DIE

FLÄCHEN F^4 UND F^3.

VON

KARL KÜPPER.

(Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. — VII. Folge, II. Band.)

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 3.)

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1887.

I. Die Flächen F^4 mit Doppelkegelschnitt und ihre 16 Geraden.

Der Gesichtspunct, den ich für die Betrachtung der Curven 4ter Ordnung mit 2 Doppelpuncten und der Flächen F^4 mit einer Doppellinie 2ten Grads A^2 im 5. Bande dieser Abhandlungen (VI. Folge) aufgestellt habe, ergab sich naturgemäss aus der Polarentheorie. Das Wesen dieser Auffassung besteht darin, dass eine F^4 als durch eine gewisse quadratische Transformation in sich selbst übergeführt erscheint.

Zum Verständniss des Folgenden genügt es, die Berechtigung einer solchen Auffassung in Kürze auf eine andere Weise darzuthun; ich werde dabei nur wenig von der früher gebrauchten Bezeichnung abweichen.

1. H^2 sei eine Regelfläche 2ten Grads, σ ein Punct ausserhalb derselben, und a^2 der Schnitt von H^2 mit der Polarebene Σ von σ. Weist man einem beliebigen Puncte r denjenigen ϱ zu, welcher auf σr liegt und von r durch die Fläche H^2 harmonisch getrennt wird, so erhält man eine quadratische Transformation $(r\varrho)$ des Raumes, deren Centrum σ, deren Ordnungslinie H^2 ist.

Hierauf lasse man die Paare r, ϱ den Ebenen R des Raumes in umkehrbar eindeutiger Weise also entsprechen: Wegen der Lage von r, ϱ werden die beiden Kegel, welche aus diesen Puncten die Linie a^2 projiziren, sich in einem Kegelschnitt b^2 auf H^2 durchdringen; die Ebene von b^2 ist dann R.

Wenn nun umgekehrt H^2 mit irgend einer Ebene R in b^2 schneidet, und mit r, ϱ die Spitzen der Kegel bezeichnet, welche durch a^2 und b^2 sich legen lassen, so fallen bekanntlich r, ϱ auf einen Strahl von σ — der zu der Schnittlinie $R\Sigma$ conjugirt in Bezug auf H^2 ist — und es ist auch r von ϱ durch H^2 harmonisch getrennt. Dabei zeigt sich, dass der Pol σ^1 von R in Bezug auf H^2 in σr liegt und von σ durch r, ϱ harmonisch getrennt ist.

Dreht sich die Ebene R um einen Punct p, so beschreibt r, ϱ eine Fläche 2ten Grads P^2, welche durch a^2 geht, und in Bezug aufwelche p, Σ Pol und Polare sind. Beschreibt daher R einen Büschel, dessen Axe die Gerade $p\,p_1 \equiv e$ ist, so durchlaufen r, ϱ den Kegelschnitt e^2, welchen die Flächen P^2, P_1^2 noch ausser a^2 gemein haben. Weil die Ebene des e^2 die Pole σ^1 der Ebenen R enthält so muss ihr Pol in Bezug auf H^2 in e sein, und weil diese Ebene durch σ geht, muss dieser Pol auch auf Σ liegen, er ist somit der Schnittpunct ξ von e, Σ.

Ist p_0 ein Punct von H^2, so wird P_0^2 der Kegel, welcher a^2 aus p_0 projizirt. Denn ist b^2 ein durch p_0 gehender Kegelschnitt von H^2, r die Spitze eines durch a^2 und b^2 gehenden Kegels (r) so ist, $r p_0$ sowohl Kante von (r) wie von P_0^2.

Stellt man sich demnach p auf der Geraden e variabel vor, so beschreibt P^2 einen Flächenbüschel mit der Basis a^2, e^2 und gelangt p in einen der Schnittpuncte p_0 von e, H^2, so wird die Fläche P^2 einer der Kegel P_0^2 sein. Wir schliessen hieraus, dass e^2 nicht zerfallen kann, wenn e die H^2 schneidet.

