\cos.\varphi \sin.\psi \cos.\psi\, \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 - \sin.\varphi \cos.\psi \sin.\vartheta;$$

$$R' = 2\sin.\varphi \sin.\psi \cos.\psi\, \overline{\sin.\frac{\vartheta}{2}}^2 + \cos.\varphi \cos.\psi \sin.\vartheta;$$

$$R'' = 1 - 2\overline{\cos.\psi}^2\, \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2;$$

wofür man einfacher schreiben kann:

$$P = 2(\cos.\,\varphi \cos.\,\psi \sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta)^2 + \cos.\,\vartheta;$$

$$P' = \sin.\,2\varphi\, \overline{\cos.\,\psi}^2\, \overline{\sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 - \sin.\,\psi \sin.\,\vartheta;$$

$$P'' = \cos.\,\varphi \sin.\,2\psi\, \overline{\sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \sin.\,\varphi \cos.\,\psi \sin.\,\vartheta;$$

$$Q = \sin.\,2\varphi\, \overline{\cos.\,\psi}^2\, \overline{\sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \sin.\,\psi \sin.\,\vartheta;$$

$$Q' = 2(\sin.\,\varphi \cos.\,\psi \sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta)^2 + \cos.\,\vartheta;$$

$$Q'' = \sin.\,\varphi \sin.\,2\psi\, \overline{\sin.\,\frac{\vartheta}{2}}^2 - \cos.\,\varphi \cos.\,\psi \sin.\,\vartheta;$$

$$R = \cos.\,\varphi \sin.\,2\psi\, \overline{\sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \sin.\,\varphi \cos.\,\psi \sin.\,\vartheta;$$

$$R' = \sin.\,\varphi \sin.\,2\psi\, \overline{\sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \cos.\,\varphi \cos.\,\psi \sin.\,\vartheta;$$

$$R'' = 1 - 2\,\overline{\cos.\,\psi}^2 \sin.\,\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

5) Soll die Drehung nur eben 180^0 betragen, d. h. will man den Gegenstand bloss umwenden oder umkehren, so vereinfachen sich natürlich diese Ausdrücke für die Coefficienten noch um Vieles. Setzt man daher $\vartheta = 180^0$, so erhält man:

$$P = 2\,\overline{\cos.\,\varphi}^2\, \overline{\cos.\,\psi}^2 - 1; \quad Q = \sin.\,2\varphi\, \overline{\cos.\,\psi}^2; \quad R = \cos.\,\varphi \sin.\,2\psi;$$

$$P' = \sin.\,2\varphi\, \overline{\cos.\,\psi}^2; \quad Q' = 2\,\overline{\sin.\,\varphi}^2\, \overline{\cos.\,\psi}^2; \quad R' = \sin.\,\varphi \sin.\,2\psi;$$

$$P'' = \sin.\,2\psi \cos.\,\varphi; \quad Q'' = \sin.\,\varphi \sin.\,2\psi; \quad R'' = 1 - 2\,\overline{\cos.\,\psi}^2 = -\cos.\,2\psi;$$

Setzt man dagegen in obige Formeln statt $\vartheta = 180^0$, $\vartheta = 360^0$, so entspricht diese Substitution dem Fall, wo ein Object nach einer ganzen Umdrehung wieder seine alte Lage annimmt. Man erhält diessfalls:

$$P = 1,\ P' = 0,\ P'' = 0; \quad Q = 0,\ Q' = 1,\ Q'' = 0 \quad \text{und} \quad R = 0,\ R' = 0,\ R'' = 1;$$

daher nach B. I.:

$$x' = \alpha + x - \alpha = x; \quad y' = \beta + y - \beta = y; \quad z' = \gamma + z - \gamma = z;$$

was mit der Wahrheit vollkommen übereinstimmt, und als eine weitere Bestätigung der Richtigkeit unserer Formeln dienen kann.

6) Als ein weiterer specieller Fall des unter (4) aufgeführten, welcher einer häufigen Anwendung fähig ist, kann noch der angeführt werden, wo die Drehungsachse auf der Ebene xy senkrecht steht. In diesem Falle hat man, wegen $\psi = 90^0$:

$P = \cos.\,\vartheta$, $P' = -\sin.\,\vartheta$, $P'' = 0$; $Q = \sin.\,\vartheta$, $Q' = \cos.\,\vartheta$, $Q'' = 0$; ferner $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 1$. Daher

$$\textbf{b}.\ (1).\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \alpha + \cos.\,\vartheta\,(x - \alpha) - \sin.\,\vartheta\,(y - \beta) \\ y' &= \beta + \sin.\,\vartheta\,(x - \alpha) + \cos.\,\vartheta\,(y - \beta), \quad \text{und} \\ z' &= z; \end{aligned} \right.$$

$$\textbf{b}.\ (2).\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha + \cos.\,\vartheta\,(x' - \alpha) + \sin.\,\vartheta\,(y' - \beta); \\ y &= \beta - \sin.\,\vartheta\,(x' - \alpha) + \cos.\,\vartheta\,(y' - \beta); \\ z &= z'. \end{aligned} \right.$$

7) Liegt die Drehungsachse in der Ebene xy selbst, in welchem Falle $\psi = 0$ zu setzen ist; so hat man:

$$P = 2\,\overline{\cos.\varphi}^2\,\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \cos.\vartheta; \qquad Q = \sin.2\varphi\,\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2; \qquad R = \sin.\varphi\,\sin.\vartheta;$$

$$P' = \sin.2\varphi\,\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2; \qquad Q' = 2\,\overline{\sin.\varphi}^2\,\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2 + \cos.\vartheta; \qquad R' = \cos.\varphi\,\sin.\vartheta;$$

$$P'' = \sin.\varphi\,\sin.\vartheta; \qquad Q'' = -\cos.\varphi\,\sin.\vartheta; \qquad R'' = 1 - 2\,\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\vartheta}^2.$$

8) Wünscht man bloss diejenigen Puncte kennen zu lernen, welche irgend ein Object, z. B. ein Körper mit einer der drei Coordinaten-Ebenen nach dessen Verlegung und bei den verschiedenen Drehungen um die Achse MN gemein hat: so hat man nur nach Anwendung der Formeln A. I. und A. II. y', z' oder x' gleich Null zu setzen; je nachdem man die Ebenen xz, xy oder yz hierbei beabsichtigt, und den Winkel ϑ nach und nach alle Werthe von 0 bis 360^0 annehmen zu lassen.

9) Will man dagegen den Inbegriff aller jener Puncte erfahren, welche in der projicirenden Ebene der Achse NM, nämlich in der Ebene $MNOP$, Fig. 55, liegen, so kann man sich vorstellen, die zweite oder verlegte Achse befinde sich in der Ebene xz selbst, welches in der That einem Hinüberlegeu der besagten Ebene auf jene der xz gleich kömmt. In diesem Falle hat man daher in den Dislocationsformeln $\varphi' = 0$, $\beta = 0$ und α' und γ' dagegen beliebig anzunehmen. Nach der Substitution ist ferner noch $y' = 0$ zu setzen. Dieser Specialisirung ungeachtet verbleibt dem Objecte noch immer eine doppelte Bewegung, nämlich jene um die Achse NM durch die Veränderlichkeit des ϑ, und die Bewegung um den Anfangspunct der Achse mittelst des Winkels ψ'. — Dieser specielle Fall gestattet gleichfalls eine sehr häufige und wichtige Anwendung, indem man durch die diessfallsigen Formeln es ohne Schwierigkeit erzweckt, alle möglichen Durchschnitte irgend eines Körpers bei seinem Drehen um eine, zwei seiner Puncte verbindende Gerade als Achse, durch successive Veränderung des Drehungswinkels ϑ analytisch darzustellen. Diess muss aber gewiss als ein sehr brauchbares Mittel erscheinen, sich ohne unmittelbare Anschauung von einem Objecte, dessen Gleichung gegeben ist, bezüglich dessen Form eine richtige Vorstellung zu machen. Sollte es endlich wünschenswerth erscheinen, diesen Durchschnitt des Objectes mit der projicirenden Ebene der Achse in der Weise zu erhalten, dass das Hinüberlegen dieser Ebene mittelst einer Drehung um den Punct R, Fig. 55 geschieht, so ändert diese Annahme das eben angegebene Verfahren nur insofern, als man statt $\gamma' = \gamma$ und $\alpha' = \alpha - \beta\,cotang.\varphi$, zu setzen haben wird, wie diess ohne weitere Erklärung eingesehen werden dürfte.

10) Ebenso ist es sehr begreiflich, dass durch eine mehrmalige Anwendung der oben aufgestellten Formeln B. I. und B. II. das geometrische Object um zwei, drei oder mehrere zu einander wie immer geneigte Achsen sich bewegend angenommen und die entsprechenden Änderungen an dessen Gleichung selbst ohne Weiters ausgeführt werden können. Auch liegt der Gedanke nahe, dass sämmtliche Dislocationsformeln noch sehr an Einfachheit gewinnen, wenn diese Specialisirungen mit Bezugnahme auf die Beschaffenheit des Objectes selbst vorgenommen werden. —

§. 9.

Die in diesem Abschnitte bisher abgeleiteten, ganz allgemeinen Dislocationsformeln für die verschiedensten Ortsveränderungen und Transfigurationen geometrischer Objecte im Raume enthalten zugleich jene für die Ebene in sich; und wiewohl der Übergang von jenen zu diesen auch nicht die geringste Schwierigkeit darbietet; so erachten wir es dennoch, eines dabei Statt findenden höchst merkwürdigen Umstandes wegen, für gerathen, die Aufmerksamkeit unserer verehrlichen Leser auf selben hinzulenken. Vorerst muss hier bemerkt werden, dass man bei diesem Übergange vom Raume zur Ebene überhaupt nur von solchen Puncten sprechen könne, deren eine Dimension etwa nach der Richtung der Achse der y, gleich Null ist, aus welchem Grunde in unsern obigen Formeln nicht nur y und y' gleich Null zu setzen sind, sondern auch noch angenommen werden muss, dass $\beta = 0$, $\beta' = 0$, $\varphi = \varphi' = 0$ und ϑ entweder gleich Null oder 180^0 betrage. Lässt man nun einstweilen noch den Werth ϑ in seiner Allgemeinheit in den Formeln fortbestehen, und erinnert man sich, dass der Natur der Sache nach, was in Formel I. und II. §. 2 durch y und y', β und β' und durch ϱ angedeutet ist, hier als z und z', γ und γ' und $(\psi' - \psi)$ auftritt: so erhält man nach einigen leichten Reductionen nachfolgende Systeme von Gleichungen, nämlich:

$$\textbf{C. I.} \begin{cases} x' = \alpha' + P(x-\alpha) + P''(z-\gamma); \\ z' = \gamma' + R(x-\alpha) + R''(z-\gamma); \end{cases} \qquad \textbf{C. II.} \begin{cases} x = \alpha + P\,(x'-\alpha') + R\,(z'-\gamma'); \\ z = \gamma + P''(x'-\alpha') + R''(z'-\gamma'); \end{cases}$$

wobei die allgemeinen Coefficienten in folgende übergehen:

$$\begin{aligned}
P &= cos.\psi\, cos.\psi' + sin.\psi\, sin.\psi'\, cos.\vartheta; \\
P' &= -\,sin.\psi'\, sin.\vartheta; \\
P'' &= cos.\psi'\, sin.\psi - sin.\psi'\, cos.\psi\, cos.\vartheta; \\
Q &= sin.\psi\, sin.\vartheta; \\
Q' &= cos.\vartheta; \\
Q'' &= -\,cos.\psi\, sin.\vartheta; \\
R &= sin.\psi'\, cos.\psi - cos.\psi'\, sin.\psi\, cos.\vartheta; \\
R' &= cos.\psi'\, sin.\vartheta; \\
R'' &= sin.\psi\, sin.\psi' + cos.\psi\, cos.\psi'\, cos.\vartheta.
\end{aligned}$$

Specialisirt man nun diese Ausdrücke für die beiden Wechselfälle, die hier allein Statt finden können, nämlich für die Annahme $\vartheta = 0$ und sodann für $\vartheta = 180^0$, so erhält man folgende zwei Schemata von Werthen, und zwar für:

$$\begin{array}{ll|ll}
\multicolumn{2}{c}{\vartheta = 0.} & \multicolumn{2}{c}{\vartheta = 180^0.} \\
P = cos.(\psi'-\psi); & R = sin.(\psi'-\psi); & P = cos.(\psi'+\psi); & R = sin.(\psi'+\psi); \\
P'' = -\,sin.(\psi'-\psi); & R'' = cos.(\psi'-\psi); & P'' = sin.(\psi'+\psi); & R'' = -\,sin.(\psi'+\psi).
\end{array}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass Q und Q'', P' und R' kraft der Substitution, Q' dagegen zwar beziehungsweise den Werth ± 1 erhält, aber als Coefficient von $y - \beta = 0 - 0 = 0$ und $y' - \beta' = 0 - 0 = 0$ aus den Gleichungen hinausfällt. — Fasst man nun diese beiden unter verschiedenen Voraussetzungen gefundenen Werthe für die Coefficienten unter Einem zusammen, und substituirt sie in obige Gleichungen, so erhält man als allgemeinste Gleichungen für alle Ortsveränderungen in der Ebene:

$$\mathbf{C.}\ (1).\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \alpha' + \cos.(\psi' \pm \psi)(x - \alpha) \pm \sin.(\psi' \pm \psi)(z - \gamma);\\ z' &= \gamma' + \sin.(\psi' \pm \psi)(x - \alpha) \mp \cos.(\psi' \pm \psi)(z - \gamma);\end{aligned}\right.$$

$$\mathbf{C.}\ (2).\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha + \cos.(\psi' \pm \psi)(x' - \alpha') + \sin.(\psi' \pm \psi)(z' - \gamma');\\ z &= \gamma \pm \sin.(\psi' \pm \psi)(x' - \alpha') \mp \cos.(\psi' \pm \psi)(z' - \gamma');\end{aligned}\right.$$

wobei ψ den Winkel bedeutet, welchen die willkürlich angenommene Drehungsachse vor ihrer Drehung mit der Achse x macht, ψ' jenen nach der Verlegung und allenfallsigen Drehung; daher $\psi' - \psi = \varrho$ den Unterschied derselben oder den eigentlichen Drehungswinkel *).

Lässt man nun durchaus die obern Zeichen gelten, so entspricht dieses dem Falle, wo ein geometrisches Object sich um den Anfangspunkt einer Achse dreht, und sich zugleich um die Drehungsachse selbst umschlägt (wegen $\vartheta = 180^0$), und demnach eine Lage, wie beispielsweise $A'B'C'$ in Fig. 59, bezüglich des anfänglichen Dreiecks ABC einnimmt. Auch verändert dasselbe gleichzeitig seinen Drehungspunct und verlegt ihn von $\alpha\gamma$ nach $\alpha\gamma'$. — Lässt man aber dagegen durchaus die untern Zeichen gelten, so stimmen wegen $\psi' - \psi = \varrho$ die obigen Formeln vollkommen mit jenen früher abgeleiteten I. und II. d. Abschnitts §. 2, überein, und man erkennt demnach schon hieraus zur Genüge, dass die hier abgeleiteten Dislocationsformeln in der That vor unsern frühern sowohl, als auch vor allen bisher abgeleiteten sogenannten Transformationsformeln den bedeutenden Vorzug einer weit grössern Allgemeinheit besitzen.

§. 10.

Öfters als man vielleicht glauben sollte, ereignet sich bei analytischen Untersuchungen der Fall, irgend ein geometrisches Object in der Ebene um eine willkürlich gewählte gerade Linie als Achse umschlagen zu müssen, ohne dass jedoch das Object zugleich irgend einer andern Ortsveränderung unterworfen werden soll. In diesem Falle müsste man daher mit Beibehaltung der obern Zeichen, offenbar $\alpha' = \alpha$, $\gamma' = \gamma$ und $\psi' = \psi$ setzen, wodurch man die folgenden Formeln erhielte:

$$\mathbf{D.}\ (1).\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \alpha + (x - \alpha)\cos.2\psi + (z - \gamma)\sin.2\psi;\\ z' &= \gamma + (x - \alpha)\sin.2\psi - (z - \gamma)\cos.2\psi;\end{aligned}\right.$$

$$\mathbf{D.}\ (2).\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha + (x' - \alpha)\cos.2\psi + (z' - \gamma)\sin.2\psi;\\ z &= \gamma + (x' - \alpha)\sin.2\psi - (z' - \gamma)\cos.2\psi)^{**});\end{aligned}\right.$$

*) Da nach unserer frühern Bezeichnung offenbar $\psi' - \psi = \varrho$ ist, so hätte man auch $\psi + \psi' = 2\psi + \varrho$, man könnte daher auch diesen Werth statt $\psi' \pm \psi$ in die obigen Gleichungen setzen, wobei jedoch zu bemerken wäre, dass wenn eine blosse Drehung ohne Umkehrung beabsichtigt würde, man $\psi = 0$ und die untern Vorzeichen zu gelten hätten, dagegen, wenn eine Umkehrung im Sinne läge, man im ersteren Falle $\varrho = 0$, im zweiten dagegen $\varrho = \psi' - \psi$ und die obern Vorzeichen beizubehalten hätte.

**) Man kann zu diesen ganz allgemeinen Formeln für das Umdrehen um eine bestimmte, in der Ebene der Figur selbst, liegende Achse auch unmittelbar mittelst der Formeln I. und II. §. 2 dieses Abschnitts gelangen, jedoch niemals mit Umgehung der Annahme, dass hierbei der erste Quadrant auf den vierten von welchen wir auch im nächsten Abschnitte ehestens Gebrauch machen werden. Des allerspeciellsten Falles dieser Formeln müssen wir noch gedenken, nämlich desjenigen, wo die Achse der x selbst als Drehungsachse angenommen wird. In diesem Falle erhält man wegen $\psi = 0$ ganz einfach $x' = x$; $z' = z$; wie es in der That auch seyn muss. Wendet man die Formeln D. (1) und (2) bei denselben Werthen von α, γ und ψ zweimal hinter einander auf ein und dasselbe geometrische Object an, so begreift man leicht, dass dasselbe wieder in seine alte Lage zurückkehrt, und dass mithin die betreffende Gleichung auch keine Veränderung erfährt. Es ist natürlich dabei völlig einerlei, ob diese Substitution zweimal hintereinander an einer vorliegenden Gleichung vorgenommen, oder ob man dieselbe zum Voraus und ein für allemal an obigen Formeln selbst vornimmt. Thut man dieses letztere, so erhält man, wegen:

$$x'' = \alpha + [\alpha + (x-\alpha)\cos.2\psi + (z-\gamma)\sin.2\psi - \alpha]\cos.2\psi + [\gamma + (x-\alpha)\sin.2\psi - (z-\gamma)\cos.2\psi - \gamma]\sin.2\psi =$$
$$\alpha + (x-\alpha)(\overline{\sin.2\psi}^2 + \overline{\cos.2\psi}^2) = x;$$

also $x'' = x$, und ebenso auch $z'' = z$; wie es auch seyn muss.

§. 11.

Werden die Dislocationsformeln mehrmals hinter einander auf einen und denselben Gegenstand angewandt, so ist offenbar der Erfolg derselbe, wenn man schon von Vorneherein die Substitution mit den Dislocationsformeln selbst vornimmt, und sie dann erst in die vorliegende Gleichung substituirt. Man erreicht durch ein solches Verfahren den Vortheil, dass bei schon vorbereiteten Formeln sich die Rechnung fast um die Hälfte verkürzt. Es kann natürlich hier nicht wohl von uns erwartet werden, diese Arbeit in der möglichsten Allgemeinheit auszuführen. —

hinüber gelegt werde. Dies ist aber ohne ein Heraustreten des geometrischen Objectes aus der Ebene in den Körperraum nicht möglich, und es findet daher unsere obige Bemerkung auch hier ihre Anwendung. — Zuerst denke man sich nämlich das Object mit seiner Drehachse auf die Achse x herabgebracht, zu welchem Zwecke man $\delta' = 0$, $d = d'$ und $\varrho = -\varrho$ zu setzen hat. Man erhält diessfalls:

$$(1) \begin{cases} x' = d + (x-d)\cos.\varrho + (y-\delta)\sin.\varrho; \\ y' = (y-\delta)\cos.\varrho - (x-d)\sin.\varrho; \end{cases} \quad \text{und} \quad (2) \begin{cases} x = d - \sin.\varrho . y + (x'-d)\cos.\varrho. \\ y = \delta + y.\cos.\varrho + (x'-d)\sin.\varrho. \end{cases}$$

Nun setze man für x', $-x'$, dagegen für y', $-y'$, das heisst: man drehe den Quadranten um die Drehungsachse MN und zugleich um die Achse x, und hierauf lässt man die Achse NM wieder die alte Lage wie früher einnehmen, d. h. man setzt in diesem Falle $\varrho = \varrho$, $d = d$, $\delta = 0$, $d' = d$, $\delta' = \delta$, und erhält sofort durch diese Substitution folgende Formeln:

$$(3) \begin{cases} x = d + y'\sin.\varrho + (x'-d)\cos.\varrho, \\ y = \delta - y'\cos.\varrho + (x'-d)\sin.\varrho, \end{cases} \quad \text{und} \quad (4) \begin{cases} x' = d + (y''-\delta')\sin.\varrho + (x''-d')\cos.\varrho. \\ y' = (y''-\delta')\cos.\varrho - (x''-\delta')\sin.\varrho, \end{cases}$$

substituirt man nun die Gleichung (4) in (3) und ebenso (2) in (1), so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$x' = d + (y''-\delta')\cos.\varrho\sin.\varrho - (x''-d')\overline{\sin.\varrho}^2 + (y''-\delta')\cos.\varrho\sin.\varrho + (x''-d')\overline{\cos.\varrho}^2$$
$$= d + (y''-\delta)\sin.2\varrho + (x''-d)\cos.2\varrho,$$

und in gleicher Weise $y' = \delta + (x''-\delta)\sin.2\varrho - (y''-\delta)\cos.2\varrho$. Aus (1) und (2) folgen die beiden Gegenformeln, die aber, wie oben, dieselben sind.

Gleichwohl fühlen wir uns verpflichtet, das Ergebniss der Substitution wenigstens für den Fall hier anzuführen, wenn sich das geometrische Object in der Ebene befindet. Man erhält unter dieser Voraussetzung nach vorgenommener Reduction:

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned} x'' &= (x-d)\cos.(\varrho+\varrho')-(y-\delta)\sin.(\varrho+\varrho')+[d+(d''-d)\cos.\varrho-(\delta''-\delta)\sin.\varrho];\\ y'' &= (x'-d)\sin.(\varrho+\varrho')+(y-\delta)\cos.(\varrho+\varrho')+[\delta'+(d'-d)\sin.\varrho+(\delta''-\delta)\cos.\varrho];\end{aligned}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{aligned} x &= (x''-d''')\cos.(\varrho+\varrho')+(y''-\delta''')\sin.(\varrho+\varrho')+[\delta+(\delta''-\delta')\sin.\varrho+(d''-d')\cos.\varrho];\\ y &= -(x''-d''')\sin.(\varrho+\varrho')+(y''-\delta''')\cos.(\varrho+\varrho')+[\delta+(\delta''-\delta')\cos.\varrho+(d''-d')\sin.\varrho];\end{aligned}\right.$$

geltend für eine doppelte Bewegung eines Objeces in der Ebene.

Zu einem ähnlichen Resultate würde man bei einer vorausgesetzten drei- und mehrfachen Bewegung des Gegenstandes gelangen.

§. 12.

Die Nothwendigkeit, die Lage eines geometrischen Objectes in Bezug auf andere geometrische Gegenstände oder auch an und für sich beliebig abändern zu können, macht sich nicht nur bei den verschiedenen Linear-Coordinaten, sondern eben so häufig auch bei den Polar-Coordinaten geltend. Sie wird vielmehr in jedem einzelnen Falle von der besondern Eigenthümlichkeit der Aufgabe selbst bedingt, und steht mit der Art und Weise, wie die Coordinaten gezählt und genommen werden sollen, durchaus in keinem Zusammenhange.

Um daher auch für das Polar-Coordinaten-System die erforderlichen Dislocations-Formeln abzuleiten, wobei wir uns jedoch für diessmal auf jenes in der Ebene beschränken müssen, wollen wir folgende Voraussetzungen machen: Wir wollen den Radiusvector für den verlegten und unverlegten Drehungspunct O' und O mit m' und m bezeichnen, und die Winkel, welche sie mit der Achse machen, v' und v; v' und v seien die veränderlichen Winkel, U und U' aber die veränderlichen radii vectores; diess vorausgesetzt, hat man in Hinblick auf Fig. 60 nachfolgende Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha &= m\cos.v & \qquad & x = u\cos.v;\\ \gamma &= m\sin.v \quad \text{und ebenso:} & & z = u\sin.v;\\ \alpha' &= m'\cos.v' & & x' = u'\cos.v';\\ \gamma' &= m'\sin.v' & & z' = u'\sin.v'.\end{aligned}$$

Substituirt man nun diese Werthe in die beiden Systeme der Dislocationsformein C. I. und II. §. 8, so erhält man unmittelbar die Ausdrücke (1) und (2) und nach vorgenommener Reduction und Grössenbestimmung die Systeme E. (I) und (II), nämlich:

$$1)\left\{\begin{aligned} u'\cos.v' &= m'\cos.v'+(u\cos.v-m\cos.v)\cos.(\psi'\pm\psi)\pm(u\sin.v-m\sin.v)\sin.(\psi'\pm\psi);\\ u'\sin.v' &= m'\sin.v+(u\cos.v-m\cos.v)\sin.(\psi'\pm\psi)\mp(u\sin.v-m\sin.v)\cos.(\psi'\pm\psi);\end{aligned}\right.$$

$$2)\left\{\begin{aligned} u\cos.v &= m\cos.v+(u'\cos.v'-m'\cos.v)\cos.(\psi'\pm\psi)+(u'\sin.v'-m'\sin.v')\sin.(\psi'\pm\psi);\\ u\sin.v &= m\sin.v\pm(u'\cos.v'-m'\cos.v')\sin.(\psi'\pm\psi)\mp(u'\sin.v'-m'\sin.v')\cos.(\psi'\pm\psi).\end{aligned}\right.$$

Erhebt man sowohl in 1, wie in 2 die beiden Gleichungen zum Quadrat, addirt sie, und zieht man aus dem möglichst reducirten Resultate die Wurzel; ferner, dividirt man die zweite durch die erste des nämlichen Systems, so gelangt man zu folgenden Ausdrücken, welche sofort auch die eigentlichen Dislocations- und Transfigurations-Formeln für das Polar-Coordinaten-System sind, nämlich:

$$\mathbf{E.\ I.}\left\{\begin{array}{l} U' = \sqrt{U^2 + m^2 + m'^2 - 2mu\cos.(v+v) + 2m'u\cos.(\psi' \pm \psi \mp v - v') + 2mm'\cos.(\psi' \pm \psi \pm v - v')} = M; \\ tang.\, v' = \dfrac{U\sin.(\psi' \pm \psi \pm v) + m'\sin.v' - m\sin.(\psi' \pm \psi \pm v)}{U\cos.(\psi' \pm \psi \mp v) + m'\cos.v' - m\cos.(\psi' \pm \psi \pm v)} = \dfrac{P}{Q};\ \text{oder auch} \\ \sin.\, v' = \dfrac{P}{M};\ \text{und}\ \cos.v' = \dfrac{Q}{M};\ \text{und ferner} \end{array}\right.$$

$$\mathbf{E.\,II.}\left\{\begin{array}{l} U = \sqrt{U'^2 + m^2 + m'^2 - 2m'u'\cos.(v'+v) + 2mu'\cos.(\psi' \pm \psi \mp v' + v) + 2mm'\cos.(\psi' \pm \psi + v \pm v')} = M' \\ tang.\, v = \dfrac{U'\sin.(\psi' \pm \psi - v') + m\sin.v \mp m\sin.(\psi' \pm \psi - v')}{U'\cos.(\psi' + \psi - v') + m\cos.v - m'\cos.(\psi' \pm \psi - v')} = \dfrac{P'}{Q'};\ \text{oder auch} \\ \sin.\, v = \dfrac{P'}{M'};\ \text{und}\ \cos.v = \dfrac{Q'}{M'}. \end{array}\right.$$

Dass auch hier das System II bei der Gleichung selbst, und deren veränderlichen Grenzwerthen, dagegen die Formeln des Systems I bei den constanten Grenzwerthen, d. h. bei einzelnen bestimmten Puncten anzuwenden sind, ist wohl für sich klar und bedarf somit keiner weitern Auseinandersetzung.

§. 13.

Es wurde bis jetzt bei Ableitung der verschiedenen Formeln fortwährend angenommen, dass die Bestimmungsstücke für die anderswohin verlegte Drehungsachse α', β', γ' und φ', so wie auch der Drehungswinkel θ selbst von einander völlig unabhängige und somit willkürliche Grössen bedeuten sollen. Eine solche Annahme aber war durchaus nicht eine durch die Natur der Sache uns aufgedrungene, sondern von uns desshalb beliebte Voraussetzung, weil sie einerseits den am häufigst vorkommenden Fällen entspricht, und anderseits die anfängliche Betrachtung nicht ohne Noth erschwert. Unsere Formeln aber gewinnen ganz ausserordentlich an allgemeiner Anwendbarkeit, wenn angenommen wird, dass zwischen ihnen eine gewisse Abhängigheit bestehe, wodurch eine oder mehrere derselben als absolut veränderlich, die andern dagegen als von ihnen abhängig oder relativ veränderlich angesehen werden müssen. So kann man z. B. annehmen, dass die Drehungsachse NM, während sie sich zu ihrer anfänglichen Lage parallel fortbewegt, d. h. während die Bestimmungsstücke φ', ψ' und θ' eines jeden beliebigen, aber constanten Werthes fähig und somit absolut veränderlich sind, der Anfangspunct N der Achse stets auf einer gewissen Oberfläche sich befinden solle, in welchem Falle man noch die Bedingungsgleichung $\varphi(\alpha', \beta', \gamma') = 0$ hinzuzufügen hätte. Wollte man dagegen, dass jener Anfangspunct eine gewisse unbegränzte Curve beschreibe, so müsste noch die Gleichung $\gamma' = \varphi(\alpha') \left\{ f(\beta') \right\}$ Statt finden u. s. w. — In gleicher Weise könnte zwischen den drei Winkeln φ', ψ' und θ', oder nur unter zweien derselben eine gewisse Abhängigkeit Statt haben, wodei α', β', γ' constant oder mit veränderlich seyn könnten. Ersteres wäre z. B. der Fall, wenn die Drehungsachse um ihren Anfangspunct einen elliptischen oder andern Kegelmantel beschriebe, das zweite dagegen fände Statt, wenn diese Achse eine windschiefe Fläche erzeugte u. s. w. — Und an allen diesen verschiedenartigen Bewegungen müsste das geometrische Object, in dessen Gleichung obige Dislocationsformeln substituirt würden, unfehlbar Theil nehmen. Die beigebrachten Bedingungsgleichungen würden nun dazu dienen, ein oder mehrere der genannten Grössen durch Substitution aus den Dislocations-Formeln zu entfernen.

Ein besonders wichtiger Fall, auf den wir uns auch im nächsten Abschnitte berufen werden, möge noch zur weitern Erklärung des Gesagten hier betrachtet werden. — Man denke sich irgend ein geometrisches Object im Raume mit einer willkürlich gewählten Drehungsachse, und verlege letztere (und gleichzeitig damit auch das Object) nach NM Fig. 61. Beides geschieht durch die einfache Substitution unserer allgemeinen Dislocationsformeln in die Gleichung des Objectes Q. — Anstatt nun dem α', β', γ' bestimmte constante Werthe beizulegen, wodurch die Achse NM unverändert ihren Ort beizubehalten gezwungen wäre, nehme man an, die Achse NM bewege sich dergestalt parallel zu sich selbst, dass dabei der Anfangspunct N eine gewisse Curve als Bahn beschreibe, deren Ebene wir hier, wiewohl nicht nothwendig, in einem Abstand $= a'$ vom Ursprunge senkrecht stehend auf der Achse xx' annehmen. Unter dieser Voraussetzung haben wir nun die Bedingungsgleichung $\alpha' = a'$; $\gamma' = \varphi(\beta')$, welche Werthe wir auch vor oder nach der Substitution in die Dislocationsformeln zu setzen haben. Wäre die Ebene der Bahn nicht senkrecht auf xx', so müsste man statt $\gamma' = f\left(a, \varphi(\alpha') \dot{(\beta')}\right)$ und $\beta' = \varphi(\alpha')$ und $\alpha' = a$ setzen. — Wäre endlich die Bahn nur eine begrenzte, so müssten diese Functionen in Bezug auf die absolut veränderliche Grösse α' nach dem früher Gesagten begrenzt werden. — Nimmt man nun die Achse xx' für die anfängliche oder selbst gewählte Drehungsachse und A als den Anfangspunct N derselben an, und verlegt man durch eine nochmalige Anwendung der Dislocationsformeln das Object zugleich mit dieser Achse anderswohin, so lässt sich, indem man zwischen den neuen Coordinaten α'', β'', γ'', Relationen ähnlicher Art annimmt, dem Objecte Q eine Bewegung ertheilen, welche durch Fig. 62 einigermassen angedeutet ist. Die doppelte Substitution der Dislocationsformeln bewirkt, dass das Object Q sich vorerst um die Achse $A''x''$ als willkürliche und anfängliche Drehungsachse dreht, mit ihr aber zugleich die Bahn $A''B''C''$ beschreibt, die sich nebenbei um ihre auf Q' senkrecht stehende Achse $A'x'$ bewegt. Aber diese Achse bewegt sich selbst wieder, nämlich ihr Anfangspunct A' in der Bahn $A'B'C'$, die hier wieder wegen ϑ um Ax eine Drehung anzunehmen vermag. Die Grössen a' und a'' bedeuten hier die Abstände der Ebenen der verschiedenen Bahnen von den Anfangspuncten ihrer respectiven Achsen. Auch begreift man leicht, dass sich diese Betrachtungen beliebig weit fortsetzen lassen.

Endlich muss hier noch bemerkt werden, dass es einen ungemeinen Vortheil gewährt, statt der oben angenommenen Bedingungsgleichungen die ihnen entsprechenden Polargleichungen und zwar in folgender Weise einzuführen: Wenn wir die verschiedenen Bahnen als in Ebenen liegend voraussetzen, so können wir recht füglich die Durchschnitts- oder

Knoten-Linie der Ebene der Bahn mit der Coordinaten-Ebene xz, nämlich OH Fig. 61 als die Achse und Q selbst als den Pol des Polar-Systems ansehen, und wenn wir den Polarwinkel, welcher demnach von OH aus gerechnet wird, v nennen, so erhalten wir ohne weiters $\beta' = U \cos.(90 - v) = U \sin. v$; und $\gamma' = U \sin.(90 - v) = U \cos. v$. Nun aber ist, wenn die Bahn gegeben ist, unstreitig auch $U = \varphi(v)$ gegeben, und man hat demnach $\beta' = \varphi(v) \sin. v$ und $\gamma' = \varphi(v) \cos. v$. — Substituirt man diese Werthe statt der obigen, wobei in diesem Falle $\alpha' = \alpha$ bleibt: so erhält man genannte Gleichungen in einer viel brauchbarern und anschaulichern Form. Ist ferner die Bahn eine Curve von doppelter Krümmung, z. B. eine conische Spirallinie, so hat man nur $\alpha' = U \cos. \mu$; $\beta' = U \sin. \mu \cos. v$; $\gamma' = u \sin. \mu \sin. v$; wobei v den Flächenwinkel der Polarebene mit der xy und μ den Winkel des Leitstrahls mit der Achse der x bedeutet. Die Grössen ϑ, ϑ' u. s. w. bedeuten sodann das Fortschreiten der Knotenlinie in der Bahn oder die sogenannten Präcessionen. Die Werthe φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ'' u. s. w. bestimmen beziehungsweise sowohl die Neigungen der Relationsachsen als auch jene der Ebenen der verschiedenen Bahnen. — Da ferner Bewegungen nur in der Zeit vor sich gehen, so sind nicht nur letztgenannte Winkel, sondern auch der Polarwinkel v von denselben abhängig und somit wahre Functionen derselben. Kennt man nun diese letztern, d. h. ihre respectiven Zeitgleichungen, so kann man nicht nur in jedem gegebenen Zeitpuncte sich die Gleichungen des Objectes verschaffen, und die Relationen des Objectes, sondern falls dieses ein Punct oder eine Linie wäre, durch Elimination der Zeit t, die Bahn, d. h. die Linie oder Fläche des bewegten Objectes selbst, erhalten. (Siehe m. Abhandl. pag. 42 u. folg.).

Diess glaubten wir hier vorausschicken zu müssen, um uns im folgenden Abschnitte hierauf allenfalls berufen zu können.

§. 14.

Man kann sehr oft in die Lage kommen, mit den verschiedenen Objecten Ortsveränderungen sich vorgenommen zu denken, ohne mit den betreffenden Gleichungen selbst die entsprechenden Substitutionen der Dislocations-Formeln in der That vorzunehmen. Ja es ist dieses bei complicirteren Untersuchungen sogar rathsam, da spätere Bewegungen die frühern ganz oder zum Theil aufheben, und sich mehrere solche unmittelbar auf einander folgende Substitutionen wenigstens immer in eine einmalige zusammenziehen, und als solche behandeln lassen. In allen diesen Fällen muss es nun sehr erwünscht scheinen, ein bequemes Operationszeichen, an welchem alles Erforderliche zu ersehen ist, zu haben, und der Verfasser schlägt das nachfolgende, schon in seiner frühern Abhandlung in Anwendung gebrachte Zeichen, nämlich den Anfangsbuchstaben des Wortes Locus vor, dessen Bedeutung durch die einfache Bemerkung in das gehörige Licht gesetzt wird, dass die unterhalb geschriebenen Werthe sich allenthalben auf die anfängliche oder willkürliche Achse, die darüber geschriebenen aber sich auf die umlegte Drehungsachse beziehen sollen. Man hat daher sowohl für den Raum als die Ebene nachfolgende Zeichen: Für den Raum $\overset{\alpha', \beta', \gamma'}{\underset{\alpha, \beta, \gamma}{L}}{}^{\varphi', \psi', \theta'}_{\varphi\, \psi\, \theta}$; und für die Ebene $\overset{\alpha', \gamma'}{\underset{\alpha, \gamma}{L}}{}^{\psi, \psi'}$, wofür man auch nach §. 27 wegen $\varrho = \psi' - \psi$, $\alpha = d$, $\gamma = \delta$; $\mathop{L}\limits_{d,\,\delta}^{d',\,\delta'}{}^{\varrho}$ schreiben kann. Vernachlässigt man dort, wo es nicht nothwendig ist, der Einfachheit wegen, die Litteral-Bezeichnung, so finden nachfolgende, keiner weitern Erklärung bedürfende Relationen Statt:

$$1)\quad L\,f\big(a,\, b,\, x\big) = f\big(a,\, b,\, L\,x\big);$$

$$2)\quad L\Big(\varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x)\,\omega\,\psi''(x)\ldots\Big) = L\,\varphi(x)\,\omega\; L\,\varphi'(x)\,\omega\; L\,\varphi''(x)\,\omega\ldots$$

$$3)\quad L\,\mathop{\mathcal{C}\!o}\limits_{,}^{n}\,\varphi\big(a_{\varrho},\, x\big) = \mathop{\mathcal{C}\!o}\limits_{,}^{n}\,L\,\varphi\big(a_{\varrho},\, x\big);$$

$$4)\quad \mathop{L}\limits_{\alpha',\beta',\gamma'}^{\varphi'',\psi'',\theta''}{}_{\varphi',\psi',\theta'}\;\mathop{L}\limits_{\alpha,\beta,\gamma}^{\varphi',\psi',\theta'}{}_{\varphi,\psi,\theta}\,\varphi(x,y) = \mathop{L}\limits_{\alpha,\rho,\gamma}^{\varphi',\psi',\theta'}{}_{\varphi,\psi,\theta}\,\varphi(x,y)$$

und in ähnlicher Weise bei beliebig vielen Dislocationszeichen. (Siehe m. frühere Abhandlung pag. 38 u. ff.)

§. 15.

Es ist schon in der Einleitung erwähnt, dass man gewisse Formänderungen sowohl eines Systems von Grössen, als einzelner Objecte als eine theilweise nur auf einzelne Partien sich erstreckende Ortsveränderung betrachten könne, und dass eben desshalb das Problem der sogenannten Transfiguration gleichzeitig mit jenem für die Dislocation seine vollständige Auflösung gefunden hat. — Es ist nämlich eine wohl zu beachtende Eigenthümlichkeit derjenigen Ansicht, welche von uns der Ableitung der oben erwähnten Dislocationsformeln zu Grunde gelegt wurde, hierbei ohne Ausnahme ein fortwährend immobiles, d. h. feststehendes Coordinaten-System vorauszusetzen, und nur durch diese Annahme in Verbindung mit der von uns eingeführten Grenz- und Disjunctiv-Bezeichnung ist es uns möglich geworden, Ortsveränderungen auf einzelne Objecte, ja sogar auf einzelne Theile irgend eines geometrischen Gegenstandes sich erstrecken zu lassen, während alle übrigen entweder ihre anfängliche Stellung unverändert beibehalten, oder sie auch auf eine völlig verschiedene, von ersterer abweichende Weise verändern.

II. Capitel.

Von der Transformation oder Abänderung der Coordinaten im Raume und in der Ebene.

§. 16.

Ausser der Ortsveränderung der verschiedenen geometrischen Objecte mittelst der im vorigen Capitel aufgestellten und abgeleiteten Dislocationsformeln verdient noch die Art und Weise, wie die Coordinaten gezählt und angenommen werden sollen, eine vorzügliche Beachtung. Denn wiewohl es gewiss ist, dass letzterer Umstand auf die geometrischen Objecte selbst und ihre gegenseitige Lage, also auf ihre räumlichen Verhältnisse und eben desshalb auch auf die Erforschung ihrer Eigenschaften durchaus keinen Einfluss auszuüben vermag: so ist es doch sehr begreiflich, dass die Einführung eines zweckmässigen Coordinaten-Systems für die Einfachheit der Untersuchung sowohl, als auch für die durch sie gewonnenen Resultate von dem grössten Belange seyn könne. — Bei allen Untersuchungen über die Dislocation der Objecte, so wie bei jenen des folgenden Capitels, behielten die Veränderlichen x, y, z immer dieselbe Bedeutung bei, und Alles, was sich änderte, waren blosse Grössenbeziehungen. In diesem Capitel dagegen machen wir uns die Beantwortung der Frage zur Aufgabe: »Welche Veränderungen hat irgend eine Function oder Gleichung zu erfahren, deren Veränderliche x, y, z ihre Bedeutung ändern, und z. B. statt wie früher rechtwinklige, nunmehr schiefwinklige Coordinaten bezeichnen? Diese Veränderung berührt daher nicht im Geringsten das geometrische Object, sondern nur deren Gleichung.

Bei dem Übergange von den rechtwinkligen auf die schiefwinkligen oder von schiefwinkligen auf andere schiefwinklige Coordinaten (denn jener auf gewöhnliche Polar-Coordinaten bedarf, als hinreichend bekannt, keiner weitern Besprechung) kann man der grössten Allgemeinheit völlig unbeschadet, voraussetzen, dass die neue Achse der x' mit der alten ihrer Lage sowohl als ihrem Anfangspuncte nach übereinstimme, da man ja, falls dieses nicht schon der Fall wäre, durch Anwendung der erwähnten Formeln des vorigen Capitels diese Anforderung stets zu erfüllen vermag.

Es seyen demnach x', y', z' die neuen auf ein schiefwinkliges System bezogenen und x, y, z die auf das rechtwinklige System bezogenen Coordinaten. Ferner sey ω Fig. 63 der Neigungswinkel der y' zur x'; jener der z' zur Ebene xy, nämlich der Winkel MNO sey η; und der Winkel, welcher die verlängerte Projection der z', nämlich LO mit der Achse der x' einschliesst, d. h. OLG werde ε genannt, so hat man:

1) $OM = z = z' \sin.\eta$. Es ist ferner $ON = z' \cos.\eta$; $(AL + x)\,\mathrm{tang.}\,\varepsilon = y$; daher $AL = y\,\mathrm{cotang.}\,\varepsilon - x$; und $OL = \frac{y}{\sin.\varepsilon}$; demnach ist $LN = \frac{y}{\sin.\varepsilon} - z'\cos.y = \frac{y}{\sin.\varepsilon} - z\,\mathrm{cotag.}\,\eta$.

Es verhält sich aber: $LN : NF = \sin.\omega : \sin.\varepsilon$; oder $\left(\frac{y}{\sin.\varepsilon} - z'\cos.y\right) : y' = \sin.\omega : \sin.\varepsilon$ und hieraus wegen $z' = \frac{z}{\sin.\eta}$ ist $y' = (y - z'\cos.\eta \sin.\varepsilon)\frac{1}{\sin.\omega}$ und sofort: 2) $y' = \frac{y}{\sin.\omega} - \frac{\mathrm{cotag.}\,\eta \sin.\varepsilon}{\sin.\omega} z$.

Anderseits ist aber offenbar: $LF = AL + AF$; d. h. $LF = x' - x + y\,\mathrm{cotag.}\,\varepsilon$; ferner aber verhält sich: $LF : LN = \sin.(\omega + \varepsilon) : \sin.\omega$; d. i.

$$\left(x' - x + y\,\mathrm{cotag.}\,\varepsilon\right) : \left(\frac{y}{\sin.\varepsilon} - z\,\mathrm{cotag.}\,\eta\right) = \sin.(\omega + \varepsilon) : \sin.\omega \text{ und hieraus}$$

$$x' = x - y\,\mathrm{cotag.}\,\varepsilon + \left(\frac{y}{\sin.\varepsilon} - z\,\mathrm{cotag.}\,\eta\right)\frac{\sin.(\omega+\varepsilon)}{\sin.\omega} \text{ oder}$$

$$3)\ x' = x - \frac{\mathrm{cotag.}\,\eta \sin.(\omega+\varepsilon)}{\sin.\omega} z + \mathrm{cotag.}\,\omega\, y.$$

Durch Zusammenstellung dieser drei Formeln und durch deren Umkehrung erhält man sofort für die Verwandlung der rechtwinkligen Coordinaten in schiefwinklige und umgekehrt nachfolgende zwei Systeme von Formeln, von welchen beziehungsweise das erste für die constanten Grenzen, das zweite für die veränderlichen Grenzen und die Gleichungen selbst, bei umgekehrter Aufgabe dagegen in verkehrter Weise anzuwenden sind:

$$
\textbf{F. I.}\quad \left\{\begin{aligned}
x' &= x + cotag.\,\omega\, y - \frac{cotag.\,\eta\, sin.(\omega + \varepsilon)}{sin.\,\omega}\, z;\\
y' &= y\, cosec.\,\omega - cotag.\,\eta\, cosec.\,\omega\, sin\,\varepsilon\, z;\\
z' &= \frac{z}{sin.\,\eta}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
\textbf{F. II.}\quad \left\{\begin{aligned}
x &= x' - cos.\,\omega\, y' + cos.\,\varepsilon\, cos.\,\eta\, z';\\
y &= sin.\,\omega\, y' + cos.\,\eta\, sin.\,\varepsilon\, z'\cdot\\
z &= sin.\,\eta\, z'.
\end{aligned}\right.
$$

Wünscht man diesen Formeln noch mehr Allgemeinheit dadurch zu geben, dass man bei der Verwandlung in schiefwinklige Coordinaten nicht mehr rechtwinklige, sondern schiefwinklige anderer Art als die primitiven oder ursprünglich gegebenen voraussetzt: so kann dieses ohne Schwierigkeit auf nachfolgende Weise erzweckt werden. Man stelle sich nämlich vor, man habe die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Objectes durch eine zweimalige Anwendung der obigen Formeln I und II in schiefwinklige von verschiedener Art verwandelt, so erhält man nebst obigen zwei Systemen noch zwei andere, von selben blos durch Accentuirung unterscheidbare Systeme, in welchen sich die neuen Coordinaten x'', y'', z'' ebenfalls durch die nämlichen x, y, z ausgedrückt finden. Eliminirt man nun aus diesen zwei Doppel-Systemen die gemeinschaftlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z so erhält man nun zwei neue Systeme von Formeln, welche die Beziehungen schiefwinkliger Coordinaten einer gewissen Art gegen eben solche einer andern Art darstellen. Man erhält nun unter dieser Voraussetzung nach gehöriger Reduction folgende Systeme:

$$
\textbf{G. I.}\quad \left\{\begin{aligned}
x'' &= x' + \frac{cos.(\omega + \omega')}{sin.\,\omega'}\, y' - \left(\frac{cos.\,\eta'\, sin.\,\eta\, sin.(\omega' + \varepsilon') - cos.\,\eta\, sin.\,\eta'\, cos.\,\omega'\, sin.\,\varepsilon}{sin.\,\omega'\, sin.\,\eta'}\right) z';\\
y'' &= \frac{sin.\,\omega}{sin.\,\omega'}\, y' + \left(\frac{cos.\,\eta\, sin.\,\eta'\, sin\,\varepsilon - cos.\,\eta'\, sin.\,\eta\, sin.\,\varepsilon'}{sin.\,\omega'\, sin.\,\eta'}\right) z';\\
z'' &= \frac{sin.\,\eta}{sin.\,\eta'}\, z'.
\end{aligned}\right.
$$

$$
\textbf{G. II.}\quad \left\{\begin{aligned}
x' &= x'' + \frac{cos.(\omega + \omega')}{sin.\,\omega}\, y'' - \left(\frac{cos.\,\eta\, sin.\,\eta'\, sin.(\omega + \varepsilon) - cos.\,\eta'\, sin.\,\eta\, cos.\,\omega\, sin.\,\varepsilon}{sin.\,\omega\, sin.\,\eta}\right) z'';\\
y' &= \frac{sin.\,\omega'}{cos.\,\omega}\, y'' + \left(\frac{cos.\,\eta'\, sin.\,\eta\, sin.\,\varepsilon - cos.\,\eta\, sin.\,\eta'\, sin.\,\varepsilon}{sin.\,\omega\, sin.\,\eta}\right) z'';\\
z' &= \frac{sin.\,\eta'}{sin.\,\eta}\, z''.
\end{aligned}\right.
$$

Diese vorstehenden Formeln dienen nur zur Transformation eines schiefwinkligen Systems in ein anderes schiefwinkliges System im Raume. — Von den vielen speciellen Fällen, die in diesen allgemeinen Formeln enthalten sind, wollen wir bloss der Specialisirung für die Verwandlung der schiefwinkligen Coordinaten in schiefwinklige in der Ebene unter obigen Voraussetzungen hier erwähnen. — Setzt man nämlich $y = y' = 0$, $\omega = \omega' = 0$, $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, so erhält man:

$$\mathbf{G.}\,1.\ \left\{\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{sin.(\eta' - \eta)}{sin.\eta'}\, z'; \\ z'' &= \frac{sin.\,\eta}{sin.\,\eta'}\, z'. \end{aligned}\right. \quad \text{und} \quad \mathbf{G.}\,2.\ \left\{\begin{aligned} x' &= x'' - \frac{sin.(\eta' - \eta)}{sin.\eta}\, z''; \\ z' &= \frac{sin.\eta'}{sin.\eta}\, z''. \end{aligned}\right.$$

§. 17.

