NATÜRLICHSTE BERECHNUNG

MUSIKALISCHER TONLEITERN.

VON

Prof. Dr. **WILHELM MATZKA,**

K. K. REGIERUNGSRATH UND ORDENT. MITGLIED DER K. BÖHM. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

(Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, 2. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 6.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1888.

In ihren Abhandlungen „VI. Folge, 11. Band, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Nr. 7" hatte im Jahre 1882 die königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften meine Abhandlung, betitelt: „Kritische Berechnungen der musikalischen Töne und der diatonischen Tonleitern", gütigst veröffentlicht. Als erwünschte Vervollständigung dieser vorangegangenen Abhandlung dürfte die vorliegende sicherlich angesehen werden. — Meine dermalige Geschäftslosigkeit und die Unmasse von Langweile, welche mir die, von den Hornhautflecken beider Augen und von einer Linsentrübung verursachte Unfähigkeit zu lesen, schon seit vier Jahren auferlegt hat, leiteten mich, trotz meines Alters von 88 Jahren, vor einigen Monaten zufällig auf die in jener Schrift erörterten Berechnungsweisen zurück, und ein hiebei blitzartig aufgetauchter Gedanke führte mich rasch zu einer äusserst einfachen, ebenso gründlichen als kurzen rechnenden Bestimmung der zwischen die beiden, ohnehin naturgemäss festgestellten Stammtöne, der Prim und der Octav einzuschaltenden zwei, sowohl mit ihnen als auch unter sich consonirenden Haupttöne — die Quint und die Terz — aus welchen vier Tönen alle übrigen nach völlig bestimmten Gesetzen ganz leicht durch einfache Rechnung sich ergeben.

Auch darf ich wohl auf zwei interessante Ergebnisse meiner Forschungen aufmerksam machen, nemlich zunächst auf meinen Nachweis, dass die von dem gelehrten Akustiker Chladný verlangte Beschränkung der Primfactoren in den Nennern und Zählern der als regelrechte Brüche dargestellten Werthe der musikalischen Töne, auf die drei kleinsten Primzahlen 2, 3, und 5, zwar in der Theorie der Musik aufrecht erhalten werden soll, jedoch in der Praxis der Musik unter gewissen Bedingungen fallen gelassen werden kann; und dann auf das wichtige Tableau der 13 diatonischen Dur-Tonleitern, in denen anfänglich einer der einfachen ursprünglichen Töne der Stamm-Tonleiter und nachher einer der erhöhten Töne zum jedesmaligen Grundtone genommen und sämmtliche Töne so wie deren Intervalle völlig genau in denselben Verhältnissen wie in der Stamm-Tonleiter bestimmt wurden.

Derartige rein theoretische Abhandlungen über Tonlehre, zumal jene, wie die vorliegende und die oben erwähnte, welche sich der Zifferrechnungen bedienen, können freilich den ausübenden Musikern und zwar den dichtenden und lehrenden Musikern höchstens einiger Massen, den blos spielenden jedoch kaum einen erheblichen Nutzen gewähren; gleichwohl wird nicht ungern zugestanden werden, dass die in diesen Abhandlungen vorkommenden durch bestimmte Zahlen ausgedrückten Tonwerthe dem Musiker überhaupt einen klaren und scharfen Einblick in Verhältnisse und Masse der Auf- und Niedersteigungen, der Erhebungen und Senkungen der musikalischen Töne gewähren; auch müssen solche rechnende Erforschungen der Töne sicher in den Grundlagen der Musikwissenschaft ihren gebührenden Platz erhalten.

A. Vorbegriffe.

Nr. 1. Bei der Vergleichung der Töne in Bezug auf ihre Höhen gehen wir von dem Erfahrungssatze aus, dass ein Ton desto höher ist als ein anderer, wenn die Anzahl der in einer sehr kurzen Zeit ihn erzeugenden raschen Schwingungen (Vibrationen, Erzitterungen) elastischer Körper oder Stoffe grösser ist, als jene der in gleicher Zeit diesen anderen Ton hervorbringenden Schwingungen; oder kürzer wie gewöhnlich ausgedrückt, wenn seine Schwingungsanzahl grösser ist als die in einerlei Zeit bestehende Schwingungsanzahl des letzteren tieferen. Bestimmter und um die Untersuchung mittels Zahlen führen zu können, folgert man hieraus, dass die Höhen zweier nach einander oder zusammen klingenden Töne sich so zu einander (geometrisch) verhalten, wie die Anzahlen der, in gleichen Zeiten, von einem schwingenden Körper oder Stoffe zur Entstehung dieser Töne vollbrachten Schwingungen. Dem zufolge wird die relative (beziehungsweise) Höhe oder Überhöhung eines Tones über einen tieferen, durch den Quotienten der Anzahl der den ersteren Ton erzeugenden Schwingungen durch die Schwingungszahl des letzteren dargestellt.

Nr. 2. Vergleicht man eine Reihe von Tönen hinsichtlich ihrer beziehlichen Höhen, so ist es am natürlichsten, die Anzahlen der Schwingungen aller Töne durch die Zahl der Schwingungen des tiefsten Tones zu dividiren; wornach der erste Quotient $= 1$ wird, die anderen Quotienten, falls die Töne steigend, immer höher und höher nach einander gereiht sind, grösser als 1, also unechte Brüche oder ganze Zahlen werden, welche steigende Quotientenreihe als, den betrachteten Tönen entsprechende Stufen von Tonhöhen angesehen zu werden pflegen.

Hiebei beachtet man den wichtigen Erfahrungssatz, dass zwei Töne, bei denen die Anzahl der Schwingungen des höheren Tones doppelt so gross als die des tieferen ist, gleiche Wirkung auf das menschliche Gehörorgan ausüben, daher einander wechselseitig vertreten können, indem man jedes Tones Schwingungszahl, welche grösser als das Doppelte der kleinsten (dividirenden) Schwingungszahl ist, auf ihre Hälfte herabsetzt, so dass der möglich grösste der obigen Quotienten nur $= 2$ erfolgen kann. Dem gemäss kann die Musiklehre sich darauf beschränken, dass sie nur Tonquotienten in Betracht zieht, welche im Allgemeinen grösser als 1, jedoch kleiner als 2 sind, so dass der kleinste 1, der grösste 2 ist.

Von den gesammten möglichen derartigen Tonquotienten, Tonverhältnissen oder Intervallen (in der Sprache der Musiker), werden in der ausübenden Musik nur acht als sogenannte Töne oder Tonhöhen hervorgehoben, durchweg nacheinander steigend gereiht, mit den germanisirten lateinischen Ordnungszahlen Prim, Secund, Terz, Quart, Quint, Sext, Septim und Octav benannt und hier mit I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII bezeichnet; von denen offenbar die Prim $= 1$, die Octav $= 2$ sein muss.

Eine solche steigende Reihe von Tönen wird eine Tonleiter oder Tonscala genannt, und es handelt sich für die Aufstellung einer solchen nur um die Ermittelung der fehlenden 6 Zwischentöne, welche Ermittelung auf einem sehr einfachen Wege hier ausgeführt werden soll.

B. Auffindung neuer Tonquotienten oder Tonwerthe.

Nr. 3. Ein interessantes, vor Kurzem von mir erdachtes Verfahren zur Auffindung von Tonwerthen aus je einem Paare bereits irgend wie gefundener Tonwerthe besteht darin, dass man von einem solchen Tonpaare das arithmetische Mittel (oder kürzer das Mittel) beider Töne, d. i. die halbe Summe derselben, als neuen Tonwerth aufstellt.

Hiezu erfassen wir den vorhin betrachteten und als Prim einer allgemeinen Tonleiter angesehenen Ausgangston oder Stammton, dessen Tonwerth wir durch die Zahl 1 (Eins) darstellen und sehen die mit 2 dargestellte Octav als die nächste Ableitung von derselben an.