Berührt dagegen e die Fläche H^2 in p_0, so zerfällt e^2 in zwei durch p_0 gehende a^2 schneidende Geraden. Denn die Ebene e^2 ist nach dem eben Gesagten die Polarebene von ξ in Bezug auf H^2, sie geht durch p_0 und schneidet aus P_0^2 zwei Geraden $p_0\, a$, $p_0\, \alpha$, welche die e^2 ausmachen, diese Geraden schneiden a^2 offenbar in den Berührungspuncten der von ξ an a^2 möglichen Tangenten.

Hervorzuheben ist:

Wenn zwei Geraden e_1, e_2 sich schneiden, so haben e_1^2, e_2^2 ein Punctepaar r, ϱ gemein, welches nämlich der Ebene zugewiesen ist, die den Bücheln (e_1), (e_2) gemeinsam ist. Wenn aber zwei windschiefe Geraden e, e_1 angenommen werden, so können e, e_1 keinen gemeinschaftlichen Punct r haben. Denn σr müsste sowohl e^2 als e_1^2 in dem an r gepaarten ϱ schneiden, die Ebene R also die zu r, ϱ gehört, müsste sowohl im Büschel (e) als (e_1) vorkommen.

2. Wir nehmen jetzt irgend eine Regelfläche Q^2 an, die von Σ in q^2 geschnitten werde. Die den Tangentialebenen R von Q^2 entsprechenden Paare haben alsdann zum Ort eine Fläche 4ter Ordnung F^4 mit der Doppelcurve a^2.

Beweis. e, e_1 seien zwei windschiefe Geraden der Q^2; sie werden von den Geraden der andern Schaar in homologen Puncten p, p_1 zweier projectivischen Gebilde $(p)\,\pi\,(p)$ geschnittem. Diesen entsprechen zwei projectivisch aufeinander bezogene Büschel $(P^2)\,\pi\,(P_1^2)$, durch welche die F^4 erzeugt wird.

Nun gibt es 8 Geraden $e_1 \ldots e_8$ auf Q^2, welche H^2 berühren, von denen vier (die mit unpaaren Indices) der einen, die vier $e_2 e_4 e_6 e_8$ der andern Schaar angehören. Jene liefern 4 Geradenpaare der F^4, etwa $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, diese 4 andere $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$, $d_1\delta_1$, zwei Gruppen I., II. bildend so, dass irgend ein Paar der einen Gruppe von jedem der andern in 2 Puncten r, ϱ geschnitten wird, während eine Gerade, aus I entnommen von den nicht mit ihr gepaarten in I nicht geschnitten wird, wohl aber von vier Geraden aus II.

Diese 16 Geraden sind die einzigen auf F^4.

Beweis. $p_0 a$ sei eine Gerade von F^4, wobei a nuf a^2, p_0 ebenfalls auf H^2 liege. Durchläuft ein Punct r die $p_0 a$, so bleibt auch ϱ auf einer durch p_0 gehenden Geraden $p_0\alpha$, und zugleich bleibt ϱ stets auf F^4. Ist ξ der Pol der Ebene $p_0\, a\alpha$ in Bezug auf H^2; so berührt ξp^0 die H^2 in p_0 und es entsprechen den durch ξp^0 gehenden Ebenen R jene Paare r, ϱ. Alle Paare der F^4 rühren aber von Tangentialebenen der Q^2 her, folglich muss $p_0\xi$ eine Gerade der Q^2 sein.

Man kann demnach schliessen:

Jede Gerade a der F^4 wird von fünf andern windschiefen der 16 geschnitten.

Welche Modifikation dieser Ausspruch erleidet, wenn die Flächen H^2, Q^2 nicht unabhängig von einander sind, wird später erörtert werden; zunächst bildet er die Grundlage der Untersuchung über:

Das gegenseitige Verhalten der 16 Geraden.