Die Transformation der Coordinaten leistet bekanntlich, insbesonders in zwei Fällen, wichtige Dienste. Der erste ist, wo man zur Gleichung eines geometrischen Objectes viel leichter unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten gelangt, als dieses bei der Annahme von rechtwinkligen der Fall war. Dieses wäre z. B. der Fall bei Ableitung der Gleichung gewisser polyedrischer Körper und derlei Oberflächen, wie etwa jener der schiefen Parallelopipeda u. s. w., wobei man ohne Anstand, durch eine blosse Substitution der obigen Formeln, unmittelbar die betreffenden Gleichungen für rechtwinklige Coordinaten erhält. — Der zweite Fall besteht in der möglichen Vereinfachung der vorliegenden Gleichungen und der aus ihnen hervorgehenden Resultate, durch Annahme eines besonders gearteten schiefwinkligen Coordinaten-Systems. Unsere obigen Formeln enthalten nämlich, wie ersichtlich, ausser den darin durch das bestehende System gegebenen Bestimmungsstücken, noch drei andere, völlig willkürliche Grössen ω', ε', η', die nach vorläufiger Substitution der obigen Formeln, wenn auch nicht immer, doch sehr oft (besonders bei aus geraden Linien oder Ebenen zusammengesetzten Objecten) sich hinterher so bestimmen lassen, dass gewisse unbeliebte Glieder aus der Gleichung völlig hinausfallen oder sich doch bedeutend vereinfachen.

Da man auch bei diesem Geschäfte es öfters wünschenswerth finden kann, die Transformation der Coordinaten in Bezug auf gewisse Formeln einstweilen bloss anzuzeigen, so dürfte vielleicht nachfolgendes Operationszeichen nicht unpassend erscheinen, dessen auch wir uns in der Folge bedienen werden.

$$\underset{\omega,\,\varepsilon,\,\eta}{\overset{\omega',\,\varepsilon',\,\eta'}{T}} \left\{ f(x,y,z) \right\}_{\alpha}^{\alpha'},$$

wobei die untern Bestimmungszeichen sich auf das vorliegende oder primitive, die obern dagegen auf das Coordinaten-System beziehen, für welche die angezeigte Transformation vorgenommen werden soll. Auch für die Transformation gelten wieder ähnliche Relationen, wie schon oben bei der Ortsveränderung nachgewiesen wurden. So ist z. B. auch hier

$$1)\ \underset{\omega,\,\varepsilon,\,\eta}{\overset{\omega',\,\varepsilon',\,\eta'}{T}} f(a, x) = f\Big(a, \underset{\omega,\,\varepsilon,\,\eta}{\overset{\omega',\,\varepsilon',\,\eta'}{T}}(x)\Big);$$

$$2)\ \mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\Big(\varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x)\,\omega\,\varphi''(x)\,\omega\ldots\ldots\Big)=\mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\varphi(x)\,\omega\mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\varphi'(x)\,\omega\mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\varphi''(x);$$

$$3)\ \mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}a\,\varphi(x)=a\mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\varphi(x);\ \text{u. s. w.}$$

$$4)\ \mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\mathop{\mathcal{C}}_{\prime}^{n}\Big\{a,b,x_{\varrho},y\Big\}=\mathop{\mathcal{C}}_{\prime}^{n}\mathop{T}_{\omega,\varepsilon,\eta}^{\omega',\varepsilon',\eta'}\Big\{a,b,x_{\varrho},y\Big\}\ \text{u. s. w.}$$

§. 18.

Die geradlinigen und Polar-Coordinaten sind, wie bekannt, keineswegs weder die einzigen, noch auch immer, wie diess die Folge zeigen wird, die einfachsten Hilfsmittel, die Lage sämmtlicher, ein geometrisches Object constituirender Puncte, und somit das Object selbst im Raume festzustellen, und auf Grundlage derselben die Untersuchuug auf gewisse Eigenschaften mit erwünschtem Erfolge einzuleiten. Vielmehr lassen sich solcher Coordinaten-Systeme, wie bereits schon lange bekannt, unzählige ersinnen, von denen jedes unstreitig für gewisse vorliegende Zwecke als das vollkommenste und vorzüglichste erachtet werden muss.

Von dieser Überzeugung durchaus erfüllt und auf den unausweichlichen Bedarf für unsere bevorstehenden Untersuchungen schon gegenwärtig Bedacht nehmend, können wir nicht umhin, ein solches in Vorschlag zu bringen, welches aus beiden, eingangserwähnten Coordinaten-Systemen gleichsam zusammengesetzt, auch beiderlei Vorzüge in einem hohen Grade in sich vereinigt, und bei einer grossen Zahl von Aufgaben mit dem allergrössten Vortheil in Anwendung gebracht werden kann. Auch haben wir von diesem Systeme, wie es den Kennern meiner frühern Arbeit nicht fremd geblieben seyn kann, schon einmal bei Gelegenheit einer Aufgabe, wiewohl unbesprochen, mit Nutzen Gebrauch gemacht.

§. 19.

Es ist bekannt, dass gewisse geometrische Objecte, durch Polargleichungen dargestellt, sich ihren geradlinigen Coordinaten-Gleichungen gegenüber durch eine besondere Einfachheit im Ausdrucke auszeichnen, und dass dieses sehr häufig von solchen gilt, die von einer besondern praktischen Wichtigkeit sind, wie z. B. bei den Kegelschnittslinien, den verschiedenen Spirallinien, den Rolllinien und insbesondere vielen mechanischen Curven u. s. w.

Sollten aber solche Gleichungen unter der Voraussetzung abgeleitet werden, dass der Pol des Systems ein beliebiger sey oder auch, will man mit einem oder mehreren geometrischen Objecten irgend eine beliebige Ortsveränderung im Polar-Coordinaten-Systeme vornehmen u. s. w., so reichen allerdings die in diesem Abschnitte, namentlich im Paragraphe 9 abgeleiteten Formeln zu. Allein man wird auch schon aus dem blossen Anblicke der genannten Ausdrücke überzeugt, dass in den, bei weitem meisten Fällen die so behandelten Gleichungen sehr zusammengesetzt werden, welcher Umstand ihren Gebrauch gar sehr beschränkt. Als ein Coordinaten-System, welches von diesem Übelstande völlig frei ist und in der That alle Vortheile eines Polar-Systems darbietet, schlagen wir folgendes vor.

Es bezeichne Fig. 64 v den veränderlichen Polarwinkel, welcher nach Verlegung des ganzen geometrischen Objectes von O nach O', wobei dasselbe zugleich eine Drehung um den constanten Winkel ϱ erleiden mag, noch immer von der mit der Figur in fester Verbindung gedachten Polarachse Ox oder $O'x'$ an, gerechnet werden soll. Ferner bedeute u den Radiusvector OM oder $O'M$, für den Winkel v, und d und δ seyen die rechtwinkligen Coordinaten des verlangten Pols. — Diess vorausgesetzt, hat man sofort, wenn $U = \varphi(v)$, die Polar-Gleichung des Objectes ist:

$$\textbf{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = d + u \cos.(\varrho + v) = d + \varphi(v) \cos.(\varrho + v); \\ y = \delta + u \sin.(\varrho + v) = \delta + \varphi(v) \sin.(\varrho + v); \end{array} \right.$$

und jeder dieser beiden Ausdrücke ist nun schon eine vollständige Gleichung von den oben angeführten Eigenschaften, vorausgesetzt, dass d und δ stets zugleich bekannt sind; denn offenbar ist eine Relation zwischen x und v sowohl, als auch zwischen y und v für sich allein schon hinreichend, um jeden einzelnen Punct des geometrischen Objectes zu bestimmen. Man wird von diesen daher jederzeit diejenige auswählen, welche man für die passendste erachtet. Namentlich wird man sich der zweiten bedienen, wenn man geometrische Objecte vor sich hat, von denen, wie später gezeigt werden wird, einige im Linear-Systeme, andere im Polar-Systeme ausgedrückt sind. Beide zusammen dienen, um durch Elimination des Winkels v auf eine Gleichung zwischen x und y selbst, zurückzukehren, falls dieses auf eine einfache Weise geschehen kann.

Die genannten zwei Gleichungen sind auch ganz dazu geeignet, um auf dasjenige Polar-Coordinaten-System zurückzukehren, dessen Pol im Ursprunge O selbst liegt. Es ist nämlich, begreiflicher Weise wegen, $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ nach gehöriger Reduction:

$$\textbf{I.} \quad U = \sqrt{d^2 + \delta^2 + u^2 + 2\,du \cos.(v + \varrho) + 2\,\delta u \sin.(v + \varrho)} =$$
$$= \sqrt{d^2 + \delta^2 + \overline{\varphi(v)}^2 + 2\varphi(v)(d \cos.(v + \varrho) + \delta \sin.(v + \varrho))}:$$

welche letztere Gleichung abermals als eine besondere Art der Polar-Coordinaten-Systeme gelten kann *).

Zu bemerken ist schliesslich noch, dass dieses, so wie das frühere System II, den grossen Vortheil darbietet, dass man ohne alle mühsame Substitutionen alle denkbare Ortsveränderungen vornehmen kann. Soll nämlich irgend ein Object, dessen anfänglicher Drehungspunct (der zugleich der individuelle Pol ist) durch die Coordinaten d und δ gegeben ist, und deren Drehungsachse mit der x einen Winkel ϱ macht, dislocirt werden, so hat man nur in II, statt d, δ und ϱ, die Grössen d', δ' und ϱ' zu setzen, welches jederzeit ausführbar ist, weil die äussere Form durch keinerlei Reduction verändert werden kann. So z. B. bedeutet $y = 13 + \frac{5 \sin. v}{3 - \cos. v} \sin.(v + 11^0)$ irgend eine Curve im genannten Systeme, deren Pol $d = 7$

*) Augenscheinlich unterscheidet sich diese Art, die Polar-Coordinaten zu zählen, von der im vorigen Capitel erwähnten, oder dem gewöhnlichen Polar-Systeme schon darin, dass bei der gegenwärtigen zwei Pole vorausgesetzt werden.

und $\delta = 13$ ist. Soll nun dieser gegebene Gegenstand in der Weise eine andere Lage annehmen, dass $d' = 24$, $\delta' = -6$ und $\varrho' = 18^0$ wird, so hat man als neue Gleichung:
$y = -6 + \frac{5\,sin.v}{3 - cos.v}\,sin.(v + 18^0)$.

§. 20.

Wenn mehrere geometrische Objecte auf denselben Pol bezogen, d. h. durch Polargleichungen desselben Systems dargestellt werden; so gilt natürlich bei Gelegenheit ihrer Verbindung unstreitig derselbe Grundsatz, wie bei den Linear-Coordinaten, nämlich, dass für alle jene Puncte, die zwei oder mehrere Objecte gemein haben, sowohl die entsprechenden Werthe von y oder x, als auch jene von v gleich seyn müssen. So ist z. B. wenn d, δ den Pol bestimmen, offenbar: $x = d + \frac{p\,cos.(v+\varrho)}{2(1 - cos.v)}$ die Brennpunct-Polar-Gleichung einer Parabel in unserm Systeme, und $x = d + r\,cos.(v + \varrho')$, jene eines Kreises vom Radius r, wobei ϱ' in letzterer Gleichung willkürlich, und desshalb gleich ϱ angenommen wird. Wegen $x = x'$ und $v = v'$ als $d + \frac{p\,cos.(v+\varrho)}{2\,(1 - cos.v)} = d + r\,cos.(v+\varrho)$, daher $p = 2r(1 - cos.v)$ und somit $cos.v = \left(1 - \frac{p}{2r}\right)$ oder $v = arc.\,cos.\left(1 - \frac{p}{2\,r}\right)$ u. s. w.

Anders dagegen verhält es sich, wenn man Gleichungen von verschiedenen Polar- oder andern Systemen zu verbinden hat. — Ich habe schon in der frühern Abhandlung pag. 39 darauf aufmerksam gemacht und namentlich den häufig vorkommenden Fall ausführlicher erörtert, wo Objecte, deren Gleichungen sich auf verschiedene schiefwinklige Coordinaten-Systeme beziehen, mit einander zu vergleichen, und einer analytischen Behandlung zu unterziehen sind. Indem wir also, um Wiederholung zu vermeiden, von diesem Falle hier absehen, wollen wir bloss die zwei nachfolgenden, ihrer Wichtigkeit wegen, einer weitern Betrachtung unterziehen, erstlich wenn rechtwinklige Coordinaten mit Polar-Coordinaten vom Systeme II, und dann, wenn zwei verschiedenen Polen entsprechende Polar-Coordinaten eben dieses Systems II in Verbindung gebracht werden sollen.

Was den ersten Fall anbelangt, so sey die Gleichung eines Objectes im rechtwinkligen Systeme $y = F(x)$, und für jene im Polar-Systeme mögen die in II aufgeführten selbst gelten. Da nun hier in beiden Systemen x und y dieselben Grössen bezeichnen sollen, so wird man für den Fall, wenn beide Objecte wirklich einen oder mehrere Puncte gemein haben, als entsprechende Bedingungsgleichung haben:

$$1)\quad F(d + \varphi(v)\,cos.(v + \varrho)) = \delta + \varphi(v)\,sin.(v + \varrho);$$

woraus sofort v selbst, und x oder y gefunden werden können. — Soll man z. B. den Durchschnitt irgend einer geraden Linie mit einem Kreise vom Radius r suchen, so hat man, wenn $y = Ax + B$ die Gleichung der geraden Linie, und $y = \delta + r\,cos.\,v$; die Gleichung des Kreises ist, nach 1) $A(d + r\,cos.v) + B = \delta + r\,sin.v$ und wegen $A = sin.\omega$:

$r\,(\sin. v - \tang. \omega \cos. v) = \tang. \omega . d + B - \delta$; oder: $\sin. (v - \omega) = \frac{d \sin. \omega + (B - \delta) \cos. \omega}{r}$;

oder: $v = \mathrm{arc.}\sin. \left(\frac{d \sin. \omega + (B - \delta) \cos. \omega}{r}\right) + \omega$.

Man sieht aus letzterem Ausdrucke, da *arc. sin.* im Allgemeinen zwei Werthe hat, d. h. da jedem Sinusse zwei (eigentlich unendlich viele) Bögen entsprechen, dass auch dem v im Allgemeinen zwei Werthe entsprechen, d. h. dass ein Kreis von einer geraden Linie in zwei Puncten geschnitten wird. Ist dagegen der hinter dem *arc. sin.* stehende Bruch seinem Werthe nach gleich der Einheit, so wird man, da *arc. sin.* nur den einzigen Werth 90^0 enthält, auch für v nur einen Werth erhalten und zwar $v = 90 + \omega$. Diess ist der Fall, wenn die Secante zur Tangente wird. In der That ist auch in diesem Falle, wie Fig. 65 veranschaulicht, $v = 90 + \omega$.

Der zweite der erwähnten Fälle ist jener, wo zwei Gleichungen, die zu verschiedenen Polar-Systemen gehören, mit einander verknüpft werden sollen. Um hier die nöthige Bedingungsgleichung für den Fall, wo sich die entsprechenden Objecte berühren oder schneiden, wo sie also einen oder mehrere Puncte gemein haben, abzuleiten, wende man einen Blick auf Fig. 66, wo O und O' die beiden Pole der Systeme, und M einen gemeinschaftlichen Punct beider Objecte bedeutet. — Es ergeben sich aus der Figur unmittelbar die beiden Bedingungsgleichungen, wovon die erstere zur ersten Gleichung von II. gehört, die zweite aber der zweiten entspricht:

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta' - \delta = (x - d) \tang.\ v + (d' - x) \tang.\ v'; \\ d' - d = (y - d) \cotang. v - (y - \delta) \cotang. v'. \end{array}\right.$$

Mittelst den zwei gegebenen Gleichungen der beiden Objecte und einer von den gegenwärtigen Bedingungsgleichungen ist man daher immer im Stande, die Grössen x, v, v' oder falls die genannten Gleichungen in y gegeben wären, die Grössen y, v, v' zu bestimmen. — Es kann in der That nichts begreiflicher seyn, als dass es für das Resultat einer Untersuchung völlig gleichgültig seyn muss, ob man die zu verbindenden Gleichungen früher auf ein gemeinschaftliches Coordinaten-System bringt, oder diese zwei ungeändert lässt, und dagegen die erforderlichen Bedingungsgleichungen der analytischen Beziehungen mittelst der bekannten Transformations-Formeln umstaltet. Es lässt sich aber auch unschwer einsehen, dass in vielen Fällen die letztere Behandlungsweise einen entschiedenen Vortheil gewähre.

§. 21.

Überblickt man alles bis jetzt über die Dislocation und Transformation Gesagte, so erkennt man leicht, dass in den Dislocations-Formeln A. und in den Transformations-Formeln G. zusammen 9 Bestimmungsgrössen auftreten, und zwar α', β, γ, φ, ψ, θ' und ε' η, ω', während alle übrigen, als völlig willkürlich angenommene, oder nur als durch die Beschaffenheit des bestehenden Coordinaten-Systems bedingte, betrachtet werden müssen. Legt man nun der Substitution einer Gleichung ein System dreier Gleichungen von der allgemeinsten Form

$$\begin{aligned} x &= a + b\,x' + c\,y' + \delta\,z'; \\ y &= a' + b'x' + c'y' + \delta'z'; \\ z &= a'' + b''x' + c''y' + \delta''z' \end{aligned}$$

mit zwölf völlig unbestimmten Coefficienten zum Grunde, so lassen sich zwar immer neun von ihnen, den obigen Bestimmungsstücken gemäss, annehmen, drei jedoch bleiben noch immer als unbestimmt zurück. Soll demnach durch genannte Substitution lediglich eine Ortsveränderung und gleichzeitig damit etwa eine Änderung in der Art, wie die Coordinaten genommen werden sollen, erzielt werden: so müssen zwischen jenen zwölf Coefficienten nothwendig noch drei Bedingungsgleichungen bestehen, deren Ableitung wir uns hier enthalten.

Wählt man daher für obige allgemeine Coefficienten aufs Geradewohl beliebige Zahlwerthe, so kann man mit weit überwiegender Wahrscheinlichkeit erwarten, dass diese Annahme den neun Bestimmungsstücken α', β', γ', φ', ψ', θ', ε', η', ω' und den erwähnten drei Bedingungsgleichungen nicht entsprechen, und die unternommene Substitution weder einer blossen Ortsveränderung des geometrischen Objectes, noch auch einer blossen Transformation der Coordinaten, noch auch beiden zugleich entsprechen werde: sondern dass nebst der erwähnten noch irgend eine andere Veränderung hiedurch veranlasst werden müsse. Da nun aber nebst der Orts- und Coordinaten-Veränderung nur noch eine Formveränderung an den geometrischen Objecten denkbar ist: so ersieht man hieraus, dass obiges System von Gleichungen, wenn ihre Coefficienten nicht dreien gewissen Bedingungsgleichungen entsprechen, sondern völlig willkürlich angenommen werden, nebst einer Orts- und Coordinaten-Veränderung auch noch irgend eine Formveränderung hervorbringen werde *). Es kann aber auch umgekehrt Formen geben, die sich durch keinerlei Annahme der genannten neun Bestimmungsstücke hervorbringen lassen. — Um nur ein Beispiel anzuführen, kann man für gewisse Annahmen von den Gleichungen A. I. sowohl wie von A. (1) allerdings auf folgende, nämlich $x = -x'$, $y = -y'$, $z = -z'$ übergehen, niemals aber wird es möglich seyn, aus ihnen die Gleichungen $x = x'$, $y = y'$, $z = -z'$ abzuleiten. — Hieraus lässt sich nun mit aller Bestimmtheit noch vor jeder genauern Untersuchung schliessen, dass die erstere Substitution eine blosse Orts- und vielleicht auch noch Coordinaten-Veränderung bewirken werde, die zweite aber jedenfalls mit einer Formänderung des geometrischen Objectes selbst verknüpft seyn müsse.

Diese letztere Bemerkung führt uns nun auf eine höchst natürliche Weise einer neuen interessanten Untersuchung über eigentliche Formänderung der geometrischen Objecte entgegen, von denen wir im nächsten Capitel und im dritten Abschnitte einige einer weitern Betrachtung unterziehen werden.

III. Capitel.

Von der Formänderung geometrischer Objecte oder der geometrischen Metamorphose.

§. 22.

Wenn man in die Gleichung irgend eines geometrischen Objectes für einige oder alle, dieser Function zum Grunde liegende Variablen solche von x', y', z' abhängige Ausdrücke

*) Meines Wissens hat noch Niemand auf diesen wichtigen Umstand aufmerksam gemacht, und diese Art der Formänderung an geometrischen Objecten einer genauern wissenschaftlichen Untersuchung würdig erachtet, wiewohl die Nützlichkeit eines solchen Unternehmens wohl kaum in Abrede gestellt werden dürfte.

substituirt, welche auf keinerlei Weise durch Specialisirung der bereits aufgestellten Dislocations-Formeln erhalten werden können: so kann die Wirkung dieser Substitution auf die Gleichung auch durchaus nicht einer blossen Ortsveränderung des Gegenstandes entsprechen. Da nun aber auch die Bedeutung der veränderlichen Grössen gemäss Voraussetzung dieselbe bleiben soll, so kann die Änderung auch nicht in einer blossen Transformation der Coordinaten, wobei der Gegenstand ungeändert bliebe, bestehen; und es erübrigt hiermit nichts Anderes, als die Annahme, dass diese Substitution entweder völlig ohne Wirkung auf den geometrischen Gegenstand und das Coordinaten-System seyn werde, oder aber eine wesentliche Formänderung des Gegenstandes zur unausbleiblichen Folge haben müsse. Das Erstere anzunehmen, verbietet die Natur der Sache, und es kann daher sofort nicht mehr im Geringsten gezweifelt werden, dass auf dem bezeichneten Wege in der That Formänderungen zu Stande kommen.

Der Umstand ferner, dass die eben vorliegende Gleichung einen sehr wesentlichen, ja in der That den wichtigsten Bestandtheil für das Zustandekommen der neuen Function bildet, lässt mehr als bloss vermuthen, dass die dieser Functions-Änderung entsprechende Änderung des geometrischen Objectes nicht in einer gänzlichen, einem Austausche gleichkommenden Umstaltung desselben, sondern in einer blossen, wenn auch noch so namhaften Abänderung oder in einem Varriiren ihrer ursprünglichen Form bestehen könne. Wir glauben daher, diese Art der Formänderung, da das Wort »Variation« bereits schon zu anderm Gebrauche vergriffen ist, nicht unpassend die geometrische Metamorphose nennen zu sollen.

§ 23.

Hält man den Gedanken an geometrische Formänderungen noch weiter fest, so erkennt man gar bald, dass sich diese Untersuchungen nach einem doppelten Gesichtspuncte anstellen lassen. Denn nicht nur fragen kann man, welche Veränderungen in der Form gewisse Substitutionen hervorbringen, sondern auch das Verlangen wird sich einstellen, Formänderungen gewisser Art an den geometrischen Objecten absichtlich herbeizuführen. Diess letztere wird uns sofort zu einer eigenen Klasse von Untersuchungen führen. Überhaupt kann es kaum geläugnet werden, dass dieser Gedanke der analytisch-geometrischen Forschung ein fast unermessliches, bis jetzt noch unbetretenes Gebiet eröffnet. Ich werde zwar weiter unten nicht ermangeln, auf eine Anwendung ganz eigener Art, die man von dieser geometrischen Formänderung sich versprechen kann, eigens hinzuweisen; allein auch abgesehen davon, wird man den grossen Vortheil gar leicht ermessen, der sich für die analytische Darstellung der verschiedenen geometrischen Objecte und der Formen und Gegenformen, die sie in gewissen Fällen und unter vorkommenden Umständen annehmen, erwarten lässt. Man erinnere sich, dass sich Oberflächen ganz oder theilweise umstülpen, aus- und einstülpen lassen; dass sie sich gleichförmig oder ungleichförmig ausdehnen oder zusammenziehen; dass sie sich dehnen und biegen lassen u. dgl. m. Und bei allen diesen mannigfaltigen Veränderungen ihrer Form, wer wollte es läugnen, herrscht noch immer die ursprüngliche Form, selbst wenn sie ins Unkenntliche sich verändert haben sollte, fort, und es ist gewiss, dass man nur den entsprechenden metamorphorisirenden Factor zu kennen brauche, um durch eine blosse Substitution in die ursprüngliche Gleichung jene Veränderungen auch analytisch darzustellen.

Nun bin ich zwar weit entfernt, hier eine auch nur einigermassen vollständige Abhandlung über diesen Gegenstand liefern zu wollen. Doch hoffe ich, die oben ausgesprochenen Ansichten durch einige Beispiele zu erläutern.

§. 24.

Offenbar zu den allereinfachsten Annahmen *), die indess doch wieder einige specielle Fälle in sich schliesst, gehört die Substitution von: $x = m x'$ und $y = n y'$. — Wenn beide Coefficienten m, n, oder auch nur einer von ihnen, einen von der Einheit verschiedenen Werth haben, derselbe mag übrigens grösser oder kleiner als die Einheit seyn, so können diese Gleichungen durch keinerlei Annahme der den Dislocationsformeln I. und II., Capitel I. zum Grunde liegenden Bestimmungsgrössen erhalten werden. Die Wirkung, die sie auf die Gleichung irgend eines Gegenstandes ausüben, besteht daher in einer Formänderung. Ist $y = F(x)$; $x = m x'$, $y = n y'$ und

1) $m = n$ und von der Einheit verschieden, so hat man $y' = \frac{1}{m} F(m x')$; die Wirkung hievon ist die Verwandlung des Gegenstandes in ein geometrisches Object von ganz ähnlicher Form **). Ein Gleiches gilt auch von räumlichen Objecten, wobei man $x = m x'$, $y = m y'$ und $z = m z'$ zu setzen hat, nämlich wenn $z = F(x, y)$, so ist $z' = \frac{1}{m} F(m x', m y')$. Man kann sich daher zu einem geometrischen Objecte, ohne selbst seine Form zu kennen, die Gleichung eines ihm ähnlichen Gegenstandes verschaffen. Zu bemerken ist ferner noch, dass der neue Gegenstand den anfänglichen an Grösse übertrifft oder kleiner als er, ist; je nachdem m kleiner oder grösser als die Einheit ist. So ist z. B. $y = 5 \pm \sqrt{6 + 4x - \frac{1}{2}x^2}$ die Gleichung einer Ellipse wegen $m = \frac{1}{2}$; $x = \frac{x'}{2}$, $y = \frac{y'}{2}$; sofort $y' = 10 \pm \sqrt{24 + 8x' - \frac{1}{2}x'^2}$ und diese ist die Gleichung einer ähnlichen Ellipse, deren Achsen noch einmal so gross sind, wie jene der erstern.

*) Noch einfacher wäre zwar die Annahme $x = d + x'$, $y = \delta + y'$. Allein diese Annahme ist in der Dislocations-Formel begriffen, und entspricht bekanntlich dem parallelen Fortbewegen des geometrischen Objectes.

**) Aehnlich werden hier diejenigen Curven, Figuren und Oberflächen u. s. w. genannt, deren sämmtliche, auf die Form bezügliche constante Bestimmungsstücke proportional sind. Sind in einer Gleichung a, b, c u. s. w. die Bestimmungsstücke und bezeichnen zugleich d und δ die Coordinaten irgend eines beliebigen, aber bestimmten Punctes des anfänglichen Gegenstandes, so wird man, um den veränderten Gegenstand wieder an seine frühere Stelle im Coordinaten-Raume zurückzubringen, statt x' und y' auch noch $x' + (m-1)d$, und $y + (m-1)\delta$ zu setzen haben, und es besteht daher die höchst merkwürdige Relation:

$$y = (1-m)\delta + \frac{1}{m} F\Big(a, b, c, .. \; m x' + m(m-1) d\Big) = F\Big(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m} \dots, x\Big);$$

und so auch bei Objecten im Raume.

2) Ist nur $m=1$, n aber von 1 verschieden, so erleidet die Gleichung durch Substitution von $x=x'$ und $y=ny'$ eine Veränderung, welche derjenigen des Objectes entspricht, wo bei gleichbleibenden Abscissen sämmtliche Odinaten proportional vergrössert oder verkleinert werden. Ist z. B. Fig. 67 die Gleichung für eine parabolische Curve: $y=-x^2+13x-30$ und setzt man nun $x=x'$, und $y=\frac{y'}{3}$, so erhält man $y'=39x'-3x'^2-90$, welche der aus ABC in $AC'B$ übergangenen Curve entspricht. — Hätte man dagegen $x=x'$ $y=2y'$ gesetzt, so hätte man $y'=\frac{13}{2}x-\frac{x'^2}{2}-15$ erhalten, die $AC''B$ entspricht. Die gleichen Formänderungen finden Statt, wenn die Gleichung des in Fig. 68 dargestellten Kreises $y=\sqrt{49-x^2}$, in $y'=3\sqrt{49-x^2}$ und in $y'=\frac{1}{2}\sqrt{49-x'^2}$ übergeht.

3) Findet das umgekehrte Verhältniss Statt, d. h. setzt man $n=1$, m aber von 1 verschieden, so bleiben sämmtliche Ordinaten ungeändert, die Abscissen dagegen werden proportional vergrössert oder verkleinert, je nachdem m kleiner oder grösser angenommen wird, als die Einheit. Dieser Veränderung entsprechen die Fig. 69 und 70.

4) Sind endlich m und n sowohl von der Einheit, als auch unter einander verschieden, so erleidet die betreffende Gleichung eine Veränderung, welche einer proportionalen, aber ungleichen Vergrösserung sämmtlicher Ordinaten sowohl als Abscissen entspricht. So verwandelt sich z. B. die Gleichung des Kreises: $y=\sqrt{r^2-x^2}$ in $y'=\frac{1}{n}\sqrt{r^2-m^2x^2}$, welches augenscheinlich die Gleichung einer Ellipse ist, deren eine Achse $\frac{2r}{m}$, die andere $\frac{2r}{n}$ beträgt.

In ganz gleicher Weise kann man daher auch von der Gleichung einer Kugel auf dem bezeichneten Wege auf ein Rotations- oder auch ungleichachsiges Ellipsoid übergehen. Selbst schon von diesen allereinfachsten Formänderungen werden wir im dritten Abschnitte einen nützlichen Gebrauch zu machen wissen.

§. 25.

Eine andere, gleichfalls sehr einfache Annahme, die gleichwohl auf höchst sonderbare und auffallende Formänderungen führt, besteht in der Voraussetzung, dass $x=x'$, dagegen $y=\frac{y'}{ax'+b}$ seyn solle. Ist die allgemeine Gleichung des Objectes, auf welche diese Substitution angewendet werden soll, $y=F(x)$, so erhält man sofort für die dazu gehörige metamorphosirte Gleichung offenbar $y'=(ax'+b)F(x')$. — Um die Art die Einwirkung dieses formändernden Factors augenscheinlicher zu machen, werden wir ihn vorerst auf die einfachsten geometrischen Objecte in der Ebene anwenden, und wir bemerken, dass die Formeln $x=x'$ und $y'=(ax'+b)y$ aus den Dislocations-Formeln der Ebene auf keine Weise erhalten werden können, und daher jedenfalls mehr als eine blosse Ortsveränderung bewirken müssen. Auch kann hier schon erwähnt werden, dass derjenige Punct der Abscissen-Achse, für welchen

$ax' + b$ Null wird, d. h. jene von $x' = -\frac{b}{a}$ bei allen Objecten für ihre Formänderung von besonderer Wichtigkeit ist.

1) Es sei das gegebene Object eine gerade Linie MN Fig. 71, deren Gleichung $y = Ax + B$ seyn mag. Man erhält sofort $y' = (ax' + b)(Ax' + B)$. Es hängt nun vor Allem davon ab, ob $x' = -\frac{b}{a}$ einem Puncte diesseits oder jenseits O, entspricht also etwa in O' oder O'' liegt; ersteres geschieht, wenn numerisch $\frac{B}{A} < \frac{b}{a}$, letzteres wenn $\frac{B}{A} > \frac{b}{a}$ ist; im erstern Falle geht die Gerade MN in $M'ON'$ oder in $M''ON''$ über, je nachdem a negativ oder positiv ist; im zweiten Falle in $M'ON$ oder $M''ON''$, Fig. 72, je nachdem ebenfalls a negativ oder positiv ist.

Wendet man den ähnlichen formändernden Factor $a'x' + b'$ auf das eben gefundene Object, d. h. auf die Curve OPO' Fig. 73 an, d. h. setzt man abermals $x = x'$, $y = \frac{y'}{a'x' + b}$ so erhält man: $y' = (a'x' + b')(ax + b)(Ax' + B)$: und es kömmt nun Alles darauf an, ob der nullmachende Werth dieses neuen; d. h. ob $-\frac{b}{a}$ sich auf einen Punkt O'' zwischen O und O' oder vor O, oder ausserhalb O' bezieht.

Im erstern Falle gehört die Curve in $M'P'P'N'$, wenn a positiv, dagegen in $M''P''P''N''$, wenn a negativ ist. — Im zweiten Falle, der durch Fig. 74 dargestellt wird, geht die Curve MPN in $M'P'P'N'$ oder in $M''P''P''N''$ über; ersteres geschieht, wenn a positiv, letzteres wenn a negativ ist.

Der dritte und letzte Fall, welcher in Fig. 75 dargestellt ist, tritt ein, wenn O'' ausserhalb dem Puncte O' liegt. Ist a' positiv, so erhält man die Curve $M'P'P'N'$; ist dagegen a' negativ, so erhält man jene von $M''P''P''N''$.

Das Gesetz der Änderung ist so höchst einfach, dass man in Bezug auf diesen Hauptpunct der Formänderung nachfolgende Regel feststellen kann: Wird eine Gleichung von der Form $y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots . Vx + W = X$; welche stets der Repräsentant einer in Fig. 76 dargestellten parabolischen Curve ist, statt x, x' und für $y = \frac{y'}{ax' + b}$ substituirt, wodurch man $y' = (ax' + b)X$ erhält, so erleidet die der Gleichung $y = X$ entsprechende Curve $OP'O''PO$, Fig. 76 nachfolgende Formänderung. Zuerst hat man auszumitteln, zwischen welche Wurzeln, d. h. zwischen welche der Durchgangspunct o, o', o'', o'''.... der nullmachende Werth $x' = -\frac{b}{a}$ fällt. Es entspräche diesem Werthe der Punct q, in Fig. 76, so ist gewiss, dass durch diesen Punct eine Serpentine der neuen Linie gehen wird. — Ist nun a positiv, so entsteht die Curve $oOo'O'q''O''o''$.....: ist dagegen a negativ, so geht die ursprüngliche Curve in $oR'''o'R''qR'o''R$ über. Auch der Einfluss auf die Erhebung der Serpentinen über und unter der Achse der x lässt sich anschaulich machen und mit jedem beliebigen Grad von Genauigkeit angeben. Ist z. B. die gegebene Curve, jene $oPo'P'o''P''$ in Fig. 77 dargestellt, so geht sie unter der Voraussetzung, dass a positiv ist, in $oQo'Q'o''Q''o'''Q'''$ über, und zwar in der Weise, dass die Serpentinen im steigenden Masse von x sich weiter entfernen, je weiter sie sich vom Punkte p gegen rechts und links entfernen. Jede einzelne Ordinate der neuen Curve ist ein Product aus ihrer ursprünglichen Grösse in den aus der Substitution des für x' gesetzten Werthes in den Factor $(ax'+b)$. Es lag hier ganz in unserer Absicht, bei diesen einfachen Betrachtungen mit einer grössern Ausführlichkeit zu Werke zu gehen, als es vielleicht Manchem nothwendig scheinen möchte.

§. 26.

Nachdem wir nun schon die Wirkung der Substitution von $x=x'$ und $y=\frac{y'}{ax'+b}$ bei den sogenannten parabolischen Curven kennen gelernt haben, wird es wenigen Schwierigkeiten unterworfen seyn, den formändernden Einfluss auch auf andere geometrische Objecte kennen zu lernen. Eine wichtige Klasse der geometrischen Formen bilden unstreitig die in sich selbst zurückkehrenden, wie z. B. die Kreislinien und Ellipsen. Wir wollen hier, da die Formänderung eine ganz ähnliche auch bei den mit dem Kreise formverwandten übrigen Curven ist, den erstern wählen und anfänglich noch dazu den speciellen Fall betrachten, wo man $x=x'$ und $y=\frac{y'}{ax'}$ setzet. — Es sey, um hier gleich ein numerisches Beispiel zu wählen, $y=\sqrt{16-x^2}$, die Gleichung des in Fig. 78 abgebildeten Kreises. Es muss hier schon zum Voraus erwähnt werden, dass der Umstand, ob der Mittelpunct des Kreises im Ursprunge c, oder in einem Punkte des Durchmessers, oder gar ausserhalb des Kreises sich befindet, gehörig beachtet werden muss. In unserem vorliegenden Falle liegt er im Ursprunge des Coordinaten-Systems, und unsere Gleichung geht über in: $y'=ax\sqrt{16-x^2}$. Diese Gleichung entspricht nun jederzeit einer Schleifenlinie, wie sie in Fig. 78 durch $EHOFG$ vorgestellt wird. — Da die Gleichung, eine neue noch unbestimmte Constante, nämlich a enthält, so kann man zur genauern Bestimmung derselben etwa die Bedingung beifügen, dass diese Curve durch einen bestimmten Punct g der anfänglichen Curve gehen soll. Heisst man die Abscisse von g, α, so hätte man $a=\frac{1}{\alpha}$ zu setzen.

Ebenso könnte man festsetzen, dass der Curvenast GE die Achse x unter einem gewissen Winkel, z. B. von 45^0 durchschneide. In diesem Falle hätte man wegen

$\left(\frac{dy}{dx}\right)=a\sqrt{16-x^2}-\frac{ax^2}{\sqrt{16-x^2}}$ und somit für $x=0$, wegen $tang.\,45^0=1$, $a=\frac{1}{4}$; daher $y'=\frac{x}{4}\sqrt{16-x'^2}$ die Gleichung derjenigen Schleifenlinie, deren Äste, bei einem Grundkreis vom Radius 4, sich wechselseitig unter rechten Winkeln durchschneiden. Ist der Mittelpunct des Kreises nicht im Ursprunge des Coordinaten-Systems, sondern in einem Puncte O, Fig. 79 des Durchmessers, jedoch noch innerhalb des Kreises, so entspricht dieser Substitution eine Curve wie $GHIK$ und eine Gleichung, wie etwa $y'=ax'\sqrt{7+6x'-x'^2}$: wobei a wieder so bestimmt werden kann, dass die Curve entweder durch einen gewissen Punct g geht, oder dass der Winkel, unter welchem die Schleifen die Achse x durchschneiden, ein bestimmter ist. Rückt endlich der Punct bis zur Peripherie des Kreises hinaus, wie in Fig. 80, so wird die kleinere Schleife von der grössern so zu sagen völlig absorbirt, und liefert eine Curve, wie die in $FGHI$ abgebildete. Dabei ist dieselbe noch immer einer genauern Bestimmung fähig, durch Angabe eines Punctes, durch welchen sie gehen soll. Wäre endlich der Ursprung ganz ausserhalb des Kreises, und des letztern Mittelpunct z. B. in der Achse der y, wie in Fig. 81: so hätte man, wenn diese Gleichung $y = 10 \pm \sqrt{9 - x^2}$ ist, offenbar $y' = ax'(10 \pm \sqrt{9 - x'^2})$. Diese Gleichung entspricht einer Schleifenlinie, wie die $GHIF$ in Fig. 81 ist, wobei man noch die Bedingung stellen kann, dass entweder dieselbe durch den Punct G gehe, oder einen Schleifenwinkel ω von gewisser Grösse bilden solle *). Setzt man dem Factor ax' das doppelte Zeichen $\pm$ vor, so erhält man eine Curve von der Form Fig. 82. — Man kann endlich noch fragen, welche Formänderung eintrete, wenn der Punct A Fig. 83 selbst noch über die Peripherie hinaustritt, jedoch in der Verlängerung des horizontalen Durchmessers. In diesem Falle entsteht eine eiförmige Curve $FGHI$, welche ihre Spitze in F, den breiteren Theil in I hat. Durch einen, nach obigem Grundsatze bestimmten Werth von a kann stets bewirkt werden, dass sie durch die Puncte G und H gehe.

Die Ovale erhält eine wohlgefälligere Form, wenn man statt eines Kreises eine Ellipse als Erzeugungslinie zu Grunde legt, und die Grösse a in angemessener Weise bestimmt. — So entspricht z. B. die Gleichung $y' = \frac{x}{20} \sqrt{40x - x^2 - 300}$ einer sehr gefällig geformten elliptischen Ovale.

Die Substitution von $x = x'$ und $y = \frac{y'}{ax' + b}$ bewirkt an geometrischen Objecten, welche sich ganz allgemein im Coordinaten-Raume befinden, analoge Formänderungen, von denen die eben betrachteten nur als specielle Fälle erscheinen. — Wir wollen die formändernde Kraft dieser Substitution auch noch an der Gleichung einer Parabel ABC, deren Gleichung $y = \sqrt{3x + 12}$ seyn mag, und die in Fig. 84 dargestellt ist, versuchen, was auf die Gleichung $y' = ax'\sqrt{3x' + 12}$ und auf die Schleifenlinie $AB'C'$ führt. Auch hier wieder kann a so bestimmt werden, dass die neue Curve entweder durch F und G geht, oder einen bestimmten Schleifenwinkel bei 0 macht **). — Die Wirkung dieser Substitution ist daher auch

*) Die Anwendung unserer Dislocationsformeln, wobei $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta = 0$, $\beta' = 0$, und $\varrho = \overset{n}{\mathcal{CO}}\left(\frac{180}{n}\right)\psi$ gesetzt wird, würde auf die obige Gleichung der in Fig. 85 vorgestellten Curve führen. Ebenso lassen sich Gleichungen, nach dem früher erwähnten gemischten Polar-System, durch Einführung formändernder Faktoren von den mannigfaltigsten Objecten aufstellen. So z. B. stellt die Gleichung

$$y = \delta + U(1 \pm x\, m \sin. n v) \sin. (\omega + v')$$

Formen von der Art, wie in Fig. 89, 90 und 91 dar, jenachdem die Constanten m und n diesen oder jenen speciellen Werth erhalten. Es kömmt hierbei auf die Polargleichung $U = \varphi(v)$, ferner auf die bestimmten speciellen Werthe von m und n an.

**) Nimmt man eine Parabel, deren Scheitel im Ursprung liegt, z. B. $y = \sqrt{3x}$, und setzt man $x = x'$.

bei wechselnden Objecten eine durchaus analoge und eigenthümliche, und diess war es auch, welches zu zeigen wir uns hier vorzüglich vorgenommen hatten.

§. 27.

Eine andere Klasse merkwürdiger Formänderungen liefert die Annahme, dass $x = x'$ und $y = \frac{1}{y'}$, und bei Körpern $x = x'$, $y = y'$ und $z = \frac{1}{z'}$; oder auch $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{1}{y'}$ und bei Objecten des Körperraums etwa auch noch $z = \frac{1}{z'}$ seyn solle. Man gelangt auf diesem Wege zu einer grossen Anzahl höchst mannigfaltiger Formen, die alle denselben Charakter der Formänderung an sich tragen, und die man mit Recht reciproke oder Gegenformen nennen könnte. So ist z. B. $y = x$ die Gleichung der Geraden AB Fig. 86, $x'y' = 1$ oder $y' = \frac{1}{x'}$, dagegen jene der Curve FEG, einer gleichseitigen Hyperbel, deren sogenannte Potenz die Einheit. Es sind daher diese Linien Gegenformen. Eben so ist Fig. 87 EFG und $E'F'G'$ zusammen die Gegenform des Kreises, und deren Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Endlich ist Fig. 88, wenn $y = x$ die Gleichung der parabolischen Curve $ABCD$ ist, $y' = \frac{1}{x'}$ jene ihrer Gegenformen, d. h. der Curvenzweige $A'B'C'$, $B'C'D'$ u. s. w.

Diese Betrachtungen mögen, da sie ganz nahe liegen, bereits öfters gemacht worden seyn, doch schwerlich zu demselben Zwecke wie hier, um zu zeigen, dass die formändernde Kraft der Substitutionen eine auf die verschiedensten Objecte völlig analoge Wirkung ausübt. — Doch wir wollen uns für diesmal begnügen, nur noch einige Beispiele über Objecte im Körperraume den bisherigen in aphoristischer Weise beizufügen.

§. 28.

Setzt man $x = x'$, $y = y'$ und $z = \frac{z'}{ay' + bx' + c}$, so treten bei den Objecten des Körperraums ganz ähnliche Formänderungen ein, wie wir so eben an den Gegenständen der Ebene zu bemerken Gelegenheit hatten. Wir wollen diese Substitution auf die einfachste Fläche, nämlich auf die Ebene im Raume anwenden. Es sey daher $z = Ay + Bx + C$ die Gleichung dieser Ebene, so ist $z' = (ay' + bx' + c)(Ay' + Bx' + C)$ die Gleichung der neuen Fläche, und Fig. 92 oder Fig. 93, je nach Beschaffenheit ihrer Coefficienten ihre graphische Darstellung. Wiederholt man mit der so eben gefundenen Fläche in analoger Weise dasselbe Verfahren, und dieses beliebig oft hinter einander, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form $z = (ay' + bx' + c)(a'y' + b'x' + c') \ldots (Ay' + Bx' + C)$ und zu einem geometrischen Objecte, wie die in Fig. 94 dargestellte, nach beiden Seiten völlig unbegrenzte

$y = \frac{y'}{3x'}$, so erhält man $y' = \sqrt{27x'^3}$, welches bekanntlich die cubische oder *Neil*'sche Parabel ist. Die Schleiflinie ist daher die Übergangsform von der gemeinen zur cubischen Parabel.

