AUSDEHNUNG

DER

LAGRANGE'SCHEN BEHANDLUNG DES DREIKÖRPER-PROBLEMS

AUF DAS

VIERKÖRPER-PROBLEM.

VON

Dr. A. SEYDLER.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 1. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 5.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1885.

Bekanntlich hat Lagrange in seiner Abhandlung Essai sur le probléme des trois corps (Prix de l'Ac. Roy. des Sc. de Paris, t. IX. 1772) nachgewiesen, dass das Problem der Bewegung dreier gegenseitig gravitirender Körper (Massenpunkte) zu seiner vollständigen Lösung, neben den durch die allgemeinen Sätze der Mechanik gelieferten 10 Integralen *) nur noch 7 (anstatt 8) Integrationen erfordert, indem nach Auffindung dieser 7 Integrale das noch fehlende achte (eigentlich achtzehnte) nachträglich gefunden werden kann. Es gelang ihm dieser Nachweis dadurch, dass er das allgemeine Problem auf die Bestimmung der Grösse und Form des Dreikörper-Dreiecks reducirte. Da nun zur Bestimmung der Lage dieses Dreiecks nur die Verhältnisse der drei Constanten des Flächensatzes, also nur zwei Constanten, oder, was dasselbe ist, zwei Integrale beitragen, so entfällt ein noch zu suchendes Integral auf die völlige Bestimmung der Lage, und es ist, wenn auch a priori nicht gewiss, wenigstens wahrscheinlich, dass die entsprechende Differentialgleichung von den übrigen so losgelöst werden kann, dass diese, nunmehr 7 an der Zahl, die Bedingungen der Lösung des auf Grösse und Form des Dreiecks beschränkten Problems darstellen.**)

In einem kleinen, unlängst in den Sitzungsberichten der k. böhm. Ges. der Wissensch. publicirten Aufsatze (O problemu tří a čtyr těles; přednešeno 26. června 1885) habe ich nun darauf hingewiesen, dass sich auch das Vierkörper-Problem in ähnlicher Weise auf die Lösung des beschränkten Problems zurückführen lassen kann, Grösse und Gestalt des entsprechenden Tetraeders als Function der Zeit zu bestimmen, und dass dieses beschränkte Problem zu seiner Lösung nicht mehr 14, sondern bloss 13 Integrationen erfordert. Ich habe mich in jenem Aufsatze nur auf die Entwickelung des Grundgedanken beschränkt, ohne auf die zum Theil sehr weitläufigen Entwickelungen näher einzugehen. Dies beabsichtige ich in der vorliegenden Abhandlung zu thun; bevor ich jedoch auf den eigentlichen Gegenstand übergehe, will ich zum besseren Verständniss desselben die auf das Dreikörper-Problem bezüglichen Resultate in einer von Lagrange's Abhandlung etwas abweichenden Fassung wiedergeben.

---

*) Es liefert der Schwerpunktsatz 6, der Flächensatz 3, der Satz der lebendigen Kraft 1 Integral.

**) Dass dieser Auffassung einiger heuristischer Werth zukommen dürfte, schliesse ich eben daraus, dass ich durch dieselbe auf die oben im Texte gegebene Erweiterung der Lagrange'schen Methode auf das Vierkörper-Problem geführt worden bin. Ich bin versucht zu glauben, dass Lagrange durch diese oder wenigstens eine ähnliche Betrachtung auf seine Methode gekommen ist.

Lagrange reducirt nämlich das Problem auf die Lösung zweier Differentialgleichungen zweiter, und einer Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den drei Entfernungen der Massen und der Zeit. Offenbar ist es jedoch gleichgültig, ob man bloss jene drei Grössen, oder ob man eine beliebige Anzahl unbekannter Functionen der Zeit einführt, wenn nur die Anzahl der zu ihrer Bestimmung erforderlichen Integrationen 7 nicht übersteigt. Hat ja doch Lagrange selbst seine drei Differentialgleichungen nicht direct hingeschrieben, sondern nur gezeigt, wie sie durch Elimination gewisser Hilfsgrössen aus einer grösseren Anzahl von Gleichungen abgeleitet werden können, ja daran die Bemerkung geknüpft, dass es vortheilhafter erscheine, die Elimination nicht auszuführen (Lagrange, Oeuvres, t. VI. p. 250).

Eine andere Modification der Lagrange'schen Formeln hat der Herausgeber seiner Werke Serret durchgeführt, indem er die in der Lagrange'schen Redaction fehlende Symmetrie herstellte (l. c. p. 325—330). Ich werde die einzelnen Gleichungen in der von Serret gegebenen Form (jedoch mit Rücksicht auf spätere Entwickelungen in abgeänderter Bezeichnungsweise) wiedergeben, jedoch eine solche Auswahl und Anordnung derselben treffen, wie sie den von mir gewählten unbekannten Functionen entspricht.

Als solche betrachte ich die Entfernungen r_{23}, r_{31}, r_{12}, die ralativen Geschwindigkeiten u_{23}, u_{31}, u_{12} der drei Massen m_1, m_2, m_3 und schliesslich die Hilfsgrösse ϱ.*)

Die relativen Coordinaten von m_2 und m_3, z. B., seien: x_{23}, y_{23}, z_{23} u. s. w., so dass folgende Beziehungen gelten:

$$x_{23}+x_{32}=0,\quad x_{23}+x_{31}+x_{12}=0,\ \text{u. s. w.}$$

Wir führen ferner folgende Bezeichnungen ein:

$$p_1=-(x_{31}x_{12}+y_{31}y_{12}+z_{31}z_{12})=-[x_{31}\,x_{12}]^{**)}$$
$$p_2=-[x_{12}\,x_{23}],\quad p_3=-[x_{23}\,x_{31}],$$
$$q_1=r_{31}^{-3}-r_{12}^{-3},\quad q_2=r_{12}^{-3}-r_{23}^{-3},\quad q_3=r_{23}^{-3}-r_{31}^{-3},$$
$$2v_1=u_{31}^2+u_{12}^2-u_{23}^2,\quad 2v_2=u_{12}^2+u_{23}^2-u_{31}^2,\quad 2v_3=u_{23}^2+u_{31}^2-u_{12}^2$$

Die Hilfsgrösse ist definirt durch:

$$\varrho=\left[x_{23}\frac{dx_{31}}{dt}\right]-\left[x_{31}\frac{dx_{23}}{dt}\right]=\left[x_{31}\frac{dx_{12}}{dt}\right]-\left[x_{12}\frac{dx_{31}}{dt}\right]=\left[x_{12}\frac{dx_{23}}{dt}\right]-\left[x_{23}\frac{dx_{12}}{dt}\right].$$

Nennt man schliesslich m die Summe der drei Massen, so lassen sich die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems zunächst auf die Form bringen:

$$\frac{d^2x_{23}}{dt^2}+mx_{23}r_{23}^{-3}-m_1(x_{23}r_{23}^{-3}+x_{31}r_{31}^{-3}+x_{12}r_{12}^{-3})=0,$$

---

*) Die Bezeichnung durch zwei Indices ist zwar beim Dreikörperproblem zu weitläufig und kann leicht durch eine einfachere, ebenfalls symmetrische, ersetzt werden; bei einer grösseren Anzahl von Punkten, die auf einander bezogen werden, ist sie jedoch sehr empfehlenswerth und daher hier mit Rücksicht auf Späteres beibehalten worden.

**) Diese Bezeichnung der Summen dreier gleichartigen auf die drei Coordinatenrichtungen bezüglicher Grössen durch eckige Klammern wurde zuerst von Lamé eingeführt und wird durchwegs in dieser Abhandlung benützt werden.

$$\frac{d^2x_{31}}{dt^2} + mx_{31}\, r_{31}^{-3} - m_2\, (x_{23}\, r_{23}^{-3} + x_{31}\, r_{31}^{-3} + x_{12}\, r_{12}^{-3}) = 0,$$

$$\frac{d^2x_{12}}{dt^2} + mx_{12}\, r_{12}^{-3} - m_3\, (x_{23} r_{23}^{-3} + x_{31} r_{31}^{-3} + x_{12} r_{12}^{-3}) = 0,$$

Aus diesen (so wie den analogen auf die Y- nnd Z-Coordinaten bezüglichen) Gleichungen können wir zunächst folgendes System ableiten:

$$\text{(I)} \qquad \frac{d(u_{23}^2)}{dt} + 2mr_{23}^{-2}\frac{dr_{23}}{dt} + m_1\left(q_2\frac{dp_2}{dt} - q_3\frac{dp_3}{dt}\right) + m_1\, q_1\, \varrho = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{d(u_{31}^2)}{dt} + 2mr_{31}^{-2}\frac{dr_{31}}{dt} + m_2\left(q_3\frac{dp_3}{dt} - q_1\frac{dp_1}{dt}\right) + m_2\, q_2\, \varrho = 0$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{d(u_{12}^2)}{dt} + 2mr_{12}^{-2}\frac{dr_{12}}{dt} + m_3\left(q_1\frac{dp_1}{dt} - q_2\frac{dp_2}{dt}\right) + m_3\, q_2\, \varrho = 0$$

Ferner ergibt sich durch Differentiation des Ausdruckes ϱ:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} + m_1\, p_1\, q_1 + m_2\, p_2\, q_2 + m_3\, p_3\, q_3 = 0$$

Die Integrale des Flächenprincips geben:

$$\text{(V)} \qquad \begin{aligned} &\frac{r_{23}^2}{m_1^2}\left[u_{23}^2 - \left(\frac{dr_{23}}{dt}\right)^2\right] + \frac{r_{32}^2}{m_2^2}\left[u_{31}^2 - \left(\frac{dr_{31}}{dt}\right)^2\right] + \frac{r_{12}^2}{m_3^2}\left[u_{12}^2 - \left(\frac{dr_{12}}{dt}\right)^2\right] \\ &+ \frac{2}{m_2 m_3}\left[p_1 v_1 - \frac{1}{4}\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{m_3 m_1}\left[p_2 v_2 - \frac{1}{4}\left(\frac{dp_2}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{m_1 m_2}\left[p_3 v_3 - \frac{1}{4}\left(\frac{dp_3}{dt}\right)^2\right] \\ &= k^2 - \frac{m}{2m_1 m_2 m_3}\,\varrho^2. \end{aligned}$$