Um deutlich und richtig verstanden zu werden, bezeichnen wir die Anzahl der zur Hervorbringung jenes Stammtones erforderlichen Schwingungen eines elastischen Körpers mit n, daher nach obiger Einleitung die Schwingungszahl der Octav mit $2\,n$; sonach ist

a) das Mittel dieser zwei Schwingungszahlen, nemlich ihre halbe Summe

$$(n + 2\,n) : 2 = \tfrac{3}{2}\,n;$$

folglich entspricht ihr

der Tonwerth $\frac{3}{2}\,n : n = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ als (arithmetisches) Mittel der Prim 1 und der Octav 2.

b) Ferner, betrachten wir als nächstes Mittel das zwischen dem eben gefundenen und der Prim, daher wieder das Mittel ihrer Schwingungszahlen $\frac{3}{2}\,n$ und n, nemlich

$$(n + \tfrac{3}{2}\,n) : 2 = \tfrac{5}{4}\,n$$

als neue Schwingungsanzahl, welcher der Tonwerth $\frac{5}{4}\,n : n = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ entspricht und als Mittelton zwischen der Prim 1 und dem Tone $\frac{3}{2}$ gilt.

c) Endlich bestimmen wir das dritte arithmetische Mittel wieder aus der Prim und dem so eben gefundenen Mittel $\frac{5}{4}\,n$, nemlich das Mittel ihrer Schwingungsanzahlen $\frac{5}{4}\,n$ und n, welches

$$(n + \tfrac{5}{4}\,n) : 2 = \tfrac{9}{8}\,n$$

ist, mithin auf den Tonwerth $\frac{9}{8}\,n : n = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ hinleitet.

Nr. 4. Diesen drei als Mittel erhaltenen neuen Tönen $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{8}$, müssen wir nun zwischen der Prim 1 und ihrer Octav 2 die entsprechenden Zwischenstellen genau anweisen; wozu wir festsetzen, dass jedes solche Mittel in der Mitte zwischen seinen beiden Grenzstellen seine Stellung erhalten solle.

Zunächst haben wir das Mittel $\frac{3}{2}$ der Prim 1 und der Octav 2 zwischen die erste und achte Stelle, also auf die Stelle, der wir die Nummer $(1 + 8) : 2 = 4\frac{1}{2}$ anzuweisen hätten, zu bringen. Da es aber keine solche gebrochene Nummer gibt, so fügen wir um den voranstehenden Dividend $(1 + 8)$ durch 2 theilbar zu machen, ihm die noch unbestimmt gelassene Zahl ± 1 bei, und finden so die Nummer

$$(1 + 8 \pm 1) : 2 = 4 + \frac{1 \pm 1}{2}.$$

Dem zufolge geben wir dem zweiten Mittel $\frac{5}{4}$ diejenige Stelle, deren Nummer zwischen der so eben berechneten und der von der Prim besetzten ersten Stelle die arithmetisch mittlere Nummer, d. i.

$$\left(1 + 4 + \frac{1 \pm 1}{2}\right) : 2 = 2 + \frac{3 \pm 1}{4}$$

sein muss.

Ferner kommt das dritte Mittel $\frac{9}{8}$ in die Mitte der mit dieser letzteren Nummer und der Nummer 1 der Prim benummerten Stelle; ihre Nummer ist demnach

$$\left(1+2+\frac{3\pm1}{4}\right):2=1+\frac{7\pm1}{8}.$$

Aus dem letzteren Quotienten, so wie schon aus dem vorletzten erhellet mit voller Bestimmtheit, dass, wie unerlässlich, von den bisher unbestimmt gebliebenen Vorzeichen ($\pm$) kein anderes als das obere bestehen kann und sohin sind die bisher unbestimmt gelassenen 3 Stellenummern nun entschieden folgende: 5, 3, 2 oder V, III, II.

Aus diesen etwas weitwendigen Forschungen ergibt sich uns sonach die folgende, leider zweimal unterbrochene, aufsteigende Reihe festgestellter Tonwerthe:

Prim I,	Secund II,	Terz III,	Quint V,	Octav VIII,
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2,

deren Ergänzung von uns allmälich im Nachstehenden vollbracht werden soll.

C. Allgemeine Berechnungsweisen von Tönen mittels der Intervalle derselben.

Nr. 5. Um die noch der Tonleiter fehlenden drei Töne zu ermitteln, sind wir genöthigt andere Berechnungsweisen von weiteren Tönen aus bereits bekannten Tonpaaren zu benützen, namentlich zunächst:

a) Die Bestimmung des Intervalls zwischen jedem auf irgend eine Weise eben gefundenen Tone zu einem bereits früher bestimmten und bekannten des Intervalls; oder ihren Tonquotienten zu berechnen, welcher dann in Bezug auf den Stammton oder die Prim als neuer Ton zu gelten berechtiget ist.

Ist nemlich t ein schon bekannter und s ein neu aufgefundener Ton und zwar dieser tiefer als jener, so ist das Intervall beider Töne der mit qu zu bezeichnende Quotient $t:s=qu$ und da er auch $=qu:1$ ist, kann er als Tonwerth qu eines neuen Tones höher als die Prim angesehen werden.

Einiger Massen beachtenswerth ist der Sonderfall, wo der in Vergleich gezogene bekannte Ton, t, die Octav 2, also $t=2$ ist; da dieser Tonwerth s zwischen 1 und 2 liegt, folglich hier drei Töne aufsteigend die Reihe $1<s<2$ bilden, so ist der Tonquotient der beiden ersten $=\frac{s}{1}$ und jener der beiden letzten Töne $=\frac{2}{s}$. Weil aber in der Musiklehre die Prim 1 und die Octav 2 als Gleichklänge und sonach als einander aequivalent (gleichgeltend) angesehen werden und für den Tonwerth s die Prim 1 als Theiler, die ihr aequivalente Octav 2 dagegen umgekehrt als Dividend gebraucht werden, so pflegt man in der rechnenden Musiklehre diese beiden Töne $\frac{s}{1}$ und $\frac{2}{s}$ als umgekehrte Töne von einander aufzufassen und daher insbesondere den zum bekannten Tone s neu berechneten $\frac{2}{s}$ (d. i. das Intervall des Tones s zur Octav 2) den umgekehrten Ton von oder zu s zu nennen. So ist z. B. von der Quint $\frac{3}{2}$ der umgekehrte Ton $2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$.

Da dieser Ton $\frac{4}{3}$ auch $=1\frac{1}{3}$, sowie der Ton $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ und der Ton $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ ist, von welchen Tönen ersterer die Terz, letzterer die Quint ist; so liegt nothwendig und offenbar

$\frac{4}{3}$ zwischen $\frac{5}{4}$ und $\frac{3}{2}$, daher muss der Ton $\frac{4}{3}$ zwischen die Terz $\frac{5}{4}$ und die Quint $\frac{3}{2}$ als Quart in die Tonleiter eingestellt werden.

Noch mag bemerkt werden, dass das Product jedes Paares umgekehrter Töne s und $\frac{2}{s}$ gleich 2 ist.

b) Die oben aufgestellte Division $t : s = qu = qu : 1$ können wir als eine folgenreiche Rechnungsweise bezüglich der Erniedrigung oder Vertiefung der Töne benützen. Sie lässt sich nemlich dergestalt auffassen, dass man einen bekannten Ton t um einen angegebenen Ton s vertieft oder erniedrigt und damit auf den in Frage stehenden Ton qu herabkommt; wornach man einen Ton t um einen anderen Ton s erniedrigt, indem man jenen durch diesen dividirt und den entfallenden Quotienten t als den gesuchten tieferen Ton anerkennt.

Verwechselt man (was jederzeit erlaubt ist) in obiger Division den Theiler und den Quotienten miteinander, ertheilt ihr demnach die gleichgeltende Form $\frac{t}{qu} = s = s : 1$, so zeigt sie, dass wenn umgekehrt der Ton t um den angewiesenen Ton qu erniedrigt wird, man bis auf den fraglichen Ton s herabsteigt. Z. B. Senkt sich ein veränderlicher Ton von der Octav 2 um eine Quint $\frac{3}{2}$, so gelangt er, da $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$ ist, auf die Quart $\frac{4}{3}$; umgekehrt, senkt er sich nur um die Quart $\frac{4}{3}$, so bleibt er schon bei dem Tone $2 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$, d. i. bei der Quint stehen.

c) Ertheilt man endlich derselben Theilung $t : s = qu$ nach dem Satze, dass der Theiler mit dem Quotienten multiplicirt, den Dividend wiederherstellt, die Gestalt $t = s \, . \, qu = qu \, . \, s$; so wird ersichtlich, dass man einen gegebenen Ton s um einen anderen ebenfalls bekannten Ton qu, oder umgekehrt einen angegebenen Ton qu um einen angewiesenen s, beide Male auf den fraglichen Ton t erhöhen (steigern, erheben) wird, wenn man die Tonwerthe jener beiden Töne mit einander multiplicirt. Z. B. Die Erhöhung der Quint $\frac{3}{2}$ um eine Quart $\frac{4}{3}$ oder umgekehrt die Erhöhung einer Quart $\frac{4}{3}$ um eine Quint $\frac{3}{2}$ führt auf die Octav 2; oder wie man sich auch sonst ausdrücken darf, die Octav 2 ist die Quart der Quint $\frac{3}{2}$ oder sie ist die Quint der Quart $\frac{4}{3}$.