Schleifenfläche. Mit Hilfe unserer Begrenzungsmethode könnte man mithin sich sehr leicht die Gleichung einer bandförmigen Schleife mit bestimmter Abgrenzung verschaffen. Wendet man auf besagte Gleichung der Schleifenfläche, welche wir der Kürze wegen mit $z = F(x, y)$ bezeichnen wollen, die specielle Substitution $x = x'$, $y = y'$ und $z = \frac{z'}{mx + n}$ beliebig oftmal hinter einander an, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$z' = (m\,x' + n)\,(m'\,x' + n')\,(m''\,x' + n'')\ldots.\,F(x, y),$$

welcher Gleichung sofort das Object in Fig. 95 entspricht, eine Fläche, welche von der Ebene $x\,y$ im Allgemeinen in Vierecke geschnitten, von da aus aber nach Unten und Oben sich abrundend, wechselweise Erhöhungen und Vertiefungen bildet, die sich ihrer Form und Grösse nach, durch geeignete Annahmen der Coefficienten jederzeit leicht zum Voraus bestimmen lassen. — Macht man obige Substitution von $x = x'$, $y = y'$ und $z = \frac{z'}{ay' + bx' + c}$ in die Gleichung für die Kugel oder das Ellipsoid, so erhält man Oberflächen, welche man zu der Art der in Fig. 96 dargestellten zählen muss. Man sieht daher deutlich, dass der Factor $ay' + b\,x' + c)$ bei Flächen ganz analoge Formänderungen bewirkt, wie $(a\,x + b)$ bei Objecten, die in einer Ebene liegen *).

§. 29.

Der Zweck unserer in diesem Capitel geführten Betrachtungen war kein anderer als die im Eingange aufgestellte Behauptung zu rechtfertigen und ins Licht zu setzen, dass die formändernde Wirkung einer Substitution selbst auf die verschiedenartigsten geometrischen Objecte so analog und übereinstimmend ist, dass man selbst schon zum Voraus und ohne alle weitere analytische Untersuchung den Erfolg derselben vorhersehen kann, wenn man sich mit der Eigenthümlichkeit eines solchen Factors einmal bekannt gemacht hat.

Diess wäre nun der eine Gesichtspunct, nach welchem wir die Formänderungen vorerst untersuchen wollten, und es ist ersichtlich, dass hier eine unermessliche Mannigfaltigkeit von Formen zum Vorschein kommen.

§. 30.

Der zweite Gesichtspunct, nach welchem Formänderungen in Betracht gezogen werden können, hat in dem Verlangen und oft auch in dem Bedürfnisse seinen Grund, Formänderungen von ganz bestimmter Art, und vom Zufalle völlig unabhängig, an den verschiedenen geometrischen Objecten hervorzubringen. Da indessen Betrachtungen dieser Klasse Behufs der Aufstellung der methamorphischen Formeln immer mit mehr oder weniger aus-

*) Substituirt man in die Gleichung für einen schiefen Cylinder $x = x'$, $y = y'$ und $z = \frac{z'}{ax' - by' - \sqrt{c - (ax' - by')^2}}$ und wiederholt man dieses mehrmal hintereinander, so erhält man die Gleichung einer Oberfläche, von welcher Fig. 97 einen ganzen speciellen Fall darstellt.

gedehnten Rechnungen verknüpft sind, so werden wir uns hier grösstentheils damit begnügen müssen, von den wichtigsten derselben nur im Allgemeinen Erwähnung zu thun, die eigentliche Ausführung aber unter der Form eben so vieler selbstständiger Probleme erst im vierten Abschnitte vorzunehmen. — Nachfolgende Formänderungen dürften nun wegen ihres besonders häufigen Vorkommens eine vorzügliche Beachtung verdienen:

1) Eine der wichtigsten Veränderungen, welche in Bezug auf Form bei gewissen Objecten eintreten kann, ist die Verwandlung derselben in die mit ihr symmetrische oder durch eine totale Umstülpung entstandene Gegenform. Beispiele hiezu liefern zwei körperliche ungleichwinklige Triëder, von denen der eine durch Verlängerung der Ebenen oder durch Umstülpung entstanden ist; rechts- und linksgewundene Schraubenlinien; ferner alle analoge, aber nach verschiedenen Seiten hin liegende Körpertheile an Menschen, Thieren und Pflanzen u. s. w. Auch diese Formänderung, so wie die noch anzuführenden, wevden durch Substitution von Formeln bewirkt, welche durch Specialisirung der Dislocations-Formeln niemals erhalten werden können. Aufgaben des folgenden Abschnitts liefern für diese Betrachtung geeignete Beispiele.

2) Oft soll die Formänderung eines geometrischen Objectes, in der Ebene oder im Körperraume, wie z. B. jenes in Fig. 98 dargestellten, darin bestehen, dass ihre sämmtlichen Ordinaten, ohne ihre Fusspuncte zu verändern, eine solche Krümmung annehmen, dass sie ohne Ausnahme zu einer als Directrix gegebene Curve, und mithin auch unter einander in der von uns aufgestellten Bedeutung dieses Wortes parallel laufen. Bei dem Biegen solcher Natur-Objecte, deren Längenfasern vollkommen biegsam, aber ihrer Länge nach weder zusammendrückbar noch ausdehnsam wären, würde offenbar genau eine derartige Formänderung erfolgen. Die betreffenden Aufgaben des folgenden Abschnitts werden die nöthigen diessfallsigen formändernden Formeln liefern und durch Beispiele deren Gebrauch zeigen. In Bezug auf die analogen Veränderungen im Körperraume mag der Hinblick auf Fig. 156 und Fig. 157 die erklärenden Worte ersetzen.

3) Eine Formänderung verschiedener Art ergibt sich unter folgender Voraussetzung. Es sey Fig. 99 BCD irgend eine Fläche oder auch Curve, AB eine beliebig gekrümmte Linie, die gleichsam als Achse betrachtet werden soll. Aus sämmtlichen Puncten dieser Achse denke man sich Perpendikel auf sie errichtet, die bis zur Curve BCD reichen, so dass jedem Puncte derselben eine auf AB senkrechte Linie entspricht. Nun setze man die Achsencurve AB, nehme die Krümmung $A'B'$ an, so erscheint es als eine unausbleibliche Folge, dass sämmtliche Perpendikel, während ihre Fusspuncte α, α', α'' u. s. w. in der Krümmung dieselbe Entfernung von A beibehalten, gegen einander ihre Lage ändern, da sie auch wieder auf der Achse $A'B'$ der Voraussetzung gemäss senkrecht stehen sollen. Es müssen daher auch nothwendig die Puncte m, m' u. s. w. weiter auseinander rücken, jene in p, p' u. s. w. dagegen näher oder dichter zusammenkommen. Kurz der hier beschriebene Vorgang entspricht vollkommen einem Biegen solcher Naturdinge, bei welchen man eine querfaserige oder auch blätterförmige Structur ohne alle Biegsamkeit der Fasern, bei absoluter Zusammdrückbarkeit derselben vorauszusetzen berechtigt wäre. Eine weitere Betrachtung dieses Gegenstandes, so

wie die Ableitung der für diese Art der Formänderung nöthigen Formeln möge den Aufgaben des nächsten Abschnitts überwiesen werden.

§. 31.

Alle bisher betrachteten Formänderungen, die absichtlich vorgenommenen sowohl, wie die zufällig durch den Erfolg erst entdeckten, erstrecken sich ohne Ausnahme auf das ganze durch die Gleichung repräsentirte Object. Die im Frühern schon besprochene und angewandte willkürliche Begrenzung setzt uns nun in den Stand, selbst an einzelnen Theilen eines geometrischen Objectes Formänderungen vorzunehmen, ohne dass die übrigen im Mindesten eine Änderung erleiden. Hiedurch gewinnt aber diese ganze Betrachtung ungemein an Anwendbarkeit zu praktischen Zwecken. Um dieses nur durch ein Beispiel zu erläutern, denke man, der in Fig. 100 dargestellte Kreis, dessen Gleichung $y = \sqrt{25 - x^2}$ ist, sollte in der Weise partiell seine Form ändern, dass nur der Bogen zwischen m und m' sich ausstülpe und durch einen gewissen Punct p gehe, alles Übrige aber ungeändert bleibe. Auch soll die Änderung in der Form, oder der Übergang in m und m' nicht bruchweise, sondern allmählig erfolgen. Sind nun die den Puncten m und m' entsprechenden Abscissen oder Grenzwerthe 1 und 4, dagegen die Coordinaten des Punctes p, 3 und 7, so erfüllt, wie der Leser es leicht selbst zu ermessen vermag, die Substitution von

$$x = x' \text{ und } y = \left[y' : \left(1 + \Big\{ \tfrac{3}{8}(x-1) \Big\}_{1}^{3} + \Big\{ \tfrac{3}{4}(4-x) \Big\}_{3}^{4} \right) \right]$$

ganz diese Anforderungen. Man hat daher als Gleichung des in Fig. 100 dargestellten ausgestülpten Kreises den Ausdruck:

$$y = \left(1 + \Big\{ \tfrac{3}{8}(x'-1) \Big\}_{1}^{3} + \Big\{ \tfrac{3}{4}(4-x) \Big\}_{3}^{4} \right) \sqrt{25 - x^2}.$$

Und so in unzählig vielen andern Fällen.

§. 32.

Was endlich den Nutzen anbelangt, der von diesen geometrischen Formänderungen entweder bereits erreicht wurde, oder sich doch mit Wahrscheinlichkeit erwarten lässt, so erachte ich schon den Umstand, dass man mittelst derselben sich in den Stand gesetzt sieht, die Gleichungen der mannigfaltigsten geometrischen Objecte, die gegebenen Bedingungen entsprechen sollen, darzustellen, für einen Gewinn. Dabei darf man freilich nicht vergessen, dass man an die allerersten und so zu sagen, noch ganz rohen Anfänge einer der wissenschaftlichen Behandlung fähigen Lehre auch in Bezug auf deren Nutzanwendung nur mässige Ansprüche zu machen berechtigt ist. Ausser diesen Vortheilen fehlt es ferner auch nicht an andern zu erwartenden Annwendungen, die nahe genug liegen, um nicht übersehen werden zu können. Die folgenden sind die vorzüglichsten:

1) Als ein sehr brauchbares Mittel, numerische Gleichungen, algebraische sowohl wie transcendente aufzulösen. Die verschiedenen analytischen Methoden, numerische Gleichungen jeden Grades aufzulösen, haben nämlich alle auch eine geometrische Bedeutung. Wir wollen

hier nur von den zwei gebräuchlichsten sprechen, der sogenannten Newtonianischen und der Regula falsi mit zwei Positionszahlen.

a) Die geometrische Bedeutung der sogenannten Newtonischen Auflösungsmethode der Gleichungen besteht darin, dass man Fig. 101 für einen gewissen Werth AP, als erste Annäherungszahl der Wurzel A die geometrische Subtangente Pm sucht, und diesen zum anfänglichen Werth AP addirt, dann diesen Werth, d. h. Am als ersten Näherungswerth betrachtet, welcher wieder der anfänglichen Rechnung zum Grunde gelegt, sofort den zweiten Näherungswerth Am' liefert u. s. f. — Es lässt sich aus dieser geometrischen Darstellung des Verfahrens genau angeben, in welchen Fällen man sich mehr oder minder schnell der Wurzel nähert oder auch von ihr völlig entfernt. — Hier aber mag die Bemerkung genügen, dass dieses genau mit dem Umstande zusammenhängt, ob der um die Wurzel O zunächst liegende Curventheil einer geraden Linie schon ziemlich nahe kommt oder nicht. Je mehr der erstere Fall eintritt, desto schneller nähert man sich dem Werthe der Wurzel, und ginge die Curve AB in eine gerade Linie selbst über, so würde man, unter welchem Winkel sie auch die Achse der x durchschnitte, schon durch den ersten Versuch den Werth der Wurzel genau finden, weil in diesem Falle der Endpunct der Subtangente mit dem Durchschnittspunct 0 zusammenfiele. — Nach unsern Betrachtungen kann nun zwar durch Einführung eines formändernden Factors die genannte Curve nie völlig in eine gerade Linie verändert werden; wohl aber ist man stets im Stande, ohne die Wurzel genau zu kennen, und ohne sie im Geringsten zu verändern, sie einer Geraden beliebig nahe zu bringen, wodurch man sich in den Stand gesetzt sieht, mit möglichst grösster Raschheit dem wahren Werthe sich zu nähern.

b) Die geometrische Bedeutung der Regula falsi besteht darin, dass man für die zwei anfänglichen Positionszahlen Fig. 102, d und d' die sogenannten Fehler, d. h. die Ordinaten MP und $M'P'$ sucht, sie mögen δ und δ' heissen, und sodann mittelst der bekannten Formel $x' = Am = \frac{d\delta' + d'\delta}{\delta + \delta'}$ den Durchschnittspunct m sucht, den die Linie MM' mit der Achse x gemein hat. Am ist dann der erste angenäherte Werth. — Auch hier sieht man wieder ganz deutlich, dass der Erfolg des Zusammentreffens von m und 0 lediglich von dem Umstande abhängt, ob und wie sehr sich die Curve MOM' einer Geraden nähert oder nicht. — Eine geeignete Formänderung der Curve ist also auch hier eine Angelegenheit von der grössten Wichtigkeit. —

2) Es dürfte nicht unwahrscheinlich seyn, dass der Formänderung auch bei den Problemen der Rectification, Quadratur, Complanation und Cubatur eine nicht unwichtige Rolle zu spielen vorbehalten ist, indem die formverwandten geometrischen Objecte gewiss auch bei diesen Problemen ihren gemeinschaftlichen Ursprung etwa durch die Möglichkeit ihrer wechselseitigen Zurückführung u. s. w. beurkunden dürften.

3) Endlich lässt sich von dem Principe der geometrischen Formänderung ein sehr nützlicher Gebrauch in der Mechanik erwarten, bei der Construction solcher Maschinentheile, welche gewisse Curven zu beschreiben haben u. s. w. Ich habe selbst Gelegenheit gehabt, mich von der Wahrheit dieser letztern Behauptung zu überzeugen, da es mir auf diesem Wege ohne viele Mühe gelang, ein Instrument zur Verzeichnung der sogenannten Ovallinie des *Descartes* zu construiren.

III. Abschnitt.

Anwendung der in den frühern Theilen gepflogenen Untersuchungen auf die Auflösung verschiedener wichtiger Aufgaben in der Ebene und im Raume.

§. 1.

Indem ich nunmehr auf die Anwendung der in den frühern zwei Abschnitten abgehandelten Lehre übergehe, erachte ich es vor Allem für nothwendig, auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der leicht bewirken könnte, die grossen Vortheile, welche meiner Ansicht nach, durch die bisher gepflogene Behandlungsweise der analytischen Geometrie als Wissenschaft zufliessen, in einem minder vortheilhaften Lichte erscheinen zu lassen. — Den Lesern kann es nämlich nicht wohl entgangen seyn, dass schon in einigen der numerischen Beispiele, die wir im Vorhergehenden den allgemeinen Auflösungen hie und da beigefügt, die analytischen Schwierigkeiten der Ausführung sehr bedeutend waren, und dass man voraussichtlich in unendlich vielen andern Fällen, ungeachtet des genau vorgezeichneten Weges nicht im Stande seyn würde, jene Schwierigkeiten zu bewältigen. — Hier muss daher vor Allem der Gedanke festgehalten werden, dass die Leistungen der analytischen Geometrie als Wissenschaft in ihrem praktischen Theile, nämlich bei Problemen, lediglich sich darauf zu beschränken haben, genau den Weg vorzuzeichnen und das Verfahren selbst bis auf die Angabe der einzelnen Rechnungs-Operationen namhaft zu machen, welches Behufs der Lösung einer Aufgabe zu befolgen ist. Ist dieses geschehen, so hat sie Alles geleistet, was von ihr billigerweise verlangt werden konnte, und vermag sie dieses in allen Fällen, so ist sie unstreitig in dieser Beziehung für eine vollendete Wissenschaft zu halten; denn unbezweifelt unbillig wäre es, der analytischen Geometrie einen Übelstand oder eine Unvollkommenheit anschulden zu wollen, welche ganz allein der Analysis überhaupt und der Theorie der Gleichungen insbesondere zum Vorwurfe gereichen muss. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, dürften denn die nachfolgenden Aufgaben auch sofort einiger Beachtung unserer Leser nicht ganz unwerth befunden werden.

I. Capitel.

Aufgaben über willkürlich begränzte geometrische Objecte in der Ebene, über deren Ortsveränderung und geometrische Metamorphose.

§. 2.

Aufgabe 1. Es sey Fig. 59 das in der Ebene liegende Dreieck ABC durch seine Gleichung gegeben, nebst diesem Objecte sey die Linie MN als Achse der Drehung durch deren Bestimmungsstücke, nämlich durch die Angabe der Coordinaten des Anfangspunctes α, γ derselben und den Winkel ψ, den sie mit der Abscissenachse einschliesst, gegeben. Nun denke man sich dieses Dreieck dergestalt um diese Achse umgelegt, dass es nunmehr die Kehr- oder Rückseite dem Beschauer zuwendet, und bewirke mit der vorgelegten Gleichung auf rein analytischem Wege die Änderung, welche dieser Ortsveränderung entspricht.

Es sey die gegebene Gleichung unsers Dreiecks ABC *) die folgende, nämlich:

$$y = {}_{3}\left\{\tfrac{3}{4}x + \tfrac{47}{4}\right\}^{11} \omega \; {}_{11}\left\{-\tfrac{2}{5}x + \tfrac{122}{5}\right\}^{16} \omega \; {}_{16}\left\{\tfrac{1}{9}x + \tfrac{41}{3}\right\}^{3}$$ oder auch in Decimalen:

$$(1) \quad y = {}_{3}\left\{\begin{matrix} 0{\cdot}75\,x \\ +11{\cdot}75 \end{matrix}\right\}^{11} \omega \; {}_{11}\left\{\begin{matrix} -0{\cdot}4\,x \\ +24{\cdot}4 \end{matrix}\right\}^{16} \omega \; {}_{16}\left\{\begin{matrix} 0{\cdot}11\,x \\ +13{\cdot}66 \end{matrix}\right\}^{3}.$$

Nimmt man nun als Bestimmungsstücke der Achse an, dass $\alpha = 10$, $\gamma = 12$; $\psi = 60^0$: und mithin $sin.\, 2\psi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $cos.\, 2\psi = -\frac{1}{2}$ sey, und substituirt diese Werthe in die Formel C. I und II, so erhält man sofort vorerst als betreffende Dislocationsformeln:

$$\text{I. **)} \begin{cases} x' = -0{\cdot}8660254\,y - 0{\cdot}5\,x + 2{\cdot}8646138; \\ y' = 0{\cdot}5y - 0{\cdot}8660254\,x + 1{\cdot}4179115; \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} x = 0{\cdot}8660254\,y' - 0{\cdot}5\,x' + 4{\cdot}6076952; \\ y = +0{\cdot}5\,y' + 0{\cdot}8660254\,x' - 2{\cdot}660254; \end{cases}$$

welche Werthausdrücke auf obige Gleichung des Dreiecks angewendet, sofort auf die dem Dreiecke $A'B'C'$ entsprechende Gleichung führen, nämlich:

$$(2) \quad y = (4{\cdot}3191308) {}_{\bullet}\left\{\begin{matrix} 8{\cdot}3001184\,x \\ -119{\cdot}1900007 \end{matrix}\right\}^{\bullet} (19{\cdot}1076952) \; \omega \; {}_{\bullet}\left\{\begin{matrix} -\;0{\cdot}7868825\,x \\ +29{\cdot}7054538 \end{matrix}\right\}^{\bullet} (12{\cdot}1921524)$$

$$\omega \; {}_{\bullet}\left\{\begin{matrix} -0{\cdot}2898949\,x \\ +3{\cdot}4352877 \end{matrix}\right\}^{\bullet}.$$

*) Wir waren anfänglich willens, sämmtliche graphische Darstellungen mittelst Construction der betreffenden Gleichungen und somit als wahre Repräsentanten derselben unsern analytischen Untersuchungen beizufügen. Allein die Überlegung, dass der damit erreichte Vortheil die erforderliche Mühe und den damit verknüpften Zeitverlust kaum rechtfertigen dürfte, haben uns bestimmt, uns mit einer bloss augenscheinlichen Zeichnung derselben zu begnügen.

**) Bei allen Aufgaben über die Dislocation, Transfiguration, Transformation der Coordinaten und der geometrischen Metamorphose u. s. w. sollten jederzeit die beiden Systeme von Formeln I und II, wovon das erstere sich auf die constanten Grenzwerthe, letzteres dagegen auf die Functionen selbst und auf veränderliche Grenzwerthe bezieht, an die Spitze der ganzen Untersuchung gestellt werden. Wir jedoch, auf Raumersparung bedacht, werden uns zum öftern veranlasst sehen, entweder nur das System I allein, oder auch beide zugleich hinwegzulassen, wo uns deren Angabe minder wichtig erscheint.

Es dürfte keine unpassende Schlussbemerkung dieser Aufgabe seyn, dass sich dieselbe Aufgabe auch ganz allgemein und ziemlich einfach dadurch auflösen lässt (mit Hilfe unserer Dislocationsformeln nämlich), dass man die Durchschnittspuncte der Polygonsseiten mit der Drehachse, mittelst deren respectiven Coordinaten m, n; m', n'; m'', n'' u. s. w. in die Rechnung einführt. Ist (3) die Gleichung eines Systems von n begrenzten Linien, so erhält man als Gleichung für das umgelegte System jener Linien (4) vermöge:

$$(3)\quad y = \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}_{,}^{n} \left\{ U_\varrho x + V_\varrho \right\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}; \text{ nach gehöriger Reduction:}$$

$$(4)\quad y = \mathop{\mathcal{C}\!\mathcal{O}}_{,}^{n} \Big[\Big(m_\varrho + (\alpha_\varrho - m_\varrho)(\cos.2\psi + U_\varrho \sin.2\psi)\Big) \left\{ n_\varrho + \left(\frac{\tan g.2\psi - U_\varrho}{1 + U_\varrho \tan g.2\psi}\right)(x - m_\varrho) \right\} \Big(m_{\varrho+1} + (\alpha_{\varrho+1} - m_{\varrho+1})(\cos.2\psi + U_{\varrho+1} \sin.2\psi)\Big) \Big].$$

Ist das System ein Polygon, so ist noch überdiess: $\alpha_\varrho = \dfrac{V_{\varrho-1} - V_\varrho}{U_\varrho - U_{\varrho-1}}$.

§. 3.

Aufgabe 2. Es sey ein System begrenzter auf die Abscissenachse x senkrecht stehender oder mit ihr parallel laufender Geraden (z. B. ein Parallelogramm) gegeben, man soll diesem Systeme von Linien einen beliebigen Ort im Flächenraume (d. h. in der Ebene) anweisen.

Die Anwendung der Dislocationsformeln hat in allen jenen Fällen, wo man es mit Functionen von der Form $y = \left\{ \varphi(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'}$ zu thun hat, durchaus keine andere Schwierigkeit, als die gewöhnlich nothwendig werdende neuerliche Auflösung der Gleichung etwa veranlassen mag. Bei den Gleichungen der parallelen und senkrechten Linien aber könnten die eigenthümlichen Formen derselben dem mit dem Geiste unsers Algorithmus noch wenig Vertrauten einige Verlegenheiten bereiten und ihn glauben machen, als bedürfe es hier einer Ausnahme, während sie jedoch, richtig gehandhabt, vielmehr einen schönen Beleg für die den ganzen Gegenstand beherrschende Consequenz darbieten. — Um dieses auf eine recht in die Augen springende Weise zu zeigen, wollen wir mit einer ganz speciellen, ja numerischen Aufgabe den Anfang machen. Es sey daher $ABCD$, Fig. 103 ein Parallelogram, dessen Gleichung die folgende seyn mag:

$$(1)\quad y = \left\{ 0x + 6 \right\}_{5}^{15} \omega \left\{ 0x + 14 \right\}_{5}^{15} \omega \left\{ \frac{x = 5}{0} \right\}_{6}^{14} \omega \left\{ \frac{x = 15}{0} \right\}_{6}^{14}.$$

Verlegt man nun dieses Viereck in der Weise, dass hiebei der Punct A, dessen Coordinaten $\alpha = 5$, $\beta = 6$ seyn mögen, nach $\alpha' = 18$ und $\beta' = 20$ verlegt wird, und dass dieses Object zugleich eine Drehung in entgegengesetzter Richtung, d. h. nach der Achse x zu, um den Winkel $\varrho = -30^0$ macht, so erhält man vorerst als diessfallsige Disjunctiv-Formeln:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x = 0{\cdot}8638355\,x + 0{\cdot}5037740\,y + 10{\cdot}6581785; \\ y' = -0{\cdot}5037740\,x + 0{\cdot}8638355\,y + 17{\cdot}3358570. \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x = 0{\cdot}8638355\,x' - 0{\cdot}5037740\,y' + 10{\cdot}015050; \\ y = 0{\cdot}5037740\,x' - 0{\cdot}8638355\,y' - 14{\cdot}3603540. \end{cases}$$

Setzt man nun aus II den Werth von y in die beiden ersten Disjunctivglieder, deren Werth ersichtlich $y = 6$ und $y = 14$ ist, und bestimmt man daraus y', so erhält man sofort, nach verrichteter Division, die transformirten Gleichungen:

(2) $y' = 0{\cdot}5851828\,x' - 22{\cdot}5544877$; und (3) $y' = 0{\cdot}5831821\,x' - 30{\cdot}5544877$.

Um die betreffenden neuen Grenzwerthe zu erhalten, wovon jeder einzelne zwei neue gibt, setze man diese, so wie auch die entsprechenden Werthe von y in die Gleichung für x' im Systeme I, so erhält man:

$$\begin{matrix} \alpha' = 18{\cdot}0000000; & & \alpha''' = 22{\cdot}0301920; \\ & \text{und} & \\ \alpha'' = 26{\cdot}6383550; & & \alpha^{\mathrm{IV}} = 30{\cdot}6685470. \end{matrix}$$

Um endlich auch noch die beiden letzteren Disjunctivglieder von abweichender Form zu dislociren, erwäge man, dass in ihnen die Bestimmung ausgesprochen ist, es sey $x = 5$ und $x = 15$. Setzt man daher wieder aus II den Werth von x, und bestimmt man daraus y', so erhält man nach vollführter Division beziehungsweise die Gleichungen:

(4) $y' = 1{\cdot}714728\,x' + 14{\cdot}9395961$; und (5) $y' = 1{\cdot}714728\,x' + 4{\cdot}939561$.

Die erste Gleichung des Systems I. liefert uns sofort die zugehörigen Grenzwerthe, nämlich:

$$\begin{matrix} \alpha' = 18{\cdot}0000000. & & \alpha''' = 26{\cdot}6383550; \\ & \text{und} & \\ \alpha'' = 22{\cdot}0301920. & & \alpha^{\mathrm{IV}} = 30{\cdot}6685470; \end{matrix}$$

begreiflich ganz wie oben. Unsere neue Gleichung, d. h. jene des verlegten Parallelogramms $A'B'C'D'$, Fig. 103 ist demnach folgende:

$$\text{(6)}\quad y' = (18)\begin{Bmatrix} 0{\cdot}5831828\,x' \\ -22{\cdot}5544877 \end{Bmatrix}(26{\cdot}6383550)\,\omega\begin{Bmatrix} 1{\cdot}714728\,x' \\ 4{\cdot}9395961 \end{Bmatrix}(30{\cdot}6685470)\,\omega\begin{Bmatrix} 0{\cdot}5831728\,x' \\ -30{\cdot}5544877 \end{Bmatrix}$$

$$(22{\cdot}0301920)\,\omega\begin{Bmatrix} 1{\cdot}714728\,x' \\ +14{\cdot}9395961 \end{Bmatrix}(18).$$

Hat man ein System von n parallelen und q senkrechten Linien, so kann die Dislocation ganz allgemein durch Anwendung unserer Dislocations-Formeln vollführt werden. Man erhält nach gehöriger Reduction:

(7) $y = \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{,}^{n}\begin{Bmatrix} 0\,x + \delta_\varrho \end{Bmatrix}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_{\varrho+1}}\,\omega\,\mathop{\mathcal{CW}}\limits_{,}^{q}\begin{Bmatrix} \dfrac{x \equiv d_\varrho}{0} \end{Bmatrix}_{\beta_\varrho}^{\beta_{\varrho+1}}$. Die Gleichung dieses dislocirten Systems ist sofort:

(8) $y' = A\,\omega\,B$, wobei

$$A = \mathop{\mathcal{CW}}\limits_{,}^{n}\Big[\Big(\alpha' + (\alpha_\varrho - \alpha)\cos.\varrho - (\delta_\varrho - \beta)\sin.\varrho\Big)\begin{Bmatrix} \dfrac{d_\varrho - \beta + (x' - \alpha')\sin.\varrho}{\cos.\varrho} + \beta' \end{Bmatrix}$$

$$\Big(\alpha' + (\alpha_{\varrho+1} - \alpha)\cos.\varrho - (\delta_\varrho - \beta)\sin.\varrho\Big)\Big] \text{ und}$$

$$B = \overset{q}{\mathcal{CV}} \Big[\Big(\alpha' + (d_\varrho - \alpha) \cos.\varrho - (\beta_\varrho - \beta) \sin.\varrho \Big) \left\{ \frac{d_\varrho - \alpha - (x' - \alpha') \cos.\varrho}{\sin\ \varrho} + \beta' \right\}^{\cdot} \Big(\alpha' + (d_\varrho - \alpha) \cos.\varrho - (\beta_{\varrho+1} - \beta) \sin\ \varrho \Big) \Big].$$

§. 4.

Aufgabe 3. Man soll, als Beispiel von der möglichen Darstellung und analytischen Behandlung eines auch sehr zusammengesetzten geometrischen Objectes, die Gleichung der in Fig. 104 dargestellten, von einer Ellipse umschlossenen römischen Lapidar-Schrift liefern, diese sodann durch eine schiefe Linie schneiden, und den kleinern Theil, wie Fig. 105 zeigt, in verlangter Weise anderswohin verlegen.

Wir glauben mit gutem Fuge, es der eignen Einsicht und Überlegung unserer Leser überlassen zu können, sich von der Richtigkeit der unter (1) aufgestellten Gleichung mit dem in Fig. 104 vorgestellten Objecte zu überzeugen, und wenden uns sofort unmittelbar zu dem wichtigern Theile unserer Aufgabe, nämlich zur Anwendung unserer allgemeinen Dislocations-Formeln auf dieselbe. Bemerken müssen wir jedoch für diejenigen, welchen diese Gleichung sehr zusammengesetzt vorkommen sollte, dass sich die Anzahl der Disjunctivglieder nur um ein Geringes vermehrt haben würde, wenn wir anstatt nur eines Wortes deren hunderte analytisch darzustellen hätten, da sich die sämmtlichen Buchstaben des Lapidar-lateinischen Alphabets in einige wenige Elemente auflösen lassen. Die besagte Gleichung unsers in Fig. 104 dargestellten Objectes ist demnach:

$$(1)\quad y = \underset{\cdot}{\begin{pmatrix} \overset{\star}{12},\ \overset{\star}{13\cdot5} \\ 25{,}5,\ 37\cdot5 \end{pmatrix}} \underset{\cdot}{\Big\{ 0\,x \Big\}} \begin{pmatrix} \overset{\star}{13},\ \overset{\star}{14\cdot5} \\ 26\cdot5,\ 38\cdot5 \end{pmatrix} \,\omega\, \begin{pmatrix} \overset{\star}{13\cdot5},\ 25\cdot5,\ 29 \\ 32\cdot1,\ 35 \end{pmatrix} \underset{\cdot}{\Big\{ 0x + 2 \Big\}} \begin{pmatrix} \overset{\star}{15\cdot5},\ 27\cdot5,\ 32 \\ 32\cdot5,\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\omega\, \underset{\cdot}{\begin{pmatrix} \overset{\star}{13\cdot5},\ 20,\ 24 \\ 25\cdot5,\ 30,\ 32 \\ 35.\ 36\cdot5,\ 38\cdot5 \end{pmatrix}} \Big\{ 0x - 2 \Big\}^{\cdot}_{\cdot} \begin{pmatrix} \overset{\star}{16\cdot7},\ 21,\ 25 \\ 28\cdot5,\ 31,\ 33 \\ 36,\ 37\cdot5,\ 39\cdot5 \end{pmatrix} \,\omega\, \left\{ \frac{x}{0} \equiv \frac{1}{0} \mathcal{CV} \begin{pmatrix} \overset{\star}{13\cdot5},\ 20,\ 24,\ 25 \\ 32\cdot5,\ 36 \end{pmatrix} \right\}_{-2}^{+2}$$

$$\omega \left\{ \frac{x}{0} = \frac{1}{0} \mathcal{CV} \begin{pmatrix} \overset{\star}{12\cdot5},\ \overset{\star}{15\cdot5},\ 27.5 \\ 29,\ 32 \end{pmatrix} \right\}_{1\cdot5}^{2} \omega \left\{ \frac{x}{0} \equiv \frac{1}{0} \Big(\overset{\star}{16.5},\ 28{,}5 \Big) \right\}_{-1\cdot5}^{-2} \omega \left\{ \frac{x}{0} = \frac{1}{0} \mathcal{CV} \Big(\overset{\star}{14\cdot5},\ 26\cdot5 \Big) \right\}_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}}$$

$$\omega \Big[\Big\{ -2x + 43 \Big\}_{20\cdot5}^{22\cdot5} \,\omega\, \Big\{ 2x - 47 \Big\}_{22\cdot5}^{24\cdot5} \Big] \,\omega\, \Big\{ \pm \tfrac{1}{4}(x - 38) + 2 \Big\}_{38 \pm 1}^{38} \,\omega\, \Big(\tfrac{4}{3} \sqrt{37\,x - x^2 - 340} \Big)$$

$$\omega \Big\{ \tfrac{4}{3} \sqrt{23x - 130 - x^2} \Big\}_{10,\ 13}^{12\cdot5,\ 10} \,\omega\, \Big\{ 1 \pm \tfrac{1}{4} \sqrt{260x - 4x^2 - 4209} \Big\}_{32\cdot5}^{34\cdot5} \,\omega\, \Big\{ \tfrac{2}{5} \sqrt{50x - x^2} \Big\}_{0}^{50}.$$

Unser Object werde nun durch eine Gerade geschnitten, deren Gleichung (2) seyn möge, welche also, wie man sich leicht überzeugen kann, die Abscissenachse in einem Abstande gleich 18, unter einem Winkel von $63^{0}\,26'\,6''$ schneidet. Nimmt man nun diesen Durchschnittspunct selbst als den anfänglichen Drehungspunct an, und verlegt man ihn der anfäng-

lichen Annahme und den nachfolgenden Bestimmungsstücken gemäss, so erhält man, wenn $\alpha = 18$, $\beta = 0$; $\alpha' = 12$, $\beta' = 20$ und $\varrho = -30^{0}, 15'$ und die Gleichung der Geraden
(2) $y = 3x - 36$ ist, als die betreffenden Dislocations-Formeln nachfolgende:

$$\text{I.}\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= 0{\cdot}5037740\,y + 0{\cdot}8638355\,x - 3{\cdot}5490390\,; \\ y' &= 0{\cdot}8638355\,y - 0{\cdot}5037740\,x - 29{\cdot}0679330. \end{aligned} \right.$$

$$\text{II.}\quad \left\{ \begin{aligned} x &= -0{\cdot}5037740\,y' + 0{\cdot}8638355\,x' + 17{\cdot}7095540; \\ y &= 0{\cdot}8638355\,y' + 0{\cdot}5037740\,x' - 23{\cdot}3219980. \end{aligned} \right.$$

Werden nun diese Formeln auf alle Bestandtheile unserer Gleichung (1) angewendet, welche an der Bewegung Theil nehmen sollen, so kann dieses augenscheinlich nur diejenigen treffen, deren Grenzwerthe von x ganz oder doch zum Theile unter 18 Einheiten fallen. Wir haben diese eben desshalb mit Sternchen bezeichnet und dadurch anzeigen wollen, dass sie aus obiger Gleichung hinwegzulassen sind, wenn sie mit Hinzufügung der dislocirten Bestandtheile als Gleichung für das ganze in Fig. 105 dargestellte geometrische Object der Kürze wegen gelten sollen. Die Anwendung unserer Dislocations-Formeln auf die obigen mit Sternchen versehenen und im Nachfolgenden beibehaltenen Bestandtheile führen nun der Ordnung nach auf folgende Ergänzungsglieder, welche an die Stelle der obigen zu treten haben:

1) $y = (12,\ 13{\cdot}5) \left\{ 0x \right\} (13,\ 14{\cdot}5)$ gibt: $y = \left(\begin{matrix} 6{\cdot}8169870 \\ 8{\cdot}1127402 \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} -0{\cdot}5831828x' \\ 26{\cdot}9984019 \end{matrix} \right\} \left(\begin{matrix} 7{\cdot}6808225 \\ 8{\cdot}9765757 \end{matrix} \right)$;

2) $y = (13{\cdot}5) \left\{ 0x + 2 \right\} (15{\cdot}5)$; gibt: $y = (9{\cdot}1202882) \left\{ \begin{matrix} -\ 0{\cdot}5831828x' \\ +29{\cdot}3133334 \end{matrix} \right\} (10{\cdot}8479592)$;

3) $y = (13{\cdot}5) \left\{ 0x - 2 \right\} (16{\cdot}5)$; liefert $y = (7{\cdot}1051922) \left\{ \begin{matrix} -0{\cdot}5831828\,x' \\ 25{\cdot}3776303 \end{matrix} \right\} (9{\cdot}6966987)$;

4) $y = \left\{ \frac{x}{0} \equiv \frac{13{\cdot}5}{0} \right\}_{-2}^{+2}$; die in dieser Gleichung enthaltene Bestimmung, dass $x = 13{\cdot}5$ ist, liefert durch Anwendung Formel II, 1, sofort mit Berücksichtigung der Grenzen:

$$y = (7{\cdot}1051922) \left\{ \begin{matrix} -\ 1{\cdot}7147281x' \\ +8{\cdot}3560368 \end{matrix} \right\} (9{\cdot}12002882);$$

5) $y = \left\{ \frac{x}{0} \equiv \frac{12{\cdot}5,\ 15{\cdot}5}{2} \right\}_{1{\cdot}5}^{2}$; liefert wegen $x = 12{\cdot}5$ und $x = 15{\cdot}5$ offenbar:

$$y = (8{\cdot}0058157) \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}7147284x' \\ 10{\cdot}3410536 \end{matrix} \right\} (8{\cdot}2577027)\ \omega\ (10{\cdot}5960722) \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}7147284x' \\ +4{\cdot}386002F \end{matrix} \right\} (10{\cdot}8479592);$$

6) $y = \left\{ \frac{x}{0} \equiv \frac{16{\cdot}5}{0} \right\}_{-1{\cdot}5}^{-2}$; gibt sofort: $y = (9{\cdot}6966987) \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}7147284x' \\ 2{\cdot}4009858 \end{matrix} \right\} (9{\cdot}9485857)$;

7) $y = \left\{ \frac{x \equiv 14{\cdot}5}{0} \right\}_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}}$; gibt: $y = (8{\cdot}8506322) \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}7147284\,x' \\ 6{\cdot}3710196 \end{matrix} \right\} (9{\cdot}1025192)$;

8) Die Gerade, deren Gleichung $y = 2x - 36$ ist, schneidet das geometrische Object, dessen Gleichung $y = \frac{4}{3}\sqrt{37x - x^2 - 340}$ ist, in zwei Puncten, nämlich in

$$\begin{matrix} \alpha = 17\cdot36 \\ \beta = -1\cdot3 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 18\cdot96 \\ \beta_1 = 1\cdot35\,; \end{matrix}$$

wobei dasselbe in zwei Theile zerfällt, von denen der eine, dessen Abscisse > 18, unverändert bleibt, der andere dagegen an der Bewegung Theil nimmt. Auf diese letztern nun wendet man unsere Dislocations-Formeln an, und findet nach den nöthigen Reductionen:

$$y = {}_{11\cdot0254816}\Big\{0\cdot2827159\,x + 16\cdot2340058 \pm \sqrt{35\cdot1050437x - 1\cdot2399305x^2 - 188\cdot2946700}\Big\}^{13\cdot5093039};$$

9) Durch Anwendung unserer Formeln auf die Gleichung: $y = \frac{4}{3}\sqrt{23x - x^2 - 130}$ erhält man:

$$y = 0\cdot2827159\,x + 21\cdot4738846 \pm \sqrt{16\cdot0906262x - 1\cdot2399305x^2 - 47\cdot0305965};$$

10) Aus der Gleichung $y = \frac{2}{5}\sqrt{50x - x^2}$ ergibt sich:

$$y = {}_{12\cdot6294451}\Big\{24\cdot8580191 - 0\cdot4645922 \pm \sqrt{9\cdot3286626x - 0\cdot2584469\,x^2 + 42\cdot9218095}\Big\}^{21\cdot3331661};$$

11) Endlich gibt noch die Gleichung der Geraden $y = 2x - 36$; sofort:

$$y = (11\cdot0254816)\left\{\begin{matrix} 0\cdot6540065x \\ 12\cdot1520287 \end{matrix}\right\}(13\cdot5093838).$$

§. 5.

Aufgabe 4. Es sey die Gleichnng des durch Fig. 106 dargestellten Flächenraumes gegeben, man soll von selbem das durch die Linie FG abgeschnittene Stück $HBIibh$ trennen, und nach $H'B'I'i'b'h'$ in angedeuteter Weise verlegen.

Es seyen, um diese Aufgabe gleich in einem speciellen Beispiele nachzuweisen, die Abscissen und Ordinaten des Punctes D beziehungsweise 7 und 5, jene von A 7 und 14, die von d 9 und 7, jene von a 9 und 12, ferner $DC = 15$, und $dc = 11$, so ist augenscheinlich die Gleichung dieser Fläche:

$$(1) \quad y = \Big({}_{7}\Big\{0x + 5\Big\}^{22}\ \omega\ {}_{9}\Big\{0x + 12\Big\}^{20}\Big)\ \Big\{\tfrac{0}{0}\Big\}\ \Big({}_{9}\Big\{0x + 7\Big\}^{22}\ \omega\ {}_{7}\Big\{0x + 14\Big\}^{22}\Big).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Disjunctivglieder für die senkrechten Seiten der Figur weggelassen sind, weil sie sammt und sonders schon in dem obigen mitbegriffen sind, daher zweimal gesetzt würden. So ist z. B. die Seite AD offenbar durch:

$$y = (5)\left\{\frac{x \equiv 7}{0}\right\}(14) = (5)\Big\{\tfrac{0}{0}\Big\}(14)$$

ausgedrückt, d. h. für $x = 7$ kommen dem y alle zwischen 5 und 14 liegende Werthe zu. Setzt man aber in obiger Gleichung $x = 7$, so erhält man gleichfalls: $(5)\Big\{\tfrac{0}{0}\Big\}(14)$.

Ein Gleiches gilt auch von den übrigen, den Seiten ad, bc und BC entsprechenden Gliedern, d. i. von $(7)\left\{\frac{x\equiv 9}{0}\right\}(12)$; $(7)\left\{\frac{x\equiv 20}{0}\right\}(12)$; und $(5)\left\{\frac{x\equiv 22}{0}\right\}(14)$. Überhaupt repräsentirt obige Gleichung unsern Gegenstand bis auf jeden einzelnen Punct. So erhält man z. B. für $x=8$ und $x=10$ beziehungsweise

$$y=(5)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}(14) \text{ und } y=(5\,\omega\,12)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}(7\,\omega\,14).$$

Die Fläche soll nun von einer Linie geschnitten werden, deren Gleichung $y=-x+28$ seyn mag. Ein Punct O dieser Linie selbst mag als anfänglicher Drehungspunct dienen, und zwar derjenige, dessen Abscissen und Ordinaten $\alpha=18$ und $\beta=10$ sind. Er werde mit dem Objecte nach O' hin verlegt, dessen Puncte $\alpha'=25$, $\beta'=20$ seyn mögen, und wobei sich das Object zugleich um den Winkel $\varrho=-121^0\,43'$ dreht.

Vorerst ist zu untersuchen, an welchen Puncten unser Object von der Geraden geschnitten wird, wobei natürlich die den senkrechten Seitenlinien entsprechenden Disjunctiv-Glieder mit in den Kreis der Untersuchung gezogen werden müssen. Diess wird uns den neuen Antheil der Begrenzung liefern.

1) *) Da $\left\{0x+12\right\}_{9}^{20}=-x+28$. Hieraus $x=16$ und daher zwischen 9 und 20 liegend, *möglich*.

2) $\left\{0x+7\right\}_{9}^{20}=-x+28$; $x=21$, und somit *unmöglich*.

3) $\left\{0x+14\right\}_{7}^{22}=-x+28$; folglich $x=14$, daher *möglich*.

4) $\left\{0x+5\right\}_{7}^{22}=-x+28$; $x=23$ und somit *unmöglich*.

5) Ferner wegen $y=\left\{\frac{x\equiv 7}{0}\right\}_{5}^{14}$ d. h. wegen $x=7$ und $y=-x+18$ erhält man sofort: $y=21$, mithin ausserhalb der Grenzen 5 und 14 liegend, und somit *unmöglich*.

6) Wegen $y=\left\{\frac{x\equiv 9}{0}\right\}_{7}^{12}$ und $y=-x+28$, daher mit $x=9$ verbunden, gibt $y=19$ und also ausserhalb 7 und 12 liegend, und somit *unmöglich*.

7) Dagegen $y=\left\{\frac{x\equiv 20}{0}\right\}_{7}^{20}$ und wegen $x=20$ und $y=-x+28$, $y=8$ und somit *möglich*.

8) Endlich $y=\left\{\frac{x\equiv 22}{0}\right\}_{5}^{14}$ woraus wegen $x=22$ für $y=6$ folgt, und daher *möglich*.

*) Dass man hier überall statt $\left\{0x+12\right\}_{9}^{20}=\left\{12\right\}_{9}^{20}$ u. s. w. hätte schreiben können, bedarf zufolge des einleitenden Theiles keine weitere Erklärung.

Nach dieser hier beispielsweise vollständig durchgeführten Voruntersuchung ergibt sich als Gleichung für die beiden abgesonderten zur Dislocation vorbereiteten Flächentheile die folgende:

$$2)\quad y=\Big(\big\{0x+5\big\}_{7}^{22}\,\omega\,\big\{0x+12\big\}_{9}^{16}\Big)\,\left\{\tfrac{0}{0}\right\}\,\Big(\big\{0x+7\big\}_{6}^{20}\,\omega\,\big\{0x+14\big\}_{7}^{14}\,\omega\,\big\{-x+28\big\}_{14,20}^{16,22}\Big)$$

$$\omega\,\mathop{L}_{18,\,10}^{25,\,20}{}^{-121^{\circ},\,43'}\Big(\Big(\big\{-x+28\big\}_{14,20}^{16,22}\,\omega\,\big\{0x+12\big\}_{16}^{20}\Big)\,\left\{\tfrac{0}{0}\right\}\,\Big(\big\{0x+14\big\}_{14}^{22}\Big)\Big).$$

Um die angezeigte Dislocation wirklich auszuführen, wird man sich vor Allem die betreffenden Dislocations-Formeln mittelst Substitution der obigen Bestimmungsstücke in unsern allgemeinen Formeln verschaffen und sofort erhalten:

$$\text{I.}\ \left\{\begin{aligned} x' &= 0{\cdot}8506582\,y-0{\cdot}5257191\,x+25{\cdot}9563618;\\ y' &= -0{\cdot}5257191\,y-0{\cdot}8506582\,x+40{\cdot}5690380.\end{aligned}\right.$$

$$\text{II.}\ \left\{\begin{aligned} x &= -0{\cdot}8506582\,y'-0{\cdot}6257191\,x'+30{\cdot}1445938;\\ y &= 0{\cdot}5257191\,y'+0{\cdot}8506582\,x'-0{\cdot}7520136.\end{aligned}\right.$$

Werden nun diese Formeln sowohl auf die Grundgleichungen als auf die Grenzwerthe obiger Disjunctivglieder angewendet, so erhält man für den zweiten mit dem Dislocationszeichen behafteten Theile obiger Gleichung folgenden:

$$(3)\ \mathop{L}_{18,\,10}^{25,\,20}{}^{-121^{\circ},\,43'}(\ldots)=\Big((19{\cdot}4944908)\left\{\begin{matrix}-0{\cdot}6180145x\\+64{\cdot}648890\end{matrix}\right\}(26{\cdot}2997564)\,\omega\left\{\begin{matrix}1{\cdot}6180145x\\-27{\cdot}867501\end{matrix}\right\}(33{\cdot}2582638)\Big)$$

$$\left\{\tfrac{0}{0}\right\}\Big(\begin{pmatrix}19{\cdot}4944908\\27{\cdot}8527546\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}-0{\cdot}2360828x\\+1{\cdot}0119379\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}22{\cdot}2472454\\33{\cdot}2582638\end{pmatrix}\Big)\ \omega\ (22{\cdot}2472454)\left\{\begin{matrix}-0{\cdot}6180145x\\+11{\cdot}9255817\end{matrix}\right\}$$

$$(25{\cdot}6498782)\,\omega\left\{\begin{matrix}1{\cdot}6180850\,x\\-24{\cdot}2563260\end{matrix}\right\}(27{\cdot}7527546)\Big),$$ welche sofort zum ersten Theile obiger Disjunctivgleichung (2) hinzugefügt, die Gleichung der getrennten Theile in Fig. 107 darbietet.