3. Unter einem Geradenpaar sind zwei sich schneidende der 16 zu verstehen.

Da jede Gerade von 5 andern geschnitten wird, unter welchen kein Paar ist, so liegen niemals drei Geraden in einer Ebene, und es existiren $\frac{5 \cdot 16}{2} = 40$ verschiedene Paare.

a) Durch zwei windschiefe Geraden a, b sind zwei andere c_1, d_1 bestimmt, welche sowohl a als auch b treffen, und deshalb die Transversalen von a, b heissen; a, b sind alsdann die Transversalen von c_1, d_1: Das durch a^2, a, b mögliche Hyperboloid hat mit F^4 noch einen Ort zweiter Ordnung gemein; durch einen Punkt x desselben, welcher auf keiner der Linien a^2, a, b liegt, geht eine Transversale über a^2, a, b, welche, da sie 5 Puncte mit F^4 gemein hat, unter den 16 sein muss. Jener Ort zweiter Ordnung besteht mithin aus 2 Transversalen von a und b.

b) Wird noch eine Gerade c angenommen windschief zu a und b, so können diese drei abc höchstens eine und zwar, wenn es überhaupt möglich ist, nur eine der beiden c_1 d_1 zur Transversale haben. Dies ist nun in der That so, denn das Hyperboloid abc hat mit dem in *a*) benutzten ausser a, b noch 2 Geraden gemein, wovon die eine der c auf dem Kegelschnitte a^2 begegnet, die andere somit 5 Puncte der F^4 enthält. Diese letztere nun soll mit d_1 bezeichnet werden, und die beiden Geraden, welche ausser abc noch d_1 treffen, heissen δ, δ_1.

d) Das Quadrupel Q.

Fasst man eine Gerade d auf, die zu a, b und c windschief ist, so können vier solche Geraden höchstens eine Transversale besitzen. Aus diesem Grunde können die vier auch nicht hyperboloidisch liegen, da unter dieser Voraussetzung die in *a*) gebrauchte Schlussweise auf 4 Transversalen führen würde. Sollen aber $abcd$ eine Transversale — unter den 16 — haben, so muss diese d_1 sein, weil es für abc keine zweite gibt; dann muss d entweder mit δ oder δ_1 einerlei sein.

Kann demnach eine zu abc windschiefe, von δ, δ_1 verschiedene Gerade d gefunden werden, so haben $abcd$ keine Transversale auf F^4. Eine solche d ist nun offenbar die Transversale, welche δ, δ_1 ausser d_1 noch besitzen, denn würde sie z. B. a treffen, so hätten $a\delta\delta_1$ zwei Transversalen. Indem wir also diese Transversale mit d bezeichnen, so haben $abcd$ die Eigenschaft, dass die Transversalen von je dreien aus dieser Gruppe mit der vierten windschief sind, wir nennen $abcd$ ein Quadrupel Q. Die hier auftretenden 4 Transversalen seien mit a_1, b_1, c_1, d_1 bezeichnet, je nachdem sie beziehlich windschief zu a, b, c, d sind. Da dann a, b, c, d als Transversalen von je dreien a_1, b_1, c_1, d_1 erscheinen, so liegt in letztern ein neuer Quadrupel Q_1 vor.

Die 12 von den Q verschiedenen Geraden lassen sich jetzt leicht überblicken: Da die Transversalen von zwei beliebigen der Q in Q_1 vorkommen, so existiert unter den übrigen 8 keine Gerade, welche mehr als eine der Q schneidet. Nun wird a von 5 Geraden getroffen, von welchen b_1, c_1, d_1 drei sind, bleiben zwei α, α_1, und diese müssen unter den 8 sein.