Eine bekannte Relation zwischen den Cosinusen der sechs Winkel, welche von vier Richtungen gebildet werden, gibt, auf die Richtungen r_{31}, r_{12}, u_{31}, u_{12} oder auf die cyclisch entsprechenden angewandt, die Gleichung:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} &\left(\varrho^2 + \frac{dp_2}{dt}\frac{dp_3}{dt} + \frac{dp_3}{dt}\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_1}{dt}\frac{dp_2}{dt}\right)^2 \\ &4\,(\Sigma_1 v_1 + \Sigma_2 v_2 + \Sigma_3 v_3) + 16\,(p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2)\,(v_2 v_3 + v_3 v_1 + v_1 v_2) \end{aligned}$$

wo $\Sigma_1 = r_{23}^2\varrho^2 - 2\left(p_2\frac{dp_3}{dt} - p_3\frac{dp_2}{dt}\right)\varrho + p_1\left(\frac{dp_2}{dt} + \frac{dp_3}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{dp_3}{dt}\right)^2 + p_3\left(\frac{dp_2}{dt}\right)$,

und Σ_2, Σ_3 ähnliche Bedeutung haben.

Als die 7. Gleichung müssen wir eine von den Gleichungen zweiten Grades wählen, welche bei Lagrange als die Grundgleichungen des reducirten Problems erscheinen, nämlich:

$$\text{(VII}_1\text{)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{23}^2)}{dt^2} + mr_{23}^{-1} + m_1\,(p_2 q_2 - p_3 q_3) - u_{23}^2 = 0,$$

$$\text{(VII}_2\text{)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{31}^2)}{dt^2} + mr_{31}^{-1} + m_2\,(p_3 q_2 - p_1 q_1) - u_{31}^2 = 0,$$

$$\text{(VII}_3\text{)} \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{12}^2)}{dt^2} + mr_{12}^{-1} + m_3\,(p_1 q_1 - p_2 q_2) - u_{12}^2 = 0;$$

oder nehmen wir eine beliebige Combination dieser Gleichungen, worunter sich der Symmetrie wegen empfiehlt:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2(r_{23}^2)}{m_1 dt^2}+\frac{d^2(r_{31}^2)}{m_2 dt^2}+\frac{d^2(r_{12}^2)}{m_3 dt^2}\right\}-m\left(\frac{1}{m_1 r_{23}}+\frac{1}{m_2 r_{31}}+\frac{1}{m_3 r_{12}}\right)=f.$$

Diese Gleichung ist mit Benützung eines Integrals der 3 ersten Gleichungen (I), (II), (III) abgeleitet:

$$(A) \qquad \left(\frac{u_{23}^2}{m_1}+\frac{u_{31}^2}{m_2}+\frac{u_{12}^2}{m_3}\right)-2m\left(\frac{1}{m_1 r_{23}}+\frac{1}{m_2 r_{31}}+\frac{1}{m_3 r_{12}}\right)=f.$$

Wir haben nun 7 Differentialgleichungen (I)—(VII), welche jedoch 8 Integrationen erfordern, da die Gleichung (VII) zweiter Ordnung ist. Dagegen ist ein Integral, nämlich (A), bekannnt, und sind daher nur noch 7 Integrale zu bestimmen.

Bei diesem Arrangement dürfte es kaum möglich sein, in den Fehler Hesse's zu verfallen, welcher (Crelle's Journal, Bd. LXXIV) ohne Benützung der Gleichung (VI) zum Ziele gelangen wollte. Auch sieht man klar, dass es nicht möglich ist, die Anzahl der erforderlichen Integrationen noch mehr herabzudrücken.*)

II.

Wenn es nun auch nahe liegt zu vermuthen, dass eine ähnliche Vereinfachung, nämlich so zu sagen die Elimination einer Integration, auch beim Problem beliebig vieler Körper möglich sein wird, so zeigt sich doch schon bei der Untersuchung des Vierkörperproblems, zu welcher wir jetzt schreiten wollen, dass die Analogie mit dem Dreikörperproblem keine so vollständige ist, wie man zunächst voraussetzen dürfte. Doch lassen sich bei jenem Problem die aus der grösseren Zahl der Körper erwachsenden Schwierigkeiten noch beherrschen.

Seien: m_1, m_2, m_3, m_4 die vier gegenseitig gravitirenden Massenpunkte und x_1, y_1,

*) Auf den ersten Blick könnte man versucht sein, eine weitere Vereinfachung in folgender Richtung anzustreben. Differenzirt man die Gleichungen (V) oder (VI), so enthält das Resultat $\frac{d\varrho}{dt}$ und die zweiten Differentialquotienten von r_{23}, r_{31}, r_{12}, welche Grössen man mittelst (IV), (VII$_1$), (VII$_2$), (VII$_3$) wegschaffen kann, wodurch man scheinbar zu einer Differentialgleichung erster Ordnung gelangt, welche wir mit (VIII) bezeichnen wollen. Eliminirt man mittelst (V) und (VI) ϱ aus allen Gleichungen, so hätte man dann zwischen den sechs Grössen r und u sechs Differentialgleichungen (I), (II), (III), (V) oder (VI) nach Elimination von ϱ, (VII) und (VIII), von denen wieder nur die (VII) zweiter Ordnung wäre. Mit Berücksichtigung des Integrals (A) wären also nur sechs Integrationen erforderlich.

Man sieht a priori, dass dies nicht möglich ist; denn mit Rücksicht auf die zehn allgemeinen Integrale und auf das eine Integral, welches zur völligen Lagenbestimmung noch nothwendig ist, hätte man da nur 17 Integrale und Integrationsconstanten. A posteriori überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung (V), in der erwähnten Weise behandelt, nichts anderes gibt, als die Gleichung (A) mit einem Faktor multiplicirt. Schwieriger dürfte bei der Gleichung (VI) der direkte Nachweis zu liefern sein, dass sie zu keinem unabhängigen Resultat führt.

z_1, x_2 ..... ihre Coordinaten. Die relativen Coordinaten der Massen gegeneinander bezeichnen wir wieder mit

(1) $$x_{23}, x_{32}, x_{12}, x_{14}, x_{24}, x_{34};\ y_{23}, \dots y_{34};\ z_{23}, \dots z_{34},$$

wo z. B. $x_{23} = x_3 - x_2$, daher wie oben:

(2) $$x_{23} + x_{32} = 0,\ x_{23} + x_{31} + x_{12} = 0;\ x_{23} + x_{34} + x_{41} + x_{12} = 0.$$

Die relativen Entfernungen, und die relativen Geschwindigkeiten seien:

(3) $$r_{23}, r_{31}, r_{12}, r_{14}, r_{24}, r_{34};\ u_{23}, u_{31}, u_{12}, u_{14}, u_{24}, u_{34};$$

und diese 12 Grössen wollen wir, ähnlich wie in (I) als die unbekannten Functionen der Zeit wählen, für welche entsprechende Differentialgleichungen aufzustellen sind. Analog dem früheren werden wir folgende Hilfsgrössen einzuführen haben:

(4) $$\begin{aligned} &p_{14} = -[x_{31}x_{12}],\ p_{21} = -[x_{42}x_{23}],\ p_{32} = -[x_{13}x_{34}],\ p_{43} = -[x_{24}x_{41}),\\ &p_{24} = -[x_{12}x_{23}],\ p_{31} = -[x_{23}x_{34}],\ p_{42} = -[x_{34}x_{41}],\ p_{13} = -[x_{41}x_{12}],\\ &p_{34} = -[x_{23}x_{31}],\ p_{41} = -[x_{34}x_{42}],\ p_{12} = -[x_{41}x_{13}],\ p_{23} = -[x_{12}x_{24}];\\ &\quad p_{10} = -[x_{23}x_{14}],\ p_{20} = -[x_{31}x_{24}],\ p_{30} = -[x_{12}x_{34}]. \end{aligned}$$

Man notire, dass hier n i c h t wie bei den r und u ein Wechsel der Indices keine, oder höchstens nur eine Änderung der Zeichen*) zur Folge hat; denn es ist, z. B.:

$$p_{14} = \tfrac{1}{2}(r_{31}^2 + r_{12}^2 - r_{23}^2),\ p_{41} = \tfrac{1}{2}(r_{34}^2 + r_{42}^2 - r_{23}^2).$$

Zwischen den 15 Grösssen p bestehen 9 von einander unabhängige Relationen, was schon daraus folgt, dass sie Functionen der 6 Grössen r sind. Wir finden leicht folgende Gleichungen:

(5) $$\begin{aligned} &p_{10} = p_{42} - p_{43} = p_{31} - p_{34} = p_{24} - p_{21} = p_{13} - p_{12},\\ &p_{20} = p_{43} - p_{41} = p_{12} - p_{14} = p_{34} - p_{32} = p_{21} - p_{23},\\ &p_{30} = p_{41} - p_{42} = p_{23} - p_{24} = p_{14} - p_{13} = p_{32} - p_{31};\\ &p_{14} + p_{24} + p_{34} = p_{12} + p_{23} + p_{31} = p_{21} + p_{32} + p_{13};\ p_{10} + p_{20} + p_{30} = 0. \end{aligned}$$

Offenbar folgen z. B. aus den ersten acht und aus der letzten Gleichung alle übrigen.