§. 6.

Aufgabe 5. Es sey ein parabolischer Flächenraum durch seine Gleichung gegeben, ferner auch noch jene einer Dreiecksfläche. Man soll nun von ersterer durch gezogene Sehnen, welche mit den Seiten des Dreiecks gleiche Länge haben, Segmente abschneiden, sie von der parabolischen Fläche trennen und dergestalt an das Dreieck anlegen, dass hierdurch ein von parabolischen Bögen begrenzter Flächenraum entsteht. (Fig. 108 und 109.)

Ist die Gleichung der parabolischen Linie $y=\sqrt{3x}$, so ist jene des parabolischen Flächenraums:

(1) $y=\left(-\sqrt{3x}\right)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}\left(+\sqrt{3x}\right)$. Ferner die Gleichung der Dreiecksfläche ABC sey

$$(2)\quad y=\left((3)\begin{Bmatrix}0{\cdot}4296339x\\+6{\cdot}7110983\end{Bmatrix}(4{\cdot}0045484)\,\omega\begin{Bmatrix}11{\cdot}013606x\\-46{\cdot}1518630\end{Bmatrix}(5{\cdot}2153484)\right)\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\left((3)\begin{Bmatrix}0{\cdot}811219\,x\\+5{\cdot}5363343\end{Bmatrix}(52153484)\right),$$

wobei zu bemerken ist, dass die drei Seiten dieses Dreiecks, nämlich $a=2{\cdot}1049$, $b=6{\cdot}7486$, $c=5{\cdot}436$; ferner die Winkel $A=16^0\,8'\,37''$; $B=118^0\,26'\,17''$ und $C=45^0\,25'\,6''$ sind, und der Neigungswinkel der Seite c gegen die Achse x oder $\omega=23^0, 15'$ beträgt. — Durch eine einfache Rechnung findet man ferner, dass Sehnen der Parabel, deren Coordinaten beziehungsweise $\alpha=\frac{1}{3}$; $\beta=-1$; $\alpha'=5$; $\beta'=\sqrt{15}$; ferner $\alpha=6$; $\beta=\sqrt{18}$; $\alpha'=8$; $\beta'=\sqrt{24}$; und endlich $\alpha=2$; $\beta=-\sqrt{6}$; $\alpha'=7$; $\beta'=-\sqrt{21}$; sind, gleiche Länge mit den genannten Dreieckseiten haben, und zwar der Ordnung nach jenen von a, b, c gleichen. Die entsprechenden Neigungswinkel derselben gegen die Achse x sind von BC oder $a=18^0\,10'\,57''$, jener von AC oder $b=46^0\,14'\,20{\cdot}3''$; und jener von AB oder $c=23^0\,6'\,14{\cdot}1''$.

Nun bestimme man für die dreifach verschiedene Bewegung der zu dislocirenden parabolischen Segmente die drei entsprechenden Systeme von Dislocations-Formeln, von denen jedoch hier der Kürze wegen nur die Formeln II aufgeführt werden sollen.

1) Für die Dislocation von ACO nach AC, ist $\alpha=\frac{1}{3}$; $\alpha'=3$; $\beta=-1$; $\beta'=8$; $\varrho^0=-6^0\,50'\,43{\cdot}3''$; daher $sin.\,\varrho=-0{\cdot}1191558$; $cos.\,\varrho=0{\cdot}9928719$.

2) Wegen Dislocation von ABC nach AB ist $\alpha=2$; $\alpha'=3$; $\beta=-\sqrt{6}$; $\beta'=8$; $\varrho^0=46^0\,21'\,14{\cdot}1''$; daher $sin.\,\varrho^0=0{\cdot}7236169$; $cos.\,\varrho=0{\cdot}6902022$.

3) Wegen Dislocation des Flächenstücks BCa nach BC ist $\alpha=6$, $\alpha'=4{\cdot}9945484$; $\beta=\sqrt{18}=4{\cdot}2426407$, $\beta'=8{\cdot}8569249$, $\varrho^0=66^0\,38'\,37{\cdot}3''$; daher $sin.\,\varrho=0{\cdot}9180571$, $cos.\,\varrho=0{\cdot}3964397$.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man der Ordnung nach:

1\. Fall. $\begin{cases}x=0{\cdot}9928719x'-0{\cdot}1191558y'-1{\cdot}6920360;\\ y=0{\cdot}1191558x'-0{\cdot}9928719y'-9{\cdot}3004426;\end{cases}$

2\. Fall. $\begin{cases}x=0{\cdot}6902022x'+0{\cdot}7236169y'-5{\cdot}8595418;\\ y=-0{\cdot}7236169x'+0{\cdot}6902022y'-5{\cdot}8002566;\end{cases}$

3\. Fall. $\begin{cases}x=0{\cdot}3964397x'+0{\cdot}9180571y'-4{\cdot}1111999;\\ y=-0{\cdot}3964397x'+0{\cdot}3964397y'+8{\cdot}4961311.\end{cases}$

Diese Formeln auf unsere obige Gleichung angewandt, liefern folgende Ergebnisse, und zwar der Ordnung nach:

$$(3)\ y'=9{\cdot}2366243-0{\cdot}1108816x'\pm\sqrt{3{\cdot}0235653\,x'-0{\cdot}0021079\,x'^2-7{\cdot}5685629}\,;$$

$$(4)\ y'=10{\cdot}6821989+0{\cdot}9854382x'\pm\sqrt{6{\cdot}5856149+7{\cdot}7787355\,x'-0{\cdot}1280809\,x'^2}\,;$$

$$(5)\ y'=2{\cdot}3106386x'-12{\cdot}6683773\pm\sqrt{48{\cdot}2761752x'+0{\cdot}6234011x'^2-337.2522846}.$$

Diess nun der wesentliche Theil der Rechnung, wornach man sich die Zusammenstellung der betreffenden Disjunctivglieder leicht selbst hinzudenken kann.

§. 7.

Aufgabe 6. Es seyen die Gleichungen zweier Flächenräume gegeben, man soll auf rein analytischem Wege denjenigen Theil der Fläche bestimmen und durch die entsprechende Gleichung darstellen, welchen diese Flächen gemein haben.

Diese Aufgabe, deren Nothwendigkeit sich für die folgenden Probleme erweisen wird, findet in Nachfolgendem ihre allgemeine Lösung. — Es seyen die Gleichungen der beiden betreffenden Flächen:

$$(1) \quad y = \varphi(x) \left\{ \tfrac{0}{0} \right\} \varphi'(x) \quad \text{und} \quad (2) \quad y = f(x) \left\{ \tfrac{0}{0} \right\} f'(x);$$

so ist klar, dass die Gleichung ihres gemeinschaftlichen Theiles, da sie wieder eine Fläche repräsentirt, von ähnlicher Form, wie etwa $y = F(x) \left\{ \tfrac{0}{0} \right\} F'(x)$ seyn werde.

Unsere ganze Aufgabe bezieht sich demnach darauf, aus den Functionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ und $f(x)$, $f'(x)$, jene von $F(x)$, $F'(x)$ zu finden. Wir können dabei der grössten Allgemeinheit völlig unbeschadet annehmen, dass die genannten Functionen vorläufig nur aus je einem Disjunctiv-Gliede bestehen, da der entgegenstehende Fall, wenn er eintritt, keine abgeänderte Behandlungsweise erheischt, sondern nach den allgemeinen Regeln unsers Algorithmus behandelt werden muss. Da die möglichen Verbindungen zwischen den wechselseitigen veränderlichen Grenzwerthen nur folgende vier Bedingungsgleichungen liefern:

$$1)\ \varphi(x) = f(x); \quad 2)\ \varphi(x) = f'(x); \quad 3)\ \varphi'(x) = f(x); \quad 4)\ \varphi'(x) = f'(x);$$

so sind in Allem nur nachfolgende fünf Hauptfälle möglich: *a*) entweder liefern diese vier Gleichungen gar keinen möglichen Werth für x, oder *b*) es bietet nur eine unter ihnen einen möglichen Werth dar, oder *c*) es ist dieses bei zweien, oder *d*) bei drei, oder endlich *e*) bei allen vier Gleichungen der Fall. Betrachten wir diese Fälle nun einzeln.

a) *Keine der vier Gleichungen liefert einen möglichen Werth für* x. Hier ist nur einer der beiden Fälle möglich: 1) entweder befinden sich beide Flächen wie in Fig. 110 ganz ausserhalb, oder 2) eine, wie in Fig. 111, ist ganz innerhalb der andern. Ein verlässliches Kennzeichen für den einen und den andern Fall liefert der Umstand, dass im erstern Falle die Grenz-Intervalle der beiden Gleichungen (1) und (2) der Flächenräume sich wechselseitig ausschliessen, im zweiten dagegen das eine ganz innerhalb des Intervalles der andern Gleichung liegend gefunden wird. Zu bemerken ist hiebei, dass falls die Grenzwerthe der beiden Gleichungen nicht ersichtlich vorlägen, diese früher gesucht werden müssen. Dieses ist gewöhnlich, wie schon gelegenheitlich erwähnt wurde, der Fall bei allen sich selbst begrenzenden, in sich zurückkehrenden Curven, deren unterer und oberer Grenzwerth dem Minimum und Maximum der Abscisse x entspricht. Man findet diese mittelst der beiden Gleichungen $\varphi(x) = \varphi'(x)$ und $f(x) = f'(x)$.

b) *Jene vier Gleichungen liefern nur einen möglichen Werth für* x. Dieser Fall entspricht jedenfalls einer Berührung der beiden Flächenräume, wobei sie wieder entweder 1) ganz ausserhalb einander oder 2) ganz innerhalb einander liegen können. Das Erstere findet statt, wenn die Grenz-Intervalle sich wechselseitig ausschliessen; das Zweite, wenn das eine Intervall ganz innerhalb des andern liegt, wie in Fig. 112 und Fig. 113. — Auch kann man aus dem Anblicke der Gleichung stets erkennen, ob diese Berührung in einem obern oder untern Flächentheile vor sich geht.

c) Jene vier Gleichungen liefern nur zwei mögliche verschiedene Werthe für x. In diesem Falle sind nachfolgende untergeordnete begriffen.

Vorerst muss der Fall erwähnt und ausgeschieden werden, wo zwar alle vier Gleichungen mögliche Werthe für x liefern, also im Ganzen vier, von denen jedoch je zwei und zwei einander gleich sind. Es würde dieses der Fig. 114 entsprechen, und ist, wie leicht einzusehen, nur ein specieller Fall des fünften unter e aufzustellenden. Wir haben also nur den Fall hier in Betracht zu ziehen, wo überhaupt nur zwei Gleichungen zwei mögliche verschiedene Werthe für x liefern. Bei dieser in der Natur unserer Eintheilung liegenden Beschränkung findet stets ein theilweises Ineinanderseyn oder eine partielle Durchdringung der beiden Flächenräume statt, und unser Augenmerk haben wir bloss auf die besondern Umstände zu richten, unter welchen dieselbe auftritt. Diese aber werden lediglich dadurch bedingt, welche von den obigen vier Gleichungen jene zwei Werthe liefern, und in welchem Verhältnisse sie zu den betreffenden constanten Grenzwerthen der Gleichungen (1) und (2) stehen.

Es ergeben sich hierbei drei Hauptfälle, welche in Fig. 115, Fig. 116 und Fig. 117 veranschaulicht sind, deren Discussion wir dem Leser selbst überlassen.

d) Jene vier Gleichungen liefern 3 mögliche ungleiche Werthe für x. Auch hier muss wieder der Fall erwähnt und ausgeschieden werden, wo zwar alle vier Gleichungen mögliche Werthe liefern, unter denen jedoch zwei einander gleiche sind. Er entspricht der Fig. 118 und ist als ein specieller Fall des nachfolgenden zu betrachten. Es verbleibt uns also nur der Fall, wo drei der obigen Gleichungen mögliche verschiedene Werthe geben, wie dieses bei Fig. 119 z. B. der Fall ist, und endlich:

e) Alle vier Gleichungen liefern jede nur einen möglichen, verschiedenen Werth. Dieser Fall begreift, ausser den schon erwähnten speciellen Fällen, weiters keine andern mehr in sich, und entspricht der in Fig. 203 dargestellten allgemeinen Lage der beiden Flächen. Diess vorausgesetzt, lassen sich ohne viele Mühe für alle genannten Fälle die Gleichungen des gemeinschaftlichen Flächenantheils finden, wie wir dieses für die wichtigsten sofort auch thun wollen. Bezeichnet man nämlich mit α, α', α'', α''' die vier Grenzwerthe der Gleichung (1) und (2), und bedeuten ferner m, m', m'', m''' der Ordnung nach die allfallsigen Wurzeln der vier Bedingungsgleichungen, endlich, falls diese Gleichungen mehr als bloss eine Wurzel hätten, n, n', n'', n''' u. s. w.; so entsprechen die nachfolgenden Gleichungen den dabei namhaft gemachten geometrischen Objecten.

Diess sind die Hauptpuncte einer Untersuchung, welche, ich will es nicht läugnen, um vollständig und erschöpfend genannt zu werden, allerdings eine noch ausführlichere Darstellung bedürfen mag. Indessen will ich mich gegenwärtig begnügen, dem Gesagten einige, obigen Fällen entsprechende Functionsgleichungen der allgemeinsten Form beizufügen.

Setzt man nämlich obige Functionen (1) und (2) als die gegebenen voraus, und bezeichnen beziehungsweise $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ die Grenzwerthe von $x, m, m', m'', m''', n, n', n'', n'''$ u. s. w. wie oben erwähnt wurde, die für x gefundenen Abscissenwerthe der Durchschnitts- und Berührungspuncte, so hat man z. B. als allgemeine Gleichung des Falls c, Fig. 198:

$$(3) \quad y = \Big\{\varphi'(x)\Big\}_{m'}^{n'} \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_{\cdot}^{\cdot} \Big\{f(x)\Big\}_{m'}^{n'}$$

als Gleichung des gemeinschaftlichen Flächentheils $ABCD$ in genannter Figur, oder als allgemeine Gleichung des Falles c, Fig. 116:

$$(4) \quad y = \left(\Big\{f(x)\Big\}_{\alpha'}^{m} \,\omega\, \Big\{\varphi(x)\Big\}_{m}^{\alpha'}\right) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_{\cdot}^{\cdot} \left(\Big\{f'(x)\Big\}_{\alpha''}^{m'''} \,\omega\, \Big\{\varphi'(x)\Big\}_{m'''}^{\alpha'}\right)$$

als Gleichung von $ABCD$, oder als allgemeine Gleichung des Falles c, in Fig. 117:

$$(5) \quad y = \left(\Big\{f(x)\Big\}_{m''}^{n''} \,\omega\, \Big\{\varphi(x)\Big\}_{n''}^{\alpha'}\right) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_{\cdot}^{\cdot} \left(\Big\{f'(x)\Big\}_{m''}^{\alpha'}\right)$$

als Gleichung des Theils ABC. Dem Theile ABC, Fig. 118, Fall d, entspricht die Gleichung:

$$(6) \quad y = \left(\Big\{f(x)\Big\}_{\alpha}^{m} \,\omega\, \Big\{\varphi(x)\Big\}_{m}^{\alpha'}\right) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_{\cdot}^{\cdot} \left(\Big\{\varphi'(x)\Big\}_{\alpha'}^{m'''} \,\omega\, \Big\{f(x)\Big\}_{m'''}^{\alpha'}\right).$$

Die Gleichung des Theils ABC, Fig. 119 ist:

$$(7) \quad y = \left(\Big\{\varphi(x)\Big\}_{m}^{n}\right) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_{\cdot}^{\cdot} \left(\Big\{f'(x)\Big\}_{m}^{m'''} \,\omega\, \Big\{f'(x)\Big\}_{m'''}^{n}\right).$$

Und endlich dem Theil $HEFG$ in Fig. 120 entspricht die Gleichung:

$$(8) \quad y = \left(\Big\{f(x)\Big\}_{m''}^{m} \,\omega\, \Big\{\varphi(x)\Big\}_{m}^{m'}\right) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_{\cdot}^{\cdot} \left(\Big\{f(x)\Big\}_{m''}^{m'''} \,\omega\, \Big\{\varphi(x)\Big\}_{m'''}^{m'}\right).$$

Diese Bemerkungen mögen genügen, und wir glauben uns sofort einer weitern Anwendung dieses Gegenstandes zuwenden zu können.

§. 8.

Aufgabe 7. Ein Flächenraum von beliebiger, aber bestimmter Begrenzung, wie z. B. ABC, Fig. 121, oder OPQ, Fig. 122, oder auch ein begrenztes Curvenstück, wie AB in Fig. 123, bewege sich in der Weise in einer Ebene, dass ein ausserhalb oder innerhalb der Figur liegender mit derselben in fester Verbindung stehender Punct O, eine gewisse Bahn beschreibt, während zugleich die ganze Fläche oder das Curvenstück um eben diesen Punct als Drehungspunct rotirt. Wenn nun das Gesetz der beiden Bewegungen durch Angabe ihrer respectiven Zeitgleichungen, und die Bahn sowohl wie die Fläche gleichfalls durch ihre Functionsgleichungen gegeben sind: so frägt es sich, welche ist die Gleichung der von der Fläche oder dem Curvenstück beschriebenen Bahnfläche?

Schon mit den Betrachtungen des vorigen Paragraphs haben wir uns einer ganz eigenthümlichen Classe von Problemen zuzuwenden begonnen, welche nicht nur an und für sich interessant seyn dürften, und jedenfalls in dem Aufbau der analytischen Geometrie keine unbedeutende Lücke ausfüllen, sondern die auch in mehr als in einer Beziehung von unstreitig grosser praktischer Wichtigkeit seyn werden. — Was unsere gegenwärtige Untersuchung anbelangt, so ist schon auf den ersten Augenblick ersichtlich, dass unsere Aufgabe sich auf die Angabe besonderer Maxima und Minima stützt, die sich aber von der gewöhnlichen geometrischen wesentlich darin unterscheiden, dass sie sich nicht wie diese auf den in Ruhe befindlichen, sondern auf den in Bewegung begriffenenen geometrischen Gegenstand beziehen. Bewegt sich nämlich eine Fläche Q, Fig. 124, in vorerwähnter Weise in der Bahn RS, so muss sich für jede beliebige Ordinate pq der Punct derselben, z. B. M, angeben lassen, welcher im Verlaufe der ganzen Bewegung beim Durchdringen dieser Ordinate, sie von allen am höchsten etwa im Puncte m trifft, während zugleich ein anderer Punct dieser Fläche, z. B. N, die Ordinate im Minimo schneidet. Bei discontinuirlichen, d. h. bei allen zusammengesetzten und willkürlich begrenzten geometrischen Objecten, z. B. Polygons-Flächen u. s. w. (s. Fig. 122), lassen sich noch andere Puncte angeben, z. B. M', M'', M''' und N', N'', N''' u. s. w. Fig. 207, die diese Ordinate in den Puncten m', m'', m''', n', n'', n''' u. s. w. treffen, und da alle zwischen einem zusammengehörigen Maximum und Minimum liegenden Puncte von der Fläche bedeckt erscheinen, so werden in letzterwähntem Falle einige dieser Puncte zweimal, andere sogar dreimal und noch öfters von der Fläche bedeckt, und geben sofort zu einer mehrfachen abweichend geformten Bahnfläche, wie in Fig. 122 dargestellt ist, Veranlassung. Bei den continuirlichen Flächenräumen geschieht zwar ebendasselbe, jedoch kann hier der Übergang der Bahnflächen offenbar zuweilen auch ein continuirlicher seyn. Um nicht schon gleich anfänglich den Einfluss der Grenzwerthe beachten zu müssen, wollen wir voraussetzen, wir hätten vorerst nur mit unbegrenzten oder sich selbst begrenzenden Flächenräumen es zu thun, und weiter unten erst auf diese Beschränkung zurückkommen.

1) Diess vorausgesetzt, sey (1) die Gleichung für den Flächenraum und (2) jene für die Bahn des Punctes, und zwar:

$$(1)\,^{*})\quad y = f(x) \left\{ \begin{smallmatrix} \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right\} f'(x) \quad \text{und} \quad (2)\quad y = \Phi(x).$$

Wendet man hierauf unsere bekannten Dislocations-Formeln II. an, d. h. setzt man in (1) statt

*) Da, wiewohl nicht nothwendig, doch in den am häufigsten vorkommenden Fällen die Doppelförmigkeit der Gleichungen solcher Figuren, die wieder in sich zurückke ren, in einer geraden Wurzel ihren Grund hat, so hätten wir auch statt

$$(1)\quad y = \left(M - \sqrt{N}\right) \left\{ \begin{smallmatrix} \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{smallmatrix} \right\} \left(M + \sqrt{N}\right),$$

schreiben können, wobei M und N anfänglich als reine Functionen von x, nach ihrer sofortigen Behandlung bis (5) als solche von x' und t, zu gelten hätten. —

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = d + (y' - \delta') \sin.\varrho + (x' - d') \cos.\varrho; \\ y = \delta + (y' - \delta') \cos.\varrho - (x' - d') \sin.\varrho. \end{array} \right.$$

(s. Abschnitt II, §. 27), so erhält man, nachdem man y' bestimmt, und in seine Doppelwerthe zerlegt hat, eine Gleichung, welche, da d und δ völlig constante Grössen sind, von der Form (3) seyn muss, d. i.

$$(3) \quad y' = F(x', d', \delta', \varrho) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}} F'(x', d', \delta', \varrho);$$

und da der Drehungspunct nach seiner Verlegung stets in der Bahnlinie liegen soll, wegen $\delta' = \Phi(d')$, offenbar auch:

$$(4) \quad y' = F(x', d', \Phi(d'), \varrho) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}} F'(x', d', \Phi(d')\ \varrho);$$

d. h. eine Gleichung, welche ausser von x' noch von den Grössen d' und ϱ abhängt. — Bedenkt man aber, dass sowohl die Bewegung des Drehungspunctes in der Bahnlinie, als auch der Drehungspunct ϱ bloss allein von der Zeit t abhängen, und somit beide durch ihre respectiven Zeitgleichungen gegeben sind, d. h. dass z. B. $d' = \psi(t)$ und $\varrho = \pi(t)$; so erhält man durch deren Substitution in (4) sofort:

$$(5) \quad y' = F\Big(x', \psi(t), \Phi(\psi(t)), \pi(t)\Big) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}} F'\Big(x', \psi(t), \Phi(\psi(t)), \pi(t)\Big) = \mathfrak{F}(x', t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}}} \mathfrak{F}'(x', t)$$

und mithin eine blosse Function von x' und t. — Diess ist die Gleichung unsers Objectes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit. Sie liefert für jeden Zeitmoment t die Gleichung des Gegenstandes in seiner entsprechenden Lage. — Diese Gleichung (5) mussten wir uns verschaffen, um unsere Aufgabe lösen zu können.

Unsere ganze Untersuchung würde einer schnellen Lösung entgegeneilen, wenn wir für jeden beliebigen constanten Werth von x' die beiden Zeitmomente, die im Allgemeinen verschieden sind, zu bestimmen vermöchten, in denen die diesem x' entsprechende Ordinate y', das einemal im Maximo, das andermal im Minimo von unserm Objecte geschnitten wird. Dieses kann aber keiner andern als höchstens einer rein analytischen Schwierigkeit, um die wir uns hier eigentlich nicht zu bekümmern haben, unterliegen. — Nach den bekannten Lehren über das Maximum und Minimum hätten wir daher unter Voraussetzung, dass x' eine constante Grösse sey, die Gleichung

$$(6) \quad y' = \mathfrak{F}(x', t) \,\omega\, \mathfrak{F}'(x', t)$$

zu differenziren, gleich Null zu setzen und t zu bestimmen, d. i.

$$(7) \quad \delta \mathfrak{F} \frac{(x', t)}{\delta t} \,\omega\, \delta \mathfrak{F}' \frac{(x', t)}{\delta t} = 0$$

als Gleichung aufzulösen.

Es kömmt nun darauf an, ob man bloss die einfache oder Hauptbahnfläche, wie in Fig. 121 und 123, oder aber zugleich auch wie in Fig. 122 die untergeordneten zu erhalten wünscht. Ist Ersteres der Fall, so behält man für t nur jene zwei Werthe bei, die dem absoluten Maximum und Minimum von y' entsprechen. Ist Letzteres der Fall, so hat man bloss alle jene Werthe, welche keinem, selbst auch keinem relativen Maximum oder Minimum entsprechen, auszuscheiden, die übrigen aber statt t in unsere obige Gleichung (5) zu setzen. Bezeichnet man diejenigen Werthe von $\mathfrak{F}(x', t)$ und $\mathfrak{F}'(x', t)$, welche durch Substitution der absoluten und relativen Maxima- und Minima-Werthe erhalten werden, beziehungsweise vom grössten und kleinsten ausgehend, mit $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ u. s. w. und $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ u. s. w., welche natürlich durchaus blosse Functionen von x' sind, so erhält man als Gleichung der verlangten einfachen und der vollständigen Bahnfläche der Ordnung nach:

$$(8) \quad y' = (\mathfrak{K}) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} (\mathfrak{G}) \quad \text{und} \quad (9) \quad y' = (\mathfrak{K} \,\omega\, \mathfrak{K}' \,\omega\, \mathfrak{K}'') \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} (\mathfrak{G} \,\omega\, \mathfrak{G}' \,\omega\, \mathfrak{G}'').$$

Man sieht daher, dass in speciellen Fällen die Möglichkeit einer völligen Durchführung der Rechnung grösstentheils durch den Umstand bedingt wird, ob man die Gleichung (7) nach t vollständig aufzulösen und die Werthe, die keinem Maximum oder Minimum entsprechen, im Allgemeinen auszuscheiden vermag. Letzteres wird sehr häufig dadurch überflüssig, dass man in besondern Fällen, wie z. B. in dem weiter unten anzuführenden Beispiele schon aus der Natur der Sache erkennen kann, ob jene Gleichung ausser dem Werthe für das absolute Maximum und dem für das absolute Minimum noch andere besitze oder nicht. —

2. Ist der in Bewegung begriffene Gegenstand eine völlig willkürlich begrenzte Curve oder eine derlei Fläche, so findet man die verlangte Bahnfläche auf folgende Weise. Es sey (10) die Gleichung unsers begrenzten Gegenstandes, und x' die einer gewissen Ordinate y' entsprechende Abscisse

$$(10) \quad y = \left\{ f(x) \right\}_{\alpha}^{\alpha'} \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} \left\{ f'(x) \right\}_{a}^{\alpha'}$$

und jene der Bahn des Punctes wie oben $y = \Phi\, x$). — Wendet man nun unsere bekannten Dislocations-Formeln nicht bloss auf die Functions-Gleichung selbst, sondern auch die Formeln des Systems I auf die constanten Grenzen derselben an, so erhält man aus (10) wegen $\delta' = \Phi(d')$; $d' = \psi(t)$ und $\varrho = \pi(t)$ mit absichtlicher Hinweglassung der Accentuirung offenbar eine Gleichuug von der Form

$$(11) \quad y = \varphi(t) \left\{ F(x, t) \right\} \varphi'(t) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} \varphi(t) \left\{ F'(x, t) \right\} \varphi'(t)$$

als Gleichung unsers Gegenstandes für jeden beliebigen Zeitmoment t.

Ein Blick auf die Gleichung (11) überzeugt zur Genüge, dass die beiden Grenzwerthe für x, nämlich $\varphi(t)$ und $\varphi'(t)$ lediglich von t abhängen, was auch nicht anders zu erwarten war. Es ist für unsere Aufgabe unerlässlich und auch sonst nicht ohne Interesse, genau den Zeitpunct zu kennen, in welchem ein solches begrenztes Object in eine gewisse Ordinate y' eintritt, und auch wieder aus ihr austritt. Diess erfährt man sehr leicht durch die Auflösung der beiden Gleichungen $\varphi(t) = x'$ und $\varphi'(t) = x'$, wobei x' die der Ordinate y' entsprechende Abscisse bedeutet. Kennt man diese beiden Zeitmomente, sie mögen durch t_1 und t_2 bezeichnet werden, so hat man sofort die oben besprochene Untersuchung zu führen, d. h. auszumitteln, für welche Werthe von t, d. i. in welchen Zeitpuncten die Gleichung

$$(12)\quad y' = F(x', t) \,\omega\, F'(x', t)$$

Maxima und Minima liefert. Es seien diese Zeitmomente oder Werthe von t, τ, τ', τ'' u. s. w., welche sämmtlich als blosse Functionen von x' auftretend, mittelst Differentiation der Gleichung (12) nach den bekannten Regeln gefunden werden, so hat man nun vor Allem zu untersuchen, ob einer oder mehrere dieser Werthe zwischen dem Zeitintervalle t_1, t_2 liegen, d. h. grösser als t_1 und kleiner als t_2 sind oder nicht. Mit andern Worten ausgedrückt, soll dieses heissen: Man erforsche, ob zwischen dem Zeitpuncte des Ein- und Austrittes des Objectes irgend ein Maximum oder Minimum, oder beides zu Stande komme oder nicht. Ist Ersteres der Fall, so hat man für t in die obige Gleichung (11) beziehungsweise bloss diejenigen der Werthe τ, τ', τ'' u. s. w. zu setzen, welche dem verhältnissmässig grössten Maximum und kleinsten Minimum der Function entsprachen, die sich innerhalb jenes Zeitintervalls vorfinden. Fällt dagegen während dieses Zeitraums kein Maximum und Minimum, so hat man in die beiden Grenzfunctionen, die aus $\varphi(t) = x'$ und $\varphi'(t) = x'$ für t gefundenen Werthe t_1 und t_2 zu setzen. Bezeichnet man die auf diesem Wege erhaltenen Werthe der Functionen $F(x, t_1)$ und $F'(x, t_2)$ mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$, so begreift man leicht, dass sie in jedem Falle vorläufig noch als Functionen von x und x_1 auftreten. So lange dieser Unterschied besteht, bedeutet unsere Gleichung jene des Objectes in einer Lage, in welcher sie eben die Ordinate y' (als die zu x' gehörige) im Maximo und sodann auch jene, in der sie dieselbe im Minimo durchschneidet. Wird dagegen jener Unterschied aufgehoben, d. h. $x' = x$ gesetzt, so erhält man für $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$ bloss Functionswerthe von x, und unsere gefundene Gleichung ist sodann jene der gesuchten Bahnfläche, nämlich:

$$(13)\quad y = (\mathfrak{K}) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} (\mathfrak{G}),$$

und falls mehrere Maxima und Minima dazwischen lägen:

$$(14)\quad y = (\mathfrak{K} \,\omega\, \mathfrak{K}' \,\omega\, \mathfrak{K}'') \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} (\mathfrak{G} \,\omega\, \mathfrak{G}' \,\omega\, \mathfrak{G}'').$$

Ein Beispiel wird das Gesagte erläutern:

§. 9.

Beispiel. Es sey ein begränztes Stück einer geraden Linie, und ein ausser ihr liegender, mit derselben in fester Verbindung gedachter Punct 0 gegeben. Der letztere bewege sich in einer cubischen Parabel als Bahn, und führe zugleich jene Gerade mit sich.

Wenn nun diese Bewegung nach einer gewissen Zeitgleichung vor sich geht, und jene gerade Linie sich ebenfalls nach einem gewissen Zeitgesetze um den Punct 0 als

Drehungspunkt drehet: so frägt es sich, welche ist die Gleichung der Bahnfläche jener Geraden?

Es sey demnach die Gleichung einer gewissen begrenzten geraden Linie

$$(1)\quad y = \left\{ 2x + 3 \right\}_{1}^{5}.$$

Ferner seyen $d = 2$, $\delta = 5$ die Coordinaten des anfänglichen Drehungspunktes c.

Wendet man unsere bekannten Dislocations-Formeln I und II auf (1) an, so findet man nach gehöriger Reduction:

$$(2.)\quad y = (d' - \cos.\varrho) \underset{\cdot}{\left\{} \delta' + \left(\frac{2 + \cos.\varrho + \sin.\varrho}{\cos.\varrho - 2\sin.\varrho}\right)(x' - d') \overset{\cdot}{\right\}} (d' + 3\cos.\varrho - 8\sin.\varrho):$$

Setzt man nun $\delta' = 10\, d'^{\frac{2}{3}}$ und nimmt man sofort an, die fortschreitende Bewegung in der Bahn geschehe nach der Zeitgleichung: $d' = \frac{9}{t^2}$; und die Drehung um c, nach der Gleichung $\varrho = arc.\cos.\frac{4}{t^2}$, so erhält man

$$(3.)\quad y = \left(\frac{5}{t^2}\right) \underset{\cdot}{\left\{} \frac{1088 + 2t^2 - 539\sqrt{t^4 - 16}}{4t^2 - 2t^2\sqrt{t^4 - 16}} \overset{\cdot}{\right\}} \left(\frac{21}{t^2} - 8\sqrt{1 - \frac{16}{t^4}}\right)$$

Da hier augenscheinlich Anfangs- und Endpunct diejenigen sind, welche die Begrenzung der ganzen Bahnfläche nach Oben und Unten auf sich nehmen, und es zwischen ihnen keinen Punct gibt, welcher ein Maximum oder Minimum herbeizuführen im Stande wäre, so hat man wegen:

$$x' = \frac{5}{t^2} \text{ und } x^2 = \frac{21}{t^2} - 8\sqrt{1 - \frac{16}{t^4}}; \text{ unmittelbar } t = \sqrt{\frac{5}{x}}$$

$$\text{und } t = \sqrt{\frac{457}{21\, x' \pm \sqrt{457 - 16x'^2}}};$$

diese Werthe in obige Gleichung gesetzt, gibt endlich:

$$R = \left(\frac{1088\, x + 10 - 539\sqrt{25 - 16x^2}}{20\, x - 10\sqrt{25 - 16x^2}}\right) x; \text{ und}$$

$$G = \frac{(914 + 22848x + 1088\sqrt{457 - 16x^2} - 539\sqrt{37017 - 6800x^2 - 672x\sqrt{457 - 16x}})(21x - \sqrt{4571 - 6x^2}}{38388x + 1828\sqrt{457 - 16x^2} - 914\sqrt{37017 - 6800x^2 - 672x\sqrt{457 - 16x^2}}}$$

demnach ist: (4). $y = (R) \left\{ {0 \atop 0} \right\} (G)$ die Gleichung der gesuchten Bahnfläche. —

§. 10.

Aufgabe 8. Es seyen Fig. 125 in der Coordinaten-Ebene zwei Flächenräume MNO und PQR gegeben, von denen der Erstere als in vollkommener Ruhe befindlich, der zweite dagegen als in doppelter Bewegung begriffen vorausgesetzt wird, nämlich in einer fortschreitenden und einer rotirenden, beides nach einem gegebenen Zeitgesetze, und nach einer vorgezeichneten Bahnlinie in früher bezeichneter Weise. Wenn nun der bewegte Flächenraum durch den in Ruhe befindlichen während seiner Bewegung theilweise durchgehet: so frägt es sich: 1. welcher Theil der ruhenden Fläche *MNO* wird von dem bewegten Flächenraum während seiner Bewegung bedeckt? und 2. welches sind die Zeitmomente, in denen jene Fläche in die *MNO* eintritt, und aus ihr austritt?

Der erste Theil unseres gegenwärtigen Problems findet, wie der Leser selbst ersehen wird, in der gleichzeitigen Anwendung der beiden vorhergehenden Aufgaben 6 und 7 schon seine vollständige Lösung. Man hat sich nämlich vor Allem nach den Vorschriften des Paragraphes 8 die Gleichung für die Bahnfläche des in Bewegung begriffenen Flächenraumes *PQR* zu verschaffen, welches, wenn nicht analytische Schwierigkeiten entgegenstehen, keinem weiteren Anstande unterliegt. Ist dieses geschehen, und hat man sich die Gleichung der Bahnfläche *abcd* verschafft, so ist sofort diese Gleichung mit jener für den Flächenraum *MNO* zu vergleichen, und es treten die im §. 7 gegebenen Vorschriften an deren Stelle, d. h. man wird nur noch auszumitteln haben, welchen Theil der Fläche die Bahnfläche *abcd*, und jener Flächenraum *MNO* mit einander gemein haben. Ist dieses geschehen, so ist der erste Theil unserer Aufgabe gelöst.

Es ist in der That keine unwichtige Aufgabe, die wir uns noch weiter gestellt, nämlich den Zeitmoment zu bestimmen, in welchem die eine Fläche in die andere eintritt und austritt. Dieses geschieht nun auf folgende Weise:

Die Gleichung des in Ruhe befindlichen Flächenraumes *MNO* steht jedenfalls unter der allgemeinen Form von (1) $y = \Phi(x) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\} \Phi'(x)$; so wie jene des bewegten Flächenraumes *PQR* in jedem Augenblicke seiner Bewegung nothwendig die Form hat: (2) $y = f(x,t) \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\} f'(x.t)$; in der sie unmittelbar nach Anwendung der Dislocationsformel auftritt. So lange t selbst unbestimmt bleibt, ist auch die Lage dieses Gegenstandes völlig unbestimmt, doch jedenfalls eine solche, wie sie ihm im Verlaufe seiner Bewegung zukommen kann. Nun ist es eine Eigenschaft aller Flächen (und auch Körper), dass sie eher, als sie in einander eindringen, sich berühren, und in diesem Zustande im Allgemeinen nur einen Punct mit einander gemein haben. Ein Gleiches geschieht natürlich auch beim Austritte.

Liefern daher die vier Gleichungen:
1, $\varphi(x) = f(x,t)$; 2, $\varphi'(x) = f(x,t)$; 3, $\varphi(x) = f'(x,t)$; 4, $\varphi'(x) = f'(x,t)$; für einen gewissen Werth von t nur einen, und für einen andern Werth von t einen zweiten verschiedenen Werth für x, so sind diese Werthe von t die Zeitbestimmungen des Aus- und Eintrittes. Analytisch findet man beide Werthe von t sehr leicht in jedem vorliegenden Falle dadurch, dass man denjenigen Functions-Bestandtheil (gewöhnlich eine Quadratwurzel), wodurch die Mehrheit der Werthe obiger vier Gleichungen eben bedingt wird, Null setzet. Kurz, man suche auf gewöhnliche Weise die Bedingungsgleichung für die Berührung, und bestimme

dieser gemäss die Grösse t. Diess ist die Lösung des zweiten Theils unserer gegenwärtigen Aufgabe. Wir gehen sofort an die Lösung der beiden folgenden noch schwierigeren Probleme.

§. 11.

Aufgabe 9. Es befinde Fig. 126 sich in einer Ebene eine unbewegliche Fläche $RSPQ$ und eine Curve AB als Bahn eines Punctes einer zweiten Fläche MNO. Diese letztere bewege sich in der Weise, dass ein mit ihr in fester Verbindung gedachter, ausserhalb oder innerhalb liegender Punct o die Bahn AB beschreibt, und die Fläche selbst sich auch zugleich, beides nach einem gegebenen Zeitgesetze, um diesen Punct drehet. Wenn nun die Lage der Bahn und jene der Fläche eine solche ist, dass ein theilweises Eindringen der einen Fläche in die andere im Verlaufe der Bewegung nothwendig erscheint, so entstehet die Frage: wie lässt sich auf rein analytischem Wege derjenige Theil der in Bewegung begriffenen Fläche MNO, nämlich $m\gamma n$ bestimmen, welcher in die ruhende Fläche $PQRS$ eindringt? —

Da es sich hier nicht um die Bestimmung des bei dieser Gelegenheit abgegrenzten Theils $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ der ruhenden Fläche $PQRS$ welches ja eben im vorhergehenden Paragraphe zu finden gelehrt wurde, sondern um Coordinaten-Bestimmungen an dem in fortwährender Bewegung und Drehung begriffenen Gegenstand MNO handelt: so gewinnt es den Anschein, als ob gegenwärtiges, und noch weit mehr das im folgenden Paragraphe abgehandelte Problem zu den schwierigsten, die die analytische Geometrie bis jetzt aufzuweisen hat, gezählt werden müssten. Ja, wir glauben uns nicht zu irren, wenn wir behaupten, dass Aufgaben dieser und ähnlicher Art für die analytische Behandlung bisher geradezu unzugänglich waren, und der geehrte Leser wird den Grund hievon ganz richtig in dem Nichtvorhandenseyn passender Dislocationsformeln suchen. — Gleichwohl können auch diese Aufgaben, das Vorhergehende vorausgesetzt, auf folgende dem Wesen nach, höchst einfache Weise, gelöst werden.

Eine leichte Überlegung nämlich lässt uns erkennen, dass es für den Erfolg unserer Untersuchung völlig einerlei ist, ob wir uns das Object $RSPQ$ in Ruhe, dagegen die Fläche MNO in angezeigter Bewegung begriffen vorstellen, oder ob wir vielmehr umgekehrt uns MNO in vollkommener Ruhe, das Object $RSPQ$ dagegen in einer Bewegung begriffen denken, die mit jener der Fläche MNO gleich und entgegengesetzt ist. Dieses ist der Fall, wenn man annimmt, die Fläche $RSPQ$ drehe sich zugleich mit der Bahn AB um den Drehungspunct c, jedoch im entgegengesetzten Sinne, und bewege sich zugleich längs dieser Bahn, und vorschreitend gleichfalls im entgegengesetzten Sinne. Man kann sich dabei vorstellen, ein in der Bahn AB selbst liegender Punct, z. B. V, stehe in fester Verbindung mit der Fläche $PQRS$, und gleite in der Bahn AB nach derselben Zeitgleichung, jedoch im entgegengesetzten Sinne vorwärts. Für die analytische Behandlung ergibt sich hieraus die bestimmte Vorschrift, dass man, um die Bewegung von MNO auf das Object $RSPQ$ zu übertragen, auch unsere Dislocationsformeln nicht auf die Gleichung des erstgenannten, sondern auf jene des Objects $RSPQ$ anzuwenden habe. Thut man dieses, und sucht man unter dieser Voraussetzung nach Inhalt des §. 8 die Gleichung der sofortigen Bahnfläche des Objectes $PQRS$ und nach §. 10 den beiden

Flächen gemeinschaftlichen Antheil der Fläche, so findet man als Resultat die Gleichung des Flächentheils $m\gamma n$, welches zu wissen verlangt wurde. Diese Andeutungen werden für diejenigen unserer Leser, die den bisherigen Anwendungen unserer Dislocationsformeln gefolgt sind, hinreichen, um in jedem speciellen Falle die nöthigen Rechnungen, falls sie nach dem gegenwärtigen Stande der Analysis überhaupt ausführbar sind, durchzuführen. — Was endlich die Bestimmung des Zeitpunctes für den Ein- und Austritt anbelangt, so reducirt sich auch dieser Theil der Aufgabe genau auf das Problem des vorigen Paragraphes, indem es begreiflicher Weise auch hier wieder für das Resultat der Untersuchung ganz einerlei ist, ob das eine, oder das andere Object das in Bewegung begriffene sey.

§. 12.

Aufgabe 10. Es seyen in einer Ebene zwei Flächenräume MNO und IKL, Fig. 127, gegeben, von denen jeder in einer doppelten Bewegung begriffen ist, in einer fortschreitenden, nach der Bahn AB und CD und in einer rotirenden um die Punkte o und o'. Beide Bewegungen gehen nach einem gewissen Gesetze vor sich, welches durch die respectiven Zeitgleichungen gegeben seyn soll. Wenn nun die Lage der Bahnen und die Beschaffenheit der Zeitgleichungen eine solche ist, dass sich beide Flächen im Verlaufe ihrer Bewegung nothwendig treffen: so entsteht die doppelte Frage: 1. welcher Theil ihrer beiderseitigen Flächen erleidet hierbei eine Deckung? und 2. welche sind die Zeitmomente, mit denen diese beginnt und aufhört?

Da die wechselseitige Deckung in jedem Falle nur in demjenigen Theile des Raumes vor sich gehen kann, welchen die beiden Bahnflächen mit einander gemein haben, nämlich $\alpha\beta\gamma\delta$, so könnte man sich für den ersten Augenblick versucht fühlen, zu glauben, die Lösung unserer Aufgabe bestünde in der Ermittelung desjenigen Theils derselben, welcher während der Zeit ihres gleichzeitigen Aufenthaltes in diesem Raume von ihnen erfüllt wird. Allein eine sorgfältigere Untersuchung dieses Gedankens zeigt, dass er unrichtig sey, und dass diese Aufgabe nur auf Grundlage und mit Benützung unserer Dislocations-Formeln, und zwar auf folgende Weise gelöst werden könne. — Es ist nämlich schon im Vorigen erinnert worden, dass es für den Erfolg solcher Untersuchungen völlig einerlei ist, ob man sich den einen oder andern Flächenraum in Bewegung oder in Ruhe begriffen vorstelle, wenn man hiebei nur die Vorsicht gebraucht, die Richtung der Bewegung bei ihrer Übertragung auf den in Wahrheit ruhenden, im entgegengesetzten Sinne, d. h. in entgegengesetzter Richtung anzunehmen. Diess hat selbst dann noch seine vollkommene Richtigkeit, wenn das Object, auf welches die Bewegung des einen Gegenstandes übertragen werden soll, bereits selbst schon eine eigenthümliche Bewegung besitzt Es begegnet uns hier der Gedanke, dass ein gewisses Object gar wohl in einer doppelten, ja mehrfachen fortschreitenden sowohl, als drehenden Bewegung gleichzeitig begriffen seyn könne; und es liegt klar vor Augen, dass unsere Aufgabe dem Erfolge nach völlig identisch mit der ist: den von der bewegten Fläche LKI auf der ruhenden MNO abgegrenzten Theil zu finden, unter der Voraussetzung, dass der Durchschnittspunct der beiden Bahnen in der zweiten Bahn AB fortschreitet, und diese Bahn selbst sich um den Drehungspunct o von MNO drehe, alles dieses bei gleichzeitigem Vorgange der eigenen Bewegung von KIL. Durch diese Betrachtungsweise sehen wir unser gegenwärtiges Problem auf die Aufgabe 8, §. 10 zurückgeführt, und dessen Lösung, im analytisch-geometrischen Sinne, unterliegt daher auch nicht der geringsten Schwierigkeit. Bei diesem, dem ersten Anscheine nach so ungemein schwierigen, und meines Wissens noch nie in Untersuchung genommenen Probleme sehen wir uns daher abermals auf eine zweimal hintereinander vorzunehmende Anwendung unserer Dislocations-Formeln angewiesen, und wir nehmen keinen Anstand, zu erklären, dass wir keinen andern Weg kennen, diese Aufgabe auf rein analytischem Wege zu lösen. Die Zeitbestimmungen fallen daher gleichfalls und unter Einem den Vorschriften des namhaft gemachten §. 10, Aufgabe 8, anheim. Um jedoch unsern Lesern eine übersichtliche Zusammenstellung der bei Lösung gegenwärtigen Problems vorzunehmenden analytischen Arbeiten zu geben, wollen wir dieselben in nachfolgenden Puncten zusammenfassen:

1. Beziehen sich (1) und (2) auf die beiden Objecte MNO und KLI in ihrer anfänglichen Lage; ferner (3) und (4) auf die Bahnen AB und CD der Drehungspuncte o und c' und sind endlich (5) und (6) die beziehungsweisen Zeitgleichungen für die Rotations-Bewegungen; so hat man vorerst die Coordinaten a, β und α', β' u. s. w. der anfänglichen und verlegten Drehungspuncte als bekannt vorausgesetzt:

$$(1)\ ^{*)}\ y = \varphi(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ {0 \atop 0} \right\}}} \varphi'(x); \quad (2)\ y = f(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ {0 \atop 0} \right\}}} f'(x); \quad (3)\ \beta' = F(\alpha') = \mathfrak{F}(t);$$

$$(4)\ \beta' = F(\alpha''.) = S(t') \quad (5).\ \varrho = \psi(t); \quad (6).\ \varrho' = \psi'(t).$$

Wünscht man nun den zur Deckung gekommenen Theil der Fläche MNO zu erfahren, so hat man diese Fläche selbst als in Ruhe befindlich zu betrachten, und ihre eigene Bewegung auf KIL zu übertragen. Diess geschieht mit Hilfe der Dislocationsformeln in der Weise, dass man erhält:

$(7)\ \overset{\alpha',\beta'}{\underset{\alpha,\beta}{E}}{}^{-\varrho}\ \overset{\alpha',\beta'}{E}{}^{\varrho}\, y = \overset{\alpha',\beta'}{\underset{\alpha',\beta'}{L}}{}^{-\varrho}\ \overset{\alpha',\beta'}{\underset{\alpha',\beta'}{L}}{}^{\varrho'} f(x) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ {0 \atop 0} \right\}}} \overset{\alpha',\beta'}{\underset{\alpha',\beta'}{E}}{}^{-\varrho}\ \overset{\alpha',\beta'}{\underset{\alpha',\beta'}{E}}{}^{\varrho'} f(x)$; und dieses wirklich ausgeführt, liefert eine Gleichung von der Form: (8). $y = \Phi(x, t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ {0 \atop 0} \right\}}} \Phi'(x\ t)$; welche sofort auch die

*) Es gebricht mir keineswegs an bereits durchgeführten Beispielen dieser Art, und nur der Gedanke, dass ihre Aufführung, wenn sie mehr als blosse Endresultate vorstellen soll, unsere gegenwärtige Arbeit über alle Gebühr ausdehnen würde, konnte mich abhalten, sie obigen allgemeinen Betrachtungen zur Erläuterung folgen zu lassen. Denn der Sache selbst nach, würde der geehrte Leser daraus nichts anderes ersehen, als wovon er schon zum Voraus überzeugt seyn wird, nämlich: dass es in einzelnen Fällen gar wohl möglich ist, die analytischen Schwierigkeiten der erforderlichen Rechnungen zu besiegen. Besonders sind es die Gleichungen der verschiedenen Drei- und Vielecke, die sich aus leicht zu begreifenden Gründen hier fügsam genug erweisen.