Ebenso werden b, c beziehlich von β, β_1, γ, γ_1 und d, wie schon angenommen wurde, von δ, δ_1 geschnitten. Die hier aufgezählten α, α_1, β, β_1 . . . . sind sämmtlich verschieden, da keine derselben 2 der Q schneidet, und sie machen zusammen mit den Q_1 die 12 Geraden ausserhalb Q aus.

Es zeigt sich, dass es keine Gerade gibt, die zu jeder in Q enthaltenen windschief ist. Weil aber a_1, b_1, c_1, δ_1, δ_2 allein d treffen, so muss jede von diesen verschiedene Gerade entweder a oder b oder c schneiden, mit andern Worten eine Gerade, die weder a, noch b noch c schneidet, muss unter den fünf d treffenden sein. Man sieht sonach, dass d, δ_1, δ_2 die einzigen zu abc windschief liegenden sind. Da endlich weder δ_1 noch δ_2 mit abc ein Quadrupel liefern, so folgt: Durch 3 beliebige windschiefe Geraden abc ist ein Quadrupel $Q = abcd$, welches sie enthält, eindeutig bestimmt.

Zugleich ist alsdann das Quadrupel Q_1 der Transversalen gegeben, welches mit Q ein Doppel-Quadrupel QQ_1 bildet. Entnimmt man irgend 3 Geraden diesem Doppel-Quadrupel, so sind sie nur dann zu je zwei windschief, wenn sie zu Q, oder Q_1 gehören; demnach muss ein Quadrupel, welches mit QQ_1 3 Geraden gemein hat, mit Q oder Q_1 identisch sein.

Ehe wir die 8 ausserhalb QQ_1 befindlichen Geraden betrachten, ziehen wir daraus, dass d, δ_1, δ_2 die einzigen Geraden sind, welche weder a, noch b, noch c schneiden, eine wichtige Folgerung:

Sind gegeben 4 windschiefe Geraden, so bilden sie entweder ein Quadrupel (wie $abcd$) oder nicht ($abc\delta$, $abc\delta_1$); im ersten Falle existiert keine zu allen 4 windschiefe, im letztern nur eine δ_1 oder δ). Unter den 16 ist eine Gruppe von 6 windschiefen Geraden unmöglich; eine solche von 5 Geraden hat stets eine einzige Transversale.

Zur Bestimmung von Q diente uns die Transversale d_1, sie lieferte δ, δ_1 und darauf d als deren 2te Transversale; indem man der Reihe nach a_1, b_1, c_1 die Rolle von d_1 übernehmen lässt, findet man, dass die 8 Geraden ausserhalb QQ_1 zu zweien die Transversalen von a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1 sind. Jede dieser 8 schneidet also eine einzige von Q und zugleich eine — die homologe — von Q_1.

Nun wird α geschnitten von a, a_1, somit noch von drei Geraden, welche, da α nicht noch eine Gerade von Q, und ebenso nur die a_1 aus Q_1 trifft, unter den sechs $\beta\,\beta_1\,\gamma\,\gamma_1\,\delta\,\delta_1$ vorkommen müssen. Sie seien $\beta_1\gamma_1\delta_1$.

α_1 kann aber keine dieser Geraden treffen, weil die beiden Transversalen von $\alpha\alpha_1$ in a und a_1 vorliegen, und da α, α_1 windschief sind, so bilden $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ ein Quadrupel Q_1'.

α_1, welche weder β_1 noch γ_1 noch δ_1 trifft, muss hiernach sowohl von β, als von γ, δ geschnitten werden; und man hat in $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Quadrupel Q'. Q' und Q_1' liefern das Doppel-Quadrupel $Q'Q_1'$; denn δ ist windschief zu α, β, γ; muss mithin $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ schneiden.