Ebenso setzen wir weiter:

(6) $$\begin{aligned} &q_{14} = r_{31}^{-3} - r_{12}^{-3},\ q_{21} = r_{42}^{-3} - r_{23}^{-3},\ q_{32} = r_{13}^{-3} - r_{34}^{-3},\ q_{43} = r_{24}^{-3} - r_{41}^{-3},\\ &q_{24} = r_{12}^{-3} - r_{23}^{-3},\ q_{31} = r_{23}^{-3} - r_{34}^{-3},\ q_{42} = r_{34}^{-3} - r_{41}^{-3},\ q_{13} = r_{41}^{-3} - r_{12}^{-3},\\ &q_{34} = r_{23}^{-3} - r_{31}^{-3},\ q_{41} = r_{34}^{-3} - r_{42}^{-3},\ q_{12} = r_{41}^{-3} - r_{13}^{-3},\ q_{23} = r_{12}^{-3} - r_{24}^{-3},\\ &\quad q_{10} = r_{23}^{-3} - r_{14}^{-3},\ q_{20} = r_{31}^{-3} - r_{24}^{-3},\ q_{30} = r_{12}^{-3} - r_{34}^{-3}. \end{aligned}$$

Von diesen 15 Grössen q sind nur 5 selbständig, wovon man sich direct überzeugt, wenn man etwa (was offenbar möglich ist) q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{14}, q_{24} willkürlich annimmt; die übrigen q lassen sich dann leicht als Combinationen jener Grössen darstellen. Die Relationen,

---

*) Es scheint zweckmässiger zu sein, die Grössen r und u absolut oder als Tensoren zu nehmen, daher $r_{23} = r_{32}$, $u_{23} = u_{32}$, u. s. w. anzunehmen, statt sie als Vectoren zu betrachten, in welchem Falle $r_{23} = -r_{32}$, u. s. w. zu setzen wäre. Man erspart sich lästige Untersuchungen in Bezug auf die Zeichen, während bei den Coordinaten x_{23} u. s. w. gerade umgekehrt die Beibehaltung ihres Vectorcharakters die Untersuchung erleichtert.

welche zwischen den q stattfinden, liegen zu sehr an der Hand, als dass man nöthig hätte, sie eigens hinzuschreiben.

Ferner führen wir 15 Grössen

(7) $$v_{14},\ v_{24},\ v_{34};\ v_{21},\ v_{31},\ v_{41};\ v_{32},\ v_{42},\ v_{12};\ v_{43},\ v_{13},\ v_{23};\ v_{10},\ v_{20},\ v_{30}$$

ein, welche aus den u in gleicher Weise abgeleitet sind, wie die Grössen p aus den r. Es ist als z. B.

(8) $$\begin{gathered} v_{14} = \tfrac{1}{2}(u_{31}^2 + u_{12}^2 - u_{23}^2),\ v_{41} = \tfrac{1}{2}(u_{34}^2 + u_{42}^2 - u_{23}^2), \\ v_{10} = v_{42} - v_{43} = \text{u. s. w.},\ v_{10} + v_{20} + v_{30} = 0. \end{gathered}$$

Schliesslich führen wir 7 Hilfsgrössen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, σ_1, σ_2, σ_3 ein, von denen sich jedoch die ersten *4* durch die letzten *3* ausdrücken lassen. Wir setzen nämlich:

(9) $$\begin{aligned} \varrho_1 &= \left[x_{34}\frac{dx_{23}}{dt} - x_{23}\frac{dx_{34}}{dt}\right] = \left[x_{42}\frac{dx_{34}}{dt} - x_{34}\frac{dx_{42}}{dt}\right] = \left[x_{23}\frac{dx_{42}}{dt} - x_{42}\frac{dx_{23}}{dt}\right], \\ \varrho_2 &= \left[x_{14}\frac{dx_{31}}{dt} - x_{31}\frac{dx_{14}}{dt}\right] = \left[x_{43}\frac{dx_{14}}{dt} - x_{14}\frac{dx_{43}}{dt}\right] = \left[x_{31}\frac{dx_{43}}{dt} - x_{43}\frac{dx_{31}}{dt}\right], \\ \varrho_3 &= \left[x_{24}\frac{dx_{12}}{dt} - x_{12}\frac{dx_{24}}{dt}\right] = \left[x_{41}\frac{dx_{24}}{dt} - x_{24}\frac{dx_{41}}{dt}\right] = \left[x_{12}\frac{dx_{41}}{dt} - x_{41}\frac{dx_{12}}{dt}\right], \\ \varrho_4 &= \left[x_{23}\frac{dx_{31}}{dt} - x_{31}\frac{dx_{23}}{dt}\right] = \left[x_{31}\frac{dx_{12}}{dt} - x_{12}\frac{dx_{31}}{dt}\right] = \left[x_{12}\frac{dx_{23}}{dt} - x_{23}\frac{dx_{12}}{dt}\right];\text{*)} \end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left[x_{23}\frac{dx_{14}}{dt} - x_{14}\frac{dx_{23}}{dt}\right], \\ \sigma_2 &= \left[x_{31}\frac{dx_{24}}{dt} - x_{24}\frac{dx_{31}}{dt}\right], \\ \sigma_3 &= \left[x_{12}\frac{dx_{34}}{dt} - x_{34}\frac{dx_{12}}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Wir finden nun leicht folgende Relationen:

(11) $$\begin{gathered} \varrho_2 + \varrho_3 - \sigma_1 = 0,\ \varrho_3 + \varrho_1 - \sigma_2 = 0,\ \varrho_1 + \varrho_2 - \sigma_3 = 0 \\ \varrho_1 + \varrho_4 + \sigma_1 = 0,\ \varrho_2 + \varrho_4 + \sigma_2 = 0,\ \varrho_3 + \varrho_4 + \sigma_3 = 0 \end{gathered}$$

also:

(12) $$\begin{gathered} 2\varrho_1 = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1,\ 2\varrho_2 = \sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_2,\ 2\varrho_3 = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3, \\ 2\varrho_4 = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),\quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0. \end{gathered}$$

Wollte man nun, nach der Analogie des Dreikörperproblems verfahrend, die drei letzten Hilfsgrössen als neue Unbekannte einführen, so hätte man mit den r und u im Ganzen 15 Functionen zu bestimmen. Es wird sich jedoch zeigen, dass sich für dieselben mehr als 15, nämlich 17 Gleichungen ergeben, so dass mit Hilfe derselben 2 Unbekannte eliminirt (etwa die σ_1, σ_2, σ_3 durch eine aus ihnen combinirte Grösse σ ersetzt), und für die nun übrig bleibenden 13 Unbekannten ein System von 13 Gleichungen, welches bloss 13 Integrationen erfordert, aufgestellt werden kann.

---

*) Die Grösse ϱ_4 ist identisch mit dem ϱ im Dreikörper-Problem.

Man erhält nämlich, wie leicht zu übersehen:

6 Gleichungen von der Form (I, II, III) für die Grössen u;

3 Gleichungen von der Form (IV) für die Grössen σ_1, σ_2, σ_3;

1 Gleichung von der Form (V);

7 Gleichungen von der Form (VI);

1 Gleichung von der Form (VII);

im Ganzen also 18 Gleichungen. In Betreff der 7 Gleichungen von der Form (VI) ist jedoch zu bemerken: vier derselben werden durch die Berücksichtigung der Flächen des Vierkörper-Tetraëders, drei durch Berücksichtigung der Gegenkanten abgeleitet. Da sie neben den r, $\frac{dr}{dt}$, u nur noch die σ_1, σ_2, σ_3 enthalten, so ergeben sich durch Elimination der letztern Grössen vier Relationen zwischen den früher genannten Grössen. Geometrische Betrachtungen zeigen jedoch, dass nur drei solche Relationen stattfinden, so dass zwischen jenen 7 Gleichungen eine Identität bestehen muss, dieselben also nur *6* Gleichungen repräsentiren.

Nehmen wir nun eine der Grössen σ_1, σ_2, σ_3, oder, wenn es sich vortheilhaft zeigen sollte, eine Combination derselben neben den r und u als einzige Unbekannte, so haben wir für diese 13 Unbekannten folgende Gleichungen:

6 Gleichungen von der Form (I, II, III), wie früher;

1 Gleichung von der Form (IV) für die Grösse σ;

1 Gleichung von der Form (V);

1 Gleichung für σ, aequivalent der Form (VI), ebenfalls durch Combination jener 7 Gleichungen hergestellt;

1 Gleichung von der Form (VII);

3 Gleichungen (VIII), als Relationen zwischen den r, $\frac{dr}{dt}$, u entweder aus den früheren 7 Gleichungen (VI), oder direkt durch geometrische Betrachtung abgeleitet.

Also im Ganzen 12 Gleichungen erster und eine Gleichung zweiter Ordnung, wogegen jedoch auch ein Integral von der Form (A) vorliegt.

Nach dieser orientirenden Übersicht wollen wir zur Aufstellung der Gleichungen selbst schreiten.

III.

