ZUR GEOMETRIE

DER FLÄCHEN DRITTER UND VIERTER ORDNUNG.

VON

Prof. **KARL KÜPPER**.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 2. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 10.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1888.

Im Nachstehenden werden einige Puncte aus der Theorie dieser Flächen erörtert, die bisher kaum Beachtung gefunden haben, obwohl sie für die Geometrie von Wichtigkeit sind.

a^2 bedeutet einen Kegelschnitt auf F^3, Σ die Ebene, in welcher er liegt, q die Gerade, welche Σ noch aus F^3 schneidet. Durch q gehen fünf Ebenen, die F^3 ausserhalb q berühren. Einer der 5 Berührungspuncte sei σ, in ihm schneiden sich zwei Gerade l, λ von F^3, welche beide q treffen.

Eine beliebige durch σ gezogene Gerade schneidet aus F^3 ein Punctepaar r, ϱ; der Punct σ', welcher von r, ϱ durch dieses Paar harmonisch getrennt ist, hat zum Ort Σ_1^2, die quadratische Polarfläche von σ in Bezug auf F^3. Σ_1^2 enthält l, λ und hat ferner mit F^3 eine Raumcurve 4ter Ordnung t^4 gemein, welche der Ort der Berührungspuncte der aus σ an F^3 möglichen Tangenten ist.

Diese t^4 ist Basis eines Büschels (φ^2), in welchem die Fläche Σ_1^2 vorkommt.

Wenn man jede dieser φ^2 mit der Polarebene von σ in Bezug auf dieselbe schneidet, so ist der Ort der erhaltenen Schnittlinien 2ten Grads eine cubische Fläche, welche die vorliegende F^3 längs t^4 berühren, und die Geraden l, λ enthalten wird. Daher wird sie mit F^3 identisch sein. Die eben gedachten Polarebenen müssen hiebei durch eine feste Gerade gehen, die Conjugirte von σ in Bezug auf den Büschel (φ^2), und es wird diese Gerade der F^3 angehören; mithin q sein, da sie in der Ebene $l\lambda$ liegen muss. In dem Büschel (φ^2) kommt sonach auch eine Fläche vor, welche durch a^2 geht, diese sei H^2. Die Ebene Σ ist nnn Polarebene von σ in Bezug auf H^2.

Diese Construction von F^3 zeigt sogleich, dass ein beliebiges Paar r, ϱ durch H^2 harmonisch getrennt ist; so dass, wenn die Flächen Σ_1^2, H^2 vorliegen, sämmtliche Paare der F^3 leicht zu construiren sind. Es ist aber zweckmässig, hiezu eine andere Fläche zu benutzen, nämlich die Polarfigur Q^2 von Σ_1^2 in Bezug auf H^2. Weil Σ_1^2 die Geraden l, λ enthält, wird Q^2 die Ebene Σ in den conjugirten Polaren von l, λ schneiden. Diese beiden Geraden der Q^2 sollen beziehlich mit l', λ' bezeichnet werden, q_0 sei ihr Schnittpunct.

1. Wir betrachten zuerst die Quadriflächen F^2, welche den Kegelschnitt a^2 enthalten, und F^3 ausserdem in je zwei anderen Kegelschnitten x^2, y^2 schneiden. Wird eine solche F^2 vorausgesetzt, und nennt man x, y die beiden Puncte, welche x^2, y^2 gemein haben, X, Y die Ebenen, in welchen sie liegen, so gehen durch x^2, y^2 ∞^1 Flächen ψ^2, von welchen jede einen Kegelschnitt z^2 aus F^3 schneiden wird. Dabei fallen diese z^2 in die durch q möglichen Ebenen.

Nun befindet sich unter den ψ^2 auch das Ebenenpaar X, Y. Wenn dann die Gerade xy die F^3 in z durchstösst, so müssen sich in z zwei Gerade von F^3 treffen, die in den Ebenen X, Y sind und auf q stehen. Mithin folgt, dass z einer der fünf Puncte σ sein muss. Wird umgekehrt etwa σ angenommen, und durch l irgend eine Ebene gelegt, wobei sie einen Kegelschnitt x^2 aus F^3 schneiden möge, so hat man in a^2, x^2 die Basis eines Büschels (F^2), durch dessen Flächen aus F^3 alle Kegelschnitte y^2 geschnitten werden, deren Ebenen die Gerade λ enthalten.