D. Specielle Berechnung von Tonwerthen als Tonquotienten.

Nr. 6. Schon aus den drei bisher aus der Prim abgeleiteten Haupttönen der Octav 2, der Quint $\frac{3}{2}$ und der Terz $\frac{5}{4}$, vermögen wir nun mittels Theilung der grösseren Tonwerthe durch die kleineren eine unzählbare Menge neuer Tonwerthe (Töne) zu berechnen; von deren Bruchform schon hier angeführt werden kann, dass ihre Nenner und Zähler keine anderen als die drei kleinsten Primzahlen 2, 3, 5 enthalten können, weil auch blos diese in jenen drei, den Rechnungen zu Grunde liegenden Haupttönen als Factoren oder Divisoren vorkommen und weil alle hier vorkommenden Rechnungen endlich sich auf Multiplicationen von Brüchen mit Brüchen zurückleiten lassen. Wir beginnen die beabsichtigten Rechnungen, welche hier ausschliesslich Bestimmungen der Intervalle je zweier allmälich gefundener Töne sein werden:

a) mit der Verbindung der Octav 2 mit der Quint $\frac{3}{2}$ und finden die Intervalle:

$2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} = 1{\cdot}33\frac{1}{3}$, wie schon oben; | $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8} = 1{\cdot}125$, die bereits früher anders bestimmte Secund, nebst ihrem umgekehrten Ton:

$2 : \frac{9}{8} = \frac{16}{9} = 1{\cdot}\dot{7}$; | $\frac{4}{3} : \frac{9}{8} = \frac{32}{27} = 1\frac{1}{5 \cdot 4} = 1{\cdot}\dot{1}8\dot{5}$; | $2 : \frac{32}{27} = \frac{27}{16} = 1{\cdot}6875$; u. s. w.

b) Verbinden wir die Octav 2 mit der Terz $\frac{5}{4}$ und finden die Intervalle:

$2 : \frac{5}{4} = \frac{8}{5} = 1{\cdot}6$, | $\frac{8}{5} : \frac{5}{4} = \frac{32}{25} = 1\frac{1}{3\frac{4}{7}} = 1{\cdot}28$, | $\frac{32}{25} : \frac{5}{4} = \frac{128}{125} = 1\frac{1}{42\frac{2}{3}} = 1{\cdot}024$, u. s. w.

c) Von den so eben ermittelten Tonwerthen enthalten die in *a)* eben so wie ihre Grundlagen 2 und $\frac{3}{2}$ die allerkleinsten Primzahlen 2 und 3; dagegen die in *b)* aus 2 und $\frac{5}{4}$ abgeleiteten Tonwerthe die Primzahlen 2 und 5; daher wollen wir noch trachten auch Tonwerthe aufzufinden, welche in ihren Nennern und Zählern das dritte Paar dieser drei Primzahlen, nemlich 3 und 5 vereinzelt potenzirt enthalten.

Derartige Tonwerthe ergeben sich in nachstehender Weise als neue Intervalle:

$\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{6}{5} = 1{\cdot}2$ und sein umgekehrter Ton:
$2 : \frac{6}{5} = \frac{5}{3} = 1{\cdot}6\dot{6}$, | $\frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9} = 1{\cdot}11\dot{1}$, | $2 : \frac{10}{9} = \frac{9}{5} = 1{\cdot}8$.

Diese zwei umgekehrten Tonwerthe $\frac{5}{3}$ und $\frac{9}{5}$, welche blos die Primzahlen 3 und 5 enthalten, dienen demnach der ausgesprochenen Absicht zur Grundlage und liefern uns, wofern wir sie mit der Octav 2 nicht in's Verhältniss stellen, eben solche Tonwerthe, namentlich:

$\frac{9}{5} : \frac{5}{3} = \frac{27}{25} = 1{\cdot}\frac{1}{12{\cdot}5} = 1{\cdot}08$, | $\frac{5}{3} : \frac{27}{25} = \frac{125}{81} = 1{\cdot}543$, | $\frac{27}{25} : \frac{125}{81} = \frac{2189}{3125}$, u. s. w.

Diese hier wenigstens in den Anfängen vollbrachte Bestimmung von Tonwerthen, welche nur zwei, der drei kleinsten Primzahlen 2, 3, 5, in ihren Nennern und Zählern einfach oder potenzirt enthalten, ist zwar nicht uninteressant, führt aber wie voranstehende Beispiele zeigen, sehr rasch zu grossen Nennern und Zählern; desshalb empfiehlt es sich, diese Einschränkung unserer Rechnungen aufzugeben, dagegen die drei abgeleiteten Haupt-Töne 2, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{4}$ für das vorgesteckte Ziel nach Bedürfniss zu verbinden, jedoch von den bereits gefundenen Tönen die nachstehenden dergestalt zu benützen, dass wir jedem Tone seinen umgekehrten unterstellen:

$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{9},\ \frac{27}{16},\ \frac{32}{25},\ \frac{27}{25}$ u. s. w.
$2,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{9}{5},\ \frac{32}{27},\ \frac{25}{16},\ \frac{50}{27}$ u. s. w.

d) Suchen wir sonach das Intervall der Terz zur Quart, so ist es $\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15} = 1{\cdot}06\dot{6}$ und hiezu der umgekehrte Ton $2 : \frac{16}{15} = \frac{15}{8} = 1{\cdot}875$, ferner finden wir $\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24} = 1{\cdot}041\dot{6}$ und umgekehrt $2 : \frac{25}{24} = \frac{48}{25} = 2 - \frac{2}{25} = 1{\cdot}92$.

Nr. 7. Bemerkungen: Die hier berechneten Intervalle zeigen genügend, dass wir aus den drei abgeleiteten Haupt-Tönen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$ eine beliebige Anzahl neuer musikalischer Töne als Intervalle bereits bekannter Tonpaare zu bestimmen vermögen.

Die reine Musiklehre darf nun allerdings mit dem berühmten Acustiker und Musiker Chladný verlangen, dass als musikalische Töne nur jene angesehen werden sollen, deren Tonwerthe dieser Forderung entsprechen; die praktische Musik dagegen, kann (wegen der entschiedenen Unmöglichkeit der vollkommenen Stimmung der Töne der Musikinstrumente) es keinesfalls vermeiden, dass manche ihrer anzuwendenden Tonwerthe auch grössere Primfactoren in sich aufnehmen, ohne dass die beziehlichen Töne als schrill klingende sich hervordrängen; namentlich solche die von den, der obigen Forderung entsprechenden Tonwerthen in den Schwingungszahlen nur um wenige Einheiten sich unterscheiden. So z. B. ist das Verhältniss der Prim 1 zur Terz $1 : \frac{5}{4}$, kann aber auch $1 : \frac{50}{40}$ oder $1 : \frac{500}{400}$ gestellt werden. Würden nun statt 50 Schwingungen entweder blos 49 oder aber mehr, nemlich 51 Schwingungen, oder im anderen Falle anstatt der 500 Schwingungen entweder 499 oder 501 Schwingungen gemacht werden, so hätte man einerseits die zu kleinen Terzen $\frac{49}{40}$, $\frac{499}{400}$ und anderseits die zu grossen Terzen $\frac{51}{40}$, $\frac{501}{400}$, deren Zähler die Primzahlen 7, 17, 499 und 167 sind. Offenbar können diese kleinen Abweichungen um eine einzige Schwingung von 50 und 500 derselben an das menschliche Gehör nicht zur Wahrnehmung und Unterscheidung gelangen, daher von demselben die unrichtigen Töne dennoch als richtig befunden werden.