Bezeichnen wir mit m die Summen der Massen m_1, m_2, m_3, m_4, so erhalten wir folgende Grundgleichungen der relativen Bewegungen:

$$(G_1) \qquad \frac{d^2x_{23}}{dt^2} + m x_{23} r_{23}^{-3} - m_4 \xi_1 + m_1 \xi_4 = 0,$$

$$(G_2) \qquad \frac{d^2x_{31}}{dt^2} + m x_{31} r_{31}^{-3} - m_4 \xi_2 + m_2 \xi_4 = 0,$$

$$(G_3) \qquad \frac{d^2x_{12}}{dt^2} + m x_{12} r_{12}^{-3} - m_4 \xi_3 + m_3 \xi_4 = 0,$$

$$(G_4) \qquad \frac{d^2x_{14}}{dt^2} + m\,x_{14}r_{14}^{-3} - m_3\xi_2 + m_2\xi_3 = 0,$$

$$(G_5) \qquad \frac{d^2x_{24}}{dt^2} + m\,x_{24}r_{24}^{-3} - m_1\xi_3 + m_3\xi_1 = 0,$$

$$(G_6) \qquad \frac{d^2x_{34}}{dt^2} + m\,x_{34}r_{34}^{-3} - m_2\xi_1 + m_1\xi_2 = 0;$$

dabei ist:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= x_{23}r_{23}^{-3} + x_{34}r_{34}^{-3} + x_{42}r_{42}^{-3}, \\ \xi_2 &= x_{31}r_{31}^{-3} + x_{14}r_{14}^{-3} + x_{43}r_{43}^{-3}, \\ \xi_3 &= x_{12}r_{12}^{-3} + x_{24}r_{25}^{-3} + x_{41}r_{41}^{-3}, \\ \xi_4 &= x_{32}r_{32}^{-3} + x_{13}r_{13}^{-3} + x_{23}r_{21}^{-3}. \end{aligned}$$

Ähnliche zwei Systeme von Gleichungen gelten natürlich für die Coordinatenrichtungen Y und Z.

Man multiplicire die Gleichungen (G) der Ordnung nach mit:

$$\frac{1}{m_1m_4}\frac{dx_{23}}{dt}, \quad \frac{1}{m_2m_4}\frac{dx_{31}}{dt}, \quad \frac{1}{m_3m_4}\frac{dx_{12}}{dt}, \quad \frac{1}{m_2m_3}\frac{dx_{14}}{dt}, \quad \frac{1}{m_3m_1}\frac{dx_{24}}{dt}, \quad \frac{1}{m_1m_2}\frac{dx_{12}}{dt}$$

und addire dieselben, sowie die entsprechend multiplicirten auf Y und Z bezüglichen Gleichungen. Dann erscheint unter den ξ, η, ζ enthaltenden Gliedern, z. B.

$$\frac{\xi_1}{m_1} \text{ multiplicirt mit } \frac{dx_{23}}{dt} + \frac{dx_{34}}{dt} + \frac{dx_{42}}{dt} = 0,$$

und gleiches gilt für alle anderen solchen Glieder, welche sich daher sämmtlich auf Null reduciren. Der Rest der Gleichung wird integrabel, und wir erhalten die Gleichung der leb. Kraft in der Form

$$(A) \qquad \begin{aligned} f = {} & \frac{u_{23}^2}{m_1m_4} + \frac{u_{31}^2}{m_2m_4} + \frac{u_{12}^2}{m_3m_4} + \frac{u_{14}^2}{m_2m_3} + \frac{u_{24}^2}{m_3m_1} + \frac{u_{34}^2}{m_1m_2} \\ & - 2m\left(\frac{1}{m_1m_4r_{23}} + \frac{1}{m_2m_4r_{31}} + \frac{1}{m_3m_4r_{12}} + \frac{1}{m_2m_3r_{14}} + \frac{1}{m_3m_1r_{24}} + \frac{1}{m_1m_2r_{34}}\right). \end{aligned}$$

Durch ein ähnliches Verfahren leitet man die Flächensätze in folgender Form ab:

$$(B_1) \qquad \begin{aligned} & \frac{1}{m_1m_4}\left(y_{23}\frac{dz_{23}}{dt} - z_{23}\frac{dy_{23}}{dt}\right) + \frac{1}{m_2m_4}\left(y_{31}\frac{dz_{31}}{dt} - z_{31}\frac{dy_{31}}{dt}\right) \\ & + \frac{1}{m_3m_4}\left(y_{12}\frac{dz_{12}}{dt} - z_{12}\frac{dy_{12}}{dt}\right) + \frac{1}{m_2m_3}\left(y_{14}\frac{dz_{14}}{dt} - z_{14}\frac{dy_{14}}{dt}\right) \\ & + \frac{1}{m_3m_1}\left(y_{24}\frac{dz_{24}}{dt} - z_{24}\frac{dy_{24}}{dt}\right) + \frac{1}{m_1m_2}\left(y_{34}\frac{dz_{34}}{dt} - z_{34}\frac{dy_{34}}{dt}\right) = a, \end{aligned}$$

$$(B_2) \qquad \frac{1}{m_1m_4}\left(z_{23}\frac{dx_{23}}{dt} - x_{23}\frac{dz_{23}}{dt}\right) + \ldots = b,$$

$$(B_3) \qquad \frac{1}{m_1m_4}\left(x_{23}\frac{dy_{23}}{dt} - y_{23}\frac{dx_{23}}{dt}\right) + \ldots = c.$$

Um zunächst die Differentialgleichungen für die Grössen u abzuleiten, heben wir successive aus der Combination von Gleichungen, welche zu (A) geführt hat, den Theil hervor, der von der 1. 2. . . . . 6. Gleichung des Systems (G) und der beiden entsprechenden Systeme herrührt. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von p, q und ϱ: (4), (6), (9), erhalten wir:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &\frac{d(u_{23}^2)}{dt} + 2mr_{23}^{-2}\frac{dr_{23}}{dt} + m_4\left(q_{21}\frac{dp_{21}}{dt} - q_{31}\frac{dp_{31}}{dt} + q_{41}\varrho_1\right) \\ &\quad - m_1\left(q_{24}\frac{dp_{24}}{dt} - q_{34}\frac{dp_{34}}{dt} - q_{14}\varrho_4\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} &\frac{d(u_{31}^2)}{dt} + 2mr_{31}^{-2}\frac{dr_{31}}{dt} + m_4\left(q_{32}\frac{dp_{32}}{dt} - q_{12}\frac{dp_{12}}{dt} + q_{42}\varrho_2\right) \\ &\quad - m_2\left(q_{34}\frac{dp_{34}}{dt} - q_{14}\frac{dp_{14}}{dt} - q_{24}\varrho_4\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} &\frac{d(u_{12}^2)}{dt} + 2mr_{12}^{-2}\frac{dr_{12}}{dt} + m_4\left(q_{13}\frac{dp_{13}}{dt} - q_{23}\frac{dp_{23}}{dt} + q_{43}\varrho_3\right) \\ &\quad - m_3\left(q_{14}\frac{dp_{14}}{dt} - q_{24}\frac{dp_{24}}{dt} - q_{34}\varrho_4\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(I')}\quad \begin{aligned} &\frac{d(u_{14}^2)}{dt} + 2mr_{14}^{-2}\frac{dr_{14}}{dt} + m_3\left(q_{12}\frac{dp_{12}}{dt} - q_{42}\frac{dp_{42}}{dt} + q_{32}\varrho_2\right) \\ &\quad - m_2\left(q_{13}\frac{dp_{13}}{dt} - q_{43}\frac{dp_{43}}{dt} - q_{23}\varrho_3\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(II')}\quad \begin{aligned} &\frac{d(u_{24}^2)}{dt} + 2mr_{24}^{-2}\frac{dr_{24}}{dt} + m_1\left(q_{23}\frac{dp_{13}}{dt} - q_{43}\frac{dp_{43}}{dt} + q_{13}\varrho_3\right) \\ &\quad - m_3\left(q_{21}\frac{dp_{21}}{dt} - q_{41}\frac{dp_{41}}{dt} - q_{31}\varrho_1\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(III')}\quad \begin{aligned} &\frac{d(u_{34}^2)}{dt} + 2mr_{34}^{-2}\frac{dr_{34}}{dt} + m_2\left(q_{31}\frac{dp_{31}}{dt} - q_{41}\frac{dp_{41}}{dt} + q_{21}\varrho_1\right) \\ &\quad - m_1\left(q_{32}\frac{dp_{32}}{dt} - q_{42}\frac{dp_{42}}{dt} - q_{12}\varrho_2\right) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für σ_1, σ_2, σ_3 oder ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 erhält man durch Differentiation dieser Grössen, und Substitution der dem System (G) entnommenen Ausdrücke, unter Berücksichtigung der Ausdrücke (4) und (6) für p und q und der unter ihnen stattfindenden Relationen. So ist z. B.

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \left[x_{23}\frac{d^2x_{14}}{dt^2} - x_{14}\frac{d^2x_{23}}{dt^2}\right],$$

also

$$\frac{d\sigma_1}{dt} + mp_{10}q_{10} - m_1[x_{14}\xi_4] + m_2[x_{23}\xi_3] - m_3[x_{23}\xi_2] + m_4[x_{14}\xi_1] = 0;$$

unter Berücksichtigung der Werthe (13) von ξ ergibt sich also in diesen, und ähnlich in den übrigen Fällen:

$$
(\mathrm{IV}_1) \qquad \begin{aligned} &\frac{d\sigma_1}{dt} + m_1 (p_{12}q_{12} - p_{13}q_{13}) + m_2 (p_{21}q_{21} - p_{24}q_{24}) \\ &+ m_3 (p_{31}q_{31} - p_{34}q_{34}) + m_4 (p_{42}q_{42} - p_{43}q_{43}) = 0, \end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{IV}_2) \qquad \begin{aligned} &\frac{d\sigma_2}{dt} - m_1 (p_{14}q_{14} + p_{12}q_{12}) - m_2 (p_{23}q_{23} + p_{21}q_{21}) \\ &- m_3 (p_{34}q_{34} + p_{32}q_{32}) - m_4 (p_{43}q_{43} + p_{41}q_{41}) = 0, \end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{IV}_3) \qquad \begin{aligned} &\frac{d\sigma_3}{dt} + m_1 (p_{13}q_{13} - p_{14}q_{14}) + m_2 (p_{23}q_{23} - p_{24}q_{24}) \\ &+ m_3 (p_{32}q_{32} - p_{31}q_{31}) + m_4 (p_{42}q_{42} - p_{41}q_{41}) = 0. \end{aligned}
$$