Gleichung des in vierfacher Bewegung begriffenen gedachten Objectes KLI für jeden Zeitmoment des Vorganges ist.

2. Hat man sich auf dem bezeichneten Wege einmal die Gleichung (8) verschafft, so hat man weiter zu untersuchen, für welche Werthe von t die beiden Grenzwerthe, d. h. die Disjunctivgleichung $y = \Phi(xt)\, w\, \Phi'(xt)$ ein absolutes Maximum und Minimum gibt. Es seyen diese Werthe von $t = \psi(x)$ und $t = \psi'(x)$, so erhält man, je nachdem diese Werthe aus dem einen oder andern Grenzwerthe entsprangen, die Gleichung (9) oder (10);

$$(9).\ y = \Phi\Big((x, \psi(x)\Big) \left\{\begin{smallmatrix}\cdot\\ 0\\ 0\\ \cdot\end{smallmatrix}\right\} \Phi'\Big(x, \psi'(x)\Big);\ (10).\ y = \Phi\Big(x, \psi'(x)\Big) \left\{\begin{smallmatrix}\cdot\\ 0\\ 0\\ \cdot\end{smallmatrix}\right\} \Phi'\Big(x, \psi(x)\Big)$$

Diess ist nun schon die Gleichung der Bahnfläche für das in vierfacher Bewegung begriffene Object KIL.

3. Nun muss man sofort noch untersuchen, welchen gemeinschaftlichen Antheil diese Bahnfläche mit unserem in Ruhe befindlichen Flächenraum MNO habe. Dieses erfährt man aber, wie schon früher gelehrt wurde, durch eine Untersuchung und Auflösung der vier Wechselgleichungen, nämlich von:

1) $\varphi(x) = \Phi(x, \psi(x))$; 2) $\varphi(x) = \Phi'\big(x, \psi'(x)\big)$; 3) $\varphi'(x) = \Phi\big(x, \psi(x)\big)$; 4) $\varphi(x) = \Phi\big(x\, \psi'(x)\big)$.

Von dem Umstande nun, ob sämmtliche, oder nur einige dieser Gleichungen, und welche unter ihnen mögliche Wurzeln darbieten, hängt die besondere Form der Gleichung des auf MNO abgegrenzten Flächentheils ab, worüber bereits die nöthigen Vorschriften im §. 7 gegeben wurden. Die nöthigen Zeitbestimmungen für den Ein- und Austritt des Objectes geschehen mit Hilfe der Gleichung (8) ganz nach Anleitung des §. 10.

4. Wünscht man auch in Bezug auf das zweite Object KIL, den durch das wechselseitige Eindringen der beiden Flächenräume sich abgrenzenden Flächentheil auf analytischem Wege kennen zu lernen, so hat man, indem man hiezu die ganze Bewegung auf die Fläche NMO überträgt, und sich KLI in Ruhe denkt, ganz dieselben Rechnungsoperationen, mit blosser Vertauschung der beiden zum Grunde liegenden Hauptgleichungen (1) und (2), d. h. der Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ mit $f(x)$ und $f'(x)$, auszuführen. — Man sieht daher, dass dieses schwierige Problem im analytisch-geometrischen Sinne als vollkommen gelöst betrachtet werden darf.

Von dieser Klasse von Betrachtungen, deren vollständige Erörterung gewiss keine unverdienstliche Arbeit wäre, wenden wir uns wieder zu Problemen anderer, wiewohl verwandter Art, wie unsere Leser aus dem Inhalte der nächsten Paragraphe sogleich ersehen werden.

§. 13.

Aufgabe 11. Es bewege sich ein parabolischer Flächenraum cpq Fig. 128 dergestalt in einer Ebene, dass der Scheitel der Parabel eine logarithmische Curve als Bahn beschreibt, wobei sich jene zugleich um ihren Scheitel o als Drehungspunct drehet. Die fortschreitende Bewegung des Punctes c in der Bahn sey eine solche, deren auf die Achse der x bezogene

Projection gleichförmig beschleunigt ist. Die Rotation der Achse um den Scheitel dagegen sey eine gleichförmige, dem Drehungswinkel proportionale Bewegung, und die Zeitdauer einer Rotation sey T. Es frägt sich nun, welche ist die Gleichung der parabolischen Fläche in einem gewissen Zeitmomente, z. B. nach Verlauf der Zeit t?

Die Gleichung der parabolischen Fläche, deren Scheitel im Ursprunge ist, ist offenbar wegen $y = \pm\sqrt{px}$, folgende:

$$(1) \quad y = (-\sqrt{px}) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} (+\sqrt{px})^{*)}.$$

Wendet man nun unsere bekannten Dislocations-Formeln II. zuf die Gleichung (1) an berücksichtigend, dass dabei $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ist, so erhält man nach gehöriger Reduction und Hinweglassung der Accentuirung der Variablen x', y':

$$(2) \quad y = \left(\beta' + \frac{\left((x-\alpha')\cos.\varrho + \frac{p}{2}\right)\sin.\varrho \mp \sqrt{p\cos.\varrho\,(x-\alpha') + \frac{p^2}{4}\overline{\sin.\varrho}^2}}{\overline{\cos.\varrho}^2} \right) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\}$$

und diess ist die allgemeinste Gleichung der dislocirten parabolischen Fläche. Soll sich der Scheitel derselben in einer logarithmischen Linie bewgen, so ist noch $\alpha' = log.\beta'$ und somit $a^{\alpha'} = \beta'$; der Voraussetzung gemäss, soll ferner $\alpha' = gt^2$ und $\varrho = \frac{360\,t}{T}$. Wird diese Substitution ausgeführt, so erhält man:

$$(3) \quad y = \left(a^{gt^2} + \frac{\left((x-gt^2)\cos.\left(\frac{360t}{T}\right) + \frac{p}{2}\right)\sin.\left(\frac{360t}{T}\right) \mp \sqrt{p(x-gt^2)\cos.\left(\frac{360t}{T}\right) + \frac{p^2}{4}\sin.\left(\frac{360t}{T}\right)^2}}{\overline{\cos.\left(\frac{360\,t}{T}\right)}^2} \right) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\}$$

die verlangte Gleichung, mittelst welcher man durch eine blosse einfache Substitution für jeden beliebigen Zeitmoment die Gleichung der parabolischen Fläche angeben kann.

§. 14.

Aufgabe 12. Auf irgend einer Curve, z. B. auf einer Parabel abc, Fig. 129, bewege sich nach einem gewissen Zeitgesetze ein Punct m. Diese Curve sey ferner selbst in einer doppelten Bewegung begriffen, einer fortschreitenden und einer drehenden um den Punct c, beide nach gewissen Zeitfunctionen. Es frägt sich nun, welche ist die Gleichung der wahren,

*) Wir können nicht umhin, bei dieser Gelegenheit unsere Leser auf eine Abkürzung aufmerksam zu machen, die man ohne die mindeste Befürchtung eines Missverstandes anwenden kann, so oft sich die beiden Grenzwerthe in einen Ausdruck zusammen fassen lassen, wenn man denselben nur einmal vor oder nach anschreibt, z. B. statt $y = (M - \sqrt{N}) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\} (M + \sqrt{N})$ nur $y = (M \mp \sqrt{N}) \left\{ \dot{\tfrac{0}{0}} \right\}$.

von dem Puncte m in Folge dieser zusammengesetzten Bewegung beschriebenen Bahn, wenn die respectiven Gleichungen gegeben sind?

Es sey die Gleichung der unmittelbaren Bahn des Punctes m, nämlich jene von abc (1) und die, nach deren Gesetz diese Curve selbst fortschreitet, d. h. die Gleichung von AB (2). Ferner sey die dem Puncte m entsprechende, von der Zeit t abhängige Abscisse d und deren Zeitgleichung (3) und zwar:

$$(1)\ y = f(x); \quad (2)\ y = F(x); \quad (3)\ d = \varphi(t).$$

Die Gleichung unsers Punctes m ist daher, bezogen auf die ursprüngliche unverlegte Lage der Bahn abc, offenbar:

$$(4) \quad y = (d) \left\{ f(x) \right\}^{\bullet}_{\bullet}.$$

Wendet man sowohl auf die Grenze d, als auch auf die Hauptgleichung von (1) die Dislocations-Formeln I und II an, so erhält man, da α und β als durchaus constante Werthe nicht eigens ersichtlich gemacht zu werden brauchen, nach gehöriger Reduction eine Gleichung von der Form:

$$(5) \quad y = \psi\,(d, \alpha', \beta', \varrho) \left\{ \mathfrak{F}\,(x, \alpha', \beta', \varrho) \right\}^{\bullet}_{\bullet}.$$

Dabei ist aber zu bemerken, dass wegen (2) $\beta' = F(\alpha')$ und $\alpha' = \Theta(t)$ auch β' eine Function von t ist, ebenso, dass sowohl ϱ als d gleichfalls durch ihre beziehungsweisen Zeitgleichungen gegeben seyn müssen, und man erkennt daraus ganz leicht, dass man nach vorgenommener Substitution aus obiger Gleichung (5) die folgende erhält, nämlich:

$$(6) \quad y = \Phi(t) \left\{ \Psi\,(t, x) \right\}^{\bullet}_{\bullet}.$$

Diese Gleichung nun ist jene des Punctes m für jeden beliebigen Zeitmoment t. Sie enthält, wie alle Gleichungen dieser Form, die beiden Grundrelationen, nämlich:

$$(7) \quad y = \Psi\,(t, x) \quad \text{und} \quad (8) \quad x = \Phi\,(t)$$

in sich, durch deren wechselseitige Verbindung die Grösse t eliminirt, und eine Gleichung bloss zwischen x und y erhalten werden kann. Nach unserer, im einleitenden oder ersten Theile dieses Werkes erwähnten Bezeichnungsweise können wir dieses stets ganz einfach darstellen; in speciellen Fällen aber ist diese Elimination bald möglich, bald auch nicht, meistentheils aber mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Diess soll uns indess nicht abhalten, unsere Rechnung bis zu Ende zu führen — Wegen $x = \Phi\,(t)$ ist $t = \Phi^{-1}(x)$ und diess in (7) substituirt, gibt sofort:

$$(9) \quad y = \Psi(\Phi^{-1}(t)),$$

welche die Gleichung der Bahn ist, die der Punct m bei seiner zusammengesetzten Bewegung beschreibt.

Es gibt Fälle, wo das Gesetz der Bewegung, nach welchem sich der Punct m in seiner primitiven Bahn bewegt, sich einfacher im Polar-Coordinaten-Systeme darstellt, als im rechtwinkligen. Um hievon ein Beispiel anzuführen, möge das folgende dienen.

§. 15.

Beispiel. Es bewege sich, Fig. 130, ein Punct m nach einem gegebenen Zeitgesetze in einer Ellipse $abcd$, deren eine Brennpunct eine Bahn, deren Gleichung gegeben ist, verfolge, während sie selbst sich zugleich dreht, beides nach gegebenen Zeitfunctionen. Man soll nun auf analytischem Wege die Gleichung der Bahn MN bestimmen, die jener Punct bei seiner zusammengesetzten Bewegung beschreibt.

Die Gleichung der Ellipse, den einen Brennpunct als Ursprung angenommen, ist bekanntlich:

$$(1)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2cx + b^2).$$

Wendet man auf diese Gleichung die Dislocations-Formeln II an, so erhält man nach gehöriger Reduction mit Hintansetzung der Accentuirung:

$$(2)\quad y = \beta' + \frac{(cb^2 - (a^2+b^2)(x-\alpha')\cos.\varrho)\sin.\varrho}{a^2 - (a^2+b^2)\overline{\sin.\varrho}^2}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{cb^2 - (a^2+b^2)\cos.\varrho)^2\,\overline{\sin.\varrho}^2 + (b^4 - 2b^2c\cos.\varrho(x-\alpha') - \big((a^2+b^2)\overline{\sin.\varrho}^2 - b^2\big)(x-d)^2 a^2 - (a^2+b^2)\overline{\sin.\varrho}^2}{a^2 - (a^2+b^2)\overline{\sin.\varrho}^2}\right)}$$

was wir der Kürze wegen bezeichnen: $y = M \pm \sqrt{N}$. Diess wäre nun die vollständige Gleichung der beliebig im Coordinaten-Raume verlegten elliptischen Curve. Da wir aber nicht sämmtliche Puncte dieser Curve, sondern nur einen in dieser Linie in Bewegung begriffenen Punct zum Gegenstand unserer Untersuchung gemacht haben, so sieht man, dass x eine veränderliche Lage erhalten müsse. Wir wollen daher festsetzen, dass die veränderliche Lage dieses Punctes durch den Polarwinkel v, die grosse Achse der Ellipse als Polarachse angenommen, bedingt werde und dieser sofort, so wie die Grössen α' und ϱ von der Zeit t abhänge. Die Bewegung von x geschieht daher gemäss dem Ausdrucke

$$(3)\quad x = \alpha' + \frac{b^2\cos.(v+\varrho)}{a - c\cos.v}.$$

Man hat also, wenn man die Bahn AB des Punctes c durch $\beta' = F(\alpha')$ darstellt, für den Punct m die Gleichung:

$$(4)\quad y = \left(\frac{\alpha' + b^2\cos.(v+\varrho)}{a - c\cos.v}\right)\left\{M \pm \sqrt{N}\right\}.$$

In dieser Gleichung erscheinen wegen $\beta' = F(\alpha')$ nur noch die Grössen α', ϱ, v, ausser jenen von x und y mit dem Charakter der Veränderlichkeit behaftet, und erstere zwar unmittelbar von t abhängig, jede auf ihre eigenthümliche Weise nach Massgabe der vorhandenen Zeitgleichungen. Wir wollen, um zu einem löslichen Beispiele zu gelangen, annehmen:

$$(5)\ \alpha = ct,\quad (6)\ v = arc.\cos.\,mt,\ \text{und}\ (7)\ \varrho = arc.\cos.\,gt^2 - arc.\,mt;$$

Diese Werthe in (4) substituirt, erhalten wir vorerst für obigen Gränzwerth von x:

$$(8)\quad x = \frac{ct + b^2gt^2}{a \pm cmt};$$

und wenn wir das, was aus M und N durch die Substitution dieser Werthe wird, mit M' und N' bezeichnen, wobei die letzteren Grössen als blosse Functionen von x und t erscheinen, so wird aus obiger Gleichung (4) folgende:

$$(9) \quad y = \left(ct + \frac{b^2 g t^2}{a \pm cmt}\right) \left\{M' \pm \sqrt{N'}\right\}.$$

Diess ist nun in der That die von der Zeitbestimmung t allein abhängige Gleichung des Punctes m. Um aber von dieser auf die Bahn des Punctes m, nämlich auf die Gleichung der Curve MN, Fig. 130 überzugehen, haben wir aus den beiden der Gleichung (9) zu Grunde liegenden Bedingungsgleichungen:

$y = M' \pm \sqrt{N'}$, und $x = ct + \frac{b^2 g t^2}{a \pm cmt}$; die Grösse t zu eliminiren, welches in unserem Falle ganz leicht bewirkt werden kann, weil sich die zweite unserer eben angeführten Gleichungen für sich nach t auflösen lässt. Man findet nämlich:

$$(10.) \quad t = \frac{cmx - ac \pm \sqrt{(ac \mp cmx)^2 + 4ax(b^2 \mp ccm)}}{b^2 \mp ccm};$$

diese Werthe in $y = M' \pm \sqrt{N'}$ gesetzt, welche Gleichung aus (2) durch Substitution der Werthe (5), (6), (7) erhalten wird, liefert uns die gewünschte Gleichung zwischen x und y, für die Bahn MN, Fig. 130, unter den gemachten Voraussetzungen. — Überblickt man die hier durchgeführte Rechnung noch einmal, so überzeugt man sich leicht von der Wahrheit nachfolgender Behauptungen.

1. Unter der Voraussetzung, dass die als Grenzwerth von x auftretende Function von t, also etwa $x = F(t)$, eine nach t auflösbare Gleichung darbietet, ist die Beschaffenheit der Bahn des Punctes c, d. h. von AB in Bezug auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer bis zu Ende durchgeführten Auflösung der Aufgabe durchaus von keinem Einfluss.

2. Unter derselben Voraussetzung wird ferners jede Aufgabe dieser Art eine mögliche Durchführung der Rechnung gestatten, sobald die erste Anwendung der Dislocationsformeln auf die Gleichung der Curve $abcd$, Fig. 130, eine Auflösung nach y gestattet.

Man sieht daher, dass unter dieser Voraussetzung, bei jeder Annahme der Leitcurve AB, die Durchführung der Rechnung gleich möglich erscheinet, und man daher für jeden solchen möglichen Fall unzählbare andere gleichlösliche kennen lernt, die sich von einander nur durch Zugrundlegung einer anderen Leitlinie unterscheiden.

Und nun wollen wir uns zum Schlusse dieses Capitels einer andern Classe von geometrischen Problemen zuwenden.

§. 16.

Aufgabe 13. Es sollen einige der einfachsten Beispiele über die Anwendung der geometrischen Metamorphose auf die Formation gegebener Gleichungen aufgestellt, und die Zulässigkeit, selbe den gewöhnlichen Dislocationsformeln zu unterwerfen, nachgewiesen werden.

1. Man soll einen Kreis vom Radius 2, Fig. 131 in eine Ellipse verwandeln, deren horizontale halbe Achse 2, die senkrechte aber gleich 3 ist. Die Gleichung des Kreises ist bekanntlich: $y=\sqrt{4-x^2}$; die metamorphischen Formeln sind hier $x=x'$, $y=\frac{2}{3}y'$, daher hat man sofort:

$$(1.)\quad y'=\tfrac{3}{2}\sqrt{4-x'^2}.$$

Diese Ellipse soll uns weiter unten als äussere Begrenzung von Flächenräumen, wie 2 und 3, Fig. 131, dienen.

2. Man soll die Gleichung einer Fläche, wie Fig. 131, aufstellen. Hierzu hat man sich nur mehr die Gleichung der innern Ellipse zu verschaffen. Dieses geschieht durch fernere Metamorphosirung der oben gefundenen Ellipse, indem man y' gleich y'', und x' gleich $\frac{4}{3}x''$ setzet, nach deren Substitution mit Hinweglassung der Accentuirung die Gleichung erhalten wird:

$$(2)\quad y=\tfrac{2}{3}\sqrt{9-4x^2};$$

daher als Gleichung des Flächenraumes 2, Fig. 131:

$$(3)\quad y=\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{9-4x^2}\right)\underset{\bullet}{\Big\{}\tfrac{0}{0}\overset{\bullet}{\Big\}}\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right);\ \text{erhalten wird.}$$

3. Man soll die Gleichung einer Fläche, wie die (3) in Fig. 131 aufstellen. Unser Object ist, wie ersichtlich, eigentlich eine aus elliptischen Bögen und Flächenstücken zusammengesetzte Figur. Da wir die ganze äussere Begrenzung bereits schon oben gefunden haben, so müssen wir vor Allem trachten, die entsprechende innere aufzustellen. Diese ist wieder eine Ellipse und wird erhalten durch Substitution der metamorphorisirenden Werthe $x=\frac{4}{3}x'$ und $y=\frac{3}{5}y'$ in der Gleichung (1), und diess zwar desshalb, weil hiedurch die halbe Achse nach x, von 2 auf $1\frac{1}{2}$, dagegen die senkrechte halbe Achse von 3 auf 5 gebracht wird. Nach Verrichtung der nöthigen Reduction findet man dafür

$$(4)\quad y=\tfrac{10}{9}\sqrt{9-4x^2};$$

und da sich beide Ellipsen, wie eine leichte Rechnung lehrt, in den Puncten, für welche $x=\pm 142$ schneiden, so hat man sofort als vollständige Gleichung von 3 Fig. 131:

$$(5)\quad y=\left(\left\{\tfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right\}^{1\cdot42}\omega\,\underset{\bullet}{\Big\{}\tfrac{10}{9}\sqrt{9-4x^2}\Big\}^{2}\right)\underset{\bullet}{\Big\{}\tfrac{0}{0}\overset{\bullet}{\Big\}}\left(\underset{\bullet}{\Big\{}\tfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\overset{\bullet}{\Big\}}\right);$$

4. Man soll die Gleichung der in Fig. 132 dargestellten Schleifenfläche aufstellen. Die äussere Begrenzung dieser Fläche bildet die schon früher im 3. Kapitel des vorigen Abschnittes durch Metamorphose aus dem Kreise abgeleitete Schleifenlinie, deren Gleichung (6) ist. Die innere dagegen wird aus ersterer erhalten, wenn man $x=x'$, und $y=0\cdot4x'+y'$ setzt. Man erhält also (7) und (8) als Gleichung unserer Schleifenfläche aus:

$$(6)\quad y=2x(10\pm\sqrt{9-x^2}),\qquad (7)\quad y=2x(10\pm0\cdot8\sqrt{9-x^2});\ \text{und demnach:}$$

$$(8)\quad y=\left(2x(10\pm0\cdot8\sqrt{9-x^2})\right)\underset{\bullet}{\Big\{}\tfrac{0}{0}\overset{\bullet}{\Big\}}\left(2x(10\pm\sqrt{9-x^2})\right).$$

5. Es sey die Gleichung von Flächenräumen, wie etwa von den in Fig. 133 und Fig. 134 vorgestellten anzugeben. Bekanntlich repräsentiren alle ganzen rationalen Functionen von x, Curven, die zur Familie der Parabeln gehören, und bei welchen jeder Durchschnitt einer positiven oder negativen Wurzel derselben, jeder Berührungs-Punct mit der Abscissen-Achse x, dagegen zwei gleichen Wurzeln, und jede Serpentine, die diese Achse nicht erreicht, zweien imaginären Wurzeln dieser Function entspricht. Setzt man daher in eine solche Function z. B. einmal $x = x'$, und $y = 2 + y'$; ein zweitesmal z. B. wieder $x = x'$, und $y = 0{\cdot}8y'$, so erhält man falls z. B. $y = 8x^3 - 3x^2 + 4x - 7$; gesetzt wird, als Gleichungen der Flächen-Fig. 133 und Fig. 134 beziehungsweise:

$$(9)\quad y = \Big(8x^3 - 2x^2 + 4x9\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \tfrac{0}{0} \overset{\cdot}{\Big\}} \Big(8x^3 - 2x^2 + 4x - 7\Big);$$

$$\text{und}\quad (10)\quad y = \Big(8x^3 - 2x^2 + 4x - 7\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \tfrac{0}{0} \overset{\cdot}{\Big\}} \Big(10x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{35}{4}\Big).$$

6. Durch diese und unzählige andere Formänderungen der einfachsten Art sieht man sich mit leichter Mühe in den Stand gesetzt, Gleichungen für wie immer zusammengesetzte Gegenstände aufzustellen, und sie denselben Rechnungsoperationen, wie alle übrigen Gleichungen zu unterziehen. Um dieses nur noch an einem Beispiele nachzuweisen, möge das Folgende hier eine Stelle finden.

7. Man soll das in Fig. 135 dargestellte Object mittelst einer Gleichung repräsentiren, und mit ihm die in Fig. 136 angezeigte theilweise Ortsveränderung vornehmen. Bei der so augenscheinlichen Bildung der einzelnen $\widetilde{\text{D}}$isjunctivglieder glauben wir es bei der blossen Angabe der Gleichung bewenden lassen zu können, und wollen uns sofort nur mit dem zweiten Theile unserer Aufgabe befassen.

Die Gleichung des ganzen in Fig. 135 vorgestellten, aus Linien und Flächen zusammengesetzten geometrischen Objectes ist, wie sich der Leser leicht zu überzeugen vermag:

$$\begin{aligned}(11)\quad y = \Big(\frac{21}{4}\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \pm 2 \overset{\cdot}{\Big\}} \Big(\frac{23}{4}\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \tfrac{0}{0} \overset{\cdot}{\Big\}}\, \omega \Big((13, 16{\cdot}5)\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \pm 2 \overset{\cdot}{\Big\}} (13{\cdot}5, 17)\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \tfrac{0}{0} \overset{\cdot}{\Big\}}\, \omega \Big(5, \frac{51}{4}, \frac{61}{4}\Big) \\ \underset{\cdot}{\Big\{} \pm 2 \Big\} \Big(\overset{\cdot}{5}{\cdot}5, \frac{55}{4}, \frac{65}{4}\Big)\, \omega\, (15) \underset{\cdot}{\Big\{} \pm \tfrac{4}{3}(x - 15) \overset{\cdot}{\Big\}} \Big(15 \pm \tfrac{3}{2}\Big)\, \omega \\ \omega \Big\{\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{99x - 9x2 - \frac{1025}{4}}\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \tfrac{0}{0} \overset{\cdot}{\Big\}} \Big(\tfrac{11}{2}\sqrt{11x - x^2 - \frac{105}{4}}\Big\}^{\frac{15}{2}} \\ \omega^{\star} \Big(\tfrac{3}{2}\sqrt{20x - x^2 - 96}\Big) \underset{\cdot}{\Big\{} \tfrac{0}{0} \overset{\cdot}{\Big\}} \Big(\tfrac{2}{3}\sqrt{80x - 4x^2 - 391}\Big).\end{aligned}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass wir auch hier, wie schon öfters, statt $\Big\{ 0x \pm 2 \Big\}$ schlechtweg $\Big\{ \pm 2 \Big\}$ geschrieben haben, welches durchaus keinen Irrthum veranlassen kann. — Soll nun dieses Object theilweise eine solche Ortsveränderung erleiden, wie sie in Fig. 136 graphisch versinnlicht ist, so müssen wir, um zu den erforderlichen Dislocationsformeln zu gelangen, $\alpha = 10$, $\beta - 0$, $\alpha' = 14$, $\beta' = 12$ und $\varrho = 37^\circ, 15^\circ$, mithin $\sin.\ \varrho = 0{\cdot}6052940$; $\cos.\varrho = 0{\cdot}7960020$ setzen. Wir erhalten demnach als System II nachfolgende zwei Formeln:

$$\text{II.}\ \begin{cases} x = 0{\cdot}6052940\, y' + 0{\cdot}7960020\, x' - 8{\cdot}4075560. \\ y = 0{\cdot}7960020\, y' - 0{\cdot}6052940\, x' - 1{\cdot}0779080. \end{cases}$$

Wenden wir diese Formeln auf dasjenige Disjunctivglied an, welches zu Folge unserer Annahme allein eine Veränderung erleiden soll, nämlich auf das, mit einem Sternchen bezeichnete, so erhalten wir dafür nach gehöriger Reduction das Glied:

$$(12)\ y = \left\{16{\cdot}2083653 - 0{\cdot}2939255\, x \pm \sqrt{7{\cdot}0165905\, x - 1{\cdot}0705329\, x^2 - 207{\cdot}5310696}\right\}$$

$$\left\{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right\} \left(17{\cdot}2147249 - 0{\cdot}4159395\, x \pm \sqrt{11{\cdot}2823603\, x - 1{\cdot}0490632\, x^2 - 215{\cdot}828011}\right).$$

Wird dieses an die Stelle des in (11) mit einem Sternchen Bezeichneten geschrieben, so hat man die Gleichung des Objectes in der durch Fig. 136 vorgestellten Anordnung.

§. 17.

Aufgabe 14. Es sey die Gleichung irgend einer Fläche wie z. B. jener EGH in Fig. 98 gegeben, und nebstbei die Gleichung einer gewissen Curve AB als Directrix. Man soll auf rein analytischem Wege die Gleichung einer andern Fläche EDF finden, deren von beliebigen Puncten der Begrenzung aus mit AB parallel gezogene Linien mit den Ordinaten der entsprechenden Puncte von EGF gleich lange sind.

Es sey Fig. 137 AB ein Theil der begränzenden Curve; FL die Leit- oder Krümmungs-Curve; FR und MH, die Ordinaten zweier Puncte der begränzenden Curve. Man denke sich nun die Ordinate HM die Krümmung von FL annehmend, dergestalt, dass etwa das Stück Fm mit HM gleiche Länge habe, dabei aber den Fusspunct H unverändert beibehaltend, und vollkommen parallel zur Curve FL, so ist klar, dass zu Folge unseres Begriffes von Parallelismus HM offenbar mit Fm congruabel seyn muss. Ist demnach die Gleichung der Leitcurve FL,: $v = F(\xi.)$ und zählt man die Abscissen der Einfachheit wegen von F an, wobei x und y die Coordinaten des Punctes M als allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Puncte, x', y' dagegen jene des Punctes M', d. h. die entsprechenden des verlegten Punctes bedeuten sollen, so hat man, wie sich ohne alle weitere Erklärung aus Fig. 137 von selbst ergibt, nachfolgende drei Bedingungsgleichungen:

$$(1.)\ F(\xi.) = y' = v;\quad (2)\ y = \int_0^\xi d\xi. \sqrt{1 + \left(\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right)^2} = \Phi(\xi.)\quad (3)\ x' = x + \xi.$$

Diese drei Gleichungen zwischen den fünf Variablen geben durch Elimination von ξ nachnachfolgende zwei:

$$(4)\ y' = F(x' - x);\ \text{und}\ (5.)\ y = \Phi(x' - x).$$

Aus (4) und (5) nun lassen sich, jenachdem man es wünschet, x und y durch x' und y', oder umgekehrt x' und y' durch x und y ausdrücken, und man erhält dann folgende zwei Systeme von Formeln:

$$(6)\ \text{I.} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + \Phi^{-1}(y) \\ y' = (F(\Phi^{-1}(y)); \end{array} \right. \quad \text{und (7) II.} \left\{ \begin{array}{l} x = x' - F^{-1}(y') \\ y = \Phi\,(F^{-1}(y')); \end{array} \right.$$

Das erste System gehört zur Bestimmung der metamorphorisirten Grenzwerthe, das zweite für die Functionsgleichungen selbst. Um von dieser allgemeinen Deduction sogleich eine Anwendung zu zeigen, wollen wir folgendes Beispiel beifügen.

Beispiel. Es sey Fig. 138, die Gleichung einer senkrecht stehenden parabolischen Fläche durch ihre Gleichung gegeben, und nebstbei jene eines Kreisbogens AD als Leitlinie. Man soll nun die Gleichung dieses Flächenraumes unter der Voraussetzung finden, dass deren sämmtliche Ordinaten sich parallel zur Leitlinie AD krümmen, und mithin als congruible Theile derselben angesehen werden können. Bezeichnet h die Höhe, und p den Parameter der Parabel, so ist ihre Gleichung bekanntlich (1) $y = h - \frac{x^2}{p}$; die Gleichung ihrer Fläche dagegen, oder (2). $y = (0.) \left\{ \dot{\underset{\cdot}{\tfrac{0}{0}}} \right\} \left(h - \frac{x^2}{p}\right)$; die Gleichung der Leitlinie AD, eines Kreisbogens ist bekanntlich: (3.) $y' = v = \sqrt{2r\xi - \xi^2}$; und somit das Integral des Bogens, nämlich: (4) $y = \Phi(\xi) = r\ arc.sin.\frac{v}{p} = r\ arc.sin.\ \frac{y'}{p}$; wegen $y' = v$. Es ist aber nach Obigem noch überdiess $x = x + \xi$, und vermöge der Gleichung (3) des Kreisbogens, wenn ξ bestimmt wird:

$\xi = p \pm \sqrt{p^2 - y'^2}$. Daher $x = x' - p \mp \sqrt{p^2 - y'^2}$; und $y = p\ arc.\ sin.\frac{y'}{p}$; diese Werthe in die Gleichung (1) gesetzt, geben $p.\ arc.\ sin.\frac{y'}{p} = h - \frac{1}{p}\left(x' - p \mp \sqrt{p^2 - y^2}\right)^2$, woraus sofort unmittelbar folgt: (5) $x = p + \sqrt{p^2 - y'^2} \pm \sqrt{ph - pr\ arc.\ sin.\frac{y'}{p}}$; die Gleichung für die nach einer Kreiskrümmung gebogene parabolische Linie ACD. Da wir hier, um auf die Gleichung des Flächenraumes überzugehen, den Doppelwerth von y anzugeben hätten, dieses aber bei dem gegenwärtigen Stande der Analysis im vorliegenden Falle noch nicht gelungen ist, so wollen wir uns der abweichenden, wiewohl eben so richtigen Form bedienen, und schreiben:

$$(6)\quad x' = \left(p + \sqrt{p^2 - y'^2} - \sqrt{ph - pr\ arc.\ sin.\frac{y'}{p}}\right) \left\{ \dot{\underset{\cdot}{\tfrac{0}{0}}} \right\} \left(p + \sqrt{p^2 - y'^2} + \sqrt{ph - pr\ arc.\ sin.\ \frac{y'}{p}}\right).$$

welche in der That auch die wahre Gleichung der Fläche ACD ist.

§. 18.

Die im vorigen Paragraphe besprochene allgemeine Formänderung schliesst einen ganz speciellen einfachen Fall in sich, der einer besondern Erwähnung nicht unwerth erscheint, um so mehr, als derselbe meistentheils ein vollkommen durchgeführtes Endresultat zulässt. Er besteht in der Annahme, dass sämmtliche Ordinaten gegen die Abscissenachse eine Neigung unter einem bestimmten Winkel annehmen, ohne dass ihre Länge sich änderte, oder falls letzteres dennoch geschieht, wenigstens auf eine allen gemeinschaftliche proportionale Weise. Unter der Voraussetzung nun, dass der betreffende Neigungswinkel $M'LL'$ Fig. 139, t' genannt wird, gehen unsere Formeln des vorigen Paragraphes I und II in die folgende über, nämlich in:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} y' = y \sin. t \\ x' = x + y \cos. t \end{array} \right\} \quad \text{und II} \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{y'}{\sin. t} \\ x = x' - y \cotang. t \end{array} \right\}$$

erstere für die Grenzwerthe, letztere für die Functionsausdrücke, wobei aber zu bemerken, dass: $v = tang.\, t\ .\ \xi = F(\xi);\ \Phi(\xi) = \dfrac{\xi}{\cos.\, t}$ ist, und der Einfachheit wegen L als Ursprung der Coordinaten angenommen wurde. —

Unsere Auflösung lässt sich dem praktischen Bedürfnisse noch viel näher bringen, wenn wir bei ihrer Lösung von folgendem Gesichtspuncte ausgehen. Es sey Fig. 140 ACB ein Stück einer Curve MN, deren Lage durch die Coordinaten des Anfangs- und Endpunctes α, β, und $\alpha.\ \beta'$ gegeben ist. Dieses Curvenstück denke man sich mit Hilfe der Dislocations-Formeln dergestalt auf die Abscissenachse herabgebracht, dass die Sehne AB auf derselben aufliegt. Hier in Fig. 141 erleidet dasselbe die doppelte Veränderung. Einmal dass sämmtliche Ordinaten durch die Multiplication mit der Zahl A proportionaliter vergrössert, oder verkleinert werden, dann dass alle zugleich eine Neigung vom Winkel t annehmen. Ist dieses geschehen, so werde dieses veränderte Curvenstück wieder in der Art zurückgeführt, dass seine Sehne in ihre frühere Stelle zurückkömmt, wie dieses in Fig. 142 veranschaulicht wird. — Wir haben daher unsere Dislocationsformeln zweimal in Anwendung zu bringen, wobei zu bemerken, dass das erstemal ϱ mittelst $tang.\, \varrho = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'}$; das anderemal dagegen statt ϱ, $-\varrho$ zu setzen ist. — Bei dieser vier Hauptstadien in sich begreifenden Rechnung erhält man nun der Ordnung nach folgende vier Systeme von Formeln und zwar:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + y' \sin.\, \varrho + x' \cos.\, \varrho \\ y = \beta + y' \cos.\, \varrho - x' \sin.\, \varrho \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + \dfrac{y''}{A} \sin.\, \varrho + x'' \cos.\, \varrho \\ y = \beta + \dfrac{y''}{A} \cos.\, \varrho - x'' \sin.\, \varrho \end{array} \right.$$

$$(3)\quad \begin{cases} x = \alpha + \left(\dfrac{sin.\,\varrho}{A\;sin.\,t} - cos.\,\varrho\; cotg.\,t\right) y''' + cos.\,\varrho\; x''' \\ y = \beta + \left(\dfrac{cos.\,\varrho}{A\;sin.\,t} + sin.\,\varrho\; cotg.\,t\right) y''' - sin.\,\varrho\; x''' \end{cases};$$

und endlich, wenn man statt x'''' und y'''' einfacher x' und y' schreibt:

$$(4)\quad \begin{cases} x = \alpha + \left(sin.\,\varrho - A\,cos.\,(\varrho - A\right)\dfrac{cos}{A\,sin\;t}(y' - \beta) + \dfrac{(sin.\,\varrho^2 - A\,cos.\,\varrho\;sin.\,(\varrho - t)(x' - \alpha)}{A\;sin.\,t} \\ y = \beta + \left(\dfrac{\overline{cos.}^2 + A\,sin.\,\varrho\;cos.\,(\varrho - t)\,(y' - \beta)}{A\,sin.\,t} + (cos.\,\varrho + A\,sin.\,(\varrho - t)\right)\dfrac{sin.\,\varrho}{A\,sin.\,t}(x' - \alpha); \end{cases}$$

welche letztere Formeln in die betreffende Gleichung substituirt, die verlangte Formänderung darstellen. Wir wollen sie sogleich auf nachfolgende Aufgabe, die von dem Leser als ein gelegenheitliches Beispiel angenommen werden mag, anwenden.

Es sey die Gleichung einer ursprünglichen Ellipse *ABCD* Fig. 143 gegeben, und alle jene, weiter unten anzuführenden, auf die Curvenänderungen in *acb, def, klg, irh,* bezüglichen Bestimmungsstücke, die wir zu Folge unserer vorherigen Betrachtungen als nöthig erkannt haben. Man soll nun durch Anwendung obiger metamorphorischer Formeln auf rein analytischem Wege die Gleichung der Figur *abcdefhikg* Fig. 143 ableiten.

Es sey die halbe grosse Achse unserer Ellipse $a = 12$, die halbe kleine $b = 5$; die Coordinaten des Anfangspunctes der grossen Achse $\alpha = 20$, $\beta = 25$; der Neigungswinkel, den sie mit der Achse machet $\varrho = 36^0\;17'$; wendet man nun unsere Dislocationsformeln für die Ebene auf die Gleichung (5):

$\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{144} = 1$, an, so erhält man sofort

$$(6)\quad y - \left\{0{\cdot}55476\,x + 13{\cdot}90466 \pm \sqrt{-0{\cdot}34381\;x^2 + 13{\cdot}75240\;x - 102{\cdot}34713}\right\}_{9\cdot88493}^{30\cdot11507}$$

welche die Gleichung der Ellipse in der genannten Lage ist. Nun mögen zum Behufe der Formänderung nachfolgende Annahmen gemacht werden:

1) in Bezug auf *ab*, $\alpha = 13$; $\beta = 29{\cdot}39792$, $\alpha' = 20$, $\beta' = 30.93095$, $t = 90'$, $A = 3$; und hieraus für $\varrho = 12^0\;21'\;1{\cdot}2''$
$$\begin{cases} x = \;\;4{\cdot}49138 - 0{\cdot}13929\,y' + 0{\cdot}96950\,x' \\ y = 12{\cdot}55485 + 0{\cdot}44974\,y + 0{\cdot}27859\;x' \end{cases}$$

2) in Bezug auf *df*, $\alpha = 22$, $\beta = 31{\cdot}92327$, $\alpha = 27$ $\beta' = 33{\cdot}16457$, $t = 63^0\;13'$ $A = 17'3$ und hieraus für $\varrho = 13^0\;56'\;\;33''$
$$\begin{cases} x = \;\;24{\cdot}42357 - 0{\cdot}64835\,y' + 0{\cdot}82765\,x' \\ y = -2{\cdot}61355 + 0{\cdot}01653\,y' + 0{\cdot}18875\,x' \end{cases}$$

3) in Bezug auf *gk*, $\alpha = 28$, $\beta = 25{\cdot}80847$, $\alpha' = 19$, $\beta' = 18{\cdot}54314$, $t = 107^0\;53'$. $A = -4{\cdot}2$ und hieraus für $\varrho - 38^0\;54'\;46{\cdot}2''$
$$\begin{cases} x = 13{\cdot}04937 - 0{\cdot}41320\,y' + \cdot\,71889\,x' \\ y = 30{\cdot}60911 + 0{\cdot}08539\;y' - 0{\cdot}71839\;x' \end{cases}$$

4) in Bezug auf *ih*, $\alpha = 12$, $\beta = 16{\cdot}93231$, $\alpha' = 17$, $\beta' = 17{\cdot}67143$, $t = 90^0$; $A = 4$. und hieraus für $\varrho = 8^0,\;24',\;32\;7''$
$$\begin{cases} x = 12{\cdot}42966 - 0{\cdot}57840\,y' + 0{\cdot}78034\,x'; \\ y = 12{\cdot}14259 + 0{\cdot}33843\;y' - 0{\cdot}07839\,x' \end{cases}$$

Werden nun diese vier Systeme formändernder Formeln in die Gleichung (6) gesetzt, und wird gehörig reducirt, so erhält man folgende aus fünf Disjunctivgliedern bestehende Gleichung der *abcdefghik* in Fig. 143:

$$(7)\quad y' = \Big\{0{\cdot}643639\, x' - 1{\cdot}615341 \pm \sqrt{27{\cdot}277420 x' - 20{\cdot}337538 x'^2 - 216{\cdot}334663}\Big\}_{13}^{20}$$

$$\omega \Big\{2{\cdot}876789\, x' - 25{\cdot}150772 \pm \sqrt{125{\cdot}201393\, x' - 0{\cdot}639728\, x'^2 + 182{\cdot}199336}\Big\}_{28}^{19};$$

$$\omega \Big\{42{\cdot}990473 + 11{\cdot}317813\, x' \pm \sqrt{127{\cdot}015989 x'^2 + 907{\cdot}473478 x - 121{\cdot}774439}\Big\}_{22}^{27};$$

$$\omega \Big\{0{\cdot}871398\, x' + 7{\cdot}643038 \pm \sqrt{4{\cdot}605407\, x' - 0{\cdot}097079\, x'^2 - 49{\cdot}777661}\Big\}_{12}^{17};$$

$$\omega \Big(20, 27, 19, 17\Big) \Big\{0{\cdot}55476 x' + 13{\cdot}90466 \pm$$

$$\pm \sqrt{-0{\cdot}34381\, x'^2 + 13{\cdot}75240\, x' - 102{\cdot}34713}\Big\} \Big(22,\ 28,\ 12,\ 13\Big).$$

§. 19.

Aufgabe 15. Es sey irgend eine wie immer begrenzte Figur gegeben, und M Fig. 144 stelle den allgemeinen Repräsentanten sämmtlicher Puncte der Begrenzungscurve vor. AB sey eine beliebige, ausserhalb oder innerhalb jener Curve liegende andere Linie, welche bezüglich auf erstere ihre Achse genannt werden soll, auf welche man sich von allen Puncten der Curve Perpendikel gefällt denket, deren eines ML vorstellt. Nun denke man sich dieselbe Linie AB als Achse eine andere Krümmung annehmend, und etwa in CD übergehend, während doch sämmtliche Perpendikel auch in dieser Lage auf denselben Puncten der anfänglichen Achse nach der Richtung der nunmehrigen Normalen in gleicher Länge verbleiben, wie dieses annäherungsweise beim Biegen von Körpern bei einer gewissen innern Structur derselben der Fall ist. Es frägt sich nun, wie sich die Gleichung dieses metamorphorisirten geometrischen Objectes aus der Gleichung des anfänglichen Gegenstandes finden lasse?

Es sey $v = F(\xi)$ die Gleichung von AB und $v' = \Phi(\xi')$ jene von CD, so hat man, wenn man der Allgemeinheit wegen, das eine Integral von C, d. h. von α, das andere dagegen von A oder α' nimmt:

$$1)\quad \lambda = \int_{\alpha}^{\xi} d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2} = \int_{\alpha'}^{\xi'} d\xi' \sqrt{1 + \left(\frac{dv'}{d\xi'}\right)^2};$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & x - \xi = (v - y)\left(\dfrac{dv}{d\xi}\right) \\ 3) & x' - \xi' = (v' - y')\left(\dfrac{dv'}{d\xi'}\right) \end{array}\right\} \text{ unmittelbar aus der Figur:}$$

4) $(y-v)^2+(x-\xi)^2=(y'-v')+(x'-\xi')^2$; wegen $M\Phi=M'\Phi'$;

5) $v=F(\xi)$ ⎫
6) $v'=\Phi(\xi')$ ⎭ Gleichungen der anfänglichen und der veränderten Achse.

Da hier zwischen acht Veränderlichen sechs Gleichungen bestehen, so lassen sich dieselben vermöge ihrer Beschaffenheit, falls keine andern analytischen Schwierigkeiten dieses verhindern, stets auf zwei Gleichungen zwischen je dreien der Grössen $x, y; x', y'$ zurückführen, wodurch man somit zu zwei Gleichungen von der Form $x=\varphi(x',y')$; $y=f(x',y')$ und durch Bestimmung von x' und y' zu zwei andern von der Form $x'=\varphi'(x,y)$ und $y'=f'(x,y)$ gelangt. Die erstern zwei dienen für die Formänderungen der Functionsgleichungen selbst, die beiden andern für jene der constanten Grenzen.

Da aber die Durchführung der verlangten Rechnungsoperationen von der möglichen Integration zweier Functionsausdrücke und von der Auflösung mehrerer Gleichungen abhängt, so darf man sich freilich nicht wundern, wenn bei dieser grossen Allgemeinheit der Annahmen die Mittel, welche die Analysis nach ihrem dermaligen Zustande darzubieten vermag, in vielen Fällen unzureichend befunden werden.