In Wirklichkeit gibt es Töne, welche von einem Fortepiano oder einem ähnlichen Saiteninstrumente gegeben werden, denen andere der obigen Forderung des gelehrten Akustikers Chladný nicht entsprechende Töne so äusserst nahe liegen, dass sie auch von einem sehr scharfen Gehöre kaum als fehlerhaft erkannt werden können. So ist der Ton $d = \frac{9}{8}$ offenbar sehr nahe an dem höheren Tone $\frac{8}{7}$ und zwar ist ihr Intervall $\frac{8}{7} : \frac{9}{8} = \frac{64}{63} = 1 \,.\, _{63}^{1}$, im Vergleiche mit dem Komma $\frac{81}{80}$ schon sehr klein. — Hier unten (siehe H, Nr. 20) werden wir das erhöhte d als *dis* $= \frac{75}{64}$ finden, welches wir wie folgt umwandeln: $\frac{75}{64} = 70 \,.\, \frac{15}{14} : 60 \,.\, \frac{16}{15} = \frac{7}{6} \cdot \frac{15 \cdot 15}{14 \cdot 16} = \frac{7}{6} \cdot \frac{225}{224}$, woraus sofort erhellt, dass das Intervall des *dis* ober dem Tone $\frac{7}{6}$ den äusserst wenig von 1 verschiedenen Ton $\frac{225}{224} = 1_{\frac{1}{224}}$ beträgt. — Ferner ist ebendort *eïs* $= \frac{125}{96}$ dargestellt und nahe $= 1 \cdot 3_{\frac{1}{48}} = \frac{1}{10} \,.\, 13_{\frac{1}{48}} = \frac{13}{10} \,.\, 1_{\frac{1}{624}}$, folglich ist *eïs* $= \frac{125}{96}$ äusserst nahe oder fast gleich $\frac{13}{10}$.

Solche einfache Näherungswerthe von als gewöhnliche Brüche dargestellten musikalischen Tonwerthen, können auch regelmässig nach der bekannten Lehre von den Kettenbrüchen berechnet werden.

E. Aufstellung und Durchforschung der von der Prim 1 bis zur Quint $\frac{3}{2}$ reichenden Tonreihe.

Nr. 8. Nun wir die früher in Frage gestandene Quart $\frac{4}{3}$ nach der in C *(a)* erörterten Rechnungsweise gefunden und sonach die obige lückenhafte Tonreihe zum grössten Theile ausgefüllt haben, so betrachten wir zuvörderst die in vielerlei Hinsicht interessante fünfgliedrige Tonreihe, sammt ihren vorhin bereits berechneten Intervallen von Ton zu Ton:

I,		II,		III,		IV,		V,
1,		$\frac{9}{8}$,		$\frac{5}{4}$,		$\frac{4}{3}$,		$\frac{3}{2}$,
	$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$.	

Nr. 9. Von diesen Intervallen (Massen der Aufstufungen oder Erhebungen) der Tonpaare sind die drei ersten $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{16}{15}$, die grössten und wichtigsten in der angewandten Musik und werden, insofern sie als der Ordnung nach gegen den Ausgangston, die Prim 1 herabsinkende Töne angesehen werden können, wie folgt benannt:

$\frac{9}{8}$ der g r o s s e g a n z e T o n,
$\frac{10}{9}$ der k l e i n e g a n z e T o n und
$\frac{16}{15}$ der g r o s s e h a l b e T o n.

An ihrer Bruchform lässt sich das Besondere bemerken, dass die Anzahl der Schwingungen des höheren Tones jene des tieferen beziehungsweise um deren 8ten, 9ten oder 15ten Theil, also beziehlich auf jede 8, 9 oder 15 Schwingungen um E i n e übertrifft. — Bestimmen wir von diesen drei neuen Tönen ebenfalls ihre Intervalle, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lccc} \text{Töne:} & \frac{9}{8}, & \frac{10}{9}, & \frac{16}{15} \\ \text{Intervalle:} & \frac{81}{80}, & \frac{25}{24}, & \end{array} \Bigg| \text{ und die Gleichungen } \begin{array}{l} \frac{9}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80} \\ \frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}. \end{array}$$

Das hier aufgefundene höchst kleine Tonintervall $\frac{81}{80} = 1\frac{1}{80}$ ist bekanntlich so gering, dass zwei um dasselbe verschiedene Töne vom menschlichen Gehör als fast gleich aufgenommen werden und pflegt man dasselbe das Komma oder zur Unterscheidung von ähnlichen sehr kleinen Intervallen das syntonische Komma zu nennen. — Das Intervall $\frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$ nennt man den kleinen halben Ton.

Die zwei voranstehenden Gleichungen zeigen, dass der grosse Ganzton $\frac{9}{8}$ den kleinen $\frac{10}{9}$ nur um ein Komma übersteigt und dass der kleine Ganzton sich in den grossen und kleinen Halbton zerlegen lässt oder auch erreicht wird, wenn man einen der beiden halben Töne um den anderen erhöht.

Intervalle von Paaren getrennter Töne obiger Tonleiter.

Nr. 10. Steigt man von einem gewissen Tone aus, den man als ersten zählt, mit Übergehung eines Tones oder zweier, oder dreier Töne, beziehungsweise auf den dritten, vierten oder fünften, so nennt man das sich ergebende Intervall von jenem ersten Tone bis zu diesem dritten, vierten, fünften überhaupt eine Terz, Quart oder Quint.

a) Dieses letztere grosse Intervall, die Quint, $\mathrm{I} :: {}^{*)}\,\mathrm{V} = 1 :: \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, welches einen für das menschliche Gehör sehr angenehmen Zweiklang gibt, hat sich uns bekanntlich zu allererst als (arithmetisches) Mittel der Prim 1 und der Octav 2 ergeben und spielt in der ausübenden Musik eine hervorragende (dominirende) Rolle.

b) Die Quart fanden wir als Intervall der Quint $\frac{3}{2}$ und der Octav 2 d. i. $= 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$; zu ihr steht demnach die Prim im Verhältniss: $\mathrm{I} :: \mathrm{IV} = 1 :: \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$; in unserer fünfgliedrigen Tonreihe haben wir zwei Quarten, nemlich $\mathrm{I} :: \mathrm{IV} = 1 :: \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ und $\mathrm{II} :: \mathrm{V} = \frac{9}{8} :: \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$.

c) Die wichtigsten und angenehmsten der grösseren Tonintervalle sind die Terzen; in unserer fünfgliedrigen Tonreihe finden wir deren drei. — Das Intervall von der ersten Tonstufe zur dritten $\mathrm{I} :: \mathrm{III} = 1 :: \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$ ist die Haupt-Terz und erhält den Beinamen grosse oder Dur-Terz. — Das Intervall von der dritten zur fünften Tonstufe $\mathrm{III} :: \mathrm{V} = \frac{5}{4} :: \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$ ist kleiner als jene erstere, aber grösser als die Secund, wird genannt die kleine oder Moll-Terz. Da das Intervall der grossen und kleinen Terzen $\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$ ist, so lässt sich die kleine Terz $\frac{6}{5}$ als die Vertiefung der grossen Terz $\frac{5}{4}$ um den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$ ansehen. Diese kleine Terz pflegt in den Tonleitern an die Stelle der grossen gesetzt zu werden, um die Wirkung der auf diese andere Tonleiter sich stützenden Musikstücke auf das Gemüth wesentlich abzuändern. — Die Aufsteigung von der zweiten zur vierten Tonstufe $\mathrm{II} :: \mathrm{IV} =$

---

*) Der hier gebrauchte doppelte Doppelpunkt oder Doppelkolon soll das Verhältniss der vorangehenden Zahl zur folgenden in der Weise andeuten, dass die Grösse des Verhältnisses als der Quotient des zweiten Verhältnissgliedes durch das erste dargestellt wird.

$\frac{9}{8} :: \frac{4}{3} = \frac{32}{27} = 1{\cdot}185$ ist kleiner als eine kleine Terz und zw. ist $\frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot (\frac{5 \cdot 32}{6 \cdot 27}) = \frac{6}{5} : \frac{81}{80}$, mithin der Tonwerth einer um das Komma erniedrigten kleinen oder einer schwachen kleinen Terz, die aber der kleinen Terz selbst in der ausübenden Musik gleich geachtet wird.

F. Bestimmung der Sext und Septim und Ergänzung der achtgliedrigen Dur-Tonleiter.

Nr. 11. So wie die Nummer 6 mitten zwischen 4 und 8 liegt, lässt sich auch die Sext als Mittel der Quart und Oktav darstellen; es ist demnach $\mathrm{VI} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + 2) = \frac{5}{3}$. — Für die Septim nehmen wir an, dass gleichwie zwischen den Nummern 7 und 2 die Nummer 5 genau genug mitten inne liegt, die Quint, das Mittel der Secund und Septim sei, nemlich, dass wir setzen dürfen $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\frac{9}{8} + \mathrm{VII})$, woraus wir erhalten $\mathrm{VII} = \mathrm{III} - \frac{9}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$.