Mithin existiren fünf Systeme solcher F^2, wie sie verlangt wurden, den fünf Puncten σ entsprechend. Jede dieser F^2 berührt F^3 in zwei Puncten x, y, deren Verbindungslinie durch einen der Puncte σ geht. Zur speciellen Untersuchung des zu σ gehörigen Systems der F^2 bedienen wir uns einer Abbildung der F^3, die wir oft mit Nutzen angewendet haben, und die jetzt ausführlich behandelt werden soll.

2. Neue Eigenschaften einer bekannten Transformation (r, ϱ) des Raumes.

Ist eine Fläche H^2 gegeben, und wird ein Punct σ ausserhalb derselben als fest angenommen, so hat man in den Puncten r, ϱ (auf den Strahlen r von σ), welche in Bezug auf H^2 conjugirt sind, eine quadratische Transformation des Raumes in sich.

Wir lassen die Paare r, ϱ den Ebenen R des Raumes in folgender Weise entsprechen: Wenn Σ die Polarebene von σ in Bezug auf H^2 ist, a^2 der Schnitt von Σ, H^2 heisst; so müssen die beiden Kegel, welche aus den Puncten r, ϱ eines beliebigen Paares a^2 projiciren, sich auf H^2 in einer ebenen Curve r^2 durchdringen; die Ebene von r^2 sei R und ihr entspricht das Paar r, ϱ.

Wenn man andererseits H^2 mit einer beliebigen Ebene R in r^2 schneidet, und mit r, ϱ die Spitzen der Kegel bezeichnet, welche durch a^2, r^2 sich legen lassen, so fallen diese bekanntlich auf den Strahl von σ, welcher zur Schnittlinie $R\Sigma$ conjugirt ist in Bezug auf H^2, und es ist auch r von ϱ durch H^2 harmonisch getrennt.

Wesentlich ist hiebei, dass der Pol σ' von R in Bezug auf H^2 in σr liegt und von σ durch r, ϱ harmonisch getrennt ist.

Denn projizirt man aus der Geraden $R\Sigma$ die Puncte r, ϱ durch zwei Ebenen, so haben diese ϱ, r zu Polen bezüglich H^2, und sind offenbar durch die Ebenen Σ, R harmonisch getrennt. Demnach sind die Pole dieser vier Ebenen harmonische Puncte, nämlich: r, ϱ, σ, σ'.

Ferner ist hervorzuheben, dass wenn r irgend eine Gerade r des Raumes beschreibt — also ϱ auf einem Kegelschnitt in der Ebene σr bleibt — R einen Kegel 2ten Grads umhüllen wird, dessen Spitze sich in Σ befindet. Denn da R stets die conjugirte Polare von σr bezüglich H^2 enthält, so geht sie durch den Pol der Ebene σr; schneidet die letztere H^2 in b^2, a^2 in den Puncten 1, 2, so braucht man nur r aus 1, 2 auf b^2 zu projiciren, um 2 Puncte der Geraden zu finden, welche R mit der Ebene σr gemein hat. Es leuchtet aber sofort ein, dass diese Gerade einen Kegelschnitt umhüllt.

3. Gebilde, welche durch die Transformation (r, ϱ) in sich selbst verwandelt werden.

a) Die Flächen 2ten Grads P^2.

Wenn die Strahlen von σ eine P^2 in Paaren r, ϱ treffen, so ist der Ort des Punctes σ', welcher von σ durch r, ϱ harmonisch getrennt wird, eine Ebene; folglich enthalten die betreffenden R nach 2. einen festen Punct p, den Pol jener Ebene. Wenn daher P^2 existirt, so gehört sie zu einem bestimmten Puncte p.

Umgekehrt, zu jedem willkührlich im Raume angenommenen Puncte p gehört eine bestimmte Fläche P^2.

Beweis. Durch p seien irgend zwei Ebenen R_1, R_2 gelegt, die aus H^2 die Curven r_1^2, r_2^2 schneiden. Alsdann sind a^2, r_1^2 und $a^2 r_2^2$ die Basen zweier Flächenbüschel, die auf jeder durch p gezogenen Geraden $\mathfrak{p}$ die nämliche Involution j ausschneiden; denn in diesen Involutionen kommen als Paare vor: erstens die Schnittpuncte von $\mathfrak{p}$ mit H^2, zweitens p und der Durchstosspunct von $\mathfrak{p}$ mit Σ.