Weiter findet man direkt oder auf Grund der vorstehenden Gleichungen (so dass eine Rechnung durch die andere controllirt wird):

$$
(\mathrm{VI}'_1) \qquad \frac{d\varrho_1}{dt} - m_1 (p_{12}q_{12} - p_{13}q_{13} + p_{14}q_{14}) - m_2 p_{21}q_{21} - m_3 p_{31}q_{31} - m_4 p_{41}q_{41} = 0
$$

$$
(\mathrm{IV}'_2) \qquad \frac{d\varrho_2}{dt} + m_2 (p_{23}q_{23} - p_{24}q_{24} + p_{21}q_{21}) + m_3 p_{32}q_{32} + m_4 p_{42}q_{42} + m_1 p_{12}q_{12} = 0
$$

$$
(\mathrm{IV}'_2) \qquad \frac{d\varrho_3}{dt} - m_3 (p_{34}q_{34} + p_{31}q_{31} + p_{32}q_{32}) - m_4 p_{43}q_{43} - m_1 p_{13}q_{13} - m_2 p_{23}q_{23} = 0
$$

$$
(\mathrm{IV}'_4) \qquad \frac{d\varrho_4}{dt} + m_4 (p_{41}q_{41} - p_{42}q_{42} + p_{43}q_{43}) + m_1 p_{14}q_{14} + m_2 p_{24}q_{24} + m_3 p_{34}q_{34} = 0.
$$

Wenn wir die Gleichung (V) aus den Flächensätzen (B) ableiten wollen, was dadurch geschieht, dass wir die Summe der Quadrate dieser drei Gleichungen bilden, so haben wir sechsmal drei Quadrate und fünfzehnmal drei (doppelte) Producte zu combiniren. Die Quadrate können unmittelbar hingeschrieben werden; die doppelten Producte verlangen einige Umformung. Das Product z. B. der ersten und vierten Glieder linker Hand in (B) gibt nach einiger Umformung, vom Nenner $m_1 m_2 m_3 m_4$ abgesehen:

$$
\begin{aligned} &[x_{23} x_{14}] \left[\frac{dx_{23}}{dt}\, \frac{dx_{14}}{dt}\right] - \left[x_{23}\, \frac{dx_{14}}{dt}\right] \left[x_{14}\, \frac{dx_{23}}{dt}\right] \\ &= p_{10} v_{10} - \frac{1}{4} \left(\frac{dp_{10}}{dt} + \sigma_1\right) \left(\frac{dp_{10}}{dt} - \sigma_1\right) = p_{10} v_{10} - \frac{1}{4} \left(\frac{dp_{10}}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\, \sigma_1^2 . \end{aligned}
$$

Ebenso gibt jedes der 15 Producte das Quadrat einer der Grössen σ und ϱ. Fasst man diese Grössen zusammen, so erhält man nach Multiplication mit $2 m_1^2 m_2^2 m_3^2 m_4^2$:

$$
\begin{aligned} &m_1 m_2 m_3 m_4 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + m_2 m_3 m_4 (m_2 + m_3 + m_4)\, \varrho_1^2 \\ &+ m_3 m_4 m_1 (m_3 + m_4 + m_1)\, \varrho_2^2 + m_4 m_1 m_2 (m_4 + m_1 + m_2)\, \varrho_3^2 + m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)\, \varrho_4^2 , \end{aligned}
$$

oder, wenn man die Gleichung:

$$
(14) \qquad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \varrho_4^2
$$

berücksichtigt:

$$
m (m_2 m_3 m_4 \varrho_1^2 + m_3 m_4 m_1 \varrho_2^2 + m_4 m_1 m_2 \varrho_3^2 + m_1 m_2 m_3 \varrho_4^2).
$$

Dividirt man schliesslich diesen Ausdruck wieder durch $2m_1^2m_2^2m_3^2m_4^2$ und bringt ihn auf die rechte Seite der Gleichung zu $a^2+b^2+c^2=k^2$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\frac{r_{23}^2}{m_1^2m_4^2}\left\{u_{23}^2-\left(\frac{dr_{23}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{r_{31}^2}{m_2^2m_4^2}\left\{u_{31}^2-\left(\frac{dr_{31}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{r_{12}^2}{m_3^2m_4^2}\left\{u_{12}^2-\left(\frac{dr_{12}}{dt}\right)^2\right\}\\
&+\frac{r_{14}^2}{m_2^2m_3^2}\left\{u_{14}^2-\left(\frac{dr_{14}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{r_{24}^2}{m_3^2m_1^2}\left\{u_{24}^2-\left(\frac{dr_{24}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{r_{34}^2}{m_1^2m_2^2}\left\{u_{34}^2-\left(\frac{dr_{34}}{dt}\right)^2\right\}\\
&+\frac{2}{m_1m_2m_3m_4}\left\{p_{10}v_{10}+p_{20}v_{20}+p_{30}v_{30}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{10}}{dt}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{20}}{dt}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{30}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{2}{m_1^2m_2m_3}\left\{p_{41}v_{41}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{41}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{2}{m_1^2m_3m_4}\left\{p_{21}v_{21}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{21}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{2}{m_1^2m_4m_2}\left\{p_{31}v_{31}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{31}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{2}{m_2^2m_3m_4}\left\{p_{12}v_{12}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{12}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{2}{m_2^2m_4m_1}\left\{p_{32}v_{32}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{32}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{2}{m_2^2m_1m_3}\left\{p_{42}v_{42}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{42}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{2}{m_3^2m_4m_1}\left\{p_{23}v_{23}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{23}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{2}{m_3^2m_1m_2}\left\{p_{43}v_{43}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{43}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{2}{m_3^2m_2m_4}\left\{p_{13}v_{13}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{13}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{2}{m_4^2m_1m_2}\left\{p_{34}v_{34}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{34}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{2}{m_4^2m_2m_3}\left\{p_{14}v_{14}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{14}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{2}{m_4^2m_3m_1}\left\{p_{24}v_{24}-\frac{1}{4}\left(\frac{dp_{24}}{dt}\right)^2\right\}\\
&\qquad=k^2-\frac{2}{2m_1m_2m_3m_4}\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1}+\frac{\varrho_2^2}{m_2}+\frac{\varrho_3^2}{m_3}+\frac{\varrho_4^2}{m_4}\right).
\end{aligned}
\tag{V}
$$

Zur Ableitung der Gleichung (VI) wollen wir die oben erwähnte Relation zwischen den Cosinusen

$$(23),\ (31),\ (12),\ (14),\ (24),\ (34)$$

der von vier Richtungen 1, 2, 3, 4 gebildeten Winkel benützen, nämlich (Oeuvres de Lagrange, t. VI., p. 328):

$$
\begin{aligned}
&1-\{(23)^2+(31)^2+(12)^2+(14)^2+(24^2)+(34)^2\}+\{(23)^2(14)^2+(31)^2(24)^2+(12)^2(34)^2\}\\
&+2\{(23)(24)(34)+(31)(34)(14)+(12)(14)(24)+(23)(31)(12)\}\\
&-2\{(31)(24)(12)(34)+(12)(34)(23)(14)+(23)(14)(31)(24)\}=0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Wir nehmen successive als die vier Richtungen an:

$$
\begin{aligned}
&1: r_{23},\ r_{31},\ r_{12};\ r_{23},\ r_{31},\ r_{12},\ r_{23};\\
&2: r_{14},\ r_{24},\ r_{34};\ r_{34},\ r_{14},\ r_{24},\ r_{31};\\
&3: u_{23},\ u_{31},\ u_{12};\ u_{33},\ u_{31},\ u_{12},\ u_{23};\\
&4: u_{14},\ u_{24},\ u_{34};\ u_{34},\ u_{14},\ u_{24},\ u_{31}.
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich dann folgende sieben Gleichungen:

$$\sigma_1^4+A_1\sigma_1^2+B_1\sigma_1+C_1=0, \tag{VI$_1$}$$

$$\sigma_2^4+A_2\sigma_2^2+B_2\sigma_2+C_2=0, \tag{VI$_2$}$$

$$\sigma_3^4+A_3\sigma_3^2+B_3\sigma_3+C_3=0; \tag{VI$_3$}$$

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{VI}'_1) & \varrho_1^4 + D_1\varrho_1^2 + E_1\varrho_1 + F_1 = 0, \\
(\mathrm{VI}'_2) & \varrho_2^4 + D_2\varrho_2^2 + E_2\varrho_2 + F_2 = 0, \\
(\mathrm{VI}'_3) & \varrho_3^4 + D_3\varrho_3^2 + E_3\varrho_3 + F_3 = 0, \\
(\mathrm{VI}'_4) & \varrho_4^4 + D_4\varrho_4^2 + E_4\varrho_4 + F_4 = 0.
\end{array}
$$

Hier sind die Coefficienten der ersten Gruppe von der Form:

$$
A_1 = 4\,(2p_{10}v_{10} - r_{23}^2u_{14}^2 - r_{14}^2u_{23}^2) + 2\,\frac{d\,(r_{23}^2)}{dt}\,\frac{d\,(r_{14}^2)}{dt} - 2\left(\frac{dp_{10}}{dt}\right)^2; \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
B_1 = 8\,\frac{d}{dt}\,(p_{10}r_{14}^2u_{23}^2 - p_{10}r_{23}^2u_{14}^2) &- 8p_{10}\left\{r_{14}^2\,\frac{d\,(u_{23}^2)}{dt} - r_{23}^2\,\frac{d\,(u_{14}^2)}{dt}\right\} \\
&- 8v_{10}\left\{r_{14}^2\,\frac{d\,(r_{23}^2)}{dt} - r_{23}^2\,\frac{d\,(r_{14}^2)}{dt}\right\};
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
C_1 = \left(\frac{dp_{10}}{dt}\right)^4 &- 4\left(\frac{dp_{10}}{dt}\right)^2 (r_{23}^2u_{14}^2 + r_{14}^2u_{23}^2 + 2p_{10}v_{10} + 2r_{23}r_{14}\frac{dr_{23}}{dt}\,\frac{dr_{14}}{dt} \\
&+ 8\,\frac{dp_{10}}{dt}\left\{(p_{10}u_{23}^2 + v_{10}r_{23}^2)\,\frac{d\,(r_{14}^2)}{dt} + (p_{10}u_{14}^2 + v_{10}r_{14}^2)\,\frac{d\,(r_{23}^2)}{dt}\right\} \\
&+ 16\,(r_{23}^2r_{14}^2 - p_{10}^2)\,(u_{23}^2u_{14}^2 - v_{10}^2) - 8p_{10}v_{10}\,\frac{d\,(r_{23}^2)}{dt}\,\frac{d\,(r_{14}^2)}{dt} \\
&+ 16r_{14}^2r_{23}^2\left(\left(\frac{dr_{14}}{dt}\right)^2 - u_{14}^2\right)\left(\left(\frac{dr_{23}}{dt}\right)^2 - u_{23}^2\right) - 16r_{23}^2r_{14}^2u_{23}^2u_{14}^2
\end{aligned} \tag{18}
$$

Die Coefficienten A_2, B_2, C_2 und A_3, B_3, C_3 leitet man aus den Coefficienten A_1, B_1, C_1 durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 ab, wobei die Indices 0 und 4 unverändert bleiben.