Nr. 12. Andererseits stützt man sich auf die Erwägung, dass die beiderlei Terzen dem menschlichen Gehör wohlthuende Zweiklänge bildend, nicht oft genug in die Tonleitern aufgenommen werden können, und fordert daher, dass die Sext hier die Dur-Terz $\frac{5}{4}$ der Quart $\frac{4}{3}$ und die Septim die gleiche Terz der Quint $\frac{3}{2}$ sein soll. Demgemäss wird die Sext $= \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$ und die Septim $= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$, wie so eben gefunden.

Nr. 13. Auf diese Weise haben wir demnach die Lücke, welche zwischen der, bisher blos die ersten fünf Töne mit der grossen Terz $\frac{5}{4}$ enthaltenden Tonleiter und der schon Eingangs zu Grunde gelegten Octav 2 noch bestand, durch Feststellung der Sext und Septim ausgefüllt und die achtgliedrige Dur-Tonleiter vollkommen zusammengestellt; sie ist sonach wenn wir dem üblichen Brauche folgend als Prim den Grundton *c* wählen, die nachstehende:

I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII
c		*d*		*e*		*f*		*g*		*a*		*h*		$\bar{c}$
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		2
	$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{9}$.	

Diese nunmehr vervollständigte achtgliedrige Dur-Tonleiter enthält nebst den früheren in E, Nr. 8 gefundenen grösseren Intervallen:

a) noch die zwei Quinten: $\mathrm{II} :: \mathrm{VI} = \frac{9}{8} :: \frac{5}{3} = \frac{40}{27} = \frac{3}{2} \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{40}{27}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{80} = \dot{\mathrm{V}} : \frac{81}{80}$,
$\mathrm{III} :: \mathrm{VII} = \frac{5}{4} :: \frac{15}{8} = \frac{3}{2} = \mathrm{V}$;

b) die zwei Quarten: $\mathrm{III} :: \mathrm{VI} = \frac{5}{4} :: \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = \mathrm{IV}$,
$\mathrm{IV} :: \mathrm{VII} = \frac{4}{3} :: \frac{15}{8} = \frac{45}{32} = 1{\cdot}40625 > \mathrm{IV}$;

c) endlich die drei Terzen: $\mathrm{IV} :: \mathrm{VI} = \frac{4}{3} :: \frac{5}{3} = \frac{5}{4} = \mathrm{III}$,
$\mathrm{V} :: \mathrm{VII} = \frac{3}{2} :: \frac{15}{8} = \frac{5}{4} = \mathrm{III}$,
$\mathrm{VI} :: \mathrm{VIII} = \frac{5}{3} :: 2 = \frac{6}{5} = \mathrm{III} : \frac{25}{24} = \dot{\mathrm{III}}$ (siehe G, Nr. 14).

G. Ermittlung der Sext und Septim falls die grosse oder Dur-Terz $\frac{5}{4}$ durch die kleine oder Moll-Terz $\frac{6}{5}$ ersetzt wird und Vervollständigung der Moll-Tonleiter.

Nr. 14. Aus der vorhin aufgestellten Dur-Tonleiter wird dadurch, dass man die grosse oder Dur-Terz $\frac{5}{4}$ durch die kleine oder Moll-Terz $\frac{6}{5}$ ersetzt, der Grund zur Moll-Tonleiter gelegt, für welche sonach auch die Sext und Septim angemessen zu bestimmen sind. — Um diese 3 Moll-Töne von den entsprechenden Dur-Tönen in der Schrift zu unterscheiden, werden wir über den römischen Zahlzeichen der letzteren einen Punkt setzen, jene daher mit $\dot{\text{III}}$, $\dot{\text{VI}}$ und $\dot{\text{VII}}$ bezeichnen.

Gleichwie nun die Nummer 6 zwischen 3 und 8 ziemlich genau in der Mitte liegt, kann man auch die Sext als Mittel der Moll-Terz und Octav betrachten; daher ist

$$\dot{\text{VI}} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{6}{5} + 2\right) = \tfrac{8}{5} = 1{\cdot}6.$$

Für die Septim bedingen wir, dass so wie die Nummer 5 zwischen 3 und 7 genau mitten inne liegt, sich auch die Quint als arithmetisches Mittel der Terz und Septim darstellen lasse, nemlich, dass wir setzen dürfen $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5} + \dot{\text{VII}}\right)$, wornach sich ergibt $\dot{\text{VII}} = \text{III} - \frac{6}{5} = \frac{9}{5} = 1{\cdot}8$.

Nr. 15. Bilden wir eben so wie im Vorhergehenden die Sext und Septim als Terzen und zwar als Moll-Terzen der Quart $\frac{4}{3}$ und der Quint $\frac{3}{2}$, so finden wir die $\dot{\text{VI}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$ und die $\dot{\text{VII}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$ wie vorher.

Endlich finden wir eine Bestätigung dieser Rechnungsergebnisse in Folgendem: Da das Intervall der kleinen Terz $\frac{6}{5}$ zur grossen Terz $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$ ist, daher diese kleine Terz als Erniedrigung der grossen um den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$ sich darstellt, so müssen wir, weil wir in der Dur-Tonleiter die grosse Terz auf diese Weise erniedrigten, auch die von der Terz abhängigen zwei Töne Sext und Septim der Dur-Tonleiter $\frac{5}{3}$ und $\frac{15}{8}$ um die gleiche Stufe $\frac{25}{24}$ vertiefen, d. h. sie durch den letzteren Bruch dividiren, somit ergibt sich uns für die Moll-Tonleiter die Sext $\dot{\text{VI}} = \frac{5}{3} : \frac{25}{24} = \frac{8}{5}$, und die Septim $\dot{\text{VII}} = \frac{15}{8} : \frac{25}{24} = \frac{9}{5}$, so wie in beiden früheren Rechnungen.

Nr. 16. Dem zufolge haben wir aus der oben aufgestellten Dur-Tonleiter durch die übliche einen kleinen halben Ton betragende Erniedrigung ihrer Terz, Sext und Septim die entsprechende Moll-Tonleiter gebildet, wozu jedoch noch zu bemerken kommt, dass die angewandte Musik nach Bedarf entweder auch die in der Dur-Tonleiter aufgeführte Septim $\frac{15}{8}$ beibehält und dadurch die sogenannte **harmonische Moll-Tonleiter** gestaltet, oder durch Aufnahme der kleinen Septim $\frac{9}{5}$ die **melodische Moll-Tonleiter** aufstellt. Diese **beiderlei** auf dem Grundtone *c* aufgerichteten **Moll-Tonleitern** sind sonach folgende:

I		II		$\dot{\text{III}}$		IV		V		$\dot{\text{VI}}$		VII		VIII	
c		*d*		*es*		*f*		*g*		*as*		*h*		$\bar{c}$	Harmonisch
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{8}{5}$		$\frac{15}{8}$		2	
	$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{75}{64}$		$\frac{16}{15}$		

$\dot{\text{VI}}$		$\dot{\text{VII}}$		VIII	
as		*hes*		$\bar{c}$	Melodisch
$\frac{8}{5}$		$\frac{9}{5}$		2	
	$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		

Anmerkungen: 1. Das Intervall von $as::h$ ist zusammengesetzt aus den Intervallen $as::a$ und $a::h$, ist daher das Product $\left(\frac{8}{5} :: \frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3} :: \frac{15}{8}\right) = \frac{25}{24} \cdot \frac{9}{8} =$ einem kleinen halben Ton mit einem grossen Ganzton $= \frac{75}{64}$; auch ist $\frac{75}{64} = \frac{25}{8} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{25}{24} \cdot \frac{9}{8}$. 2. Die hier aufgestellten Dur- und Moll-Tonleitern nennt man diatonisch, insofern sie nur grosse Intervalle, nemlich Ganztöne und grosse Halbtöne enthalten.

H. Einschaltung von Tönen durch Erhöhung und Vertiefung.

Nr. 17. Den Komponisten von Tonstücken können die bisher begründeten diatonischen achtgliedrigen Tonleitern nicht vollständig genügen, weil die Intervalle von Ton zu Ton, nicht allein die Ganztöne, sondern sogar auch die grossen halben Töne zu hohe Tonstufen bilden. — Ein Gleiches zeigt sich, wenn die Prim der diatonischen Normal-Tonleiter durch eine beliebige andere oder wie man hierüber sich auszudrücken pflegt, der Grundton jener Tonleiter durch einen neuen ersetzt wird, mithin jeder Ton der Normal-Tonleiter im Verhältniss der beiden Primen oder Grundtöne erhöht oder vertieft wird. — In diesen beiden Fällen treten in die Tonpaare neue Töne als Zwischentöne ein oder sie werden in die Tonpaare eingeschaltet, erscheinen daher entweder deren tiefere Töne erhöht oder deren höhere erniedrigt. Als Mass der Erhöhung und Erniedrigung eines Tones hat man den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$ in Gebrauch gezogen, durch welche Zahl der zu erhöhende Ton (Tonwerth) zu multipliciren, der zu erniedrigende dagegen zu dividiren kommt [siehe C, Nr. 5, *b*), *c*)].