Nun sind die Doppelpuncte von j zwei Puncte r; denn nach 2. folgt, dass auf $\mathfrak{p}$ zwei Kegelspitzen sind, deren entsprechende R durch p gehen. Diese sind offenbar die Doppelpuncte der für alle durch p denkbaren R unveränderlichen Involution. Es erübrigt zu zeigen, dass diese Doppelpuncte für alle $\mathfrak{p}$ auf einer Fläche 2ten Grads liegen: r_1 sei ein solcher Doppelpunct, dem die Ebene R_1 zugeordnet ist. Es gibt eine Fläche P^2, welche durch r_1 geht und den Kegel, der aus p die Curve a^2 projicirt, längs a^2 berührt, sie sei P^2. Sucht man auf der Geraden $\mathfrak{p}$ die Involution conjugirter Pole für P^2, so liegt von dieser ein Paar vor in p nnd dem Schnittpuncte $\mathfrak{p}\Sigma$, ein zweites besteht aus den Puncten, in welchen $\mathfrak{p}$ den Kegel durchdringt, welcher r_1 mit a^2 verbindet. Um letzteres sofort zu sehen, betrachte man den Schnitt von P^2 mit der Ebene $r_1\mathfrak{p}$. Somit erhellt, dass j selbst die Involution der conjugirten Pole für P^2 ist.

Es muss bemerkt werden, dass die Polarebene von p bezüglich H^2, als Ort von σ' identisch ist mit der Polarebene von σ in Bezug auf P^2, dass auch die Schnittlinie dieser Ebene mit H^2 der Fläche P^2 angehören muss. Und hieraus ergibt sich, dass wenn man analog wie mit σ, H^2 eine Transformation mittels p, P^2 herstellte, in dieser zum Puncte σ die Fläche H^2 gehören würde.

Liegt speciell p in H^2, so wird P^2 der Kegel mit der Basis a^2, der Spitze p; liegt p in Σ, so zerfällt P^2 in Σ und die Polarebene von p in Bezug auf H^2.

b) Die in sich transformirbaren Kegelschnitte $\mathfrak{g}^2$.

Es ist selbstverständlich, dass die Ebene eines solchen $\mathfrak{g}^2$ durch σ geht. Bestimmt man dann die Puncte σ', so findet man sie auf der Polare von σ bezüglich $\mathfrak{g}^2$. Daher werden die den Paaren r, ϱ zugewiesenen Ebenen einen Büschel bilden, dessen Axe $\mathfrak{g}$ jener Polare in Bezug auf H^2 conjugirt ist. Wir sagen, zur Geraden $\mathfrak{g}$ gehört $\mathfrak{g}^2$.

Wird andererseits $\mathfrak{g}$ angenommen, so existirt stets ein zugehöriger $\mathfrak{g}^2$. Denn zu je zwei Puncten p_1, p_2 der g gehören P_1^2, P_2^2, die ausser a^2 noch einen Kegelschnitt gemein haben, dieser ist g².

Zwei in derselben durch σ gelegten Ebene befindliche g² haben zwei Puncte auf a^2 gemein, überdies noch ein Paar r, ϱ; die Geraden g, zu welchen sie gehören, schneiden sich auf Σ und umgekehrt.

Zu zwei windschiefen g gehören g², die keinen gemeinschaftlichen Punct ausserhalb a^2 besitzen. Noch ist zu beachten, dass g² zerfällt, wenn H^2 von g berührt wird, etwa in p. In diesem Falle besteht g² aus 2 Seiten des Kegels P^2, welche dieser mit der Polarebene des in Σ befindlichen Punctes von g (bezüglich H^2) gemein hat. Wird hingegen H^2 von g in zwei getrennten Puncten p_1, p_2 getroffen, so kann g² deshalb nicht zerfallen, weil die Kegel P_1^2, P_2^2 nicht zwei Kanten gemein haben können.

c) Die in sich transformirbaren Raumcurven 4ter Ordnung R^4.

Hier muss selbstverständlich σ die Spitze eines der durch R^4 möglichen quadratischen Kegel sein, z. B. von σ^2. Alsdann liegen bekanntlich die Puncte σ' in der Ebene S, welche die 3 anderen Kegelspitzen enthält, und zugleich auf σ^2. Demzufolge umhüllen die R die Polarfigur des Schnittes von S, σ^2 bezüglich H^2, das ist einen quadratischen Kegel.

Die Richtigkeit des Inversen ist offenbar.

d) Die in sich transformirbaren cubischen Flächen F^3.