Die Coefficienten der zweiten Gruppe haben die Form:

$$
D_1 = 2\left(\frac{dp_{21}}{dt}\,\frac{dp_{31}}{dt} + \frac{dp_{31}}{dt}\,\frac{dp_{41}}{dt} + \frac{dp_{41}}{dt}\,\frac{dp_{21}}{dt}\right) - 4\,(r_{23}^2v_{41} + r_{34}^2v_{21} + r_{42}^2v_{31}); \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 = - 8v_{41}\left(p_{21}\,\frac{dp_{31}}{dt} - p_{31}\,\frac{dp_{21}}{dt}\right) &- 8v_{21}\left(p_{31}\,\frac{dp_{41}}{dt} - p_{41}\,\frac{dp_{31}}{dt}\right) \\
&- 8v_{31}\left(p_{41}\,\frac{dp_{21}}{dt} - p_{21}\,\frac{dp_{41}}{dt}\right);
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1 = - 4v_{41}&\left\{p_{41}\left(\frac{dp_{21}}{dt} + \frac{dp_{31}}{dt}\right)^2 + p_{21}\left(\frac{dp_{31}}{dt}\right)^2 + p_{31}\left(\frac{dp_{21}}{dt}\right)^2\right\} \\
- 4v_{21}&\left\{p_{21}\left(\frac{dp_{31}}{dt} + \frac{dp_{41}}{dt}\right)^2 + p_{31}\left(\frac{dp_{41}}{dt}\right)^2 + p_{41}\left(\frac{dp_{31}}{dt}\right)^2\right\} \\
- 4v_{31}&\left\{p_{31}\left(\frac{dp_{41}}{dt} + \frac{dp_{21}}{dt}\right)^2 + p_{41}\left(\frac{dp_{21}}{dt}\right)^2 + p_{21}\left(\frac{dp_{41}}{dt}\right)^2\right\} \\
&+ (16\,p_{21}p_{31} + p_{31}p_{41} + p_{41}p_{21})\,(v_{21}v_{31} + v_{31}v_{41} + v_{41}v_{21});
\end{aligned} \tag{21}
$$

die anderen Coefficienten werden durch dreimalige cyclische Vertauschung aller Indices 1, 2, 3, 4 gewonnen.

Die Gleichungen (VI) enthalten je eine von den Grössen σ und ϱ, und nebstdem noch die Grössen r, u und $\frac{dr}{dt}$; da von jenen Grössen nur drei unabhängig sind und die übrigen sich aus ihnen ableiten lassen (s. Gl. 11, 12), so kann man diese drei Grössen aus den sieben Gleichungen (VI) eliminiren und erhält scheinbar vier Gleichungen zwischen den Grössen r, u, $\frac{dr}{dt}$. Doch ergibt sich — was jedoch, um den Gang der Untersuchungen nicht zu unterbrechen, erst später nachgewiesen werden soll — dass von diesen Gleichungen nur drei von einander unabhängig sind. Diese drei Gleichungen, welche wir als das System (VIII) bezeichnen wollen, bilden ebenso viele Differentialgleichungen des vorliegenden Problems. Wenn sie zu den übrigen Gleichungen hinzugefügt werden, so zeigt es sich, dass dann eine einzige von den Gleichungen (VI), und ebenso auch eine einzige (natürlich die entsprechende) Gleichung (IV) beibehalten werden muss; oder auch eine zweckmässige Combination der Gleichungen (VI) und die entsprechende Combination der Gleichungen (IV).

Die letzte noch erforderliche Gleichung (VII) ist nothwendig von zweiter Ordnung; wir wählen sie aus dem Systeme der in bekannter Weise aus den ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung abgeleiteten, die zweiten Differentialquotienten der r bestimmenden Gleichungen:

$$(\mathrm{VII}_1)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{23}^2)}{dt^2}+mr_{23}^{-1}+m_1(p_{24}q_{24}-p_{34}q_{34})+m_4(p_{21}q_{21}-p_{31}q_{31})-u_{23}^2=0$$

$$(\mathrm{VII}_2)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{31}^2)}{dt^2}+mr_{31}^{-1}+m_2(p_{34}q_{34}-p_{14}q_{14})+m_4(p_{12}q_{12}-p_{32}q_{32})-u_{31}^2=0$$

$$(\mathrm{VII}_3)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{12}^2)}{dt^2}+mr_{12}^{-1}+m_3(p_{14}q_{14}-p_{24}q_{24})+m_4(p_{13}q_{13}-p_{23}q_{23})-u_{12}^2=0$$

$$(\mathrm{VII}_4)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{14}^2)}{dt^2}+mr_{14}^{-1}+m_2(p_{43}q_{43}-p_{13}q_{13})+m_3(p_{42}q_{42}-p_{12}q_{12})-u_{14}^2=0$$

$$(\mathrm{VII}_5)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{24}^2)}{dt^2}+mr_{24}^{-1}+m_3(p_{41}q_{41}-p_{21}q_{21})+m_1(p_{23}q_{23}-p_{43}q_{43})-u_{24}^2=0$$

$$(\mathrm{VII}_6)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2(r_{34}^2)}{dt^2}+mr_{34}^{-1}+m_1(p_{32}q_{32}-p_{42}q_{42})+m_2(p_{31}q_{31}-p_{41}q_{41})-u_{34}^2=0.$$

Oder nehmen wir die symmetrische Combination derselben, welche sich bei Benützung der Gleichung (A) ergibt:

$$(\mathrm{VIII})\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m_1m_4}\frac{d^2(r_{23}^2)}{dt^2}+\frac{1}{m_2m_4}\frac{d^2(r_{31}^2)}{dt^2}+\frac{1}{m_3m_4}\frac{d^2(r_{12}^2)}{dt^2}+\frac{1}{m_2m_3}\frac{d^2(r_{14}^2)}{dt^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{m_3m_1}\frac{d^2(r_{24}^2)}{dt^2}+\frac{1}{m_1m_2}\frac{d^2(r_{34}^2)}{dt^2}\right\}\\ &-m\left\{\frac{1}{m_1m_4r_{23}}+\frac{1}{m_2m_4r_{31}}+\frac{1}{m_3m_4r_{12}}+\frac{1}{m_2m_3r_{14}}+\frac{1}{m_3m_1r_{24}}+\frac{1}{m_1m_2r_{34}}\right\}=F.\end{aligned}$$

Wir haben also in der That 13 Gleichungen (I), (II), (III), (I′), (II′), (III′), (IV), (V) (VI), (VII), (VIII$_1$), (VIII$_2$), (VIII$_3$) zwischen den unbekannten Functionen der Zeit:

$r_{23}, r_{31}, r_{12}, r_{14}, r_{24}, r_{34}; u_{23}, u_{31}, u_{12}, u_{14}, u_{24}, u_{34}; \sigma_1$ (oder ein anderes σ oder ϱ).

Von diesen Gleichungen ist die (VII) zweiter Ordnung, alle übrigen erster Ordnung; von den erforderlichen 14 Integralen liegt ein Integral (A) vor, so dass 13 Integrale noch zu suchen sind.

Selbstverständlich könnte man dem Resultate auch die Form geben, wo in den Gleichungen bloss die r vorkommen würden, also jene Form, welche dem Dreikörper-Problem von Lagrange gegeben worden ist. Die scheinbar 7, in Wirklichkeit bloss 6 Gleichungen (VI), die Gleichung (V) und das Integral (A) erlauben uns, von den neun Grössen:

$$u_{23},\ u_{31},\ u_{12},\ u_{14},\ u_{24},\ u_{34},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$$

acht als Functionen der r, $\frac{dr}{dt}$ und der übrigbleibenden neunten Grösse auszudrücken. Man substituire nun die so gefundenen Grössen u in die 6 Gleichungen (VII$_1$) .... (VII$_6$), und eliminire die letzte noch übrig gebliebene Grösse u oder σ aus diesen Gleichungen, was 5 Gleichungen zweiter Ordnung gibt, welche bloss die r enthalten. Ausserdem muss man jedoch eine von den Gleichungen (VII) differenciren, und aus dem Resultate, sei es eine Grösse $\frac{du}{dt}$ mittelst (I), (II), (III), (I′), (II′) oder (III′), sei es eine Grösse $\frac{d\sigma}{dt}$ mittelst einer der Gleichungen (IV) eliminiren. So erhält man eine sechste Gleichung dritter Ordnung, die ebenfalls nur die r enthält. Das so gefundene Gleichungssystem erfordert natürlich ebenfalls $5 \times 2 + 3 = 13$ Integrationen.