Gleichwohl kann es dem Leser kaum entgehen, dass wenigstens, was die verlangten Integrationen anbelangt, jedenfalls sich eine unzählbare Menge von solchen Curven auffinden lässt, welche den genannten Bedingungen entsprechen *).

Eine zwar schon speciellere, jedoch noch immer sehr brauchbare Bedeutung erhält unsere Aufgabe durch die Annahme, dass die erste Achse eine gerade Linie, die zweite dagegen, die in die erstere übergeht, was immer für eine Curve seyn soll. Da die Gleichung

*) Bekanntlich haben schon *Euler*, *Lagrange* und Andere allgemeine Vorschriften zur Auffindung rectificabler Curven gegeben. Da es mir aber scheint, als ob die nachfolgende von den bekannten wesentlich verschieden wäre, so wird man es entschuldigen, wenn ich sie hier in Kürze anführe. Ist $\varphi(x)$ eine solche Function, dass sowohl $\varphi(x)dx$ als auch $\frac{dx}{\varphi(x)}$, d. h. deren reciproker Werth, integrabel ist: so ist die Curve, deren Gleichung $\gamma=\left(\frac{1}{2}\int\varphi(x)\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\varphi(x)}\right)$ ist, jederzeit rectificabel, und die Länge eines beliebigen Stückes davon liefert der Ausdruck $\lambda=\left(\frac{1}{2}\int\varphi(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\varphi(x)}\right)$. — Ist z. B. $\varphi(x)=3x-5$, so hat man wegen $\int(3x-5)dx=\frac{3}{2}x^2-5x+C$ und $\int\frac{dx}{3x-5}=\frac{1}{3}l.(3x-5)$ und daher: $\gamma=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{6}l.(3x-5)+C$, eine solche Curve und ihr allgemeines Integral des Bogens: $\lambda=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{6}l.(3x-5)+C$. — Oder es sey $\varphi(x)=sin.\,x$, mithin $\int sin.\,x\,dx=-cos.\,x+C$ und $\int\frac{dx}{sin.\,x}=l.\,tang.\,\frac{1}{2}x$, daher ist die rectificable Curve $\gamma=\frac{1}{2}l.\,tang.\,\frac{1}{2}x+cos.\,x+C$ und $\lambda=\frac{1}{2}l.\,tang.\,\frac{1}{2}x-cos.\,x+C$. — Oder $\varphi(x)=\sqrt{px}$, also $\int dx\sqrt{px}=\frac{2}{3}\sqrt{p}.x^{\frac{3}{2}}$ und $\int\frac{dx}{\sqrt{px}}=2\sqrt{\frac{x}{p}}$ und somit die rectificable Curve $\gamma=\frac{2}{3}\sqrt{p}.x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{\frac{x}{p}}$ und $\lambda=\frac{2}{3}\sqrt{p}.x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\frac{x}{p}}$.

der Geraden bekanntlich $v = a\xi + b$ und somit $\frac{d\,v}{d\,\xi} = a$, also: $\lambda = (\xi - \alpha)\sqrt{1+a^2}$ ist, so erhält man aus obigen sechs Gleichungen folgende drei:

$$1)\quad x + ay - (xa^2 + ab + \alpha) = \sqrt{1+a^2}\int_{\alpha'}^{\xi'} d\xi' \sqrt{1 + \left(\frac{d.\varphi(\xi')}{d\xi}\right)^2};$$

$$2)\quad x' - \xi' = (\varphi(\xi') - y')\left(\frac{d.\varphi(\xi')}{d\xi'}\right);$$

$$3)\quad (x - ay + b) = \sqrt{1+a^2}\,(y' - \varphi(\xi'))\sqrt{1 + \left(\frac{d.\varphi(\xi')}{d\xi'}\right)^2}.$$

Wird aus diesen drei Gleichungen die Grösse ξ' eliminirt, so erhält man zwei Gleichungen zwischen dreien der vier Grössen x, y; x', y', welche sofort auch die verlangten formändernden Formeln sind.

Da wir im nächsten Capitel uns veranlasst sehen werden, ein numerisches Beispiel als Anwendung der in diesem Paragraphe abgeleiteten Formeln zu anderm Gebrauche durchzuführen, so wollen wir uns hier mit diesen allgemeinen Betrachtungen begnügen.

II. Capitel.

Aufgaben über wirklich begrenzte geometrische Objecte im Raume dreier Dimensionen, über deren Ortsveränderung und geometrische Metamorphose.

§. 20.

Aufgabe I. Man soll mit Hilfe der Dislocations-Formeln für den Raum, die allgemeine Gleichung einer Ebene in einer für die meisten Zwecke brauchbaren Form ableiten.

Man denke sich zu diesem Behufe nebst der Ebene xy noch eine zweite, ganz in ihr liegende andere, deren Gleichung demnach offenbar $z = 0$ ist.

Diese nun nehme eine Lage wie $MQRS$ in Fig. 145 an, d. h. sie gehe durch einen gegebenen Punct, dessen Coordinaten α', β', γ' sind, der Neigungswinkel dieser Ebene zur Ebene xy sey ϱ, und jener ihrer Knotenlinie zur Achse der $x = \omega$. Wendet man daher auf die Gleichung $z = 0$ unsere Dislocationsformeln des Raumes und zwar die dritte des Systems A. II. an, indem man $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi' = \omega$, $\psi = \psi' = 0$, $\theta' - \theta = -\vartheta = \varrho$ setzt, so erhält man nach gehöriger Reduction wegen $z = 0 = P''(x' - \alpha') + Q''(g' - \beta') + R''(z' - \gamma')$, wobei für $P'' = sin.\,\omega\, sin.\,\varrho$: $Q'' = -cos.\,\omega\, sin.\,\varrho$, und $R'' = cos.\,\varrho$ gefunden wird, nach Hinwegschaffung der Accentuirung und nach gehöriger Reduction:

$$(1)\quad z = \gamma' + tang.\,\varrho\,(cos.\,\omega\,(y - \beta') - sin.\,\omega\,(x - \alpha'))$$

als verlangte Gleichung.

Wir wollen nun die vorzüglichsten speciellen Fälle, die in ihr enthalten sind, hier der Reihe nach aufführen.

1) Man nehme als verlangte Achse die Knotenlinie SQ selbst an, und als Punct m den in der Achse der x liegenden Punct N, Fig. 145, d.h. man setze $\beta'=0$, $\gamma'=0$ und man erhält sofort, der Fig. 146 entsprechend:

$$(2)\quad z=tang.\varrho\,(cos.\,\omega\, y-sin.\,\omega\,(x-\alpha')),$$

wobei also der Abstand $AN=\alpha'$ ist.

In dieser Form gewährt die Gleichung der Ebene eine sehr leichte Anwendung und ist noch vollkommen allgemein, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Fälle, wo die Ebene mit der Achse der x parallel laufen solle. So z. B. hätte man für $\varrho=64^0\,31'$, $\omega=23''\,16'$ und $\alpha=25{\cdot}3$, als Gleichung der betreffenden Ebene: $z=1{\cdot}9178001\,y-0{\cdot}8275384\,x+20{\cdot}9367219$.

2) Die Ebene laufe mit der Achse x parallel. In diesem Falle hat man wegen $\omega=0$ und somit $sin.\,\omega=0$ offenbar, da man auch füglich $\gamma'=0$ setzen kann:

$$(3)\quad z=tang.\varrho\,(0\,(x-\alpha)+(y-\beta)),$$

wofür man der Kürze wegen, auch schlechtweg $z=tang.\varrho\,(y-\beta)$ schreiben kann. Ist ferner diese Ebene zugleich senkrecht auf die Ebene xy, so ist wegen $\varrho=90^0$

$$(4)\quad z=\infty\;(0(x-\alpha)+(y-\beta))=\tfrac{0}{0}\,(x-\alpha)+\infty\,(y-\beta)\;{}^{*}),$$

was mit der Natur der Sache vollkommen übereinstimmt.

Für alle von β verschiedenen Werthe von y erhält z den Werth ∞, welches so viel heisst, als das in einem beliebigen Puncte ausserhalb der mit x parallellaufenden Knotenlinie errichtete Perpendikel schneidet die Ebene nirgends. Setzt man dagegen $y=\beta$, so erhält man $z=\tfrac{0}{0}(x-\alpha)+\infty-0=\tfrac{0}{0}(x-\alpha)+\tfrac{0}{0}$, mithin in jedem Falle selbst wenn $x=\alpha$ ist, unbestimmt, welches seiner geometrischen Bedeutung nach so viel heisst, als in allen Puncten zwischen den etwaigen Gränzen von z.

3) Steht die Knotenlinie der Ebene auf x der Achse x senkrecht, so hat man als deren Gleichung wegen $\omega=90^0$:

$$(5)\quad z=tang.\varrho\,(\alpha-x).$$

Steht die Ebene selbst zugleich auf der Ebene xy und auch senkrecht auf x, so hat man aus der allgemeinen Gleichung, wegen $\varrho=90^0$, $\omega=90^0$ und $\gamma=0$:

$$z=\infty\,(0\,(y-\beta)-0\,(x-\alpha))=\infty\,.\,0\,(y-\beta-x+\alpha)=\tfrac{0}{0}\,(y-\beta+\alpha-x)$$

und da für alle Puncte dieser Ebene nothwendig $x=\alpha$ seyn muss, so hat man sofort für diesen Fall: $\quad(6)\quad z=\tfrac{0}{0}\,(y-\beta)$.

4) Soll die Gleichung einer Ebene, die mit xy parallel lauft, aufgestellt werden, so hat man bei unveränderten Werthen von ω, $\varrho=0$ zu setzen, dafür muss der Werth von γ' ein von Null verschiedener seyn, wenn die Ebene nicht in jener von xy liegen soll. Man hat unter dieser Voraussetzung:

$$(7)\quad z=\gamma'+0\,(cos.\,\omega\,(y-\beta)-sin.\,\omega\,(x-\alpha))=\gamma'.$$

Es muss hier schliesslich bemerkt werden, dass es wohl bei numerischer Bestimmung der Endresultate, nicht aber schon bei den verschiedenen Rechnungsoperationen und namentlich

*) Da nämlich im vorliegenden Falle $tang.\varrho$ mit $cos.\,\omega$ zugleich unendlich wird, so darf $\infty.0$ nicht der Nulle, sondern vielmehr dem $\tfrac{0}{0}$ gleich erachtet werden.

bei begränzten Functionen zulässig erscheint, Glieder, deren numerischer Werth Null ist, völlig und vor der Zeit wegzulassen. Thut man dieses gleichwohl, so muss man sich wenigstens stets die wahre Bezeichnungsweise gegenwärtig halten.

§. 21.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung einer geraden Linie im Raume mittelst derjenigen Bestimmungsstücke darstellen, wodurch die zwei Ebenen festgestellt werden, als deren Durchschnitt man sich jene Linie vorstellt?

Es seyen nach Obigem die Gleichungen der beiden Ebenen

$$(1)\quad z=\gamma+tang.\,\varrho\,\big(cos.\,\omega(y-\beta)-sin.\,\omega(x-\alpha)\big);\quad \text{und}$$

$$(2)\quad z=\gamma'+tang.\,\varrho'\big(cos.\,\omega'(y-\beta')-sin.\,\omega'(x-\alpha')\big).$$

Verbindet man nun diese miteinander, so erhält man die Bedingungsgleichung für den Grenzwerth von y und somit durch dessen Einführung in die eine oder andere der gegebenen Gleichungen (1) oder (2) der Ebene, wenn noch überdiess diese Linie begrenzt angenommen wird, sofort:

$$(3)\quad z=\underset{m}{\Big\{}\gamma-tang.\,\varrho\,sin.\,\omega\,(x-\alpha)+$$

$$+\left(\frac{\gamma'-\gamma+tang.\,\varrho\,sin.\,\omega\,(x-\alpha)-tang.\,\varrho'\,sin.\,\omega'\,(x-\alpha')+\beta\,tang.\,\varrho\,cos.\,\omega-\beta'\,tg\,\varrho'\,ccs.\,\omega'}{tang.\,\varrho\,ccs.\,\omega-tang.\,\varrho'\,ccs.\,\omega'}\right)$$

$$\underset{\bullet}{\Big\{}tang.\,\varrho\,ccs.\,\omega\,(y-\beta)\Big\}\overset{\bullet\,m'}{\Big\}},$$ welche Gleichung die einer begrenzten geraden Linie im Raume in ihrer allgemeinsten Form vorstellt. Dass sie ziemlich zusammengesetzt erscheint, ist eine nothwendige Folge ihrer Beziehung auf zwei gegebene Ebenen im Raume. Setzt man in diesem Ausdrucke $\beta=\beta'=0$, $\gamma=\gamma'=0$, so wird die Gleichung schon bedeutend einfacher. Allein in diesem Falle sind schon alle jene Ebenen, die mit xy oder mit der Achse x selbst parallel laufen, ausgeschlossen. Man erhält diessfalls:

$$(4)\quad z=\underset{m}{\Big\{}-tang.\,\varrho\,sin.\,\omega\,(x-\alpha)+\left(\frac{tang.\,\varrho\,sin.\,\omega\,(x-\alpha)-tang.\,\varrho'\,sin.\,\omega'\,(x-\alpha')}{tang.\,\varrho\,ccs.\,\omega-tang.\,\varrho'\,ccs.\,\omega'}\right)\underset{\bullet}{\Big\{}tang.\,\varrho\,cos.\,\omega\,y\Big\}\overset{\bullet\,m'}{\Big\}}.$$

Ist z. B. in Bezug auf die eine Ebene $\alpha=5$, $\varrho=35^0\,17'$, $\omega=47^0\,13'$; rücksichtlich der zweiten aber $\alpha'=-23$, $\varrho'=75^0\,19'$, $\omega=27^0\,31''$, $\beta=\beta'=0$ und $\gamma=\gamma'=0$, so hat man als Gleichung für ihren Durchschnitt die Gleichung:

$$(5)\quad z=\Big(-0{\cdot}5193285\,(x-5)+(0{\cdot}4281692\,x+15{\cdot}1977398)\underset{\bullet}{\Big\{}0{\cdot}4806232\,y\overset{\bullet}{\Big\}}\Big).$$

Ist umgekehrt die Gleichung einer geraden Linie gegeben, so lassen sich, wie aus obiger Gleichung folgt, unendlich viele Ebenen angeben, durch deren Durchschnitt diese Gleichung entstanden seyn kann. Übrigens ist diese, so wie die Gleichuug des vorhergehenden Paragraphs, besonders des folgenden Gebrauchs wegen, hier abgehandelt worden. Das Gleiche gilt auch grösstentheils von dem Inhalte des folgenden Paragraphes.

§. 22.

Aufgabe 3. Man soll die Gleichung einer geraden Linie im Raume finden, welche durch folgende Bestimmungsstücke festgestellt wird, nämlich durch die Coordinaten α, β, γ eines ihrer Punete, z. B. des Anfangspunctes 0; sodann durch ihren Neigungswinkel ψ gegen die Ebene xy nämlich, und endlich durch den Winkel φ, welchen die Knotenlinie der projicirenden Ebene, d. h. die horizontale Projection dieser Linie mit der Achse x einschliesst?

Auch bei Lösung dieser Aufgabe werden wir wieder an unsere Dislocationsformeln uns wenden und dabei von der Ansicht ausgehen, als ob eine in der Achse der x schon liegende gerade Linie in die obenerwähnte Lage zu versetzen wäre.

Nimmt man den Ursprung zugleich als den Anfangspunct dieser Linie, in deren Gleichung offenbar $z=0$, oder vielmehr $z=(0x)\left\{0y\right\}$ ist, so hat man augenscheinlich in unseren bekannten Dislocationsformeln, System II, $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\vartheta=0$, $\varphi=\varphi'$, $\psi=\psi'$, $y=0$, $z=0$ zu setzen und erhält sofort:

$$(1)\quad \begin{aligned} z &= 0 = P''(x'-\alpha')+Q''(y'-\beta')+R''(z'-\gamma');\\ y &= 0 = P'(x'-\alpha')+Q'(y'-\beta')+R'(z'-\gamma'); \end{aligned}$$

wobei
$$P'=-\sin.\varphi;\qquad Q'=\cos.\varphi;\qquad R'=0;$$
$$P''=-\cos.\varphi\sin.\psi;\qquad Q''=-\sin.\varphi\sin.\psi;\qquad R''=\cos.\psi;$$

aus welchen zwei Gleichungen weiter folgt:

$$y'=\beta'+tang.\varphi(x'-\alpha)\quad\text{und}\quad z'=\gamma'+\frac{tang.\psi}{sin.\varphi}(y-\beta');$$

woraus sich als verlangte Gleichung unserer begrenzten geraden Linie ergibt:

$$(2)\quad z=\left\{\gamma+(tang.\varphi(x-\alpha')+\beta')\left(\frac{tang.\psi}{sin.\varphi}(y-\beta')\right)\right\}_{m}^{m'}.$$

Beinahe noch einfacher hätten wir diese Gleichung aus den Gleichungen des Systems I finden können; denn die Substitution obiger Werthe führt unmittelbar auf die drei Gleichungen: $x'=\alpha'+\cos.\varphi\cos.\psi x$; $y'=\beta'+\cos.\psi\sin.\varphi x$ und $z'=\gamma'+\sin.\psi x$; und durch Elimination der Grösse x findet man wie oben: $y'=\beta'+tang.\varphi(x'-\alpha')$ und $z'=\gamma'+\frac{tang.\psi}{sin.\varphi}y'$, woraus Gleichung (2) folgt. — Ist z. B. die Linie parallel zur Ebene xy, wobei also $\psi=0$, so geht obige allgemeine Gleichung über in:

$$(3)\quad z=\left\{\gamma+(tang.\varphi(x-\alpha)+\beta)\left\{0(y-\beta)\right\}\right\}_{m}^{m'}.$$

§. 23.

Aufgabe 4. Man soll die allgemeine Gleichung der cylindrischen Fläche aus der Gleichung einer Seite und der in der Ebene xy liegenden Directrix oder Leitcurve herleiten?

Da die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punct α, β der Ebene xy geht und mit derselben einen Neigungswinkel ψ und einen Knotenwinkel φ macht, wegen $\gamma = 0$ nach Obigem:

$$(1) \quad z = (\beta + (x - \alpha)\, tang.\, \varphi) \left\{ \frac{tang.\, \psi}{sin.\, \varphi} (y - \beta) \right\}$$

ist, so ergibt sich mittelst der in ihr enthaltenen beiden Relationen $z = \frac{tang.\, \psi}{sin.\, \varphi}(y - \beta)$ und $y = \beta + (x - \alpha)\, tang.\, \varphi$ folgende dritte $z = \frac{tang.\, \psi}{cos.\, \varphi}(x - \alpha)$; woraus durch das Bestimmen von

$$(2) \quad \alpha = x - \frac{cos.\, \varphi}{tang.\, \psi} z \text{ folgt.}$$

Denkt man sich nun jene erzeugende gerade Linie dergestalt sich zu ihrer anfänglichen Lage parallel fortbewegend, dass ihr Durchgangspunct in der Ebene xy eine gewisse Curve beschreibt, so kann sich weder φ noch ψ, wohl aber α und β ändern.

Ist daher die Gleichung der sogenannten Directrix $\beta = \Phi(\alpha)$, d. h. besteht zwischen den Coordinaten des verlegten Drehungspunctes α, β, eine gewisse Abhängigkeit, so erhält man der zufolge, wegen $\beta = \Phi\left(x - \frac{cos.\, \varphi}{tang.\, \psi} z\right)$ und wenn man wieder für α und β die obigen Werthe setzt:

$$(3) \quad z = \frac{tang.\, \psi}{sin.\, \varphi}\left(y - \Phi\left(x - \frac{cos.\, \varphi}{tang.\, \psi} z\right)\right).$$

Man sieht daher, dass der ganze Vorgang der Rechnung darin besteht, in unsere Gleichung für die gerade Linie, die Abhängigkeit von β durch α einzuführen, und diese Grösse α mittelst der in ihr selbst liegenden Bedingungsgleichungen zu eliminiren. Auf diesem Wege gelangt man zu dem Inbegriffe aller jener Raumpuncte, die die gerade Linie bei Annahme aller möglichen Werthe von α repräsentirt. Als Beispiel diene eine schiefe Cylinder-Fläche, deren Basis $\beta = \sqrt{r^2 - \alpha^2} = \Phi(\alpha)$ sey. Man erhält nach (3):

$$z = \frac{tang.\, \psi}{sin.\, \varphi}\left(y - \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{cos.\, \varphi}{tang.\, \psi} z\right)^2}\right),$$

woraus nach gehöriger Reduction sofort:

$$(4) \quad z = tang.\, \psi\left((x\, cos.\, \varphi - y\, sin.\, \varphi) \pm \sqrt{r^2 - (x\, sin.\, \varphi + y\, cos.\, \varphi)^2}\right)$$

als Gleichung eines solchen schiefen Cylinders. Wäre etwa $r = 15$, $\varphi^0 = 31^0\, 36'$ und $\psi = 19^0 56$, so hätte man:

$$(5) \quad z = 0{\cdot}3626531(0{\cdot}8517269\, x - 0{\cdot}5239859\, y) \pm \sqrt{225 - (0{\cdot}8517269\, y + 0{\cdot}5239859\, x)^2}$$

Ist endlich die Seite eines solchen Cylinders mit der Ebene xz parallel, in welchem Falle $\varphi = 0$ ist, so erhält man als Gleichung desselben

$$(6) \quad z = tang.\, \psi(x \pm \sqrt{r^2 - y^2}).$$

§. 24.

Aufgabe 5. Man soll vorerst die Gleichung einer ebenen, jedoch im Körperraume befindlichen, übrigens beliebig begrenzten Figur finden; ferner von der gegebenen Gleichung einer solchen Figur im Raume auf jene in der Ebene der Figur selbst übergehen, und endlich aus der Gleichung eines in der Ebene xy liegenden Gegenstandes die Gleichung des in eine beliebige Lage gebrachten Objectes darstellen.

Es sey die Ebene, in welcher sich die Figur befinden soll, wieder eine solche, deren Lage durch die Coordinaten eines Punctes α, β, γ im Raume, sodann durch ihren Neigungswinkel zur Ebene xy, und endlich durch den Winkel, den die Knotenlinie mit der Achse x macht, bestimmt wird. Ihre Gleichung ist demnach:

$$(1) \quad z = \gamma + tang.\,\varphi\,(cos.\,\omega\,(y-\beta) - sin.\,\omega\,(x-\alpha)).$$

Sollen hier von sämmtlichen Puncten, welche die unbegrenzte Ebene bilden, nur jene in Betrachtung gezogen werden, deren Inbegriff eine Curve oder wie immer zusammengesetzte Figur ausmachen: so können begreiflicherweise die Variablen x und y nicht mehr beide als absolut veränderlich angenommen und eines jeden beliebigen Werthes fähig erachtet werden. Vielmehr muss zwischen x und y eine Abhängigkeit eintreten, welche sich durch eine Gleichung

$$(2) \quad y = f(x)$$

darstellen lässt. Es ist leicht einzusehen, dass diese Relation (2) ganz eigentlich der horizontalen Projection angehört, und dass man somit als Gleichung des verlangten Gegenstandes:

$$(3) \quad z = \gamma - tang.\,\varrho\, sin.\,\omega\,(x-\alpha) + \left\{ tang.\,\varrho\, cos.\,\omega\,(y-\beta) \right\} (f(x)) \text{ habe.}$$

Doch ist zu bemerken, dass wir, die Auflösbarkeit der Gleichung $y = f(x)$ vorausgesetzt, im Stande sind, wegen $x = f^{-1}(y)$ obige Gleichung unter der meistentheils einfachern Form

$$(4) \quad z = f(x) \left\{ \Phi(y) \right\} \text{ darzustellen.}$$

Der weitere Theil unserer Aufgabe lässt sich nun mit Hilfe der Dislocationsformeln lösen Um den ersten Theil zu lösen, wollen wir von der Ansicht ausgehen, dass der anfängliche Drehungspunct der Durchschnittspunct der Knotenlinie mit der Achse x, der vorgelegte dagegen der Ursprung der Coordinaten selbst seyn solle, und dass wir, nachdem wir die Ebene der Figur in der Ebene xy durch Drehung um ihre Knotenlinie herabgelegt haben, ihr noch eine solche Stellung in derselben anweisen, dass die Knotenlinie mit der Achse der x zusammenfällt. Dem gemäss haben wir in unsern Dislocationsformeln des Raumes zu setzen: $\alpha' = 0$, $\beta = \beta' = 0$, $\gamma = \gamma' = 0$, $\psi = \psi' = 0$, $\varphi' = 0$, $\varphi = \omega$, $\vartheta = \varrho$ und wir erhalten wegen:

$$\begin{array}{lll} P = cos.\,\omega: & Q = -\,sin.\,\omega\; cos.\,\varrho; & R = sin.\,\omega\; sin.\,\varrho; \\ P' = sin.\,\omega; & Q' = cos.\,\omega\; cos.\,\varrho; & R' = -\,cos.\,\omega\; sin.\,\varrho; \\ P'' = 0; & Q'' = sin.\,\varrho; & R'' = cos.\,\varrho; \end{array}$$

nachfolgende zwei Systeme von Dislocationsformeln:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} x' = cos.\,\omega\,.\,(x-\alpha) + sin.\,\omega\,.\,y\,; \\ y' = -sin.\,\omega\,.\,cos.\,\varrho\,.\,(x-\alpha) + cos.\,\omega\, cos.\,\varrho\,.\,y + sin.\,\varrho\,.\,z\,; \\ z' = sin.\,\omega\,.\,sin.\,\varrho\,(x-\alpha) - cos.\,\omega\,.\,sin.\,\varrho\,.\,y + cos.\,\varrho\,.\,z\,; \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} x = \alpha + cos.\,\omega\,.\,x' - sin.\,\omega\,.\,cos.\,\varrho\, y' + sin.\,\omega\,.\,sin.\,\varrho\,.\,z'\,; \\ y = sin.\,\omega\,.\,x' + cos.\,\omega\, cos.\,\varrho\,.\,y' - cos.\,\omega\, sin.\,\varrho\,.\,z'\,; \\ z = sin.\,\varrho\,.\,y' + cos.\,\varrho\,.\,z. \end{cases}$$

Da nun $z' = 0$ ist, so erhält man, weil die dritte Gleichung von II in $z = sin.\,\varrho\, y'$ übergeht. durch Substitution dieses Werthes in die beiden ersten von I sofort:

$$(5)\quad \begin{cases} x' = cos.\,\omega\,(x-\alpha) + sin.\,\omega\, y\,; \\ y' = -\dfrac{sin.\,\omega}{cos.\,\varrho}(x-\alpha) + \dfrac{cos.\,\omega}{cos.\,\varrho}\, y. \end{cases}$$

Wendet man nun die Formeln (5) auf unsere obige Gleichung an, so erhält man in jedem speciellen Falle eine Gleichung von der Form $z = f'(x)\left\{\dot{0}y\right\}$, wofür wir der Kürze wegen $y = f'(x)$ schreiben.

Hat man dagegen die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d. h. ist die Gleichung einer ebenen Curve oder Figur als in der Ebene xy liegend gegeben, und man soll die betreffende Gleichung für den Fall suchen, wenn jenes Object in eine Ebene von gegebener Lage im Raume übertragen wird: so kann man sich gar wohl auf der Coordinaten-Ebene xy noch eine zweite mobile, deren Gleichung $z = 0$ ist, gelegt denken, in welcher sich jenes Object befindet, welches durch die Gleichung $y' = f(x')$ bestimmt ist. Diese Ebene nun drehe sich um einen beliebigen Punct der Achse x und erhebe sich über die Ebene xy so, dass sie mit ihr einen Neigungswinkel ϱ und ihre Knotenlinie mit x einen Winkel ω macht. Die Veränderung, welche die gegebene Gleichung erfährt, wird wieder durch Anwendung unserer Dislocationsformeln berechnet. Wir erhalten wegen der völligen Gleichheit der Bestimmungsstücke wieder die beiden obigen Systeme I und II, deren Anwendung auf unsere Gleichung $z = f(x)\left\{\dot{0}\right\}$ oder vielmehr auf $z' = f(x')\left\{\dot{0}(y' - x')\right\}$ nur noch erübrigt. Wegen der in letztgenannter Gleichung liegenden Bedingung $z' = 0$ erhalten wir aus der dritten Gleichung von I

$$(6)\quad z = tang.\,\varrho\,(cos.\,\omega\, y - sin.\,\omega\,(x-\alpha)),$$

welche Gleichung natürlich wieder mit obiger (1) wesentlich identisch ist. Nun müssen unsere Dislocationsformeln auch noch auf den veränderlichen Gegenwerth $f'(x)$ angewendet werden. Um jedoch die beiden ersten Werthausdrücke in I, nämlich jene für x' und y' noch von z zu befreien, setze man früher noch den zuletzt gefundenen Werth von z in dieselben, reducire die Ausdrücke, und man erhält:

$$(7)\quad \begin{cases} x' = cos.\,\omega\,(x-\alpha) + sin.\,\omega\, y\,; \\ y' = 2\, cos.\,\varrho\, cos.\,\omega\, y - 2\, cos.\,\varrho\, sin.\,\omega\,(x-\alpha) \end{cases}$$

als ganz geeignete Dislocationsformeln für die Grenzen.

Setzt man diese Werthe in $y' = f'(x')$ und erhält man aus ihr die Gleichung $y = f(x)$: so hat man sofort:

$$(8)\quad z = f(x)\left\{ tang.\, \varrho\, cos.\, \omega\, y \right\}_{\bullet}^{\bullet} - tang.\, \varrho\, sin.\, \omega\, (x - \alpha) = \left\{\left(cos.\, \omega\, y - sin.\, \omega\, (f^{-1}(y) - \alpha) \right)\right\}_{\bullet}^{\bullet} f(x),$$

als Gleichung der verlangten Figur in ihrer neuen Lage. Einige specielle Beispiele werden das Gesagte verdeutlichen.

§. 25.

Beispiel 1. Es sey die Gleichung eines im Raume befindlichen Dreieckes gegeben, man soll die Gleichung dieses Dreieckes, nachdem es bereits auf die Ebene $x\,y$ niedergelegt worden ist, finden. Es sey nämlich die gegebene Gleichung:

$$(1)\quad z = 20{\cdot}9367219 - 0{\cdot}8275384 \left\{ x \right\}_{2}^{\frac{16}{3}} + \left\{ 1{\cdot}9178001\, y \right\}_{\bullet}^{\bullet} \left(\left\{ \tfrac{1}{2}x + 2 \right\}_{2}^{\frac{16}{3}} \omega \left\{ 2x - 6 \right\}_{\frac{16}{3}}^{4} \omega \left\{ -\tfrac{1}{2}x + 4 \right\}_{4}^{2} \right).$$

Da diese Gleichung, die Begrenzung von x nnd y abgerechnet, unter der allgemeinen Form $z = A\,y + B\,x + C$ erscheint, so ergibt ein Vergleich derselben mit (1) wegen:

$$tang.\, \varrho\, cos.\, \omega = A; \qquad tang.\, \omega = -\frac{A}{B}; \qquad \omega = 23^{0}\, 16';$$

$$-tang.\, \varrho\, sin.\, \omega = B; \qquad tang.\, \varrho = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ und hieraus findet man für } \varrho = 64^{0}\, 31';$$

$$tang.\, \omega\, sin.\, \omega = C; \qquad \alpha = -\frac{C}{B}; \qquad \alpha = 25{\cdot}3.$$

Werden diese Werthe in die Formel (5) des vorigen Paragraphs gesetzt, so erhält man für unsern Fall als Dislocationsformeln der Grenzen:

$$(2)\quad \begin{cases} x = 25{\cdot}3 + 0{\cdot}9154286\, x' - 0{\cdot}1699528\, y'; \\ y = 0{\cdot}3950111\, x' + 0{\cdot}3938618\, y'. \end{cases}$$

Wendet man diese Werthe nach den Grundsätzen unsers Calculs auf die Gleichung (1) an, so erhält man:

$$(3)\quad y' = (-20{\cdot}2651691) \left\{ \begin{matrix} 0{\cdot}1309489\, x \\ +30{\cdot}5948859 \end{matrix} \right\}_{\bullet}^{\bullet} \omega (-16{\cdot}5314149) \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}9568138\, x \\ 60{\cdot}7790310 \end{matrix} \right\}_{\bullet}^{\bullet} \omega (-18{\cdot}8200485) \left\{ \begin{matrix} -\ 2{\cdot}7606529\, x \\ -28{\cdot}0039134 \end{matrix} \right\}_{\bullet}^{\bullet}$$

als Gleichung unseres in die Ebene $x\,y$ herabgelegten Dreieckes.

Beispiel 2. Es sey Fig. 145 die Gleichung einer Ellipse in der Ebene $x\,y$ gegeben, man soll die Gleichung dieser Ellipse für den Fall bestimmen, wenn die Ebene derselben, d. h. die auf der Coordinaten-Ebene liegende und mit ihr congruente Ebene eine Lage annimmt, wobei $\varrho = 64^{0}\, 31'$, $\omega = 23^{0}\, 16'$ und $\alpha = 25{\cdot}3$ ist.

Aus der allgemeinen Auflösung dieses Problems durch (8) vorigen Paragraphs ist ersichtlich, dass man durch Substitution obiger Werthe in die Dislocationsformeln und mittelst denselben in die vorliegende Gleichung Folgendes erhält:

Ist die gegebene Gleichung:

$$(1)\quad y = 5 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{18x - x^2};$$

so hat man wegen:
$$(2)\quad \begin{cases} x = 0\cdot9154286\,(x' - 25\cdot3) + 0\cdot3950111\,y': \\ y = 0\cdot7877236\,y' - 0\cdot3399056\,(x' - 25\cdot3); \end{cases}$$

nach (7) für $z = 0$: $(3)\quad z' = 1\cdot9178001\,y' - 0\cdot8275384\,x' + 20\cdot9367219.$

Dagegen als Grenzwerth von y:

$$(4)\quad y' = 18\cdot4750242 - 0\cdot4177518\,x' \pm \sqrt{118\cdot4288814\,x' - 1\cdot6133524\,x'^2 - 1290\cdot3936787} = m$$

und demnach:

$$(5)\quad z = 20\cdot9367219 - 0\cdot8275384\,x' + (m)\left\{1\cdot9178001\,y'\right\}$$

als Gleichung der Ellipse in der verlangten neuen Lage.

§. 26.

Aufgabe 6. Man soll die allgemeine Gleichung für den Flächenraum einer ebenen Figur von beliebiger Begrenzung im Raume aufstellen und das hierüber Gesagte an einigen Beispielen nachweisen.

Vorerst muss hier bemerkt werden, dass die Gleichung einer jeden ebenen Figur, falls sie einen Raum ein- oder umschliessen soll, enweder eine vielförmige Function oder eine aus mehreren Disjunctivgliedern zusammengesetzte seyn muss. Das nämliche gilt begreiflicherweise auch von der Projection einer solchen Figur, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Fälle, wo die Ebene der Figur auf die Projectionsebene senkrecht steht, wo dann jene Figur eine begrenzte oder unbegrenzte gerade Linie zu ihrer Projection hat.

Vielleicht bei allen in sich zurückkehrenden Figuren liegt die Vielförmigkeit der Gleichung in einer vorhandenen Wurzel von gerader Ordnung, welche positiv und negativ zugleich zu nehmen ist, und in diesem Falle werden wir den einen Werth der Function mit $\varphi(x)$, den andern dagegen durch $\varphi'(x)$ anzeigen. Überhaupt wollen wir den Inbegriff sämmtlicher Disjunctivglieder, die zusammen den Progress mit P, und jene, die zusammen den Regress ausmachen, durch R bezeichnen. Bezieht sich demnach die Gleichung $y = f(x) = \varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x)$ oder $y = f(x) = P\,\omega\,R$ auf die Projection der Figur, und ist die Ebene, in der sich die Figur befinden soll, wieder die obige (1) §. 24, so ist:

$$(1)\quad z = tang.\,\varrho\left(\varphi(x)\left\{cos.\,y\,\omega\right\}\varphi'(x) - sin.\,\omega\,(x - a)\right).$$

Man kann aus dieser Gleichung mit Hilfe von $y = f(x)$ wegen $x = f^{-1}(y)$, die Grösse x eliminiren, so dass x nur in den Grenzen vorkömmt, und dort, wo die Auflösung möglich ist, erscheint diess auch räthlich. In diesem Falle erhielte man für dasselbe Object die Gleichung

$$(2)\quad z = \varphi(x)\left\{(cos.\,\omega\,y - sin.\,\omega\,f^{-1}(y) + sin.\,\omega\,a)\,tang.\,\varrho\right\}\varphi'(x).$$

Nöthigen Falls ist auch noch x zu begrenzen. Einige Beispiele werden das Gesagte erläutern.

Beispiel 1. Man soll die Gleichung des in Fig. 146 dargestellten, zwischen den beiden Linien $0N$ und $0M$ in der Ebene CDE befindlichen Flächenraumes aufstellen, wenn nebst der Gleichung der Ebene auch jene der Projection dieser Geraden gegeben ist. Es sey demnach $z = 20 - 5x - 10y$ jene der Ebene, und $y = {}_{1}\Big\{\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{6}\Big\}^{\infty} \,\omega\, {}_{1}\Big\{\tfrac{4}{3}x - \tfrac{5}{6}\Big\}^{\infty}$ demnach:

$$(3) \qquad z = {}_{1}\Big\{20 - 5x - \Big(\big(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{6}\big)\, {}_{\cdot}\big\{10y\big\}^{\cdot} \big(\tfrac{4}{3}x - \tfrac{5}{6}\big)\Big)\Big\}^{\infty}$$

als Gleichung der ins Unendliche gehenden Winkelfläche.

Setzt man in diese Gleichung z. B. $x = 30$, so erhält man:

$$z = -130 - \Big(\frac{119}{6}\Big)\, {}_{\cdot}\Big\{10y\Big\}^{\cdot} \Big(\frac{235}{6}\Big);$$

d. h. alle dem $x = 30$ entsprechenden Werthe von y und z liegen beziehungsweise zwischen $\frac{119}{6}$ und $\frac{235}{6}$ und rücksichtlich z zwischen $-\frac{595}{3}$ und $-\frac{1175}{3}$; es liegen demnach diese sämmtlichen Puncte im achten Quadranten.

Beispiel 2. Man soll die Gleichung einer Dreiecksfläche, Fig. 147, die in einer gegebenen Ebene liegt, aufstellen, wenn die Projection ihrer Begrenzung durch eine Gleichung gegeben ist.

Mit Beibehaltung der frühern Ebene sey die Gleichung des projicirten Dreiecks:

$$y = {}_{1}\Big\{\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{6}\Big\}^{6\frac{1}{6}} \,\omega\, {}_{\cdot}\Big\{-\tfrac{1}{3}x + 10\Big\}^{6\frac{5}{10}} \,\omega\, {}_{\cdot}\Big\{\tfrac{4}{3}x - \tfrac{5}{6}\Big\}^{1};$$

so ist jene der wirklichen Fläche:

$$(4) \qquad z = {}_{1}\Big\{20 - 5x - \Big({}_{1}\big(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{6}\big)^{6\frac{5}{10}} \,\omega\, {}_{\cdot}\big(-\tfrac{1}{3}x + 10\big)^{6\frac{1}{6}}\Big)\, {}_{\cdot}\big\{10y\big\}^{\cdot} \Big({}_{6\frac{1}{6}}\big(\tfrac{4}{3}x - \tfrac{5}{6}\big)^{1}\Big)\Big\}^{6\frac{1}{6}}.$$

Beispiel 3. Man soll die Gleichung für die Fläche einer im Körperraume befindlichen Ellipse aufstellen, wenn die nöthigen Bestimmungsstücke gegeben sind.

Es sey die Gleichung der Ebene: $z = 36 - 15y - 6x$ und jene der Projection der Ellipse: $y = 5 \pm \frac{1}{3}\sqrt{18x - x^2}$; so hat man als Gleichung der in jener Ebene liegenden elliptischen Fläche:

$$(5) \qquad z = 36 - 6x - \big(5 - \tfrac{1}{3}\sqrt{18x - x^2}\big)\, {}_{\cdot}\Big\{15y\Big\}^{\cdot} \big(5 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{18x - x^2}\big).$$

§. 27.

Aufgabe 7. Es sey ein Ellipsoid mit ungleichen Achsen gegeben, und nebst diesen drei Linien als Rotations-Achsen im Raume. Wenn sich nun dieses Ellipsoid um diese drei

Achsen nach gegebenen Winkel dreht, so entsteht die Frage, welche ist die Gleichung dieses Ellipsoids in dieser neuen Lage im Raume?

Es sey das Ellipsoid ein solches, dessen Achsen nach z, y, x, beziehungsweise 4, 6, 10 sind, so ist dessen Gleichung:

$$(1) \quad z = \tfrac{1}{30}\sqrt{14400 - 400\,y^2 - 144\,x^2}.$$

Die Bestimmungsstücke für die drei Achsen mit den entsprechenden Drehungswinkeln, wenn α, β, γ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Anfangs- und Endpuncte der ersten Achse, α', β', γ' und α'', β'', γ'' die Anfangspuncte der zweiten und dritten Achse bedeuten, seyen ferners:

$$\text{für die erste Achse } \alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1{\cdot}08536;$$
$$\mathfrak{a} = -5, \quad \mathfrak{b} = 12, \quad \mathfrak{c} = 0{\cdot}85417;$$
$$\text{und hieraus} \quad \varphi = 127^0\,52'\,30''; \quad \psi = 178^0\,50'\,59{\cdot}5; \quad \vartheta = 37^0\,15'\,7'':$$
$$\text{für die zweite } \alpha' = 17, \quad \varphi' = 67^0\,21'\,15'':$$
$$\beta' = -41, \quad \psi' = 81^0\,17'\,10'';$$
$$\gamma' = 11{\cdot}3, \quad \vartheta' = 53^0\,18'\,17'';$$
$$\text{für die dritte } \alpha'' = 81, \quad \varphi'' = 43^0\,56'\,7'';$$
$$\beta'' = 113, \quad \psi'' = 13^0\,18'\,11'';$$
$$\gamma'' = -53, \quad \vartheta'' = 23^0\,41'\,7''.$$

Nun könnte man zwar allerdings diese Werthe in die Dislocationsformeln, und diese sofort durch drei auf einander folgende Substitutionen in die Gleichung für unser Ellipsoid setzen; allein es ist ebenso erlaubt, die Substitution früher mit den Dislocationsformeln selbst vorzunehmen, sie möglichst zu reduciren, und sie sodann in unsere Gleichung zu setzen. Auf diese Art erhält man als Dislocationsformeln, die sich schon auf jene dreifache Bewegung beziehen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 0{\cdot}547500\,x''' + 1{\cdot}240358\,y''' - 0{\cdot}588151\,z''' - 140{\cdot}10234; \\ y &= 0{\cdot}623321\,x''' + 0{\cdot}878801\,y''' + 1{\cdot}390064\,z''' - 44{\cdot}666191; \\ z &= -0{\cdot}967956\,x''' - 0{\cdot}088527\,y''' - 0{\cdot}700960\,z''' - 17{\cdot}921959. \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Formeln in obige Gleichung für das Ellipsoid, so findet man nach der möglichsten Reduction:

$$(3) \quad z''' = \left\{ \begin{matrix} 1{\cdot}265214 \\ -0{\cdot}692803\,x''' \\ -0{\cdot}334234\,y''' \end{matrix} \right\} \pm$$
$$\pm \sqrt{58{\cdot}9909211\,y''' + 8{\cdot}240201\,x''' - 0{\cdot}029266\,x'''y''' - 0{\cdot}465632\,x'''^2 - 2963{\cdot}977859}$$

als Gleichung des Ellipsoids in seiner neuen Lage in Folge einer dreifachen Bewegung um drei im Körperraume gegebene Achsen.

§. 28.

Aufgabe 8. Es seyen im Coordinaten-Raume gleichzeitig zwei geometrische Objecte gegeben, nämlich ein ungleichachsiges Ellipsoid *ABCD*, Fig. 148 und 149 und ein schiefer Kegel *FGHIK*. Man denke sich sowohl auf dem Kegel als dem Ellipsoid einen gewissen Theil der Oberfläche durch geschlossene Curven, deren Gleichungen gegeben sind, abgegrenzt, und mit diesen Flächen nachfolgende Ortsveränderungen vorgenommen: Der Theil POQ der ellipsoidischen Oberfläche werde auf bestimmte Weise dergestalt an die Spitze S des schiefen Kegels verlegt, dass er der Ebene xy die verkehrte oder convexe Seite zuwendet. Der auf der Mantelfläche des Kegels abgeschnittene Flächentheil $abcd$ werde auf die Coordinaten-Ebene xy auf eine solche Weise niedergelegt, dass die durch einen Punct $0''$ gehende Seite SR des Kegels mit der Achse x einen Winkel von gegebener Grösse bildet. Man soll nun die gegebenen Gleichungen mit Hilfe der Dislocationsformeln so transformiren, dass sie diesen Ortsveränderungen entsprechen.

Die Gleichung eines schiefen Kegels, dessen kreisförmige Basis einen Radius $r=6$ hat, und wobei die Coordinaten des Mittelpunctes $\alpha=10$, $\beta=8$, jene der Spitze dagegen $\mathfrak{a}=16$, $\mathfrak{b}=6$, $\mathfrak{c}=15$ angenommen werden, ist:

$$(1) \quad z=\frac{165x-1830+5\sqrt{513x^2-1089y^2+9216y-12636x+60228}}{128}.$$

Man nehme nun an, von dieser Kegelfläche werde ein solcher Theil abgegrenzt, dessen Projection ein Kreis vom Radius $r=2$ und dessen Mittelpuncts-Coordinaten $\alpha=14$, $\beta=4$ sind. Die Gleichung der Projection dieser auf dem Kegel liegenden Abgrenzungscurve ist demnach:

$$(2) \quad y=\left\{4\pm\sqrt{28x-x^2-192}\right\}_{12}^{16}.$$

Allein diese Gleichung ist zugleich die Grenze für y und man erhält somit unter Beobachtung der schon früher erwähnten Abkürzung in der Bezeichnung, als Repräsentanten des Flächentheils $abcd$ Fig. 148, die Gleichung:

$$(3) \quad z=\frac{1}{128}\left\{165x-1830+5\sqrt{\left(4\pm\sqrt{28x-x^2-102}\right)\left(9126y-1089y^2\right)+513x^2-12636x+60228}\right\}_{12}^{16}.$$

Denkt man sich nun eine Linie RS als Seite des Kegels durch den Punct $0''$ geführt, dessen Coordinaten $\alpha'=15$, $\beta'=5$ und $\gamma'=7{\cdot}79235$ sind, der mithin noch innerhalb der Begrenzung $abcd$ liegt, so ist diese Linie zugleich auch diejenige, die wir als Achse zu betrachten, und mit dem Objecte $abcd$ nach NM unter noch weiter beizufügenden Beschränkungen zu übertragen haben. Hierbei soll also z. B. der Punct $0''$ auf $0'''$ in der Ebene xy fallen, die Linie NM mit der Achse x einen Winkel von z. B. $37^0\ 19'$ machen, und der breitere Theil von $abcd$ gegen dieselbe Achse, die Convexität aber gegen die Coordinaten-Ebene xy gekehrt seyn. Wir haben nun vor Allem die nöthigen Bestimmungsstücke für die Lage der anfänglichen Drehungsachse, nämlich der Linie SR zu suchen, welches ohne Schwierigkeit geschehen kann, da die Coordinaten zweier ihrer Puncte bekannt sind. Wir finden: $tang.\,\varphi=\frac{1}{1}=1$ also $\varphi=45^0$, dagegen $tang.\,\psi=\frac{7{\cdot}20765}{\sqrt{2}}$ und somit $\psi=78^0\ 53'\ 56{\cdot}4$.

Ferner entsprechen in unserm Falle den in den Dislocationsformeln vorkommenden allgemeinen Bestimmungsstücken nachfolgende Werthe:

$\alpha = 15$; $\alpha' = 18$; $\varphi' = 37^0\ 19'$ (als Neigungswinkel der NM gegen x);
$\beta = 5$; sodann $\beta' = 20$; $\psi' = 0$;
$\gamma = 7{\cdot}79235$; $\gamma' = 0$; $\vartheta = 180^0$ (wegen der vorzunehmenden Drehung).