Zunächst ist einleuchtend, dass eine derartige F^3 durch σ gehen muss, weil jede durch σ denkbare Gerade r die Fläche in einem einzigen Punctepaar — r, ϱ — durchdringt. Fasst man eine r in's Auge, welche H^2 in einem Puncte r^0 auf a^2 berührt, so wird r_0 zu jedem auf r möglichen Paare gehören. Demnach muss F^3 durch a^2 gehen, und es fällt in Σ eine Gerade q der Fläche. Nun ist jeder Punct von q mit einem Nachbarpuncte von σ gepaart; daher wird die Ebene qσ Tangentialebene von F^3 in σ sein, und demzufolge 2 sich in σ schneidende Gerade l, λ mit F^3 gemein haben.

Bestimmt man jetzt die Puncte σ', so erhält man die quadratische Polarfläche Σ_1^2 von σ für die F^3, und es werden die den Paaren von F^3 zugewiesenen Ebenen R Tangentialebenen einer Quadrifläche Q^2 sein, welche die Polarfigur von Σ_1^2 in Bezug auf H^2 als Grundfläche ist. Sind l', λ' die conjugirten Polaren von l, λ, also in Σ gelegen, so muss Q^2 diese beiden Geraden aufnehmen, in ihrem Schnittpuncte q_0 die Σ berühren.

Hieraus sieht man, dass eine F^3, wie sie vorausgesetzt wurde, zu einer bestimmten die Ebene Σ berührenden Quadrifläche Q^2 derart gehört, dass den Tangentialebenen von Q^2 die Paare auf F^3 in eindeutig umkehrbarer Weise entsprechen. Die Inversion hievon gestaltet sich sehr einfach:

Geht man von Q^2 aus, so ergibt sich zunächst Σ_1^2, ihre Polarfigur als Ort der Puncte σ'. Das auf $\sigma\sigma'$ befindliche Paar r, ϱ ist dadurch bestimmt, dass es sowohl durch σ, σ', als durch H^2 harmonisch getrennt wird, d. h. die r, ϱ sind die Doppelpuncte der auf den Geraden r durch die Flächen Σ_1^2, H^2 bestimmten Involutionen. Dass auch auf jeder r ein Paar r, ϱ auftritt, folgt, wenn man durch die conjugirte Polare r′ von r bezüglich H^2 die von Σ verschiedene Tangentialebene an Q^2 beachtet. Will man die Doppelpuncte, von welchen die Rede ist, construiren, so kann man also verfahren:

Σ_1^2, Q^2 durchdringen sich in einer Raumcurve t^4, welche Grundcurve eines Büschels von Quadriflächen ist. Zieht man von σ an sämmtliche Flächen dieses Büschels Tangenten, so erhält man in den Berührungspuncten die fraglichen Doppelpuncte, oder sämmtliche r, ϱ; aber auf diese Weise construirt man eine cubische Fläche.

4. Mit Hülfe der zwischen F^3 und einer gewissen Q^2 etablirten Abhängigkeit, die nach 1. stets möglich ist, lassen sich die Quadriflächen F^2, welche a^2, nebstdem noch zwei Kegelschnitte mit F^3 gemein haben und das System σ construiren, sehr klar übersehen: Den Tangentialebenen R von Q^2 entsprechen die Paare der F^3. Wenn g eine Gerade von Q^2 bedeutet — auf λ' stehend — so gehört zu ihr ein Kegelschnitt g^2, welcher auf F^3 liegt, und dessen Ebene die Gerade λ enthält.

Heisst γ eine Gerade der anderen Schaar, für welche l' die Transversale ist, so wird die Ebene des zugehörigen γ^2 die Gerade l enthalten. Dem Schnittpuncte f von g, γ ist eine F^2 des in Rede stehenden Systems zugewiesen, und die zu allen Puncten der Q^2 gehörenden Quadriflächen machen das ganze System σ aus.

Durch ein im Raume beliebig gewähltes Paar r_0, ϱ_0 — ausserhalb F^3 — gehen einfach unendlich viele F^2. Sie gehören den Puncten f an, welche die Ebene R_0 mit Q^2 gemein hat; und werden von einer F^4 eingehüllt, welche die Doppelcurve a^2, die Doppelpuncte $r_0\varrho_0$ besitzt und der F^3 längs einer Raumcurve 4ter Ordnung σ^4 umbeschrieben ist. (Siehe meinen Aufsatz VII. Folge, II. B. dieser Abhandlungen No. 8.)

