SUR LA TRANSFORMATION

DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

DE SECONDE ESPÈCE.

(EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. MATYÁŠ LERCH.)

PAR

M. HERMITE.

(TIRÉ DES MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME, VIIME SÉRIE, T. II, No 12, 1888.)

LU DANS LA SÉANCE DU 23 MARS 1888.

PRAGUE.

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ. — IMPRIMÉ CHEZ M. ED. GRÉGR.

1888.

En modifiant un peu le procédé ordinaire de réduction des intégrales hyperelliptiques j'ai considéré, dans mes leçons,*) les expressions de la forme suivante

$$\int \frac{G\,dx}{A^{a+1}\sqrt{R}},$$

où G, A et R sont des polynômes entiers en x, A et R n'ayant que des facteurs simples et étant supposés premiers entre eux. J'ai montré qu'elles se ramènent facilement à un terme algébrique et à une expression semblable où l'exposant a est diminué d'une unité. Dans le cas, par exemple, de $a = 1$ que je vais employer, on détermine deux polynômes P et Q, par la condition

$$G = AP - A'RQ,$$

et en posant

$$Q_1 = P - RQ' - \tfrac{1}{2} R'Q,$$

on a cette égalité qui se vérifie immédiatement par la différentiation:

$$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1 dx}{A\sqrt{R}}.$$

Je vais l'appliquer à la recherche de l'expression de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}},$$

où $y = \frac{U}{V}$ est la formule de transformation de Jacobi qui satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Je remarque d'abord que l'on peut écrire:

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

*) Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris, 3me Edit., p. 28.

le sorte qu'en prenant

$$R = (1 - x^2)(1 - k^2x^2), \quad G = \lambda^2 U^2, \quad A = V,$$

la relation précédente nous donne:

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = \frac{Q \cdot \sqrt{R}}{V} + \int \frac{Q_1 dx}{V\sqrt{R}}.$$

Cela étant je dis que Q_1 est divisible par V, c'est à dire que le second membre ne contient pas d'intégrales de troisième espèce, qui admettent des infinis logarithmiques. M. *Fuch* obtient a priori et sans calcul ce résultat important que j'établirai ensuite algébriquement, de la manière suivante. L'illustre géomètre m'a fait observer que l'intégrale

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}}$$

n'ayant point d'infini logarithmique, il en est de même nécessairement de la transformée en x obtenue en faisant $y = \frac{U}{V}$, puisque la nouvelle variable est une fonction algébrique de y. Il ne nous reste plus par conséquent qu'à obtenir le polynôme Q et le quotient entier $\frac{Q_1}{V}$ Pour cela j'employe l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{R}};$$

après avoir substitué la valeur $y = \frac{U}{V}$, j'élève au carré, ce qui donne l'égalité:

$$M^2 R (U'V - UV')^2 = V^4 - (1 + \lambda^2) U^2 V^2 + \lambda^2 U^4,$$

ou sous une autre forme:

$$U^2 (M^2 R V'^2 - \lambda^2 U^2) = V^4 - (1 + \lambda^2) U^2 V^2 - M^2 R (U'^2 V^2 - 2UU'VV').$$

On montre ainsi que $M^2RV'^2 - \lambda^2U^2$ est divisible par V qui, étant premier avec U et par conséquent avec U^2, entre dans le second membre comme facteur. Soit donc, en désignant par H un polynôme entier,

$$M^2 R V'^2 - \lambda^2 U^2 = VH,$$

nous aurons:

$$\lambda^2 U^2 = - VH + M^2 R V'^2;$$

or la relation par laquelle se déterminent les quantités désignées plus haut par P et Q, étant maintenant:

$$\lambda^2 U^2 = VP - V'RQ,$$

on voit immédiatement qu'on peut prendre $P = -H$ et $Q = -M^2 V'$.

Soit ensuite S le quotient entier $\frac{Q_1}{V}$ que nous avons encore à obtenir, et qui donne l'égalité:

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = -\frac{M^2 V' \sqrt{R}}{V} + \int \frac{S\,dx}{\sqrt{R}}.$$

On trouve, par la différentiation, l'expression suivante:

$$S = \frac{\lambda^2 U^2}{V^2} + M^2 \sqrt{R}\, D_x \frac{V' \sqrt{R}}{V},$$

et il en résulte facilement que S est un simple binôme $gx^2 + h$.

Je cherche en effet la limite de $\frac{S}{x^2}$ pour x infiniment grand; en faisant avec Jacobi:

$$U = \frac{x}{M}(1 + A'x^2 + A''x^4 + \ldots + A^{(m)} x^{2m}),$$

$$V = 1 + B'x^2 + B''x^4 + \ldots . + B^{(m)} x^{2m},$$

de sorte que l'ordre de la transformation soit $n = 2m + 1$, on obtient la quantité finie

$$\left[\frac{\lambda A^{(m)}}{MB^{(m)}}\right]^2 + 2mk^2M^2,$$

qui représente par conséquent la constante g.