Werden diese Bestimmungsstücke in unsere Dislocationsformeln II gesetzt, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$(4)\quad \begin{cases} x = 7{\cdot}74942 + 0{\cdot}19081\,x' + 0{\cdot}19081\,y' + 0{\cdot}98129\,z'; \\ y = 5{\cdot}26740 + 0{\cdot}13370\,x' - 0{\cdot}13370\,y'; \\ z = -12{\cdot}83731 + 0{\cdot}13117\,x' + 0{\cdot}97246\,y' + 0{\cdot}19284\,z'. \end{cases}$$

Diese Formeln (4) besitzen nun die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in unsere obige Gleichung gesetzt, den Theil der Kegelfläche $abcd$ auf die Ebene xy dem analytischen Vorgange nach gleichsam niederlegen, genau in der Weise, wie dieses den obigen Bestimmungen gemäss verlangt wurde. Hierbei ist zu bemerken, dass die veränderlichen Grenzen von y mittelst derselben Dislocationsformel II nach Elimination von z, die constanten Grenzen von x aber, mittelst I zu transformiren sind. Der untere Grenzwerth von x, nämlich 12, geht dem gemäss in 16·64962 und der obere 16 in 18·33691 über.

Setzt man daher obige Formeln (4) in unsere Gleichung (3), so erhält man nach möglichster Reduction, vorerst für die Hauptgleichung selbst ohne Begrenzung:

$$(5)\quad z' = 1{\cdot}170421\,x' + 2{\cdot}219159\,y' - 19{\cdot}438556 \pm \sqrt{\begin{matrix} 1{\cdot}378773\,x'^2 + 5{\cdot}835765\,x'y' + 3{\cdot}547181\,y'^2 \\ -53{\cdot}039400\,x' - 54{\cdot}142549\,y' + 150{\cdot}165711 \end{matrix}} = M \pm \sqrt{N}.$$

Für die Grenze von y aber nach früherer Anleitung:

$$(6)\quad y' = 25{\cdot}093031 + 0{\cdot}341414\,x \pm \sqrt{54{\cdot}833798\,x' - 0{\cdot}883437\,x^2 - 45{\cdot}985062} = m \pm \sqrt{n}$$

und demnach als Gleichung von $ab''cd'$, Fig. 149:

$$(7)\quad z = (m \pm \sqrt{n}) \left\{ M \pm \sqrt{N} \right\}.$$

Nebst genanntem Kegel soll sich der Annahme gemäss auch noch ein ungleichachsiges Ellipsoid im Körperraume befinden. Sind die drei Achsen nach x, y, z, beziehungsweise 2, 3, 7, so hat man sofort als dessen Gleichung:

$$(8)\quad z = \tfrac{7}{6}\sqrt{36 - 4y^2 - 9x^2}.$$

Von diesem Ellipsoide soll nun am obern Scheitel der grössern Achse ein Stück der Oberfläche, dessen Projection eine Kreisfläche von gegebener Lage und Grösse ist, abgetrennt, umgekehrt und an die Spitze des Scheitels des Kegels gebracht werden. Diess geschieht nun so: Es sey die Projection jenes Flächentheils des Ellipsoides ein Kreis, dessen Gleichung (9) ist, so erhält man, da diese zugleich auch die Grenze für y ist, als Repräsentanten von PCQ, Fig. 232, den Ausdruck (10):

$$(9)\quad y = \tfrac{1}{4}\sqrt{25 - 16x^2}.$$

$$(10)\quad z = \left\{ \tfrac{7}{6}\sqrt{36 - 9x^2 - \left(\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{25 - 16x^2}\right)\left(4y^2\right)} \right\}_{-\frac{5}{4}}^{+\frac{5}{4}}.$$

Die Coordinaten des Punctes, der nach der Spitze des schiefen Kegels verlegt werden soll, nämlich des Scheitelpunctes des Ellipsoides, seyen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 7$, und dieser ist zu verlegen nach $\alpha' = 16$, $\beta' = 6$ und $\gamma' = 15$. Da wir nun der einfacherern Rechnung wegen annehmen wollen, dass dieser Flächenschnitt, ausser seiner Umkehrung, keine weitere Ortsveränderung erleiden soll (wiewohl eine solche Annahme durchaus ohne alle analytische Schwierigkeit statt haben könnte): so ergeben sich, wenn man als Dislocationsachse eine durch den Scheitel gehende, zur Achse x parallele Linie annimmt, wegen $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, $\psi = 0$, $\psi' = 0$, $\vartheta = 180^0$, nachfolgende Dislocationsformeln:

$$\mathrm{I}\ \left\{\begin{array}{l} x' = 16 + x; \\ y' = 6 - y; \\ z' = 22 - z; \end{array}\right. \qquad \text{und} \qquad \mathrm{II}\ \left\{\begin{array}{l} x = x' - 16; \\ y = 6 - y'; \\ z = 22 - z'; \end{array}\right.$$

und diese Formeln in obige Gleichung gesetzt, geben: für die Hauptgleichung ohne Begrenzung von y (11) und für die Grenze von y (12), d. h.

$$(11) \quad z = 22 - \tfrac{1}{6}\sqrt{107604 - 441\,x^2 + 14112\,x - 196\,y^2 + 1764\,y} = P - \sqrt{Q}: \text{ und}$$

$$(12) \quad y = 6 \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{512\,x - 16\,x^2 - 4071} = p \pm \sqrt{q}$$

und folglich als vollständige Gleichung des nach S verlegten ellipsoidischen Abschnittes $P'SQ'$ in Fig. 149:

$$(13) \quad z = 22 - \tfrac{1}{6}\sqrt{107604 + 14112x - 441x^2 + \left(6 \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{312x - 16x^2 - 4071}\right)\left\{1764y - 196y^2\right\}}$$

$$= (p \pm \sqrt{q})\left\{P - \sqrt{Q}\right\}.$$

Wir haben daher als vollständige Gleichung des ganzen in Fig. 149 vorgestellten Systems von den vier geometrischen Objecten:

$$(14) \quad z = (m \pm \sqrt{n})\left\{M \pm \sqrt{N}\right\}\ \omega\ (p \pm \sqrt{q})\left\{P - \sqrt{Q}\right\}\ \omega\ \left(\left\{4 \pm \sqrt{28x - x^2 - 192}\right\}^{16}\right)$$

$$\left\{\frac{165x - 1830 + 5\sqrt{513x^2 - 1089\,y^2 + 9216\,y - 12636\,x + 60228}}{128}\right\}\ \omega\ \left(\pm \tfrac{1}{4}\sqrt{25 - 16x}\right)$$

$$\left\{\tfrac{7}{6}\sqrt{36 - 4y^2 - 9x}\right\}.$$

§. 28.

Aufgabe 8. Ein Körperraum, dessen Gleichung gegeben ist, werde von einer gleichfalls gegebenen Ebene geschnitten. Man soll nun die Gleichung sowohl der Schnittscurve als auch die Schnittsfläche, im Raume sowohl, als auch in die Ebene xy herabgebracht angeben, und die allgemeine Deduction auf ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen anwenden.

Es sey die Gleichung des geometrischen Objectes im Raume

$$(1) \quad z = F(x, y)$$

und die Gleichung der Ebene nach §. 20:

$$(2) \quad z = \mathit{tang.}\,\varrho\,(\mathit{cos.}\,\omega\,y - \mathit{sin.}\,\omega\,(x - \alpha)).$$

Da diejenigen Puncte, welche die Ebene mit der begrenzenden Umfläche gemein hat, uns unmittelbar die Grenzen für die Veränderliche y selbst zu liefern haben, so setze man:

$$F(x,y) = tang.\,\varrho\,(cos.\,\omega\,y - sin.\,\omega\,(x-\alpha))$$

und nehme an, dass man durch Auflösung der Gleichung nach y für letztere Grösse erhalte:

$$(3)\quad y = \Phi(x) = \varphi(x)\,\omega\,\varphi'(x);$$

wo wir demnach die Function $\Phi(x)$ schon in ihre Progresse und Regresse aufgelöst annehmen. Hiernächst hat man:

$$(4)\quad z = \Phi(x)\left\{tang.\,\varrho\,(cos.\,\omega\,y - sin.\,\omega\,(x-\alpha))\right\}$$

als Gleichung der Schnittscurve im Raume, und

$$(5)\quad z = \varphi(x)\left\{tang.\,\varrho\,(cos.\,\omega\,y - sin.\,\omega\,(x-\alpha))\right\}\varphi'(x)$$

als Gleichung der Schnittfläche gleichfalls noch im Körperraume.

Um endlich diese geometrischen Objecte zum Behufe einer deutlichern Anschauung auf die Ebene xy herabzubringen, hat man auf sie nur die im §. 24 zu diesem Behufe eigens abgeleiteten Formeln I und II anzuwenden, welches wir auch sogleich an dem verlangten Beispiele in Anwendung bringen wollen.

Es seyen die Achsen eines Elipsoids beziehungsweise nach x, y, z, 5, 8 und 3; so ist die Gleichung desselben: $(6)\quad z = \frac{5}{24}\sqrt{576 - 9y^2 - 64x^2}$

und die Gleichung des Körperraumes:

$$(7)\quad z = \left(-\tfrac{5}{24}\sqrt{576 - 9y^2 - 64x^2}\right)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}\left(+\tfrac{5}{24}\sqrt{576 - 9y^2 - 64x^2}\right).$$

Ferner sey eine Ebene gegeben, wo $\alpha = 10$, $\omega = 37^0$, $\varrho = 15^0$ ist, so ist ihre Gleichung: $(8)\quad z = 0{\cdot}213990\,y - 0{\cdot}161252\,x + 1{\cdot}61252.$

Durch Substitution der nachfolgenden Dislocationsformeln (9), deren Bestimmungsstücke aus jenen der Ebene (8) entnommen werden, in unsere Gleichung erhält man wegen:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} x &= 2{\cdot}01364 + 0{\cdot}798635\,x' - 0{\cdot}581309\,y';\\ y &= -6{\cdot}018150 + 0{\cdot}601815\,x' + 0{\cdot}771421\,y';\end{aligned}\right.$$

als Gleichung der in die Ebene xy niedergelegten Schnittscurve jener Ebene mit dem erwähnten Ellipsoide:

$$(10)\quad y' = 1{\cdot}464725 - 0{\cdot}895111\,x' \pm \sqrt{7{\cdot}065681 - 7{\cdot}552783\,x' - 0{\cdot}744031\,x'^2} = M \pm \sqrt{N};$$

und so fort: $(11)\quad y = \left(M - \sqrt{N}\right)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}\left(M + \sqrt{N}\right),$

als jene für den entsprechenden Flächenraum dieser Figur.

§. 29.

Aufgabe 9. Man soll mittelst der gegebenen Gleichungen von vier Ebenen, die Gleichung sowohl für die Oberfläche als für den Körperraum und endlich für die Kanten der von diesen Ebenen begrenzten dreiseitigen Pyramide $FGHI$, Fig. 150 aufstellen.

Es seyen die gegebenen Gleichungen der vier Ebenen:

$$(1)\quad z = 2y - 3x + 20 = M; \qquad (2)\quad z = 5y + 30x - 14 = N$$

$$(3)\quad z = -8y + 5x + 3 = P; \qquad (4)\quad z = -3y + 7x - 8 = Q.$$

Da hier offenbar neben der Annahme des Zugleichbestehens noch gefordert wird, dass die Begrenzung der Ebenen durch den sich abschliessenden Raum bedingt sey: so hat man vor Allem die Grenzen von x und y bezüglich jeder einzelnen Ebene aufzusuchen. Man findet diese in Bezug auf y, indem man jede der obigen Gleichungen mit jeder der übrigen verbindet, wodurch man vier Systeme von je drei Gleichungen zwischen x und y erhält, durch deren abermalige Verbindung sofort auch die entsprechenden Grenzen von x erhalten werden. Auf diese Weise gelangt man also eigentlich zu den Gleichungen der projicirten Seitenflächen der Pyramide, die somit auch bezüglich jeder Ebenen für dieselben die Grenzen darbieten. Führt man das Gesagte aus, so erhält man unmittelbar in Bezug auf die Seitenflächen $MNPQ$ der Ordnung nach als Grenzen von y, nachfolgende Werthe:

$$M \left\{ \begin{array}{l} y = \left(\frac{391}{354}\right) \left\{\frac{4}{5}x - \frac{17}{10}\right\} \left(\frac{39}{12}\right) = A_1; \\[2ex] y = \left(\frac{391}{354}\right) \left\{-11x + \frac{34}{5}\right\} \left(\frac{254}{195}\right) = A_2; \\[2ex] y = \left(\frac{254}{195}\right) \left\{2x - \frac{28}{5}\right\} \left(\frac{39}{12}\right) = A_3; \end{array} \right.$$

$$N \left\{ \begin{array}{l} y = \left(-\frac{58}{99}\right) \left\{-\frac{23}{8}x + \frac{6}{8}\right\} \left(\frac{254}{195}\right) = B_1; \\[2ex] y = \left(-\frac{58}{99}\right) \left\{-\frac{25}{13}x + \frac{17}{13}\right\} \left(\frac{391}{354}\right) = B_2; \\[2ex] y = \left(\frac{391}{354}\right) \left\{-11x + \frac{34}{3}\right\} \left(\frac{254}{195}\right) = B_3; \end{array} \right.$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} y = \left(-\frac{58}{99}\right) \left\{-\frac{2}{5}x + \frac{11}{5}\right\} \left(\frac{39}{12}\right) = C_1; \\[2ex] y = \left(-\frac{58}{99}\right) \left\{-\frac{25}{13}x + \frac{17}{13}\right\} \left(\frac{391}{354}\right) = C_2; \\[2ex] y = \left(\frac{391}{354}\right) \left\{\frac{4}{5}x - \frac{17}{10}\right\} \left(\frac{39}{12}\right) = C_3; \end{array} \right.$$

$$Q \left\{ \begin{array}{l} y = \left(-\frac{58}{99}\right) \left\{-\frac{2}{5}x + \frac{11}{5}\right\} \left(\frac{39}{12}\right) = D_1; \\[2ex] y = \left(-\frac{58}{99}\right) \left\{-\frac{23}{8}x + \frac{6}{8}\right\} \left(\frac{254}{195}\right) = D_2; \\[2ex] y = \left(\frac{254}{195}\right) \left\{2x - \frac{28}{5}\right\} \left(\frac{39}{12}\right) = D_3. \end{array} \right.$$

Hierauf hat man:

$$(5)\quad z = (A_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ M \right\}}}(A_2\ \omega\ A_3)\ \omega\ (B_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ N \right\}}}(B_2\ \omega\ B_3)\ \omega\ (C_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ P \right\}}}(C_2\ \omega\ C_3)\ \omega\ (D_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ Q \right\}}}(D_2\ \omega\ D_3);$$

als Gleichung der Oberfläche der genannten Pyramide. Ferner ergibt sich hieraus weiter:

$$(6)\ z = \Big((C_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ P \right\}}}(C_2\,\omega\, C_3)\,\omega\,(D_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ Q \right\}}}(D_2\,\omega\, D_3)\Big)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ \tfrac{0}{0} \right\}}}\Big((A_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ M \right\}}}(A_2\,\omega\, A_3)\,\omega\,(B_1)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ N \right\}}}(B_2\,\omega\, B_3)\Big)$$

als Gleichung des Körperraums dieser Pyramide, und endlich:

$$(7)\quad z = (A_1\,\omega\, A_2)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ M \right\}}}(A_1\ \omega\ A_2)\ \omega\ (B_2\ \omega\ B_3)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ N \right\}}}(B_2\ \omega\ B_3)\ \omega\ (C_1\ \omega\ C_3)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ P \right\}}}(C_1\ \omega\ C_3);$$

als Gleichung für sämmtliche Kanten derselben.

§. 30.

Aufgabe 10. Es ist die Gleichung einer im Raume befindlichen, sich selbst begrenzenden Oberfläche gegeben. Man soll die Gleichungen für die horizontale und verticale Projection dieses Objectes bestimmen.

Oberflächen der genannten Art liefern für jeden bestimmten Werth von x und y wenigstens einen doppelten, zuweilen selbst mehrfachen Werth, und dieses geschieht durch die Vieldeutigkeit der Function als Werth von z. Es sey daher $z = F(x, y)$ die Gleichung einer Oberfläche, so hat man nach dem früher Gesagten z. B.:

$$(1)\quad z = F(x,y) = F'(x,y)\,\omega\, F''(x,y).$$

Für jeden nun überhaupt möglichen Werth von x und y erhält man demnach für z, im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe, und nur diejenigen Puncte der Oberfläche, zu denen die entsprechenden Ordinaten zugleich Tangenten sind, liefern nur einen oder vielmehr zwei gleiche Werthe.

Man kann daher auch umgekehrt sagen, dass alle jene Werthe von x und y, für welche man statt zwei verschiedene zwei gleiche Werthe erhält, nothwendig solchen Tangirungspuncten entsprechen. Diese sind es aber, welche die horizontale Projection der Oberfläche ihren Grenzen nach bestimmen. Um diese zu finden, hat man nun:

(2) $F(x, y) = F''(x, y)$ zu setzen, woraus sofort (3) $y = \varphi(x)$ folgt.

Diese Gleichung ist denn die horizontale Projection. Verlangt man die auf der Oberfläche selbst liegende Begrenzungscurve, so hat man für dieselbe:

$$(4)\quad z = \varphi(x)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\left\{ F(x, y) \right\}}}.$$

In allen jenen Fällen, wo die Gleichung (1) von einer Form, wie (5) $z = A \pm \sqrt[2n]{B}$ ist; wobei A und B Functionen von x und y zugleich sind, hätte man demnach:

$$A + \sqrt{B} = A - \sqrt{B};\ \text{d. h.}\ 2\sqrt{B} = 0 \quad \text{oder} \quad (6)\quad B = 0.$$

Man findet daher in allen diesen Fällen die verlangte Gleichung der Projection, wenn man den unter der Wurzel stehenden Ausdruck gleich Null setzt. Bestimmt man aus (1) y

oder x, und behandelt die gefundenen Werthe auf eben angedeutete Weise, so erhält man beziehungsweise die Projectionen auf die Ebenen xz und yz. Ein Beispiel möge das Gesagte erläutern.

Bei Gelegenheit einer frühern Aufgabe haben wir bereits als Gleichung eines ungleichseitigen Ellipsoides, welches gegen die Coordinaten-Achsen eine schiefe Lage annimmt, gefunden:

$$(7) \quad z = \left\{ \begin{array}{l} 1{\cdot}265215 \\ -0{\cdot}692803x \\ -0{\cdot}334234y \end{array} \right\} \pm \sqrt{\begin{array}{l} 58{\cdot}990211y + 8{\cdot}240201x - 0{\cdot}029266xy; \\ -0{\cdot}465632y^2 - 0{\cdot}312324x^2 - 2963{\cdot}977859. \end{array}}$$

Setzt man nun nach (6) den unter dem Wurzelzeichen befindlichen Ausdruck = Null, so erhält man als Gleichung der horizontalen Projection dieses Ellipsoides:

$$(8) \quad y = 63{\cdot}2379338 - 0{\cdot}0314261x \pm \sqrt{13{\cdot}7215676x - 0{\cdot}669766x^2 - 2366{\cdot}458066.}$$

§. 31.

Der Raum dieser Blätter gestattet es nicht, in eine vollständige und umfassende Bearbeitung vieler hieher gehöriger wichtiger und interessanter Probleme einzugehen; wir müssen uns daher begnügen, wenigstens auf einige derselben im Vorbeigehen hinzudeuten. Wir glauben dieses um so eher thun zu können, da die meisten derselben für die Ebene bereits ihre Lösung gefunden haben.

1. Wenn die Gleichungen zweier Körperräume gegeben sind, auf analytischem Wege zu bestimmen, ob sie ganz innerhalb oder ganz ausserhalb einander liegen oder wenn dieses nicht der Fall ist, anzugeben, welchen Theil sie gemeinschaftlich haben?

Auch hier muss, so wie schon früher in der Ebene, in Betracht gezogen werden, dass

wegen $\quad (1) \quad z = F(x,y) \left\{ \begin{array}{c} \dot{} \\ \frac{0}{0} \\ \dot{} \end{array} \right\} F'(x,y) \quad$ und $\quad (2) \quad z = f(x,y) \left\{ \begin{array}{c} \dot{} \\ \frac{0}{0} \\ \dot{} \end{array} \right\} f'(x,y)$

sich nur die vier Bedingungsgleichungen ergeben:

$$F(x,y) = f'(x,y); \quad F(x,y) = f(x,y); \quad F'(x,y) = f(x,y); \quad F'(x,y) = f'(x,y).$$

Von diesen vier Gleichungen liefert nun entweder keine oder eine, oder zwei, oder drei, oder endlich jede mögliche Werthe, und aus diesem Umstande lässt sich nach einer ähnlichen Betrachtungsweise wie bei Objecten der Ebene ermitteln, von welcher Beschaffenheit der beiden Körpern gemeinschaftliche Theil ist. Die genaue Ausmittlung und Beantwortung dieser Vorfrage ist aber für die Lösung der bald anzuführenden Probleme völlig unerlässlich, und darf in keinem Systeme der analytischen Geometrie unsers Dafürhaltens fehlen.

2. Eine ebene Figur (etwa die Fläche eines ebenen Winkels Fig. 151 und Fig. 152) bewege sich in einer gegebenen Ebene dergestalt, dass sie in jeder ihrer Lagen stets in der Ebene verbleibt, ein mit ihr in fester Verbindung gegebener Punct aber eine gegebene Bahn beschreibt, wobei sich diese Fläche im Allgemeinen um den genannten fixen Punct als Drehungspunct dreht. Wenn nun diese Bewegungen nach gegebenen Zeitfunctionen vor sich gehen, so frägt es sich, welche ist die Gleichung dieser in Bewegung begriffenen Fläche in

einem bestimmten Augenblicke, und wie findet man die Gleichung für die Bahnfläche auf der Ebene, in welcher die Bewegung vor sich geht?

Die Lösung auch dieser Aufgabe kann mit Hilfe der von uns zu jedem Bedarfe abgeleiteten Dislocationsformeln keiner besondern Schwierigkeit unterworfen seyn, wenn Nachfolgendes beachtet wird. Da nämlich sowohl die fortschreitende, als auch die drehende Bewegung stets in der Ebene vor sich gehen soll, so muss die Drehungsachse nicht nur sich stets zu sich selbst parallel bewegen, sondern auch auf der Ebene senkrecht stehen. Hiezu wird nun erfordert, dass nebst $\varphi = \varphi'$ und $\psi = \psi'$ auch noch, wenn $z = Ay + Bx + C$ die Gleichung unserer Ebene ist, $sin.\,\psi = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}$ und $tang.\,\varphi = \frac{A}{B}$ und γ und γ' so angenommen werden, dass sie den Gleichungen $\gamma = A\beta + B\alpha + C$ und $\gamma' = A\beta' + B\alpha' + C$ entsprechen. Ferner müssen die Gleichung der Bahn und die erforderlichen Zeitgleichungen gegeben seyn, d. h. $\beta' = \varphi(\alpha') = \varphi(f(t))$ und $\vartheta = \Phi(t)$.

Werden nun die Dislocationsformeln des Raumes diesen Angaben gemäss modificirt, und in die Gleichung der bewegten Fläche substituirt, so erhält man eine Gleichung von der Form $z = \psi(x.t) \left\{ F(x, y, t) \right\}$, welche schon die erste verlangte Gleichung ist, und durch Elimination von t nach unsern frühern Vorschriften zur Gleichung für die Bahnfläche führt. Wir haben dieses Problem vollständig durchgeführt, und behalten es uns vor, bei einer andern Gelegenheit es vorzulegen.

3. Die Gleichung eines Körperraumes ist gegeben, auch jene eines fix mit demselben verbundenen Punctes. Endlich die Lage einer Rotationsachse und die Zeitgleichungen für die fortschreitende und rotirende Bewegung. Man soll die Gleichung des Bahnraumes finden, welchen der Körper während seiner Bewegung beschreibt.

Nach Anwendung unserer Dislocationsformel auf die vorgelegte Gleichung des bewegten Körpers und nach Einführung der betreffenden Zeitfunctionen in dieselbe, wodurch man eine Gleichung zwischen x', y', z' und t erhält, hat man vor allem zu untersuchen, für welche Werthe von t bei constanten x' und y', z' selbst zu einem absoluten Maximum und Minimum wird. Diese Werthe in die Gleichung für z zurücksubstituirt, liefern diesen Maximum- und Minimum-Werth selbst, und der eine von ihnen gibt den untern, der andere den obern Grenzwerth für $z = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ als gesuchte Gleichung des Bahnraums.

4. Die Gleichung eines ruhenden und eines bewegten oder auch zweier bewegter und zwar in fortschreitender und drehender Bewegung begriffener Körper sey gegeben und ebenso die betreffenden Zeitgleichungen und die Bahnen ihres Fortschreitens. Wenn nun die letztern so beschaffen sind, dass sich die beiden Körper bei ihrer Bewegung treffen, so entsteht die Frage: welcher Theil eines Körpers dringt in den andern ein, und welches ist der Zeitmoment des Ein- und Austritts?

Wir wollen sogleich die zweite Annahme als die schwierigere voraussetzen, nämlich die, dass der bewegten Körper zwei seyen. Hier muss uns wieder der Gedanke leiten, dass es für das Ergebniss der Untersuchung einerlei ist, ob wir uns beide bewegt, oder den einen in Ruhe, den andern dagegen in doppelter Bewegung begriffen vorstellen, einmal nämlich in eigener und dann noch in der von den erstern auf ihn in entgegengesetzter Richtung übertragenen fortschreitenden sowohl, als drehenden Bewegung. Die zweimalige Anwendung unserer allgemeinen Dislocationsformel auf die Gleichung des in Bewegung gedachten Körpers verschafft uns unter Einführung der Zeitgleichungen einen Functionsausdruck für z, mittelst welchem wir nach der oben gegebenen Anleitung auf den Bahnraum überzugehen vermögen. Sucht man nun den, sowohl diesem als dem ruhenden Körper gemeinschaftlichen Körperraum: so haben wir den durch Eindringung entstandenen. Ein Gleiches hat man zu thun, um den Theil des zweiten Körpers auszumitteln, welcher von dem ersten durchdrungen wird, nur hat man hier die ganze Bewegung auf den bisher in Ruhe befindlichen Körper anzuwenden. Die Zeitbestimmungen geschehen ganz im Einklange mit den früheren diessfalls gepflogenen Betrachtungen.

Aus diesen kurzen Andeutungen erhellt schon zur Genüge, dass die Lösung sämmtlicher erwähnten Aufgaben, was strenge genommen hievon der analytischen Geometrie anheimfällt, keiner Schwierigkeit unterliegen kann.

§. 32.

Aufgabe 11. Man soll ganz allgemein das Problem der perspectivischen Darstellung irgend eines geometrischen Gegenstandes, dessen Gleichung gegeben ist, auflösen, und die verschiedenen speciellen Fälle, die dabei in Betracht kommen können, aufzählen und durch Beispiele verdeutlichen.

Um dieses Problem mit der möglichsten Allgemeinheit zu lösen, wollen wir annehmen, dass zwar die Ebene xz diejenige seyn soll, auf welcher die perspectivische Darstellung zu geschehen hat, dabei aber voraussetzen, dass das Object sowohl als der Ort, wo sich das Auge befindet, d. i. der Augenpunct wo immer im Raume sich befinde. Die Coordinaten des Augenpunctes seyen beziehungsweise a, b, c, und das Object selbst wollen wir für den Augenblick als im ersten Quadranten befindlich vorstellen. Eine der einfachsten Gleichung für eine unbegrenzte gerade Linie im Raume ist bekanntlich:

$$z = (Ux + V)\left\{U'y + V'\right\}$$

und wenn sie durch zwei gegebene Puncte x, y, z, und x', y', z' hindurchgehen soll:

$$(1)\quad z = \left(\frac{x'y'' - x''y' + (y'-y)x}{x' - x''}\right)\left\{\frac{y'z'' - y''z' + (z'-z'')y}{y' - y''}\right\}.$$

Nimmt man nun an, dass sich der Punct x'', y'', z'' auf den Augenpunct bezieht, x', y', z' dagegen auf die verschiedenen Puncte des in die Perspective zu übertragenden Objectes, und erwägt man, dass es sich hier bloss um sämmtliche Durchgangspuncte der Graden durch die Ebene xz handle, für welche nothwendig y selbst den Werth Null annimmt, so erhält man vorerst wegen $x''=a$, $y''=b$, $z''=c$ und endlich $y=0$ offenbar:

$$(2) \quad z=\left(\frac{b\,x'-a\,y'+(y'-b)\,x}{x-a}\right)\left\{\frac{c\,y'-b\,z'}{y'-b}\right\}$$

und da die Grenze sich unstreitig auf $y=0$ bezieht, ergeben sich nachfolgende Bedingungsgleichungen:

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l} z=\left(\dfrac{c\,y-b\,z'}{y'-b}\right); \\ b\,x'-a\,y'+(y'-b)\,x=0. \end{array}\right.$$

Durch diese lassen sich nun mittelst Zuziehung der gegebenen Gleichung für das Object, wie wir diess sogleich zeigen werden, die Grössen x', y', z' bestimmen, wodurch man auf eine Gleichung zwischen x und y gelangt, welche Gleichung jene des gesuchten Perspectives ist.

Specielle Fälle.

1. *Fall.* Ist das geometrische Object eine in der Ebene xy liegende Curve oder Gerade, oder eine Verbindung aus diesen, und ist diese durch die Gleichung

$$(4) \quad y'=\varphi(x')$$

gegeben, so hat man aus (3), da in diesem Falle offenbar $z'=0$ ist, sofort die einfachern Bedingungsgleichungen:

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} b\,x'+(x-a)\,\varphi(x')-b\,x=0; \\ z=\left(\dfrac{c\,\varphi(x')}{\varphi(x')-b}\right). \end{array}\right.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich nun, sobald $\varphi(x')$ bekannt und die erste Gleichung nach x' auflösbar ist, stets durch Substitution des Werthes von x' in die zweite, die verlangte Gleichung zwiechen z und x finden.

Diess ist natürlich immer der Fall, wenn $\varphi(x')$ eine Function vom ersten oder zweiten Grade vorstellt, und es lassen sich daher alle in der Ebene xy liegenden, aus geraden Linien und Kreisbögen oder auch aus Kegelschnittslinien und deren Bögen, wie immer zusammengesetzten ebenen Figuren ohne irgend einen Anstand analytisch ins Perspective setzen. Bevor wir indessen das Gesagte auf Beispiele anwenden, wollen wir die allgemeine Behandlung unserer Aufgabe noch um einen Schritt weiter führen und zu diesem Behufe annehmen, dass der aus der zweiten Gleichung sich ergebende Werth von $\varphi(x')$ und x' in die erste Gleichung gesetzt werde, so ist wegen:

$$(6) \quad \varphi(x')=\left(\frac{b\,z}{z-c}\right) \text{ und hieraus } x'=\varphi'\left(\frac{b\,z}{z-c}\right),$$

$$(7) \quad b\,.\varphi'\left(\frac{b\,z}{z-c}\right)+\frac{(x-a)\,b\,z}{(z-c)}-b\,x=0 \text{ als Gleichung des Perspectives.}$$

Beispiel 1. Ein System von begrenzten oder unbegrenzten geraden Linien in Perspective zu setzen.

Die Gleichung eines Systems gerader Linien, worin die Polygone als specieller Fall mitbegriffen sind, ist bekanntlich:

$$(1)\quad y' = \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}_{\alpha_\varrho}^{n\ \alpha'_\varrho} \left\{U_\varrho x' + V_\varrho\right\} = \varphi(x');$$

Diess in die erste Gleichung substituirt, wobei zu bemerken kömmt, dass sich die Begrenzung von x' auch auf die bis dahin unbegrenzte x' erstrecket, gibt:

$$(2)\quad x' = \frac{b\,x - (x-a)\,V_\varrho}{b + (x-a)\,U_\varrho} \quad \text{und} \quad (3)\quad z = \frac{c\,(x-a)\,V_\varrho - b\,c\,x}{(x-a)(U_\varrho b + V_\varrho) + b\,(x-b)};$$

und da die Gleichung (2) durch ein blosses Hineinsetzen von α_ϱ und α_ϱ' die neuen Grenzwerthe von x liefert, hat man als vollständige Gleichung für die perspectivische Darstellung:

$$(4)\quad z = \mathcal{C}\!\!\mathcal{O}^{n} \left(\frac{(b-V_\varrho)\,\alpha_\varrho' + a\,V_\varrho}{b + (\alpha_\varrho' - a)\,U_\varrho}\right) \left\{\frac{c\,(x-a)\,V_\varrho - b\,c\,x}{(x-a)(U_\varrho b + V_\varrho) + b\,(x-b)}\right\} \left(\frac{(b-V_\varrho)\,\alpha_\varrho + a\,V_\varrho}{b + (\alpha_\varrho - a)\,U_\varrho}\right).$$

Wäre z. B. Fig. 153 ein Fünfeck gegeben, dessen Gleichung die nachfolgende (5) ist, so erhält man unter der Voraussetzung, dass hierbei $a=10$, $b=-20$, $c=30$ angenommen wird: aus Gleichung (5) jene der Perspective (6) dieses Polygons durch einfache Substitution in obige allgemeine Gleichung: nämlich

$$(5)\quad y = \left\{2x+2\right\}_{2\frac{1}{4}}^{1\frac{4}{3}} \omega \left\{\tfrac{1}{2}x+9\right\}_{1\frac{4}{3}}^{4} \omega \left\{-5\,x+31\right\}_{4}^{5} \omega \left\{x+1\right\}_{5}^{9} \omega \left\{-\tfrac{2}{3}x+16\right\}_{9}^{2\frac{1}{4}};$$

hieraus

$$(6)\quad z = \left(\frac{92}{13}\right)\left\{\frac{30}{21}x + \frac{30}{21}\right\} \omega \left(\frac{310}{47}\right)\left\{\frac{15}{34}x + \frac{135}{34}\right\} \omega \left(\frac{190}{31}\right)\left\{-150\,x + 930\right\}$$

$$\omega \left(\frac{90}{13}\right)\left\{\frac{30}{31}x + \frac{30}{31}\right\} \omega \left(\frac{28}{3}\right)\left\{-\frac{15}{32}x + \frac{45}{4}\right\}.$$

2. *Fall*. Ist ferner das Object eine im Körperraume befindliche begrenzte oder unbegrenzte Curve oder ein System aus solchen, so sind die oben abgeleitenen Formeln auf folgende Weise anzuwenden.

Die allgemeine Gleichung des Objectes ist:

$$(1)\quad z' = \varphi(x')\left\{F(y')\right\}.$$

Da nun hier augenscheinlich z nicht mehr gleich Null gesetzt werden darf, vielmehr für jedes x' und y' einen völlig bestimmten Werth hat, so müssen wir auf die perspectivischen Grundformeln dieses Paragraphs zurückgehen. Durch Substitution in die beiden Gleichungen (3) erhält man sofort:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{c.\varphi(x') - b\,F(\varphi(x'))}{\varphi(b') - b} \\ b\,x' - a\,\varphi(x') + (\varphi(x') - b)\,x = 0, \end{array}\right.$$

aus der zweiten Gleichung folgt:

$$(3)\quad x = \frac{a\,\varphi(x') - b\,x'}{\varphi(x') - b} = \Phi(x');$$

und hieraus folgt (die Lösbarkeit dieser Gleichung vorausgesetzt), unmittelbar, Behufs der Eliminirung von x', aus der erstern wegen $x' = \Phi^{-1}(x)$:

$$(4)\quad z = \frac{c\varphi\big(\Phi^{-1}x)\big) - b\,F\big(\varphi(\Phi^{-1}(x))\big)}{\varphi\big(\Phi^{-1}(x)\big) - b};$$

als Gleichung der Perspective jenes Gegenstandes.

Es entsteht nur noch die Frage, wie die Grenzwerthe von x, falls sich das Object nicht selbst begrenzen sollte, zu bestimmen seyen, und die Gleichung (3) gibt hierüber die erwünschte Auskunft, indem man in dieselbe für x' bloss α_ϱ und α'_ϱ zu substituiren braucht, um die entsprechende Perspective zu finden. Wir erhalten daher als vollständige Gleichung eines Systems begrenzter oder unbegrenzter, im Körperraume befindlichen Curven oder Geraden im Perspective:

$$(5)\quad z = \mathcal{C}\overset{n}{\mathcal{O}}\left(\frac{a\varphi(\alpha_\varrho) - b\alpha}{\varphi(\alpha_\varrho) - b}\right)\left\{\frac{c\varphi\big(\Phi^{-1}(x)\big) - b\,F\big(\varphi(\Phi^{-1}(x))\big)}{\varphi\big(\Phi^{-1}(x)\big) - b}\right\}\left(\frac{a\varphi(\alpha_\varrho') - b\alpha_\varrho'}{\varphi(\alpha_\varrho') - b}\right).$$

Wir wollen diese Formel sogleich auf ein System begrenzter gerader Linien im Raume anwenden. Die allgemeine Gleichung eines Systems gerader begrenzter Linien im Raume ist bekanntlich:

$$(1)\quad z = \mathcal{C}\overset{n}{\mathcal{O}}\left(\Big\{U_\varrho x + V_\varrho\Big\}_{\alpha_\varrho}^{\alpha_\varrho'}\Big\{U_\varrho' y + V_\varrho'\Big\}\right)$$

Wird nun obigen Vorschriften gemäss verfahren, so erhält man sofort als Gleichung des Perspectives dieser Linien;

$$(2)\quad z = \mathcal{C}\overset{n}{\mathcal{O}}\left(\frac{(aU_\varrho - b)\alpha_\varrho + aV_\varrho}{U_\varrho\alpha_\varrho + V_\varrho - b}\right)\left\{\frac{(U_\varrho x + V_\varrho)(c - bcU_\varrho' - V_\varrho') + (aU_\varrho + V_\varrho - b)V_\varrho'}{aU_\varrho + V_\varrho - b}\right\}$$
$$\left(\frac{(aU_\varrho - b)\alpha_\varrho' + nV_\varrho}{U_\varrho\alpha_\varrho' + V_\varrho - b}\right).$$

3. *Fall.* Ist endlich das in Perspective zu setzende Object irgend ein im Raume befindlicher Körper, so liesse sich dieser Fall stets auf den zweiten Hauptfall dadurch zurückführen, dass man vorerst diejenige Begrenzungscurve ausmittelt, unter welcher ihn das Auge in 0 erblickt, und sodann nach den oben gegebenen Vorschriften verfährt. Allein wir vermögen mit Hilfe unserer allgemeinen Formeln diese Aufgabe auch noch unabhängig von jener vorhergängigen Bestimmung und zwar auf folgende Weise zu lösen. Man bestimme aus der ersten Gleichung des Systemes (3) den Werth von y', wodurch man mittelst Substitution in die zweite wegen:

$$(1)\quad y' = \frac{bx' - bx}{a - x};\quad (2)\quad z = \frac{c(x' - x) - (a - x)z'}{x' - a},$$

und wenn $\qquad (3)\quad z' = F'(x', y')$

als Gleichung der Oberfläche gesetzt wird

$$(4)\quad z = \frac{c(x' - x) - (a - x)F'\left(x,\ b\left(\frac{x' - x}{a - x}\right)\right)}{x' - a} = \Phi(x, x').$$

Wird nun diese letztere Gleichung nach x' differenzirt, und sucht man diejenigen Werthe für x', für welche z selbst ein Maximum und Minimum wird, sie seyen m und m', so ergibt sich als Gleichung der verlangten Perspective:

$$(5) \quad z = \Phi(x, m) \,\omega\, \Phi(x, m');$$

wobei noch zu bemerken, dass m und m' als Functionen von x auftreten, und dass sich in den meisten Fällen beide Disjunctionsglieder in eines zusammenziehen lassen.

§. 33.

Die schon früher in Bezug auf Fig. 137 und Fig. 138 für die Ebene abgeleiteten Formeln können in gleicher Weise einer ganzen Klasse von Formänderungen im Körperraume zum Grunde gelegt werden, die für nicht minder praktisch wichtig und interessant angesehen werden dürften. Man denke sich nämlich, um sich von dieser Art von Formänderungen einen Begriff zu machen, in der Ebene xy, Fig. 154, irgend ein geometrisches Object, eine Curve EBD z. B. oder die von ihr begrenzte Fläche, deren Gleichung gegeben seyn soll. Irgend eine ihrer auf der Achse y senkrechten Ordinaten AB, und so auch alle übrigen mit ihr parallellaufenden, wie MN, denke man sich von der Linie ED an eine solche Krümmung annehmend, dass diese einer gegebenen Gleichung zwischen x' und z' entsprechen, und dabei durchaus nach dem von uns aufgestellten Begriffe des Parallelismus zu einander vor wie nach parallel bleiben. Ein übereinstimmender Vorgang im gemeinen Leben findet Statt beim gleichmässigen Aufrollen oder Biegen dünner lamellenartiger Körper oder biegsamer Flächen. — Mit Voraussetzung des schon früher Gesagten ist daher:

1) $z' = \varphi(x')$ die Gleichung von AC;

2) $x - \delta = \Phi(x') = \int_d^{x'} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{d.\varphi(x')}{dx'}\right)^2}$; die Bedingungsgleichung für die Gleichheit der Bögen;

3) $y = F(x)$ die Gleichung der Linie AB in der Ebene xy.

Da nun offenbar $y = y'$, so ist erstlich wegen $x = d + \Phi(x')$, wenn dieser Werth in die letzte Gleichung gesetzt wird:

$$(1) \quad y' = F(d + \Phi(x'));$$

d. i. die Gleichung für die Projection DFE.

Ferner gibt die letztere Gleichung. $x' = \Phi^{-1}(F^{-1}(y) - d)$ und diesen Werth in die erste der obigen Gleichungen gesetzt:

$$z' = \varphi\left[\Phi^{-1}(F^{-1}(y)) - d\right].$$

Nun ist aber y nicht unbegrenzt, sondern von x' abhängig nach der Gleichung (1). Man erhält demnach durch Begrenzung

$$(2) \quad z' = \left(F(d + \Phi(x'))\right) \dot{\Big\{} \varphi\left(\Phi^{-1}(F^{-1}(y) - d)\right)\Big\}$$

die verlangte Gleichung unserer Curve im Raume. — Soll man endlich die Gleichung der aufgerollten oder gekrümmten Fläche selbst aufstellen, so ist zu erinnern, dass in diesem Falle die Veränderliche y für einen bestimmten Werth von x nicht bloss eines, sondern unendlich vieler zwischen bestimmten aber veränderlichen Grenzen liegenden Werthe fähig sey, und dass die betreffenden Grenzwerthe, als von x abhängig, wieder durch die Projection, d. h. durch die Gleichung (1), die in diesem Falle immer eine doppelförmige Function seyn muss, gegeben sind. Bezeichnet man diese Einzelnwerthe von F durch Accentuirung, so erhält man sofort:

$$(3) \quad z' = F'(d+\Phi(x'))\left\{\Phi^{-1}(F'(y)-d)\right\} F''(d+\Phi(x'));$$

welche demnach die Gleichung für die gekrümmte Fläche ist.

§. 34.

Aufgabe 12. Es sey die Gleichung irgend einer in der Ebene xy liegenden Curve oder eines Flächenraumes gegeben, auch noch die Gleichung einer zur Ebene xz parallel laufenden Curve als Leitlinie. Man soll unter Voraussetzung, dass sich das zuerst erwähnte Object nach der besagten Leitlinie krümme und über die Ebene xy in den Coordinatenraum erhebe, die Gleichung des so veränderten Gegenstandes finden.

Bevor ich auf die Auflösung einer speciellen Aufgabe übergehe, will ich noch eine andere, von obiger verschiedene, allgemeine Behandlung dieser Aufgabe, die mir in vielen Fällen vor jener einen Vorzug zu verdienen scheint, vorausgehen lassen. — Es sey die Gleichung der in der Ebene xy liegenden Curve oder Fläche, so wie jene der Leitlinie, die man sich in der Ebene xy vorzustellen hat, die folgende:

$$(1) \quad y = F(x) = F'(x)\,\omega\,F''(x); \quad \text{daher} \quad (2) \quad y = F(x)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}F''(x) \quad \text{und endlich} \quad (3) \quad z' = f(x').$$

Vor Allem ist hier zu bemerken, dass von den Coordinaten des Punctes M, z' neu zuwächst, x in x' übergeht, y dagegen unverändert bleibt, d. h. $y = y'$ zu setzen ist. Die Änderung, welche x' und z' zu erfahren haben, hängt augenscheinlich von der Rectification der Leitlinie AC ab, indem nämlich $x' - d$ nothwendig dem von d bis x' genommenen Integralausdrucke für die Länge der Curve gleich seyn muss. Bezeichnet man demnach der Kürze wegen

$$(4) \quad S = \int dx' \sqrt{1 + \frac{df(x')}{dx}} = \Phi(x');$$

so hat man sofort

$$(5) \quad x - d = \Phi(x') - \Phi(d)$$

oder:

$$x = d - \Phi(d) + \Phi(x').$$

Bestimmt man aus (3) den Werth von x', und setzt ihn in die vorige Gleichung (5), so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & x = d - \Phi(d) + \Phi(f^{-1}(z')); \\ & y = y'; \\ & x = d + \Phi(x') - \Phi(d). \end{aligned} \right.$$

Werden von diesen drei Gleichungen einmal die beiden ersten, sodann die beiden letzten in die Gleichung (1) oder (2) substituirt, so erhält man zwei neue Gleichungen, die zusammen jene der übergebogenen oder gekrümmten Curve oder der betreffenden Fläche repräsentiren, d. h. man erhält beziehungsweise (7) und (8):

$$(7)\quad z = \Big(F\big(d-\Phi(d)+\Phi(x')\big)\Big)\left\{f\Big(\Phi^{-1}\big(\Phi(d)-d+F^{-1}(y')\big)\Big)\right\};$$

$$(8)\quad z = \Big(F'\big(d-\Phi(d)+\Phi(x')\big)\Big)\left\{f\Big(\Phi^{-1}\big(\Phi(d)-d+F^{-1}(y')\big)\Big)\right\}\Big(F''\big(d-\Phi(d)+\Phi(x')\big)\Big).$$

Nachfolgendes specielles Beispiel wird hoffentlich das Gesagte zur Genüge erläutern.

Beispiel 1. Es sey Fig. 155 und Fig. 156 ABC eine in der Ebene xy liegende, durch AC begrenzte Parabel, deren Gleichung nach den aus der Figur ersichtlichen und den sonst gebräuchlichen Beziehungen der Bestimmungstücke folgende ist:

$$(9)\quad y = \left\{b \pm \sqrt{p(n-x)}\right\}_m^n = F(x);$$

und die Gleichung des entsprechenden Flächenraums:

$$(10)\quad z = \left(\left\{b \pm \sqrt{p(n-x)}\right\}_m^n\right)\left\{\tfrac{0}{0}\right\}.$$

Diese parabolische Curve sowohl als wie die Fläche nehme nun eine solche Krümmung an, dass jede mit x parallel laufende Abscisse ober- oder unterhalb den Bogen einer Kettenlinie beschreibe, deren Gleichung als jene der Directrix gegeben seyn soll. Hat letztere ihren Scheitel in A, so ist bekanntlich:

$$(11)\quad z = a \,.\, l\left(\frac{a+(x-m)+\sqrt{2a(x-m)+(x-m)^2}}{a}\right) = f(x).$$

Ferner ist bekanntlich das Integral des Bogens unter dieser Voraussetzung, d. h.

$$(12)\quad S = \sqrt{2a(x-m)+(x-m)^2} = \Phi(x).$$

Da nun durch Reversion $F^{-1}(y) = n - \left(\frac{y-b}{p}\right)^2$ und $\Phi^{-1}(s) = m - a \pm \sqrt{a^2+s^2}$, und $\Phi(m) = 0$ ist, so erhält man durch Substitution nach Angabe der Gleichungen (7) und (8) offenbar:

$$(13)\quad z' = \left(b \pm \sqrt{p}\left[n+\sqrt{2a(x-m)+(x-m)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\left\{a\, l\left[\frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+\left(n-m-\left(\frac{y-b}{p}\right)^2\right)^2}+\sqrt{n-m-\left(\frac{y-b}{p}\right)^2}\right)\right]\right\},$$

wozu man noch die analoge Gleichung für die gekrümmte parabolische Fläche, die hier nur der Wiederholung wegen weggelassen wird, nach der von uns angeführten Bezeichnung anzuschreiben von selbst vermögen wird.