Es werde eine beliebige Fläche F^4 mit der Doppelcurve a^2 betrachtet; ϱ_0 sei ein willkührlicher Punct derselben. Dem Kegel der a^2 aus ϱ_0 projicirt, beschreibe man längs a^2 eine Quadrifläche G^2 ein, und nenne (r, σ) die Transformation, deren Centrum ϱ_0, deren Ordnungfläche G^2 ist. Durch diese wird F^4 in eine F^3 verwandelt, welche a^2 enthält, mithin eine Gerade q aus der Ebene Σ schneidet, in welcher a^2 liegt. Eine der fünf Tangentialebenen von F^3, welche durch q möglich sind, berühre in s; dann ist s das Centrum einer Transformation (r, ϱ), durch welche F^3 in sich übergeführt wird. Mithin existiren durch a^2, ϱ_0 r_0 ∞^1 Quadriflächen F^2, welche die F^3 in Punctepaaren r, ϱ berühren. Diese sämmtlichen F^2 werden durch die erste Transformation (r, σ) in Ebenen verwandelt, die den Punct σ_0 aufnehmen, in welchen r_0 sich transformirt. So findet man ∞^1 Bitangentialebenen der F^4 und ihre Enveloppe, die transformirte oben angegebene Fläche 4ter Ordnung mit den Doppelpuncten r_0, ϱ_0.

Vor allem muss man die Kegelschnittpaare x^2, y^2 in Betracht ziehen, welche von den in Bitangentialebenen der F^4 übergeführten F^2 aus F^3 geschnitten werden. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die in s sich treffenden Geraden der F^3, so besteht ein beliebiges Paar aus einem x^2, dessen Ebene durch $\mathfrak{x}$, einem y^2, dessen Ebene durch $\mathfrak{y}$ geht, und es werden auch in diesen Paaren alle so möglichen Kegelschnitte vertreten sein. Hiebei aber ist jedem x^2 ein bestimmter y^2 zugewiesen, da es nur eine F^2 gibt, die a^2, x^2 und noch einen Punct ϱ_0 enthält.

Mittels der Transformation wird ein Paar x^2, y^2 wiederum in ein Kegelschnittpaar — $\mathfrak{x}^2$, $\mathfrak{y}^2$ — verwandelt, weil F^2, auf welcher x^2, y^2 vorkommt, in eine Ebene übergeht, und die Transformation centrisch ist.

Denkt man die ∞^1 durch a^2, x^2 möglichen Quadriflächen X^2, so enthalten diese sämmtliche y^2; unterwirft man die X^2 der Transformation (r, σ), so gehen sie in Quadriflächen $\mathfrak{X}^2$ über, weil a^2 auf allen X^2 liegt. Da aber die erhaltenen $\mathfrak{X}^2$ einen Büschel mit der Basis a^2, $\mathfrak{x}^2$ bilden, sie daher noch einen variablen Kegelschnitt mit F^4 gemein haben, der kein anderer als $\mathfrak{y}^2$ sein kann, so folgt für F^4:

Nimmt man aus einer beliebigen Bitangentialebene einen Kegelschnitt $\mathfrak{x}^2$, und benutzt ihn mit der Doppelcurve a^2 als Basis eines Büschels $(\mathfrak{X}^2)$, so schneiden dessen Flächen noch einen variablen Kegelschnitt $\mathfrak{y}^3$ aus F^4, dessen Ebene einen festen Punct σ_0 der Ebene des $\mathfrak{x}^2$ enthält.

Zieht man von σ_0 an die $\mathfrak{X}^2$ Tangenten, so ergibt sich als Ort ihrer Berührungspuncte eine Quadrifläche H_0^2. Sie geht durch a^2, und berührt längs dieser den Kegel, welcher seine Spitze in σ_0 hat. Also wird F^4 durch die quadratische Transformation, für welche σ_0 das Centrum, H_0^2 die Ordnungsfläche ist, in sich verwandelt.

Bestimmt man ferner für jeden auftretenden $\mathfrak{y}^2$ die Polare des Punctes σ_0, so erfüllen diese ein Hyperboloid Σ_1^2. (a. a. O. No. 6).

Die Polarfigur dieses Hyperboloids in Bezug auf H_0^2 liefert endlich eine Quadrifläche Q^2, deren Berührungsebenen R die Paare der F^4 in der unter 2. beschriebenen Weise entsprechen:

Das Vorstehende lässt sich kurz so zusammenfassen:

Eine F^4 mit der Doppelcurve a^2 kann durch 5 Transformationen der hier näher definirten Art in sich übergeführt werden, und es entsprechen die Paare, welche in diesen Transformationen auftreten, den Tangentialebenen von 5 verschiedenen Quadriflächen Q^2.