Cette valeur se simplifie au moyen des relations établies à la fin du § 12 des Fundamenta. Si l'on employe les suivantes:

$$\frac{A^{(m)}}{M} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\, k^m, \quad \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\, \frac{B^{(m)}}{k^m},$$

on en tire aisément:

$$\frac{\lambda A^{(m)}}{MB^{(m)}} = kM$$

ce qui donne

$$g = k^2M^2 + 2mk^2M^2, \quad \text{ou bien,} \quad g = nk^2M^2.$$

En supposant ensuite $x = 0$ dans l'expression de S, il vient $h = 2B'M^2$, et nous avons en conséquence le résultat important contenu dans la relation

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = -\frac{M^2 V' \sqrt{R}}{V} + M^2 \int \frac{(nk^2x^2 + 2B')\,dx}{\sqrt{R}},$$

ou encore si l'on revient à la variable y, après avoir divisé les deux membres par M^2:

$$\frac{1}{M}\int\frac{\lambda^2y^2dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}=-\frac{V'\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{V}+\int\frac{(nk^2x^2+2B')dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

C'est la relation qu'a donnée *Jacobi*, en remplaçant l'intégrale de seconde espèce de Legendre, par celle de M. *Weierstrass.*

Je reviens maintenant au polynôme Q_1 afin d'établir par une voie purement algébrique qu'il est divisible par V. A cet effet je reprends la formule générale de réduction, dans laquelle R est un polynôme de degré quelconque,

$$\int\frac{Gdx}{A^2\sqrt{R}}=\frac{Q\sqrt{R}}{A}+\int\frac{Q_1dx}{A\sqrt{R}},$$

en me proposant d'exprimer, au moyen de G, A et R, la condition pourque Q_1 soit divisible par A. Ainsi qu'on a vu plus haut, on a:

$$Q_1=P-RQ'-\tfrac{1}{2}R'Q,$$

et par conséquent si l'on fait $Q_1=AS$, il vient

$$P=AS+RQ'+\tfrac{1}{2}R'Q.$$

Cela étant, en différentiant l'équation

$$G=AP-A'RQ,$$

nous obtenons

$$G'=AP'+A'(P-RQ'-R'Q)-A''RQ,$$

puis au moyen de la valeur de P,

$$G'=A(P'+A'S)-Q(RA''+\tfrac{1}{2}R'A').$$

Prenons maintenant suivant le module A les valeurs de G et G'; on aura:

$$G\equiv-A'RQ$$
$$G'\equiv-Q(RA''+\tfrac{1}{2}R'A')$$

et l'on en conclut immédiatement que le polynôme

$$RA'G'-G(RA''+\tfrac{1}{2}R'A')$$

est divisible par A; c'est le résultat auquel il s'agissait de parvenir et que je vais appliquer en supposant $R=(1-x^2)(1-k^2x^2)$, $G=U^2$ et $A=V$.

Nous obtenons alors l'expression suivante

$$U[2RU'V'-U(RV''+\tfrac{1}{2}R'V')],$$

ou bien en multipliant par 2,

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')],$$

et il s'agit de prouver qu'ele est divisible par V. C'est ce qu'on établit au moyen de l'équation

$$M^2R(U'V - UV')^2 = V^4 - (1 + \lambda^2)\, U^2V^2 + \lambda^2U^4,$$

et de sa dérivée dans lesquelles je ferai, pour un moment, $U'V - UV' = W$. On a ainsi

$$M^2RW^2 = V^4 - (1 + \lambda^2)\, U^2V^2 + \lambda^2U^4,$$

$$M^2W(2RW' + R'W) = 4V^3V' - 2(1 + \lambda^2)\, UV(U'V + UV') + 4\lambda^2U^3U'.$$

Multiplions la première par $4U'$, la seconde par U, et retranchons membre à membre, après avoir supprimé le facteur W, nous aurons:

$$M^2[4RU'W - U(2RW' + R'W)] = 4V^3 - 2(1 + \lambda^2)\, U^2V.$$

Cela étant, on obtient facilement au moyen de la valeur de W:

$$4RU'W - U(2RW' + R'W)$$
$$= V[4RU'^2 - U(2RU'' + R'U')] - U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')];$$

le premier membre de l'équation contenant en facteur V, il est donc démontré que la quantité considérée

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')],$$

est elle même divisible par V, comme je l'ai annoncé.