Nr. 18. Unsere nächste Aufgabe ist es nun, die durch dieses Mittel gewonnenen kleinen Intervalle kennen zu lernen. Hiezu nehmen wir an, dass das Intervall i das der beiden begrenzenden Töne und von diesen der untere mit s bezeichnet sei; dann ist der höhere $= is$; bezeichnen wir zugleich abkürzend den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$ mit m, so erhalten wir je nachdem wir 1.) einen Ton erhöhen oder 2.) einen vertiefen oder endlich 3.) beides zugleich ausführen im Allgemeinen folgende drei Gruppen von drei oder vier nacheinander aufsteigenden Tönen sammt ihren Tonverhältnissen und Intervallen:

$$\begin{array}{llllllllllll}
1. & s, & ms, & is, & 2. & s, & \frac{is}{m}, & is, & 3. & s, & ms, & \frac{is}{m}, & is, \\
 & 1, & m, & i, & & 1, & \frac{i}{m}, & i & & 1, & m, & \frac{i}{m}, & i, \\
 & & m, & \frac{i}{m}, & & & \frac{i}{m}, & m, & & & m & \frac{i}{m^2} & m.
\end{array}$$

Insbesondere erhalten wir nun je nach den Grössen von i folgende specielle Intervalle:

	grosser Ganzton	kleiner Ganzton	grosser Halbton
$i =$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$
$m =$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{24}$
$\frac{i}{m} =$	$\frac{27}{25}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{128}{125} = 1\frac{1}{42}$
$\frac{i}{m^2} =$	$\frac{648}{625} = 1\frac{1}{27 \cdot 1}$	$\frac{128}{125} = 1\frac{1}{42}$	$\frac{3072}{3125} = 1 : 1\frac{1}{58} = \frac{58}{59}$.

Aus dem letzten Ergebnisse leuchtet ein, dass wenn in ein Tonpaar, dessen Intervall ein grosser Halbton ist (wie z. B. in *e* zu *f* und *h* zu *c*), zwei Töne eingeschaltet werden, so liegt der durch Erhöhung entstandene noch höher als der durch Erniedrigung erzeugte (wie z. B. *eis* $>$ *fes*, *his* $>$ *ces*); während sonst jedenfalls das Umgekehrte stattfindet.

Aufstellung der chromatischen Tonleiter.

Nr. 19. Nach diesen Erörterungen wenden wir uns nun selbst zu den wirklichen Erhöhungen und den Vertiefungen der Töne der diatonischen Tonleitern. Zuvörderst müssen wir anführen, dass da wo diese Töne mit Buchstaben benannt werden, dem betreffenden Buchstaben entweder die Silbe *is* oder die Silbe *es* angehängt wird, je nachdem der Ton erhöht oder vertieft wird, d. i. durch $\frac{25}{24}$ multiplicirt oder dividirt wird.

Nr. 20. I. Ton-Erhöhungen.

Die Tonwerthe der durch Erhöhung entstehenden Töne erhalten wir sohin nach folgenden Rechnungen:

1. $cis = c \,.\, m = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24} = 1{\cdot}041\dot{6}$.
2. $dis = d \,.\, m = \frac{9}{8} \,.\, \frac{25}{24} = \frac{75}{64} \doteq 1\frac{1}{6} \doteq 1{\cdot}1719$.
3. $eis = e \,.\, m = \frac{5}{4} \,.\, \frac{25}{24} = \frac{125}{96} = 1{\cdot}3021$.
4. $fis = f \,.\, m = \frac{4}{3} \,.\, \frac{25}{24} = \frac{25}{18} = 1{\cdot}38\dot{8}$.
5. $gis = g \,.\, m = \frac{3}{2} \,.\, \frac{25}{24} = \frac{25}{16} = 1{\cdot}5625$.
6. $ais = a \,.\, m = \frac{5}{3} \,.\, \frac{25}{24} = \frac{125}{72} = 1{\cdot}736\dot{1}$.
7. $his = h \,.\, m = \frac{15}{8} \,.\, \frac{25}{24} = \frac{125}{64} = 2 - \frac{3}{64} = 1{\cdot}9531$.

Nr. 21. II. Ton-Erniedrigungen.

Aus der vorhin beschriebenen Berechnungsweise für die Erniedrigung der Töne um einen kleinen halben Ton ergeben sich folgende Tonwerthe, wozu nur noch bemerkt werden muss, dass die Prim $c = 1$ nicht auf $1 : m = \frac{24}{25} < 1$ herabgemindert werden kann, sondern diese Herabminderung an seiner Octav $\bar{c} = 2$ ausgeführt werden muss, daher $\overline{ces} = \frac{48}{25} > 1$ erfolgt:

1. $des = d : m = \frac{9}{8} \,.\, \frac{24}{25} = \frac{27}{25} = 1{\cdot}08$.
2. $es = e : m = \frac{5}{4} \,.\, \frac{24}{25} = \frac{6}{5} = 1{\cdot}2$, die kleine Terz.
3. $fes = f : m = \frac{4}{3} \,.\, \frac{24}{25} = \frac{32}{25} = 1{\cdot}28$.
4. $ges = g : m = \frac{3}{2} \,.\, \frac{24}{25} = \frac{36}{25} = 1{\cdot}44$.
5. $as = a : m = \frac{5}{3} \,.\, \frac{24}{25} = \frac{8}{5} = 1{\cdot}6$.
6. $hes = h : m = \frac{15}{8} \,.\, \frac{24}{25} = \frac{9}{5} = 1{\cdot}8$.
7. $ces = c : m = 2 \,.\, \frac{24}{25} = \frac{48}{25} = 1{\cdot}92$.

Nr. 22. Von diesen durch Erhöhung und Vertiefung entstehenden Schalttönen werden jedoch nicht mehr als die, in die um einen ganzen Ton von einander abstehenden fünf Tonpaare einzuschaltenden erhöhten Töne, nemlich *cis, dis, fis, gis, ais* in Verwendung genommen, alle übrigen jedoch ausser Acht gelassen, weil die jetzt gebräuchlichen musikalischen Instrumente zwar jene 5 erhöhten, nicht aber die 5 übrigen erniedrigten hervorzubringen vermögen.

Werden jene hervorgehobenen 5 Schalttöne gehörigen Ortes in die obige achttönige diatonische Tonleiter eingeschoben, so bildet sich eine 13tönige Tonleiter, welche die **chromatische** genannt wird. Diese ist demnach die folgende:

c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h	$\bar{c}$
1	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{125}{72}$	$\frac{15}{8}$	2
$\frac{25}{24}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{16}{15}$.	

J. Doppelte Erhöhung und Vertiefung mancher Töne.

Nr. 23. In manchen musikalischen Compositionen werden sogar doppelte Erhöhungen oder Vertiefungen um je einen halben Ton vorgezeichnet, wornach jene vorhin angeführten umgewandelten Töne auf *cisis, disis* etc. erhöht oder auf *ceses, deses* etc. erniedrigt werden. — Das Mass einer solchen Erhöhung oder Erniedrigung, nemlich der betreffende Multiplicator oder Divisor ist demnach $m \, . \, m = (\frac{25}{24})^2 = \frac{625}{576} = 1\frac{1}{12\frac{1}{3}} = \frac{13}{12}$ oder auch $m^2 = (1 + \frac{1}{24})^2 = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{576} \geqq \frac{13}{12}$; daher grösser als ein grosser halben Ton $1\frac{1}{15}$, jedoch kleiner als ein kleiner ganzer Ton $1\frac{1}{9}$. Die auf solche Weise theoretisch gebildeten Töne können gar nicht mittels der jetzt üblichen musikalischen Instrumente hörbar gemacht werden, sondern müssen durch andere ihnen nahe liegende Töne von den beziehlichen Musikinstrumenten ersetzt werden, allein da sie in denjenigen Tonleitern vorkommen, welche einen einmal erhöhten Ton zum Grundton haben und die wir weiter unten zusammenstellen werden, so sind wir doch genöthigt hier ihre Tonwerthe zu berechnen:

Nr. 24. Doppelt erhöhte Töne:

1. $cisis = cis \, . \, m = \frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} = \frac{625}{576}$,
2. $disis = dis \, . \, m = \frac{75}{64} \cdot \frac{25}{24} = \frac{625}{512}$,
3. $fisis = fis \, . \, m = \frac{25}{18} \cdot \frac{25}{24} = \frac{625}{432}$,
4. $gisis = gis \, . \, m = \frac{25}{16} \cdot \frac{25}{24} = \frac{625}{384}$,
5. $aisis = ais \, . \, m = \frac{125}{72} \cdot \frac{25}{24} = \frac{3125}{1728}$.