Wäre umgekehrt die Transformation gegeben durch ihr Centrum σ ihre Ordnungsfläche H^2, wodurch a^2 sich bestimmt, so gehört auch zu jeder beliebigen Quadrifläche Q^2 eine F^4 mit der Doppelcurve a^2.

Beweis. Q^2 denke man erzeugt durch eine variable Gerade γ, welche zwei festgehaltene Gerade $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ in den Puncten p_1, p_2, die Ebene Σ — Polarebene von σ, in welcher a^2 liegt — in p trifft. Zu $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, γ mögen die Kegelschnitte $\mathfrak{g}_1^2$, $\mathfrak{g}_2^2$, γ^2 gehören; dann beschreibt γ^2 die F^4: Denn die Flächen P_1^2, P_2^2 beschreiben zwei Büschel, deren Grundcurven in a^2, $\mathfrak{g}_1^2$ und a^2, $\mathfrak{g}_2^2$ vorliegen. Sieht man die beiden Flächen als homologe an, welche denselben γ^2 enthalten — wie z. B. P_1^2, P_2^2, so sind die Büschel projectivisch auf einander bezogen: Nämlich die P_1^2 entsprechen projectivisch den Puncten p_1, da diese die Pole der festen Ebene Σ in Bezug auf die P_1^2 sind. Ebenso verhält es sich mit den P_2^2 und den p_2; und weil die p_2 den p_1 projectivisch zugewiesen sind, so gilt Gleiches für die P^2, und γ^2 beschreibt eine F^4. Zieht man in Erwägung, dass die zum Puncte p gehörende P^2 ebenfalls γ^2 enthalten muss, dass aber diese P^2 die Polarebene P von p in Bezug auf H^2 als Bestandtheil hat, so folgt, dass die variabele Ebene P, welche um σ sich dreht, Bitangentialebene von F^4 ist. Da endlich der Ort für p die q^2 ist, welche Q^2 mit Σ gemein hat, so umhüllt P den quadratischen Kegel σ^2, der die Polarfigur von q^2 bezüglich H^2 ist.

5. Die Steiner'sche Fläche F_0^4.

Eine Regelfläche 4ten Grads wird von einer Tangentialebene stets in einer zerfallenden C^4 geschnitten, von welcher der eine Theil eine Gerade ist. Wäre nun nicht eine F^4 denkbar, die von ihren Tangentialebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten wird? Ich kenne manchen modernen Geometer, welcher diese Frage aus folgendem Grunde verneinen würde: Eine so beschaffene F^4 müsste jedenfalls eine Doppelcurve 3ter Ordnung besitzen. Weil nun eine Raumcurve R^3 durch jeden Punct des Raumes eine Bisecante sendet, so muss eine F^4 mit der Doppelcurve R^3 nothwendigerweise Regelfläche sein. Bei diesem Schlusse übersieht man, dass es immerhin noch möglich — freilich nur so möglich — wäre, dass die Doppelcurve aus drei in einem Puncte zusammentreffenden Geraden bestände, in welchem Falle F^4 gewiss nicht Regelfläche sein kann, da auf jeder Erzeugenden e zwei Doppelpuncte der Fläche sein müssten, und daher e in eine der drei Ebenen des von den Doppelpunctsgeraden gebildeten Dreikants fiele.

Also, die Möglichkeit der Fläche zugegeben, ist die Beschaffenheit der Doppelcurve unzweifelhaft festgestellt. Was die Wirklichkeit angeht, so sind die bekannt gewordenen Herleitungen für eine so einfache Sache viel zu complicirt. Es passt diese Bemerkung auch auf die Betrachtung, welche Herr Weierstrass im 64. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals als diejenige bezeichnete, welche Steiner zur Entdeckung der merkwürdigen F_0^4 geführt hat

Erste Erzeugung der F_0^4.

Wir stellen die quadratische Transformation (r, ϱ) auf, deren Ordnungsfläche ein Kegel H^2 ist mit der Spitze h, das Centrum sei σ.

Die Tangentialebenen, die von σ an H^2 gehen, berühren in den Kegelkanten $\mathfrak{a}$, α, deren Ebene Σ heisst.