IV.

Es bleibt noch übrig, die Untersuchung in Bezug auf das Gleichungssystem (VIII) zu Ende zu führen. Man könnte etwa die Gleichungen (VI$_1$), (VI$_2$), (VI$_3$) nach σ_1, σ_2, σ_3 auflösen, und diese Werthe in die Gleichungen (VI′)—(VI′$_4$) substituiren, nachdem man die ϱ mittelst (12) durch die σ ersetzt hätte. Dies würde vier Relationen zwischen den Grössen r, $\frac{dr}{dt}$, u geben; nun lässt sich aber, wie schon bemerkt, zeigen, dass zwischen denselben nothwendig drei, aber auch nicht mehr als drei Relationen bestehen.*)

Zu diesem Zwecke stellen wir folgende Überlegung an. Denken wir uns die der Grösse nach willkürlichen Vektoren**)

$$\overline{r_{23}},\ \overline{r_{31}},\ \overline{r_{12}},\ \overline{r_{14}},\ \overline{r_{24}},\ \overline{r_{34}}$$

*) Die Relationen, von denen hier die Rede ist, sind von der Gravitationsbeziehung zwischen den Massenpunkten ganz unabhängig, mit anderen Worten nicht mechanisch, sondern rein geometrisch wie die Gleichungen (VI) selbst.

**) Die Buchstaben selbst bedeuten die Längen (Tensoren); die horizontalen Striche über denselben sollen andeuten, dass hier geometrische Grössen (Vektoren) vorliegen.

welche das Tetraeder $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ zur Zeit t bestimmen, ferner die ebenso willkürlichen Vektoren

$$\overline{r'_{23}},\ \overline{r'_{31}},\ \overline{r'_{12}},\ \overline{r'_{14}},\ \overline{r'_{24}},\ \overline{r'_{34}},$$

welche der Zeit $t + dt$ entsprechen.

Die geometrischen Unterschiede:

$$\frac{\overline{r'_{23}} - \overline{r_{23}}}{dt}, \ldots\ldots, \frac{\overline{r'_{34}} - \overline{r_{34}}}{dt}$$

sind nichts anderes als die relativen Geschwindigkeitsvektoren $\overline{u_{23}}, \ldots \overline{u^1_{23}}$, und als solche von den algebraischen Unterschieden:

$$\frac{r'_{23} - r_{23}}{dt} = \frac{dr_{23}}{dt}, \ldots \frac{r'_{34} - r_{34}}{dt} = \frac{dr_{34}}{dt}$$

wohl zu unterscheiden.

Bei der Aufsuchung der relativen Geschwindigkeiten kommt es auf die absolute Lage im Raume nicht an, sondern nur auf die Orientirung der beiden Tetraeder. Wir wollen beide Tetraeder parallel mit sich selbst so verschieben, dass die Punkte m_4 in beiden Lagen zusammenfallen, und wollen untersuchen, ob dann die Grössen

$$u_{23}dt,\ u_{31}dt,\ u_{12}dt,\ u_{14}dt,\ u_{24}dt,\ u_{34}dt$$

völlig willkürlich angenommen werden können.

Mit den drei letzten Grössen ist es offenbar der Fall; denn beschreiben wir um die Punkte m_1, m_2 m_3 (in der ersten Lage) Kugeln mit den Halbmessern $u_{14}dt$, $u_{24}dt$, $u_{34}dt$, so brauchen wir das zweite Tetraeder bloss so zu stellen, dass der Punkt m'_1 (der Endpunkt des Vektors r'_{41}) auf die erste, der Punkt m'_2 auf die zweite, der Punkt m'_3 auf die dritte Kugel fällt — eine Aufgabe, welche in ganz bestimmter Weise (allerdings nicht eindeutig) gelöst werden kann. (Die Endpunkte der Vektoren $\overline{r'_{41}}$ und $\overline{r'_{42}}$ lässt man beziehungsweise auf der ersten und zweiten Kugel so lange schleifen, bis bei dieser drehenden Bewegung des Tetraeders um den Punkt m_4 auch der Endpunkt von $\overline{r'_{43}}$ auf die dritte Kugel fällt.)

Dadurch ist aber die Lage des zweiten Tetraeders vollkommen bestimmt, folglich auch die noch übrigen relativen Lagenänderungen: $u_{23}dt$, $u_{31}dt$, $u_{12}dt$. Es müssen also zwischen den Längen (Tensoren) r, r', udt, oder auch zwischen den r, den $\frac{dr}{dt}$ und den u drei Relationen, und können nicht mehr als drei Relationen bestehen.

Die Aufsuchung dieser Relationen hängt von einem Problem der sphärischen Trigonometrie ab, welches an sich von Interesse ist. Legt man vier den Tetraederflächen in der ersten Lage parallele Ebenen durch den Mittelpunkt einer Kugel, so bestimmen sie vier Kreise K_1, K_2, K_3, K_4, welche sich in den sechs Punkten:

$$P_{23} = (K_1 K_4),\ P_{31} = (K_2 K_4),\ P_{12} = (K_3 K_4),\ P_{14} = (K_2 K_3),\ P_{24} = (K_3 K_1),\ P_{34} = (K_1 K_2)$$

schneiden; diese Punkte entsprechen natürlich den Richtungen der r. Eine ähnliche Construction führen wir nun bezüglich der zweiten Lage des Tetraeders aus; die vier Kreise $K'_1 \ldots K'_4$ bestimmen wieder sechs Punkte $P'_{23} \ldots P'_{24}$.

Denken wir uns die r und r' gegeben; dann ist die Form der beiden sphärischen Vierseite bestimmt und nur noch ihre gegenseitige Lage willkürlich. Sind nun weiter von den u drei, etwa u_{23}, u_{31}, u_{12} gegeben, so sind damit auch die Bogen $P_{23}P'_{23}$, $P_{31}P'_{31}$, $P_{12}P'_{12}$ bestimmt, dadurch aber auch die Lage des Kreises K'_4 gegen den Kreis K_4 festgelegt, somit auch die Lage beider Vierseite gegeneinander. Die übrigen Entfernungen entsprechender Ecken $P_{14}P'_{14}$, $P_{24}P'_{24}$, $P_{34}P'_{34}$, somit auch die entsprechenden Grössen u_{14}, u_{24}, u_{34} sind nicht mehr frei wählbar, sondern durch die gegebenen 15 Grössen bestimmt. Und zwar lässt sich unsere Aufgabe, die nothwendigen Bedingungsgleichungen aufzusuchen, auf das folgende Problem reduciren:

Zwei sphärische Vierseite sind der Form nach gegeben; wir kennen die Abstände dreier entsprechender Ecken und suchen die gegenseitige Lage der Vierseite, namentlich die Abstände der übrigen Ecken.

Es seien m, n, p, q die vier Indices 1, 2, 3, 4 in beliebiger Anordnung; wir bezeichnen dann den Bogen $P_{mq}P_{qn}$ mit a_{mn}, und den Winkel bei P_{pq}, welcher im sphaerischen Dreieck $P_{mq}P_{nq}P_{pq}$ jenem Bogen gegenüber liegt, mit α_{pq}. Die entsprechenden Seiten und Winkel der durch die zweite Lage des Tetraeders bedingten Dreiecke bezeichnen wir mit a'_{mn}, α'_{pq}. So sind im Dreieck $P_{14}P_{24}P_{34}$ die Seiten der Reihe nach: a_{23}, a_{31}, a_{12} und die gegenüberliegenden Winkel: α_{14}, α_{24}, α_{34}. Die unendlich kleinen, an den Durchschnittspunkten der Kreise $K_1K'_1$, $K_2K'_2$, $K_3K'_3$, $K_4K'_4$ befindlichen Winkel bezeichnen wir mit $\varkappa_1 dt$, $\varkappa_2 dt$, $\varkappa_3 dt$, $\varkappa_4 dt$, die Abstände eines solchen Punktes $K_mK'_m$ von P_{pq} mit φ_{mn}, die Abstände desselben Punktes von P'_{pq} mit φ_{mn}, die Abstände desselben Punktes von P'_{pq} mit $\varphi_{mn}+\psi_{mn}dt$. Endlich heisse der Winkel $P'_{pq}P_{pq}P_{qn}$ β_{mn}, und der Winkel $P'_{pq}P_{pq}P_{qm}$ β_{nm}, so dass $\beta_{mn}+\beta_{nm}=\alpha_{pq}$. So ist z. B. φ_{12} der Bogen vom Durchschnittspunkte $K_1K'_1$ bis P_{34}, $\varphi_{12}+\psi_{12}dt$ der Bogen von demselben Punkte bis P'_{34}; β_{12} der Winkel $P'_{34}P_{34}P_{24}$, β_{21} der Winkel $P'_{34}P_{34}P_{14}$ und $\beta_{12}+\beta_{21}=\alpha_{34}$.