Nr. 25. Doppelt erniedrigte Töne:

1. $deses = des : m = \frac{27}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{648}{625}$,
2. $eses = es : m = \frac{6}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{144}{125}$,
3. $geses = ges : m = \frac{36}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{864}{625}$,
4. $asas = as : m = \frac{8}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{192}{125}$,
5. $heses = hes : m = \frac{9}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{216}{125}$.

K. Aufstellung der diatonischen Tonleitern für beliebige Grundtöne.

Nr. 26. Soll irgend ein beliebiger Ton, t der Grundton (die Tonika) einer diatonischen Tonleiter werden, so hat man diesen Ton um die in die diatonische Dur-Tonleiter aufgenommenen Töne:

$$1, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{15}{8}, \quad 2$$

oder umgekehrt diese Töne um jenen Grundton t nacheinander zu erhöhen, also [gemäss C, Nr. 5 *c)*] jene Tonwerthe mit dem Werthe t dieses Grundtones zu multipliciren. Bezeichnen wir nebstbei die allgemeinen Namen der Tonleitern: Prim, Secund etc. hier nicht durch die römischen Nummern, sondern durch die arabischen 1, 2 u. s. w. und hängen diese an des Grundtones Buchstaben rechts unten als Zeiger an, so machen wir zur allgemeinen Bezeichnung der fraglichen Tonleiter die folgende Tonreihe und bilden sonach die ganz allgemeine Muster-Tonleiter:

	t_1,	t_2,	t_3,	t_4,	t_5,	t_6,	t_7,	t_8,
also die Töne:	$1t$,	$\frac{9}{8}t$,	$\frac{5}{4}t$,	$\frac{4}{3}t$,	$\frac{3}{2}t$,	$\frac{5}{3}t$,	$\frac{15}{8}t$,	$2t$.

Nr. 27. Obwohl man zu Grundtönen diatonischer Tonleitern, deren Töne in der üblichen oder in einer beliebigen Ordnung nehmen könnte, so empfiehlt es sich doch, dieselben so zu wählen, dass die Quint einer jeden Tonleiter zum Grundton der nächst folgenden gewählt werde, weil diese neu entstehende Tonreihe von der vorhergehenden nur in der Septim des neuen Grundton's dadurch sich unterscheidet, dass diese letztere um einen kleinen halben Ton erhöht wird. — Zur Bildung einer solchen Reihe von Grundtönen stelle ich die Töne der diatonischen Tonleiter in folgendem Quinten-Tableau zusammen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & c & & d & & e & & f & \\ f & & g & & a & & h & & c. \end{array}$$

Fasst man hier von c als Stamm-Grundton die Töne stets schräg und zwar abwechselnd rechts hinab, dann rechts hinauf in eine Reihe zusammen, so erhält man die Reihe der Quinten, als:

$$c \quad g \quad d \quad a \quad h \quad f,$$

in welcher jeder folgende Ton die Quint des unmittelbar vorhergehenden, also der nächst kommende Grundton ist; darin ist auch jeder Ton die Quart des nächst folgenden als des Grundtones. — Ferner ist ersichtlich, dass bei jedem in derselben Zeile stehenden Paare, wenn sein späterer Ton zum Grundton gemacht wird, der vorausgehende dessen Septim ist und für die neue Tonleiter um den kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$ erhöht wird; so z. B. wenn g der Grundton ist, wird f auf *fis* erhöht, wenn d der Grundton ist, wird c auf *cis* erhöht, u. s. w.

Nr. 28. Wählen wir demnach die Töne der obigen Quintenreihe zu den nach einander folgenden Grundtönen, so gewinnen wir nach genügender Vereinfachung der sich ergebenden Tonwerthe das unten folgende Tableau von diatonischen Tonleitern. Da die aus den angezeigten Rechnungen hervorgehenden ursprünglichen Ausdrücke der fraglichen Tonwerthe mancherlei Reduktionen erheischen, damit nur die Endergebnisse in die Übersichtstabelle aufgenommen werden können, so führen wir hier die schwierigen Reduktionen zum deutlicheren Verständniss aus:

$$\begin{aligned}
&g\ 2 = d\ 5 = \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{27}{16} = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{81}{80} = a \,.\, k,\\
&g\ 7 = h\ 5 = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{45}{32} = \tfrac{25}{18} \cdot \left(\tfrac{18}{25} \cdot \tfrac{45}{32}\right) = \tfrac{25}{18} \cdot \tfrac{81}{80} = fis \,.\, k,\\
&d\ 2 = \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{9}{8} = \tfrac{81}{64} = \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{80}{81} = e \,.\, k,\\
&d\ 7 = h\ 2 = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{135}{128} = \tfrac{25}{24}\left(\tfrac{24}{25} \cdot \tfrac{135}{128}\right) = cis \,.\, \tfrac{81}{80} = cis \,.\, k,\\
&h\ 7 = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{225}{128} = \tfrac{5}{3}\left(\tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{225}{128}\right) = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{25}{24} \cdot \tfrac{81}{80} = ais \,.\, k,\\
&fis\ 4 = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{25}{18} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{50}{27} = \tfrac{15}{8}\left(\tfrac{8}{15} \cdot \tfrac{50}{27}\right) h \,.\, \tfrac{80}{81} = h : k,\\
&fis\ 6 = \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{25}{18} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{125}{108} = \tfrac{75}{64}\left(\tfrac{64}{75} \cdot \tfrac{125}{108}\right) = dis \,.\, \tfrac{80}{81} = dis : k,\\
&gis\ 7 = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{25}{16} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{375}{256} = \tfrac{625}{432}\left(\tfrac{432}{625} \cdot \tfrac{375}{256}\right) = fisis \,.\, \tfrac{81}{80} = fisis \,.\, k,\\
&dis\ 2 = \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{75}{64} = \tfrac{675}{512} = \tfrac{125}{96}\left(\tfrac{96}{125} \cdot \tfrac{675}{512}\right) = eis \,.\, \tfrac{81}{80} = eis \,.\, k,\\
&dis\ 7 = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{75}{64} = \tfrac{1125}{1024} = \tfrac{625}{576}\left(\tfrac{576}{625} \cdot \tfrac{1125}{1024}\right) = cisis \,.\, \tfrac{81}{80} = cisis \,.\, k,\\
&ais\ 4 = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{125}{72} = \tfrac{125}{108} = \tfrac{75}{64}\left(\tfrac{64}{75} \cdot \tfrac{125}{103}\right) = dis \,.\, \tfrac{80}{81} = dis : k,\\
&his\ 7 = \tfrac{15}{8} \cdot \tfrac{125}{64} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1875}{1024} = \tfrac{3125}{1728}\left(\tfrac{1728}{3125} \cdot \tfrac{1875}{1024}\right) = aisis \,.\, \tfrac{81}{80} = aisis \,.\, k.
\end{aligned}$$

L. Die Endergebnisse dieser Untersuchung stellen wir nun zusammen in folgende

Nr. 29. Übersichtstabelle der diatonischen Tonleitern nach den Gliedern der obigen Quintenreihe.