Nimmt man eine Regelfläche F_0^3 an, welche $\mathfrak{a}$, α zu einfachen Geraden hat und nicht durch σ geht, und unterwirft sie der Transformation (r, ϱ), so erhält man eine Fläche 4ter Ordnung, und diese bekommt $\mathfrak{a}$, α zu Doppelpunctsgeraden. F_0^3 aber besitzt eine durch h gehende Doppelpunctsgerade $\mathfrak{d}$, welche durch (r, ϱ) in eine andere durch h gehende Gerade δ verwandelt wird, und δ wird ebenfalls auf der durch die Transformation gewonnenen Fläche eine Doppelpunctsgerade sein; folglich ist diese Fläche F_0^4.

Nachdem auf diese Weise F_0^4 erhalten worden ist, lege man σ irgend wo auf die Fläche, jedoch nicht in eine der 3 Geraden $\mathfrak{a}$, α, δ, behalte aber H^2 bei. So entsteht eine neue Transformation (x, x'), durch welche F_0^4 selbst in eine F^3 übergehen wird. Diese F^3 enthält die Geraden $\mathfrak{a}$, α einfach, die aus δ hervorgehende δ' als Doppelpunctsgerade, ist mithin eine Regelfläche F_0^3.

ζ sei eine von $\mathfrak{a}$, α verschiedene Erzeugende der F_0^3, welche δ' in d' trifft. In der Ebene $\sigma\xi$ liegt noch ein Kegelschnitt e^2 der F_0^3; e^2 geht durch d' und die beiden Puncte 1, 2, in welchen beziehlich $\mathfrak{a}$, α die Ebene $\sigma\xi$ durchstossen. ξ transformirt sich in ξ^2, der durch 1, 2 und den Punct d auf δ geht, dem in der Transformation d' zugeordnet ist. e^2 wird übergehen in $\mathfrak{e}^2$, der ebenfalls die Puncte 1, 2, d aufnimmt. Der fehlende 4te Schnittpunct von ξ^2, $\mathfrak{c}^2$ ist der Berührungspunct der Ebene $\sigma\xi$ mit F^4_0; d. h. der Kegel, welcher der F^4_0 aus einem ihrer Puncte umschrieben werden kann, ist 3ter Klasse.

Zweite Erzeugung der F^4_0.

Diese geschieht mit Hülfe der eben benutzten Transformation (r, ϱ), indem man dieselbe auf eine Quadrifläche F^2 anwendet, welche in h die Ebene Σ berührt, und nicht durch σ geht.

Es ist ohne Weiteres klar, dass F^3 in eine F^4 übergeht, welche $\mathfrak{a}$, α als Doppelpunctsgerade besitzt, auch ist leicht darzuthun, dass jeder Punct von $h\sigma$ Doppelpunct der F^4 sein muss: Es genügt zu zeigen, dass irgend eine durch $h\sigma$ gelegte Ebene E eine Linie 2ten Grads mit F^4 gemein hat:

E schneide F^2 in r^2, H^2 in den Kanten t_1, t_2; die Tangente der r^2 im Puncte h ist nun durch t_1, t_2 von Σ, σ harmonisch getrennt. Daraus folgt, dass r^2 durch die Transformation wieder in einen durch h, σ gehenden Kegelschnitt ϱ^2 verwandelt wird.

Dass durch jeden Punct auf $h\sigma$ zwei Kegelschnitte ϱ^2 gehen, ergibt sich also:

Zunächst für σ: F^2 hat in Σ 2 in h sich schneidende Gerade; legt man durch eine derselben und σ eine Ebene, so fällt in diese noch eine Gerade von F^2, die in einen durch h, σ gehenden Kegelschnitt ϱ^2 übergeht. Handelt es sich um einen von σ verschiedenen Punct σ_1 auf $h\sigma$, so benutze man ihn als Transformationscentrum, während H^2 als Ordnungsfläche bleibt.

Alsdann entsteht als transformirte Fläche der F^4_0 eine F^2_1, die, wie leicht einzusehen, Σ in h berührt u. s. w.

Man erkennt so zugleich, dass σ_1 wie σ Biplanarpunct der F^4_0 ist, sowie dass aus einem Doppelpunct der F^4_0 sich ein Quadrikegel ihr umbeschreiben lässt.

Die 4 singulären Tangentialebenen der F_0.