Betrachten wir nun etwa die Dreiecke $Q_1P_{34}P'_{34}$, $Q_1P_{42}Q_{42}$ und $Q_1P_{23}P'_{23}$. Wir finden:

$$(\psi_{12}^2+\varkappa_1^2 \sin^2\varphi_{12})^2\, dt^2=(P_{34}P'_{34})^2.$$

$P_{mn}P'_{mn}$ kann man aus dem Dreiecke berechnen, welches aus r_{mn}, r'_{mn} und $u_{mn}dt$ gebildet ist. Es ist nämlich:

$$(P_{mn}P'_{mn})^2=\frac{u_{mn}^2\,dt^2-dr_{mn}^2}{r_{mn}^2}.$$

Wir erhalten daher folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\psi_{12}^2+\varkappa_1^2\sin^2\varphi_{12}=\frac{1}{r_{34}^2}\left[u_{34}^2-\left(\frac{dr_{34}}{dt}\right)^2\right]=s_{34}^2,\\
(22)\qquad &\psi_{13}^2+\varkappa_1^2\sin^2\varphi_{13}=\frac{1}{r_{42}^2}\left\{u_{42}^2-\left(\frac{dr_{42}}{dt}\right)^2\right\}+s_{42}^2,\\
&\psi_{14}^2+\varkappa_1^2\sin^2\varphi_{14}+\frac{1}{r_{23}^2}\left\{u_{13}^2-\left(\frac{dr_{23}}{dt}\right)^2\right\}=s_{23}^2.
\end{aligned}$$

Setzen wir weiter:

$$\varphi_{12}+\varphi_{13}+\varphi_{14}=3\varphi_1\,,\quad \psi_{12}+\psi_{13}+\psi_{14}=3\psi_1\,,$$

und bedenken wir, dass folgende Gleichungen gelten:

$$\varphi_{12} - \varphi_{13} = a_{23}, \quad \varphi_{13} - \varphi_{14} = a_{34}, \quad \varphi_{14} - \varphi_{12} = a_{42},$$

$$\psi_{12} - \psi_{13} = \frac{da_{23}}{dt}, \quad \psi_{13} - \psi_{14} = \frac{da_{34}}{dt}, \quad \psi_{14} - \psi_{12} = \frac{da_{42}}{dt},$$

so erhalten wir:

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \tfrac{1}{3}(a_{23} - a_{42}) = \varphi_1 + \chi_{12}, \quad \psi_{12} = \psi_1 + \frac{d\chi_{12}}{dt},$$

$$\varphi_{13} = \varphi_1 + \tfrac{1}{3}(a_{34} - a_{23}) = \varphi_1 + \chi_{13}, \quad \psi_{13} = \psi_1 + \frac{d\chi_{13}}{dt},$$

$$\varphi_{14} = \varphi_1 + \tfrac{1}{3}(a_{42} - a_{34}) = \varphi_1 + \chi_{14}, \quad \psi_{14} = \psi_1 + \frac{d\chi_{14}}{dt}.$$

Setzen wir noch:

$$\varkappa_1 \sin\varphi_1 = \lambda_1 \quad \varkappa_1 \cos\varphi_1 = \mu_1,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (22) in:

$$\psi_1^2 + 2\psi_1 \frac{d\chi_{12}}{dt} + \lambda_1^2 \cos^2\chi_{12} + 2\lambda_1\mu_1 \cos\chi_{12} \sin\chi_{12} + \mu_1^2 \sin^2\chi_{12} = s_{34}^2 - \left(\frac{d\chi_{12}}{dt}\right)^2,$$

$$(23) \quad \psi_1^2 + 2\psi_1 \frac{d\chi_{13}}{dt} + \lambda_1^2 \cos^2\chi_{13} + 2\lambda_1\mu_1 \cos\chi_{13} \sin\chi_{13} + \mu_1^2 \sin^2\chi_{13} = s_{42}^2 - \left(\frac{d\chi_{13}}{dt}\right)^2,$$

$$\psi_1^2 + 2\psi_1 \frac{d\chi_{14}}{dt} + \lambda_1^2 \cos^2\chi_{14} + 2\lambda_1\mu_1 \cos\chi_{14} \sin\chi_{14} + \mu_1^2 \sin^2\chi_{14} = s_{23}^2 - \left(\frac{d\chi_{14}}{dt}\right)^2.$$

Lösen wir diese Gleichungen nach λ_1^2, $\lambda_1\mu_1$, μ_1^2 auf, so erhalten wir für diese Grössen rationale Ausdrücke zweiten Grades nach ψ_1, also schliesslich für diese Unbekannte eine Gleichung vierten Grades. Indem wir die zwischen den Kreisen $K_2K'_2$, $K_3K'_3$, $K_4K'_4$ gelegenen Kreise in ähnlicher Weise behandeln, wobei statt der Grössen ψ_{mn} neben ψ_1 noch ψ_2, ψ_3, ψ_4, und ebenso neben λ_1 und μ_1 noch λ_2, λ_3, λ_3 und μ_2, μ_3, ψ_4 eingeführt werden, so erhalten wir schliesslich für die ψ das folgende Gleichungssystem, dessen Lösung die Bestimmung aller oben erwähnten Dreiecke nach sich zieht:*)

$$(24) \quad \begin{aligned} \psi_1^4 + H_1\psi_1^3 + K_1\psi_1^2 + L_1\psi_1 + M_1 &= 0,\\ \psi_2^4 + H_2\psi_2^3 + K_2\psi_2^2 + L_2\psi_2 + M_2 &= 0,\\ \psi_3^4 + H_3\psi_3^3 + K_3\psi_3^2 + L_3\psi_3 + M_3 &= 0,\\ \psi_4^4 + H_4\psi_4^3 + K_4\psi_4^2 + L_4\psi_4 + M_4 &= 0. \end{aligned}$$

Weiter hat man mit Rücksicht auf:

$$\psi_{12} = s_{34} \cos\beta_{12}, \quad \psi_{21} = s_{34} \cos\beta_{21}, \ldots$$

$$\psi_{12}\psi_{21} - \sqrt{(s_{34}^2 - \psi_{12}^2)(s_{34}^2 - \psi_{21}^2)} = s_{34}^2 \cos\alpha_{34};$$

---

*) Das Resultat erinnert an das Gleichungssystem (VI) für ϱ und legt den Gedanken nahe, einen Zusammenhang zwischen diesen Grössen und den ψ zu vermuthen; eine diesbezügliche Untersuchung habe ich nicht angestellt.

bei anderer Anordnung das Gleichungssystem:

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
\psi_{23}^2 - 2\psi_{23}\psi_{32}\cos\alpha_{14} + \psi_{32}^2 &= s_{14}^2 \sin^2\alpha_{14}\,,\\
\psi_{31}^2 - 2\psi_{31}\psi_{13}\cos\alpha_{24} + \psi_{13}^2 &= s_{24}^2 \sin^2\alpha_{24}\,,\\
\psi_{12}^2 - 2\psi_{12}\psi_{21}\cos\alpha_{34} + \psi_{21}^2 &= s_{34}^2 \sin^2\alpha_{34}\,,\\
\psi_{14}^2 - 2\psi_{14}\psi_{41}\cos\alpha_{23} + \psi_{41}^2 &= s_{24}^2 \sin^2\alpha_{23}\,,\\
\psi_{24}^2 - 2\psi_{24}\psi_{42}\cos\alpha_{31} + \psi_{42}^2 &= s_{31}^2 \sin^2\alpha_{31}\,,\\
\psi_{34}^2 - 2\psi_{34}\psi_{43}\cos\alpha_{12} + \psi_{43}^2 &= s_{12}^2 \sin^2\alpha_{12}\,.
\end{aligned}
$$

Es sind dies sechs Gleichungen zwischen den ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, in denen die $\cos\alpha_{mn}$ und $\sin\alpha_{mn}$ als gegeben zu betrachten sind (als Functionen der r). Mit irgend einer der Gleichungen (24) combinirt, geben sie nach Elimination der Grössen ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 drei Relationen zwischen den u, den $\frac{dr}{dt}$ und den u, welche nichts anderes sind, als das gesuchte Gleichungssystem (VIII).

Es kann aber auch irgend eine Combination der Gleichungen (24) und (25) benützt werden, sofern sie zu drei derartigen Relationen führt. Man sieht, dass je zwei Gleichungen (24) mit je einer Gleichung (25) zu einer solchen Relation führt, z. B. die 2. und 3. Gleichung (24) mit der 1. Gleichung (25) combinirt, welcher man die Form geben kann:

$$\psi_2^2 + \psi_3^2 + N_1\psi_2\psi_3 + P_1\psi_2 + Q_1\psi_3 + R_1 = 0.$$

Von diesen (im Ganzen sechs) Combinationen reichen drei, z. B. die der ersten drei Gleichungen (24) und der ersten drei Gleichungen (25) hin, um das System (VIII) darzustellen. Die ersten drei Gleichungen (24) beziehen sich auf das durch die Kreise K_1, K_2, K_3 gebildete Dreieck und es könnte scheinen, als ob bei dieser Ableitung des Systems (VIII), der Kreis K_4 nicht zur Geltung käme. Das ist jedoch nicht der Fall; denn die Ableitung der Gleichungen (25) ist gleichbedeutend mit der Festlegung der entsprechenden Kreise K' gegen K: dazu werden bei den Kreisen K_1, K_2, K_3 die Abstände der Durchschnittspunkte dieser Kreise mit K_4 von den Durchschnittspunkten der Kreise K'_1, K'_2, K'_3 mit K'_4 benützt, die Kreise K_4 und K'_4 kommen also wohl zur Geltung.

Von der wirklichen Aufstellung der Gleichungen (VIII) mag Umgang genommen werden, da eine praktische Verwendung der hier gewonnenen Resultate in sehr weiter Ferne liegt. Vielleicht dürfte sie ehestens noch in der Richtung einer durch Specialisirung gewonnenen Anwendung auf das Dreikörperproblem (wobei natürlich nicht bloss an die bedeutungslosen Fälle $m_4 = 0$, oder $r_{34} = 0$ zu denken wäre) zu suchen sein.

Es bliebe noch übrig zu zeigen, wie nach der Lösung des reducirten Problems das allgemeinere gelöst, d. h. die noch fehlende eine Integration zu bewerkstelligen wäre. Darin weicht jedoch das Vierkörper-Problem vom Dreikörper-Problem nicht ab; ist die Lage des Dreieckes $m_1m_2m_3$ bestimmt, so ist auch die Lage des Tetraeders $m_1m_2m_3m_4$ bestimmt. Erstere Aufgabe ist von Lagrange gelöst worden, und seiner Lösung auch in dem vorliegenden Falle nichts hinzuzufügen.