Grundton	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$c = 1$	1 *c*	$\frac{9}{8}$ *d*	$\frac{5}{4}$ *e*	$\frac{4}{3}$ *f*	$\frac{3}{2}$ *g*	$\frac{5}{3}$ *a*	$\frac{15}{8}$ *h*	2 $\bar{c}$
$c\,5 = g = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ *g*	$\frac{27}{16}$ *a . k*	$\frac{15}{8}$ *h*	2 *c*	$\frac{9}{8}$ *d*	$\frac{5}{4}$ *e*	$\frac{45}{32}$ *fis . k*	3 $\bar{g}$
$g\,5 = d = \frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$ *d*	$\frac{81}{64}$ *e . k*	$\frac{45}{32}$ *fis . k*	$\frac{3}{2}$ *g*	$\frac{27}{16}$ *a . k*	$\frac{15}{8}$ *h*	$\frac{135}{128}$ *cis . k*	$\frac{9}{4}$ $\bar{d}$
$d\,5 = a = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$ *a*	$\frac{15}{8}$ *h*	$\frac{25}{24}$ *cis*	$\frac{10}{9}$ *d : k*	$\frac{5}{4}$ *e*	$\frac{25}{18}$ *fis*	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{10}{3}$ $\bar{a}$
$a\,5 = e = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$ *e*	$\frac{45}{32}$ *fis . k*	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{5}{3}$ *a*	$\frac{15}{8}$ *h*	$\frac{25}{24}$ *cis*	$\frac{75}{64}$ *dis*	$\frac{5}{2}$ $\bar{e}$
$e\,5 = h = \frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$ *h*	$\frac{135}{128}$ *cis . k*	$\frac{75}{64}$ *dis*	$\frac{5}{4}$ *e*	$\frac{45}{32}$ *fis . k*	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{225}{128}$ *ais . k*	$\frac{15}{4}$ $\bar{h}$
$h\,5 = fis = \frac{25}{18}$	$\frac{25}{18}$ *fis*	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{125}{72}$ *ais*	$\frac{50}{27}$ *h : k*	$\frac{24}{25}$ *cis*	$\frac{125}{108}$ *dis : k*	$\frac{125}{96}$ *eis*	$\frac{25}{9}$ $\overline{fis}$
$fis\,5 = cis = \frac{25}{24}$	$\frac{25}{24}$ *cis*	$\frac{75}{64}$ *dis*	$\frac{125}{96}$ *eis*	$\frac{25}{18}$ *fis*	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{125}{72}$ *ais*	$\frac{125}{64}$ *his*	$\frac{25}{12}$ $\overline{cis}$
$cis\,5 = gis = \frac{25}{16}$	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{225}{128}$ *ais . k*	$\frac{125}{64}$ *his*	$\frac{25}{24}$ *cis*	$\frac{75}{64}$ *dis*	$\frac{125}{96}$ *eïs*	$\frac{375}{256}$ *fisis . k*	$\frac{25}{8}$ $\overline{gis}$
$gis\,5 = dis = \frac{75}{64}$	$\frac{75}{64}$ *dis*	$\frac{675}{512}$ *eis . k*	$\frac{375}{256}$ *fisis . k*	$\frac{25}{16}$ *gis*	$\frac{225}{128}$ *ais . k*	$\frac{125}{64}$ *his*	$\frac{1125}{1024}$ *cisis . k*	$\frac{75}{32}$ $\overline{dis}$
$dis\,5 = ais = \frac{125}{72}$	$\frac{125}{72}$ *ais*	$\frac{125}{64}$ *his*	$\frac{625}{576}$ *cisis*	$\frac{125}{108}$ *dis : k*	$\frac{125}{96}$ *eis*	$\frac{625}{432}$ *fisis*	$\frac{625}{384}$ *gisis*	$\frac{125}{36}$ $\overline{ais}$
$ais\,5 = eïs = \frac{125}{96}$	$\frac{125}{96}$ *eïs*	$\frac{375}{256}$ *fisis . k*	$\frac{625}{384}$ *gisis*	$\frac{125}{72}$ *disis*	$\frac{125}{64}$ *his*	$\frac{625}{384}$ *cisis*	$\frac{625}{512}$ *disis*	$\frac{125}{48}$ $\overline{eïs}$
$eïs\,5 = his = \frac{125}{64}$	$\frac{125}{64}$ *his*	$\frac{1125}{1024}$ *cisis . k*	$\frac{625}{512}$ *disis*	$\frac{125}{96}$ *eïs*	$\frac{375}{256}$ *fisis . k*	$\frac{625}{384}$ *gisis*	$\frac{1875}{1024}$ *aisis . k*	$\frac{125}{32}$ $\overline{his}$

Nr. 30. In den so eben aufgestellten 13 Tonleitern oder unter den sie enthaltenden 91 Tönen erscheinen unverändert:

1. Von den reinen (ursprünglichen) Tönen:

	c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	
in	2	3	5	1	3	3	6,	zusammen in 23 Tonleitern;

2. von den einfach erhöhten ursprünglichen Tönen kommen vor:

	cis	*dis*	*eis*	*fis*	*gis*	*ais*	*his*	
in	5	5	6	3	7	3	6,	zusammen in 35 Tonleitern;

3. von den nur um ein Komma erhöhten oder vertieften ursprünglichen Tönen erscheinen:

	d : k,	*e . k,*	*a . k,*	*h : k,*	
in	1	1	2	1,	also zusammen in 5 Tonleitern;

4. von den nur um ein Komma erhöhten oder vertieften einfach erhöhten ursprünglichen Tönen finden sich:

cis . k,	*dis : k,*	*eis . k,*	*fis . k,*	*gis,*	*ais . k,*	*his*	
2	2	1	4	0	3	0,	zusammen in 12 Tonleitern;

5. von den doppelt erhöhten ursprünglichen Tönen kommen vor:

cisis,	*disis,*	*fisis,*	*gisis,*	*aisis*	
2	2	1	3	0,	in Allem in 8 Tonleitern vor;

6. von den nur um ein Komma erhöhten oder vertieften doppelt erhöhten ursprünglichen Tönen finden wir:

cisis . k,	*disis . k,*	*fisis . k,*	*gisis . k,*	*aisis . k,*	
2	0	4	0	1,	in 7 Tonleitern vor.

Als Abschluss dieser Untersuchung zeigt sich demnach, dass von den $13 . 7 = 91$ Tönen der 13 Tonleitern, 23 reine urprüngliche, 35 einfach erhöhte ursprüngliche, zusammen 58 Töne vollständig, von ersteren 5 und von den letzteren 12 um ein Komma erhöht oder vertieft, wenigstens höchst nahe genau auf dem Fortepiano hörbar gemacht werden; endlich dass die doppelt erhöhten, gleichviel ob rein oder um ein Komma abgeändert, $8 + 7 = 15$ Töne sich ganz und gar nicht richtig geben lassen.

Nr. 31. Die ähnliche Zusammenstellung der Moll-Tonleiter können wir unterlassen, weil jede Moll-Tonleiter aus der gleichnamigen, d. i. auf demselben Grundton errichteten Dur-Tonleiter bestimmt wird, indem man die in dieser letzteren vorkommende Terz, Sext und vielleicht auch Septim um einen kleinen halben Ton $\frac{25}{24}$ erniedrigt.

An den Tonwerthen vollbringt man dieses, indem man sie mit $\frac{1}{m} = \frac{24}{25}$ multiplicirt, an den Buchstaben-Namen dagegen nach folgenden Rücksichten:

1. An den ursprünglichen (umgeänderten) Buchstaben, indem man ihnen die Erniedrigungssilbe *es* anhängt;

2. bei den mit der erhöhenden Anhängssilbe *is* versehenen Buchstaben diese Silbe weglässt;

3. an dem zur Doppelerhöhung die Doppelsilbe *isis* führenden Buchstaben die letzte Silbe unterdrückt;

4. endlich das etwa mit dem Buchstaben als Multiplicator oder Divisor vorkommende Komma beibehält. Z. B.: Für die *dis* Moll-Tonleiter entnehmen wir aus der *dis* Dur-Tonleiter die Terz $\frac{375}{256} = fisis\,.\,k$, die Sext $\frac{125}{64} = his$ und die Septim $\frac{1125}{1024} = cisis\,.\,k$ und finden sonach für die *dis* Moll-Tonleiter: die Terz $= \frac{45}{32} = fis\,.\,k$, die Sext $= \frac{15}{8} = h$ und die Septim $= \frac{135}{128} = cis\,.\,k$. — Dieselben Tonwerthe bekommen wir auch, da sie offenbar in ihrer ursprünglichen Form der Reihe nach die Terz $dis\,.\,\frac{5}{4} : m$, die Sext $dis\,.\,\frac{5}{3} : m$ und die Septim $dis\,.\,\frac{15}{8} : m$, daher wegen $dis = d\,.\,m$ beziehungsweise $d\,.\,\frac{5}{4}$, $d\,.\,\frac{5}{3}$, $d\,.\,\frac{15}{8}$, $d\,.\,(\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8})$ sind, folglich auch wegen $d = \frac{9}{8}$ auf die obigen Tonwerthe $\frac{45}{32}$, $\frac{15}{8}$ und $\frac{135}{128}$ vereinfacht werden können.

Prag im Juni 1887.