In der vorliegenden Transformation entsprechen den Ebenen des Raumes die ∞^3 Flächen ψ^2, welche durch $\mathfrak{a}$, α und σ möglich sind. Unter diesen gibt es 4, die F^2 längs je einem Kegelschnitt umschrieben sind: Nämlich ψ^2 sei eine solche, x^2 die durch h gehende Berührungslinie von ψ^2, F^3. Eine beliebig durch σ gelegte Ebene schneide aus ψ^2, F^2 die Curve y^2, f^2, und treffe $\mathfrak{a}$, α in den Puncten 1, 2. Dann muss y^2 die 3 Puncte σ, 1, 2 enthalten, und f^2 in 2 Puncten x_1, x_2 des x^2 berühren. Thatsächlich existiren durch 1, 2, σ vier Kegelschnitte y^3, die f^2 doppelt berühren; x_1, x_2 seien für y^2 die betreffenden Berührungspuncte. Die Ebene hx_1x_2 schneidet aus F^2 einen Kegelschnitt x^2, und es mögen die 3 Tangentialebenen der F^2 in h, x_1x_2 den Punct o gemein haben. Jetzt gibt es eine Fläche X^2, welche dem Kegel $o(x^2)$ längs x^2 einbeschrieben ist, und durch irgend einen auf $\mathfrak{a}$ gewählten Punct a geht. $\mathfrak{a}$ wird demnach eine Gerade der X^2 sein, und X^2 hat mit x^2 gemein den Punct 1, dann je 2 in x_1, x_2 vereinigte Puncte, mithin fällt x^2 ganz in X^2. Eine weitere Folge ist nun, dass auch Punct 2 in X^2 liegt, daher auch die Gerade α. Die 4 nachgewiesenen X^2 kommen mithin unter den ψ^2 vor, und man erhält durch Transformation derselben 4 Ebenen, welche F^4_0 längs je einem Kegelschnitt berühren.

Anmerkung. Hier soll in Kürze nachgewiesen werden, dass die von uns aufgestellten 5 Transformationen der F^4 in sich selbst die einzigen ihrer Art sind: Festgesetzt ist, dass die Ordnungsfläche H^2 der supponirten Transformation (r, ϱ) die Doppellinie a^2 der F^4, jedoch nicht das Centrum σ der Transformation enthalten soll; ersichtlich kann σ kein Punct von F^4 sein. Einem Büschel von Ebenen R, dessen Axe irgend eine Gerade $\mathfrak{g}$ des Raumes ist, sind die Paare eines Kegelschnitts $\mathfrak{g}^2$ zugewiesen. Nun hat $\mathfrak{g}^2$ mit F^4 gemein 2 Doppelpuncte (auf a^2), ferner 2 Paare r, ϱ der Transformation; daher entsprechen die auf F^4 vorkommenden Paare den Tangentialebenen R einer gewissen Quadrifläche Q^2, und es muss (v. 4.) σ die Spitze eines der F^4 doppelt umbeschriebenen Quadrikegels sein. Wie ich in einer früheren Abhandlung über die Geraden der F^4 bewiesen habe (a. a. O. No. 6) existiren nur fünf Kegel, welche die Enveloppe der Bitangentialebenen der Fläche darstellen.

Bei einer cubischen Fläche F^3 übersieht man die etwa möglichen Transformationen mittels folgender einfachen Ueberlegung: Zunächst ist ein σ ausserhalb F^3 unmöglich (v. 3. d.), sodann muss auf H^2 der Berührungspunct jeder von σ an F^3 denkbaren Tangente fallen, wobei aber H^2 nicht identisch sein darf mit Σ_1^2, der 1ten Polarfläche von σ in Bezug auf F^3, weil Σ_1^2 das Centrum σ enthält. Diese Bedingung kann, wie ganz leicht zu sehen, nur dann erfüllt werden, wenn durch σ mehr als eine Gerade der F^3 geht; d. h. wenn σ einer der $\frac{27.10}{2}$ Berührungspuncte von Tritangentialebenen ist. In diesem Falle ist natürlich die Transformation bestimmt, nicht aber deren Ordnungsfläche H^2. Nämlich man kann und muss als H^2 eine beliebige der ∞^1 Quadriflächen wählen, welche sich mit der 1ten Polarfläche Σ_1^2 des σ auf F^3 in einer Raumcurve — t^4 — schneiden. Bei einer der 135 Lagen von σ ist der Ort für die Berührungspuncte der von σ ausgehenden Tangenten der F^3 eine Raumcurve 4ter Ordnung vom Geschlechte 1, während sonst dieser Ort von höherer Ordnung wird, und also ausser Σ_1^2 keine Quadrifläche durch ihn möglich ist.