§. 35.

Aufgabe 13. Man soll eine im Raume befindliche und durch ihre Gleichung gegebene krumme Fläche, oder einen dergleichen Körperraum durch die Substitution formändernder Formeln in die entsprechende Gleichung dergestalt verändern, dass deren sämmtliche Ordinaten, ohne ihre Fusspuncte zu verändern, eine gegebene Krümmung annehmen, d. h. mit einer als Directrix angenommen Curve im Raume parallel laufen.

Es sey die Gleichung der gegebenen Oberfläche (denn jene eines Körperraumes hat genau dieselben Veränderungen zu erleiden) die unter (1) angeführte; ferner jene der Leitlinie die mit (2) bezeichnete, und endlich sey die unter (3) angeführte das Integrale des Bogens der letztern, welches wiewohl zunächst als Function von ξ und v auftretend, gleichwohl mit Hülfe der Grenzgleichung von (2) sofort auch als Function von ξ allein dargestellt werden kann.

$$(1) \quad z = F(x, y), \quad (2) \quad \zeta = \varphi(\xi) \left\{ \dot{f}(v) \right\} \quad \text{und} \quad (3) \quad s = \Phi(\xi).$$

Vorerst hat man nun zu untersuchen, welche die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Leitlinie mit der Ebene x, y seyen, und dieses findet man leicht, wenn man $\zeta = 0$ setzt und mittelst (2) die entsprechenden Werthe für v und ξ sucht. Diess geschicht durch Übertragung der Functionszeichen bei den Gleichungen $v = \varphi(\xi)$ und $\zeta = f(v)$; daher $\xi = \varphi^{-1}(v)$ und $v = f^{-1}(\xi)$ und da $\zeta = 0$ ist, so hat man $v = f^{-1}(0)$ und $\xi = \varphi^{-1}(f^{-1}(0))$. Wir wollen der Kürze wegen diese bekannten Werthe von v und ξ durch β und α bezeichnen.

Die Natur der Aufgabe fordert ferner, dass der von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \xi$ genommene Werth des Integrals (3) und somit die Länge des Bogens S dem z als alleinigen Repräsentanten der Ordinaten gleich sey. Um daher das einem gewissen x entsprechende ξ zu finden, hat man ξ zu bestimmen aus der Gleichung:

$$s = z = \Phi(\xi) - \Phi(\alpha); \quad \text{also} \quad (4) \quad \xi = \Phi^{-1}(z + \Phi(\alpha)).$$

Mittelst dieser letztern Gleichung und jener von (2) findet man noch weiter:

$$(5) \quad v = \varphi\big(\Phi^{-1}(z + \Phi(\alpha))\big) \quad \text{und} \quad (6) \quad \zeta = f\big[\varphi\big(\Phi^{-1}(z + \Phi(\alpha))\big)\big].$$

Die Gleichungen (4), (5) und (6) geben uns also für jedes z die Coordinaten eines gleich langen Stückes der Leitcurve von der Ebene xy an gerechnet. Da nun aber jede solche Ordinate z, wiewohl mit ihr congruibel, doch nicht mit ihr zusammenfallen soll, vielmehr ohne ihren Fusspunct 0 zu verlassen, mit ihr nur gleich laufen soll; so ergibt sich hieraus, dass noch folgende Beziehungen Platz zu greifen haben:

$$z' = \zeta; \quad y' = v + y - \beta \quad \text{und} \quad x' = \xi + x - \alpha;$$

oder mittelst Substitution von (4), (5), (6):

$$z' = f\big[\varphi\big(\Phi^{-1}(z + \Phi(\alpha))\big)\big]; \; y' = y - \beta + \varphi\big(\Phi^{-1}(z + \Phi(\alpha))\big) \; \text{und} \; x' = x - \alpha + \Phi^{-1}(z + \Phi(\alpha)).$$

Sucht man nun aus der ersten dieser drei Gleichungen durch Übertragung des Functionszeichens, d. h. durch Reversion den Werth von z, und substituirt ihn in die beiden andern, indem man zugleich x und y sucht; so erhält man:

$$(7)\quad \begin{cases} z = \Phi\left(\varphi^{-1}(f^{-1}(z'))\right) - \Phi(\alpha); \\ y = y' + \beta - f^{-1}(z'); \\ x = x' + \alpha - \varphi^{-1}(f^{-1}(z')), \end{cases}$$

die drei formändernden Formeln, welche in $z = f(x, y)$ gesetzt, die verlangte Wirkung hervorbringen. — Ein Beispiel möge diesen Paragraph beschliessen.

Beispiel. Es sey ein durch Rotation entstandenes Paraboloid vom Parameter p und der Höhe h durch dessen Gleichung (1) gegeben. Als Directrix werde eine durch den Ursprung gehende *Neil*'sche Parabel, deren Ebene zur Ebene xz den Neigungswinkel ω einschliesst, angenommen. Ihre Gleichung und der Ausdruck für ihre Bodenlänge sey in (2) und (3) ausgedrückt. Man soll die Gleichung des in seiner Form so wesentlich umgeänderten Paraboloids ableiten.

$$(1)\quad z = h - \frac{1}{p}(x^2 + y^2) = F(x, y);$$

$$(2)\quad \zeta = (tang.\,\omega\,\xi)\left\{\sqrt{p\,sin.\,\omega^3 \,.\, v^3}\right\} = \varphi(\xi)\left\{f(v)\right\};$$

$$(3)\quad S = \frac{8}{27p}\left(\left(1 + \frac{9}{4}p\,sin.\,\omega\,\xi\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \Phi(\xi).$$

Nun ist zufolge des Gesagten $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\Phi(\alpha) = 0$:

$$\begin{cases} f^{-1}(z') = cosec.\,\omega\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{p}}; \\ \varphi^{-1}(\xi) = cotg.\,\omega\,\xi; \quad \text{demnach} \\ \Phi\left(\varphi^{-1}(f^{-1}(z))\right) = \dfrac{8}{27p}\left(\left(1 + \frac{9}{4}p\,\overline{cosec.\,\omega}^2\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{p}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right); \end{cases}$$

$$\text{daher}\quad \begin{cases} z = \dfrac{8}{27p}\left(\left(1 + \frac{9}{4}p\,\overline{cosec.\,\omega}^2\sqrt[3]{\dfrac{z'^2}{p}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right); \\ y = y' - cosec.\,\omega\sqrt[3]{\dfrac{z'^2}{p}}; \\ x = x' - \dfrac{cos.\,\omega}{\overline{sin.\,\omega}^2}\sqrt[3]{\dfrac{z'^2}{p}}. \end{cases}$$

Diese so eben gefundenen Gleichungen in die Gleichung (1) der parabolischen Fläche gesetzt, gibt:

$$(4)\quad \frac{8}{27p}\left(\left(1 + \frac{9}{4}p\,\overline{cosec.\,\omega}^2\sqrt[3]{\frac{z^2}{p}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = h - \frac{1}{p}\left(\left(y' - cosec.\,\omega\sqrt[3]{\frac{z'^2}{p}}\right)^2 + \left(x' - \frac{cos.\,\omega}{\overline{sin.\,\omega}^2}\sqrt[3]{\frac{z^2}{p}}\right)^2\right).$$

Bestimmt man nun aus dieser Gleichung die Veränderliche z oder da dieses mit Schwierigkeiten verknüpft wäre, etwa y oder x, so haben wir unsere Gleichungen auf eine Form gebracht, in welcher sich sämmtliche Beziehungen des durch selbe repräsentirten Gegenstandes leicht ermitteln lassen.

§. 36.

Es darf als eine merkwürdige Eigenthümlichkeit bezeichnet werden, dass unsere Dislocationsformeln des Raumes für keine Annahme der zum Grunde liegenden Bestimmungsstücke α, α', β, β', γ, γ', φ, φ', ψ, ψ' und δ, ϑ in die höchst einfachen Beziehungen $\left\{\begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = -z' \end{array}\right.$ oder in die $\left\{\begin{array}{l} x = x' \\ y = -y' \\ z = z' \end{array}\right.$ überzugehen vermögen. Es können daher die erwähnten Annahmen, falls sie in eine Gleichung substituirt werden, nie blossen Ortsveränderungen entsprechen, sondern es lässt sich mit aller Bestimmtheit noch vor jeder weitern Betrachtung aussagen, dass jedenfalls damit auch zugleich eine Formänderung bedingt seyn müsse. Eine genauere, ganz nahe liegende Erwägung dieses Gegenstandes zeigt ferner, dass die formändernde Wirkung dieser Substitution darin besteht, alle jene geometrischen Objecte, die dessen fähig sind, in ihre symmetrischen oder Gegenformen umzuwandeln, und sie zugleich bei der erstern Annahme, aus dem ersten Octanten in den achten, bei der Substitution der zweiten Formel dagegen aus dem ersten in den vierten Octanten zu übertragen. So ist z. B.

$$(1)\quad 3569\,z^2 + 10000\,y^2 + 3600\,x^2 \pm 10000\,yz - 4320\,xz + 9000\,z - 90000 = 0$$

die Doppelgleichung zweier symmetrischer elliptischer schiefer Kegelflächen, deren Bestimmungsstücke $a=5$, $b=3$, $\gamma=20$, $\beta=10$, $x=12$, von denen der eine Kegel seine Spitze im ersten, der andere im vierten Octanten hat. — Ebenso ist bekanntlich:

$$(2)\quad z = \left\{\sqrt{p^2-x^2}\right\}_{-p}^{+p} \left\{2\,rm\pi q + mr\,arc.\,cos.\,\frac{y}{p}\right\} \left\{\sqrt{p^2-x^2}\right\}_{-p}^{+p}$$

die Gleichung für die rechtsgewundene Schraubenlinie und wegen

$$arc.\,cos.\left(-\frac{y}{p}\right) = \pi - arc.\,cos.\,\frac{y}{p}$$

$$(3)\quad z' = \left\{\sqrt{r^2-x^2}\right\}_{-p}^{+p} \left\{(2q+1)\,mr\pi - mr\,arc.\,cos.\,\frac{y}{p}\right\} \left\{\sqrt{r^2-x^2}\right\}_{-p}^{+p}$$

jene für eine links gewundene.

Der Umstand, dass mit dieser so wichtigen Formänderung zugleich eine Ortsveränderung verknüpft ist, muss als ein störendes Hinderniss besonders dann erscheinen, wenn es sich handelt, auszumitteln, ob einem geometrischen Objecte von noch unbekannter Form, welches durch seine Gleichung gegeben ist, eine symmetrische oder Gegenform zukomme; denn hierbei wird man schwer zu ermitteln vermögen, wieviel von der Veränderung auf Rechnung der Ortsveränderung, wie viel auf Kosten der Formänderung zu setzen sey.

Um diesen Übelstand zu beheben, werden wir durch Anwendung unserer vielfach bewährten Dislocationsformeln, die durch diese Substitution hervorgebrachte Ortsveränderung möglichst zu paralysiren, und den Gegenstand wieder in diejenige Lage zurück zu versetzen suchen, in der er, falls derselbe keiner Formänderung fähig wäre, mit dem ursprünglich gegebenen genau congruiren müsste.

Bei dem bereits so häufig in Anwendung gebrachten Gebrauche unserer Dislocation auf Ortsveränderungen der verschiedensten Art, können wir uns ganz einfach mit dem Bemerken begnügen, dass man diessfalls die Formeln (1) erhält:

$$(1)\quad \begin{cases} x = \alpha + (x' - \alpha)\cos.2\varphi + (y' - \beta)\sin.2\varphi; \\ y' = \beta + (x - \alpha)\sin.2\varphi - (y' - \beta)\cos.2\varphi; \\ z = -(-z') = z'. \end{cases}$$

Ist demnach (2) $z = F(x, y)$ die Gleichung irgend einer Oberfläche im Raume, so ist

$$(3)\quad z' = F\big((\alpha + (x' - \alpha)\cos.2\varphi + (y - \beta)\sin.2\varphi),\ (\beta + (x - \alpha)\sin.2\varphi - (y' - \beta)\cos.2\varphi)\big)$$

jene deren symmetrischen oder Gegenform.

Ist dagegen (3) mit (2) identisch, d. h. erleidet die Gleichung (2) durch die angeführte Substitution keine Änderung, so ist auch jenes geometrische Object durchaus keiner Gegenform fähig, wie z. B. der senkrechte Kegel, das Ellipsoid u. s. w.

Wir haben uns also durch die Betrachtung dieses Paragraphes ein sicheres Mittel verschafft, geometrische Objecte auf ihre symmetrische Form zu untersuchen.

§. 37.

Und so möge sich denn mit der voranstehenden Betrachtung der Cyclus der von uns behandelten Aufgaben, und mit ihm unsere diessfälligen Untersuchungen selbst abschliessen. Haben sie dazu beigetragen, die Möglichkeit einer nützlichen Anwendung unserer Begriffszeichen deutlicher und vollständiger, als diess durch unsere frühere Arbeit uns möglich war, dem geehrten Leser vor Augen zu legen, — so ist ihr Zweck, der Hauptsache nach, erreicht. Denn nicht diese Probleme als solche, sondern die von ihnen ausgehende Hindeutung auf das, was sich bei noch vollkommenerer Durchbildung und Abrundung unsers Algorithmus würde erwarten lassen, lag zunächst, wenn nicht ausschliesslich in unserer Absicht. Es wird uns daher wohl auch nicht zum Vorwurfe gereichen, dass wir ein oder die andere Aufgabe in etwas aphoristischer Weise behandelt und durchwegs die Voraussetzung festgehalten haben, jede nur sonst mögliche und zulässige Rechnungsoperation als bereits ausgeführt zu betrachten.

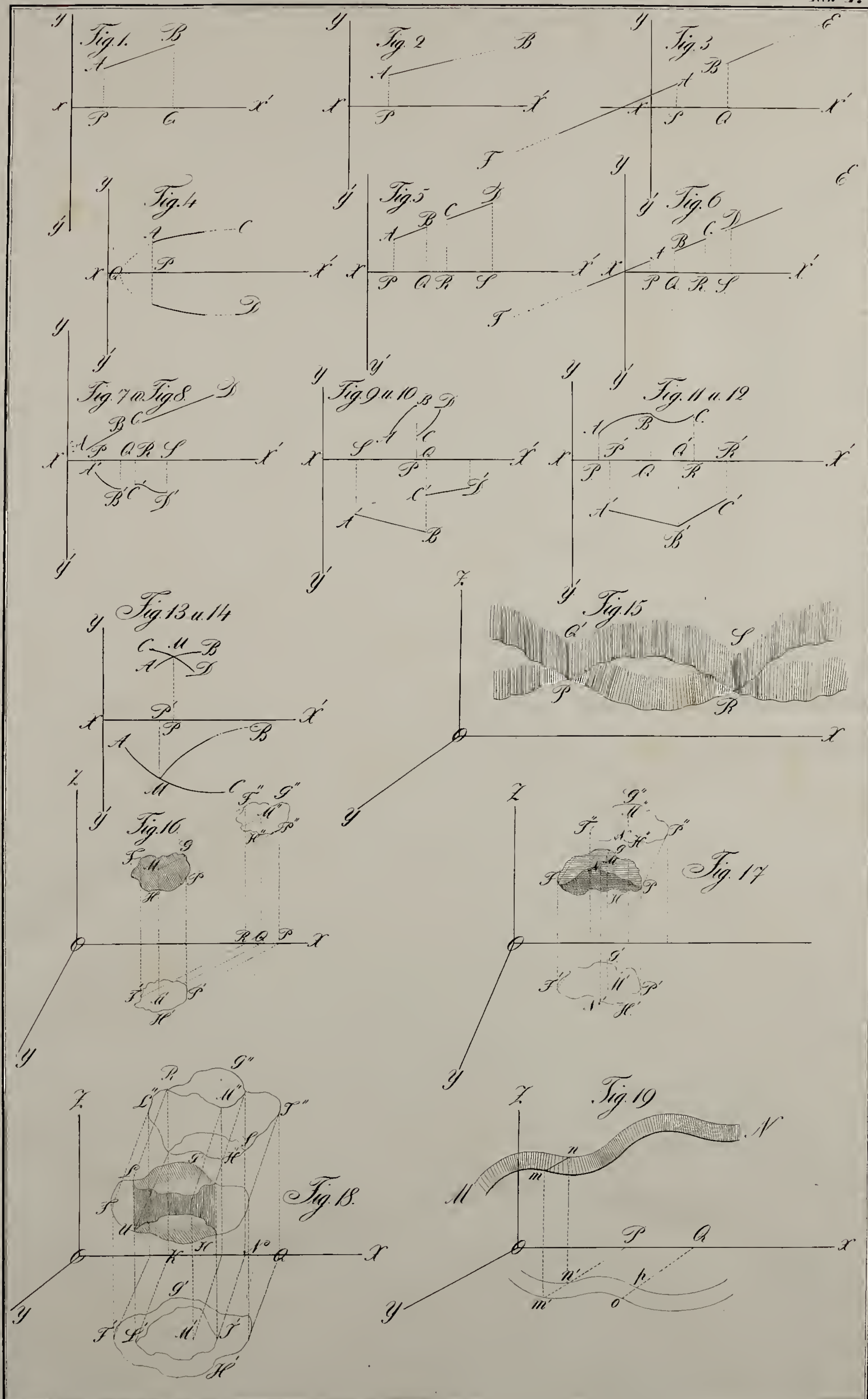
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7 u. Fig. 8
Fig. 9 u. 10
Fig. 11 u. 12
Fig. 13 u. 14
Fig. 15
Fig. 16.
Fig. 17
Fig. 18.
Fig. 19

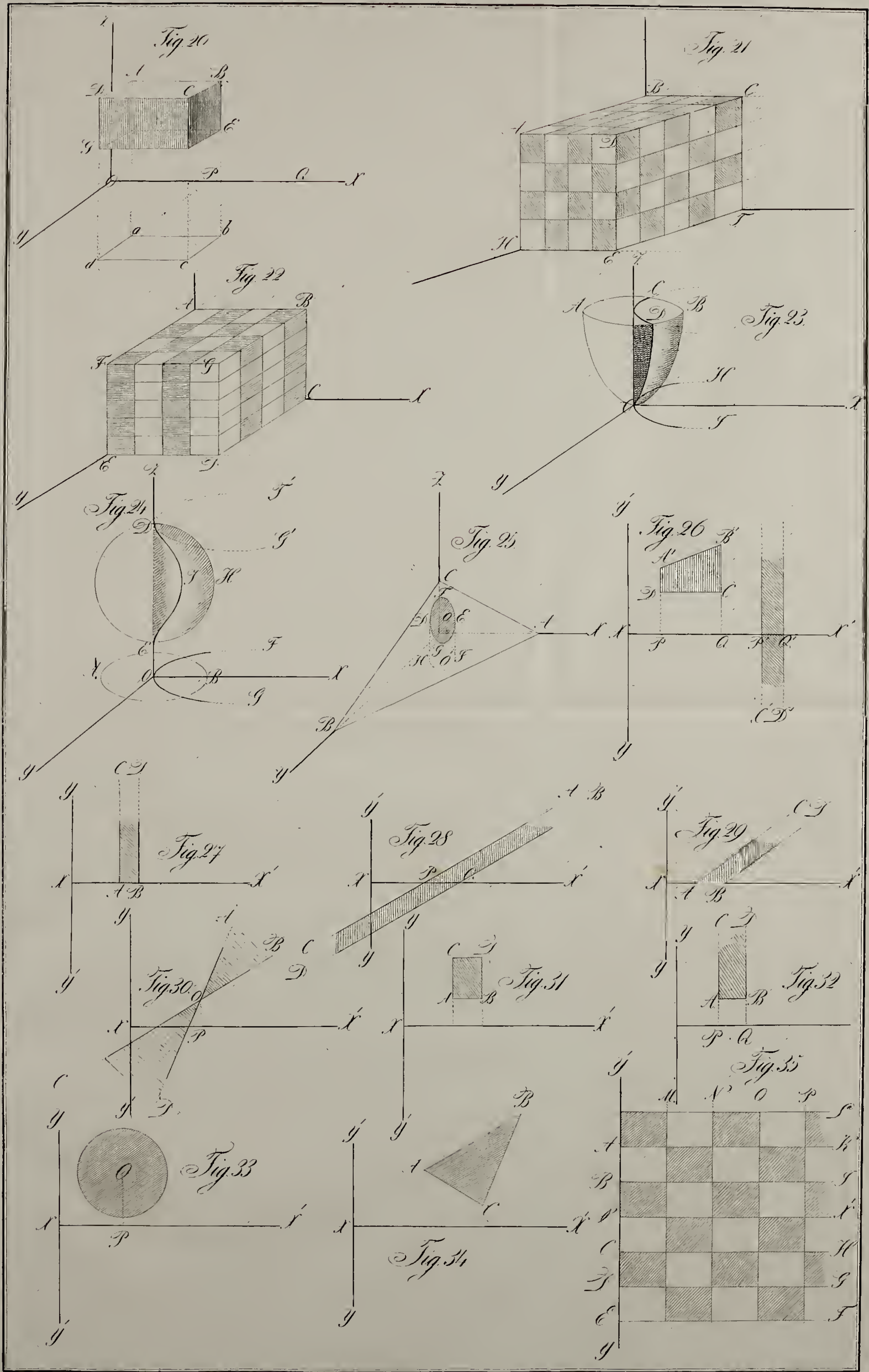
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35

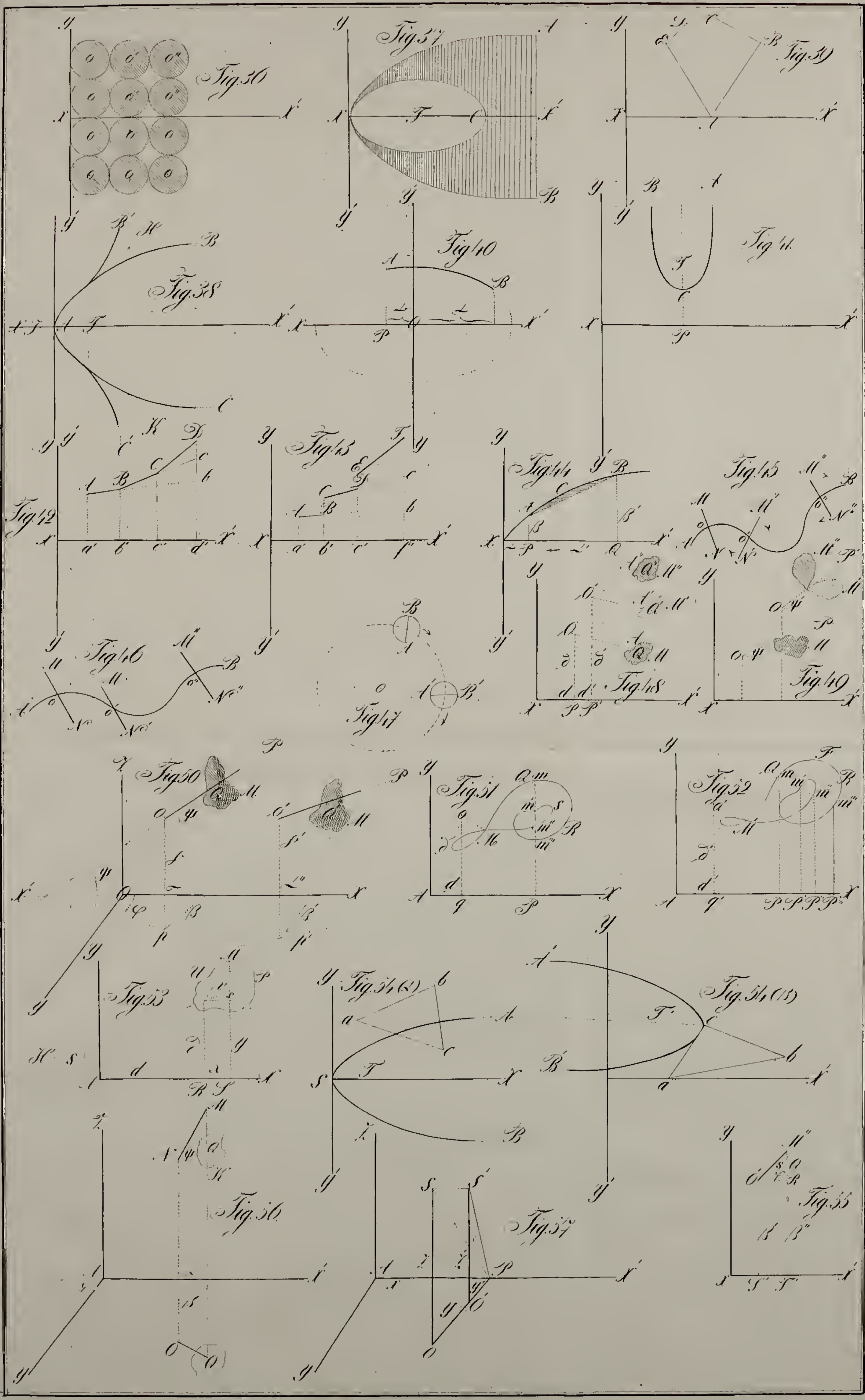

Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54 (a)
Fig. 54 (b)
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

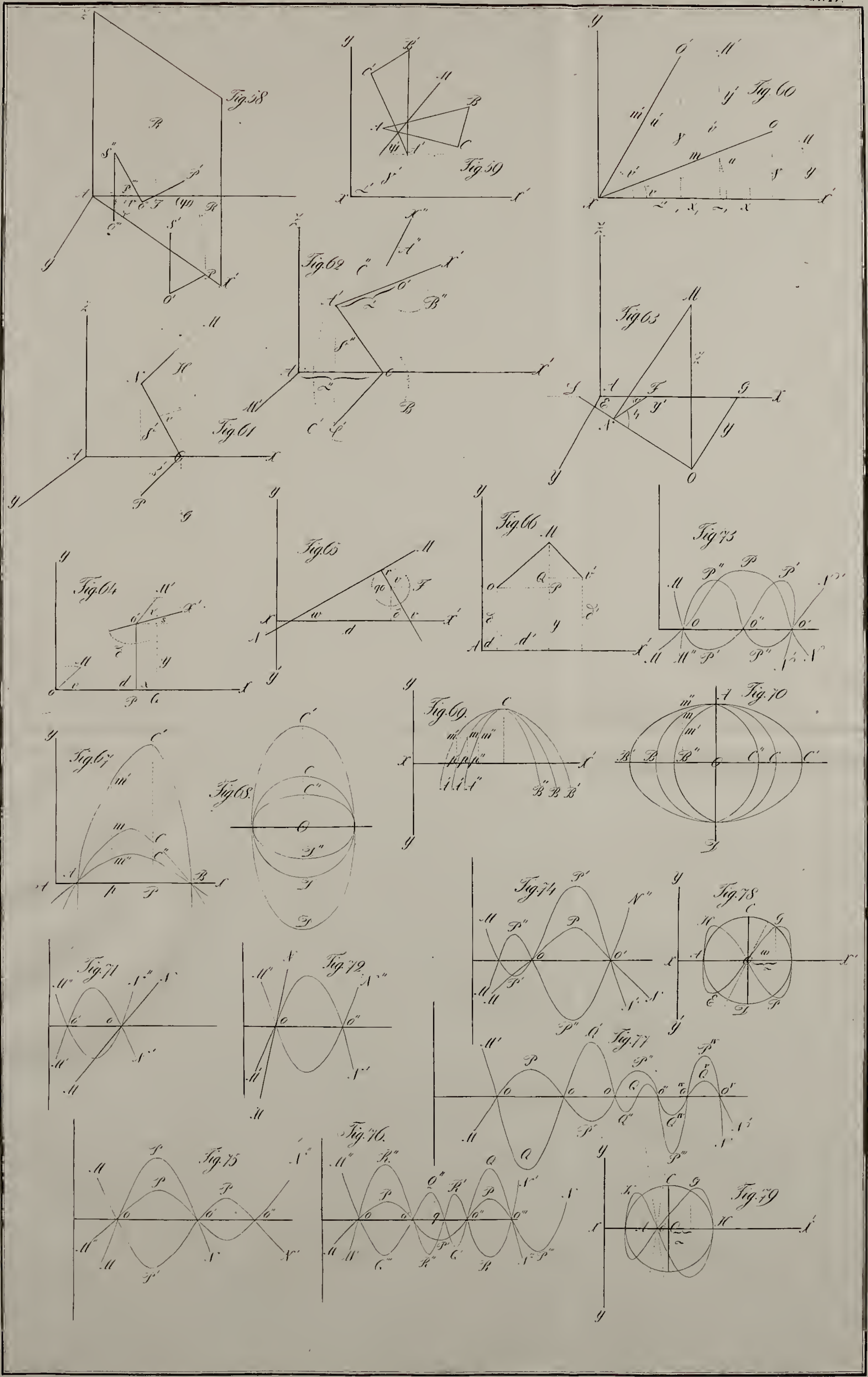
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79

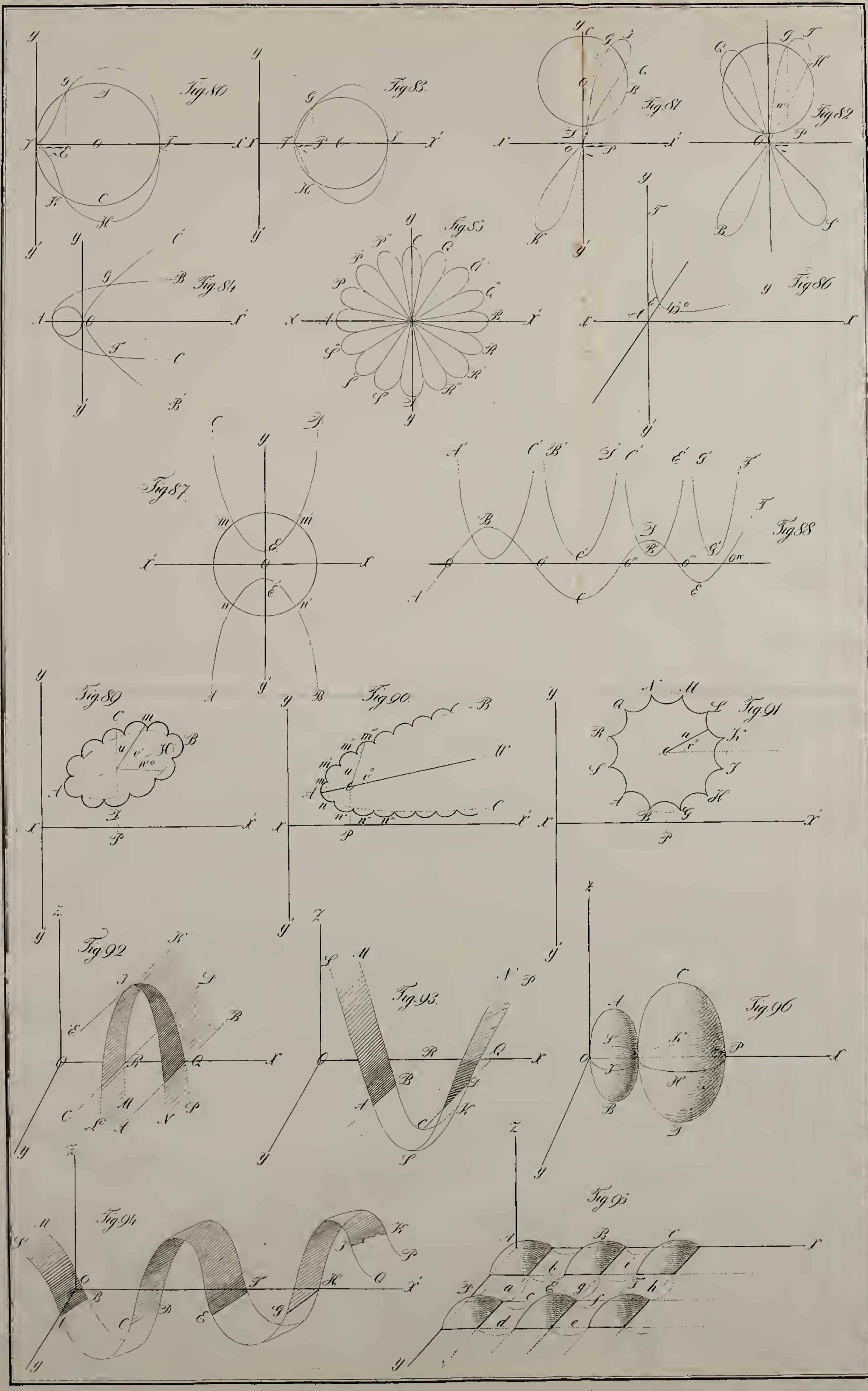
Fig. 80.
Fig. 83.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 96.
Fig. 94.
Fig. 95.

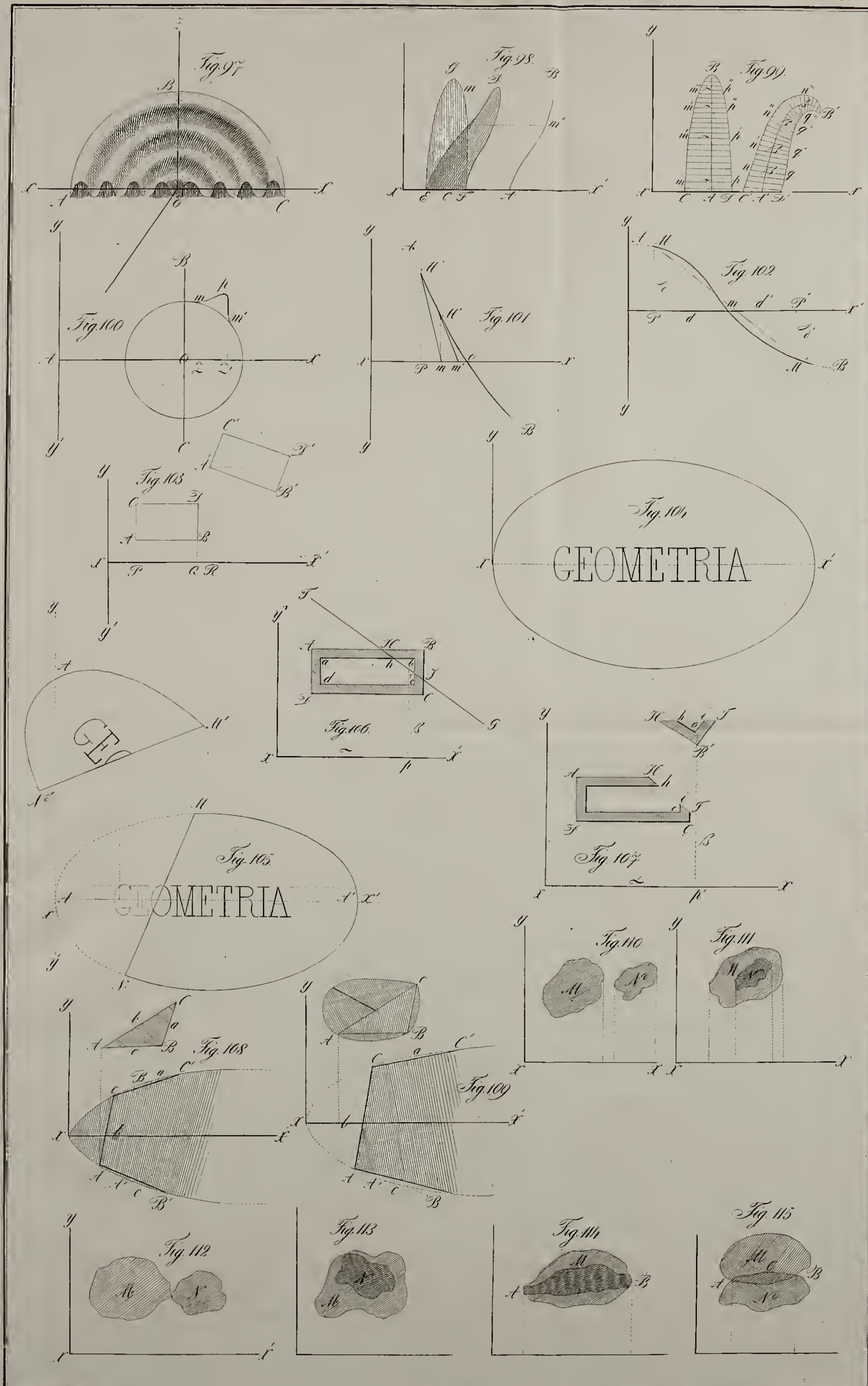
Fig. 97
Fig. 98
Fig. 99
Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
GEOMETRIA
Fig. 105
GEOMETRIA
Fig. 106
Fig. 107
Fig. 108
Fig. 109
Fig. 110
Fig. 111
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115

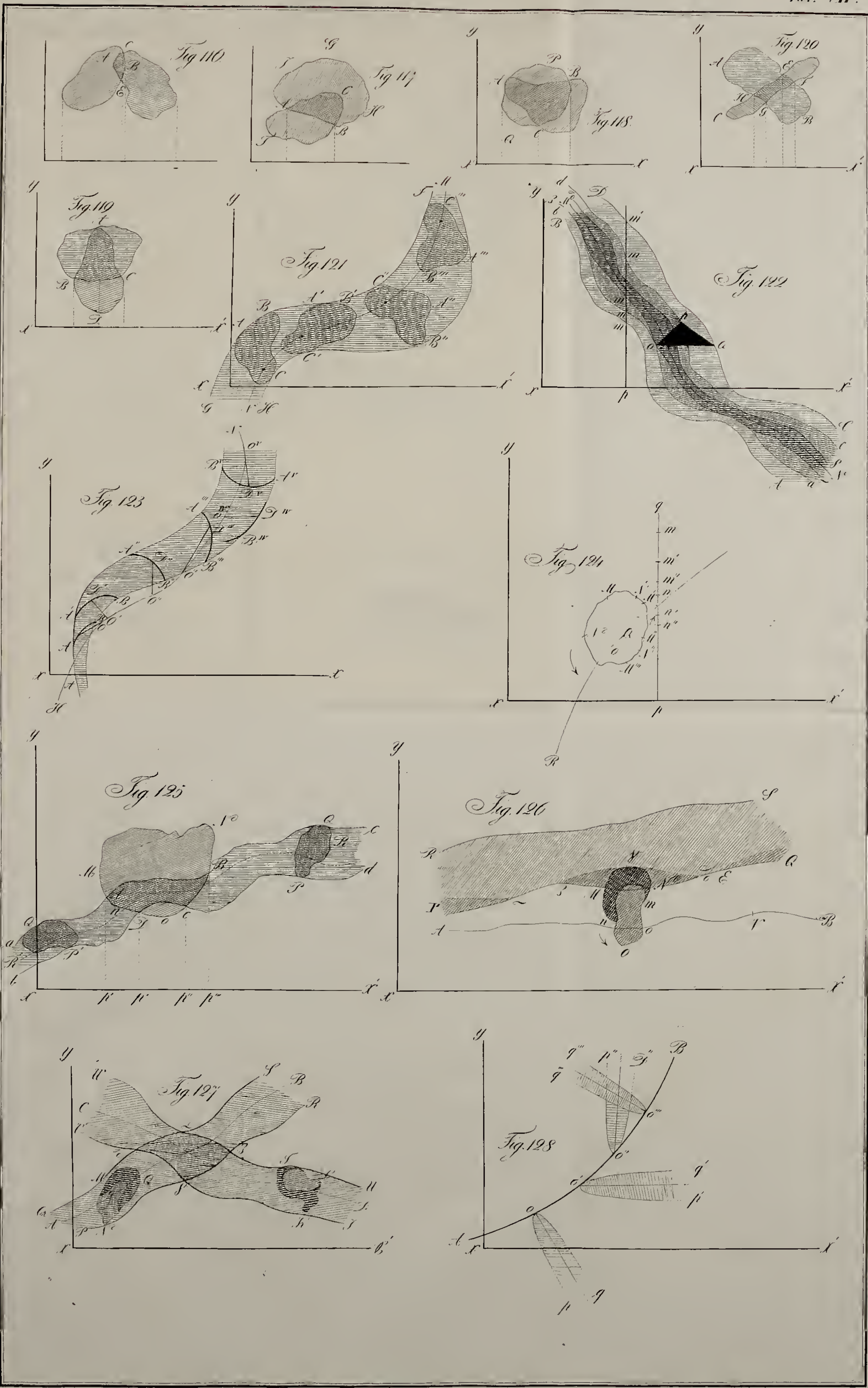
Fig. 110
Fig. 117
Fig. 118
Fig. 120
Fig. 119
Fig. 121
Fig. 122
Fig. 123
Fig. 124
Fig. 125
Fig. 126
Fig. 127
Fig. 128

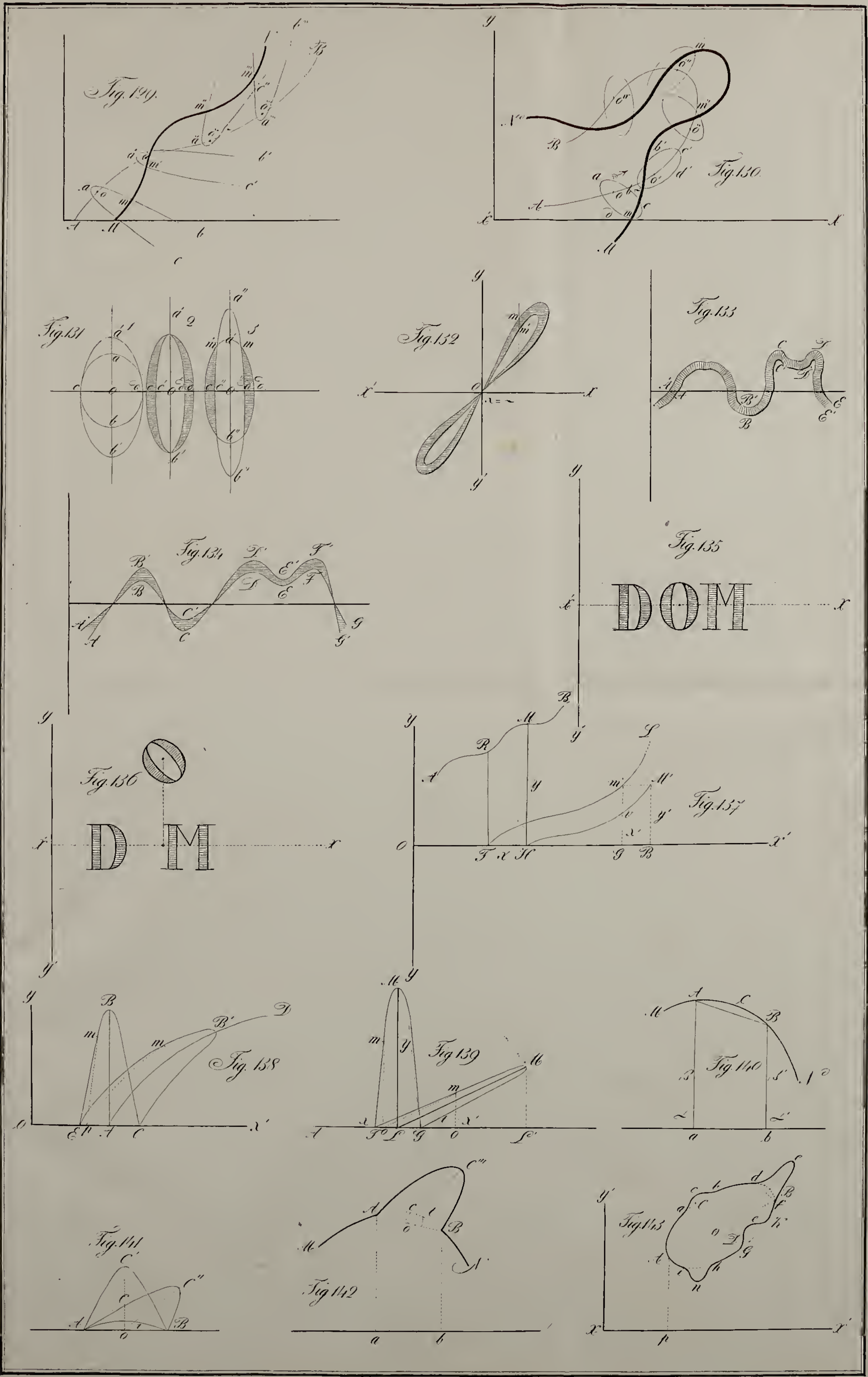
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131
Fig. 132
Fig. 133
Fig. 134
Fig. 135
DOM
Fig. 136
D M
Fig. 137
Fig. 138
Fig. 139
Fig. 140
Fig. 141
Fig. 142
Fig. 143

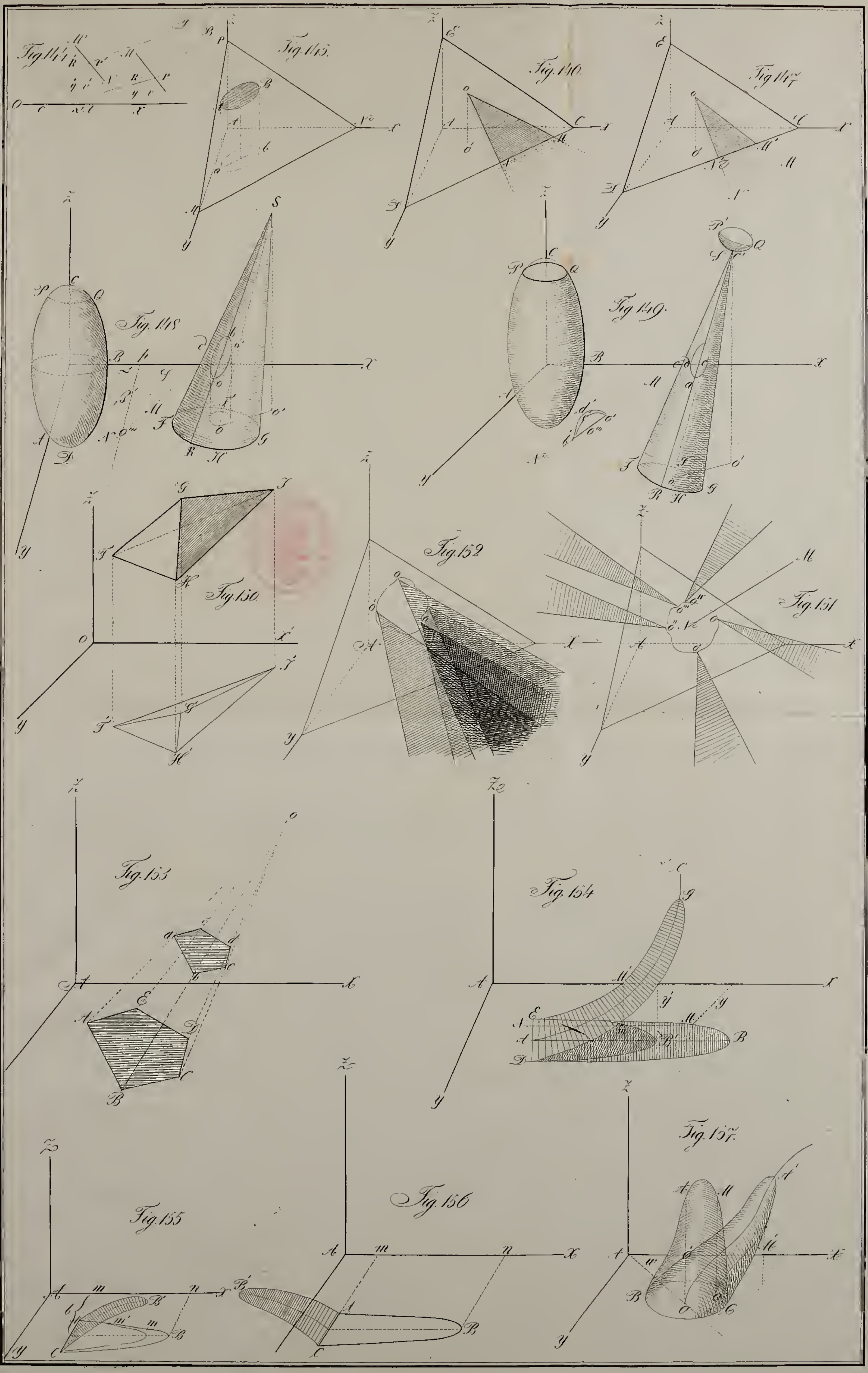
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.