Die 12 Geraden ausserhalb Q ordnen sich demnach auf 3 Quadrupeln an, von denen zwei ein Doppelquadrupel bilden, das andere Q_1 ist. Es entsteht die Frage, ob man diese 12 nicht auf andere Weise auf drei Quadrupel X, Y, Z vertheilen kann? Enthielte X drei Geraden von Q_1, so folgte: $X \equiv Q_1$, mithin nach dem oben über ein Doppelquadrupel Bewiesenen: $YZ \equiv Q'Q_1'$.

Wenn ferner X eine Gerade etwa a_1 enthält, so muss X noch eine Gerade mit Q_1

gemein haben; denn andernfalls müssten drei Geraden von X in $Q'Q_1'$ vorkommen. Wären diese in dem nämlichen Theil des Doppelquadrupels, so wäre X identisch mit diesem, könnte folglich a_1 nicht enthalten. Gehören die 3 Geraden zu verschiedenen Theilen, so sind sie nicht zu je zwei windschief. Gesetzt, X enthielte a_1, b_1; dann muss Y oder Z die Geraden c_1, d_1 enthalten. Denn das Quadrupel, in welchem c_1 liegt, darf mit X keine Gerade gemein haben, wenn die verlangte Vertheilung überhaupt möglich sein soll. Kommen nun c_1, d_1 in Y vor, so darf Z aus dem eben angeführten Grunde keine Gerade von Q_1 enthalten, folglich muss Z entweder Q' oder Q_1' sein.

Es folgt zugleich: Wenn ein Quadrupel mit dem beliebig angenommenen $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ nur **eine** Gerade a_1 gemein hat, so muss es auch eine Gerade von $a\, b\, c\, d$ enthalten, und diese kann keine andere als a sein. In der That hat jedes Quadrupel, in welchem a, a_1 sind, weder eine Gerade in Q, noch in Q_1, ausser a, a_1.

Nachdem wir erwiesen, dass entweder

$$1)\quad Z \equiv Q \qquad \text{oder} \qquad 2)\quad Z = Q_1',$$

so nehme man etwa 1) an.

Alsdann gebe man X die Geraden a_1, b_1. Zu diesen sind in Q_1' nur zwei windschief, nämlich γ_1, δ_1; und diese liefern auch ein Quadrupel $a_1 b_1 \gamma_1 \delta_1$: Denn die Transversale d — über $a_1 b_1 c_1$ — schneidet δ_1, oder was auf dasselbe hinausläuft, die Transversale über $a_1 b_1 \delta_1$ schneidet c_1, mithin γ_1 nicht und deshalb ist $a_1 b_1 \delta_1 \gamma_1$ ein Quadrupel. Hiernach ist klar, dass $Y \equiv c_1 d_1 \alpha_1 \beta_1$, und wie die Vertheilung der 12 Geraden auf 3 Quadrupel geschehen kann und muss.

4. Die Geradenpaare und ihre Anordnung in 5 Systeme $\mathfrak{S}$.

a, α sei irgend einer der 40 möglichen Geradenpaare. Es gibt — ausser α — 4 Geraden, die a, und ebenso 4, die α treffen, die übrigbleibenden 6 sind also windschief zu a und α.

b sei eine dieser 6. Nach Abzug der beiden Transversalen über b, a, der beiden über b, α, bleibt noch eine Gerade β, welche b schneidet, aber weder a noch α trifft, mithin zu jenen 6 gehört. Man sieht hieraus, dass durch ein Paar a, α drei andere b, β; c, γ; d, δ bestimmt sind, so dass von diesen 4 Paaren jedes gegen die 3 andern windschief ist. Vier solche Paare bilden deshalb eine unzertrennbare Gruppe I.

Ist d_1 die Transversale von a, b, c, so muss d_1 entweder d oder δ treffen, da die zu d, δ windschiefen 6 Geraden mit d, δ selbst die Gruppe I ausmachen. Indem wir δ als die von d_1 geschnittene Gerade annehmen, liefern nach 3) $abcd$ ein Quadrupel Q.

Analoger Weise muss die Transversale δ_1 über $\alpha\beta\gamma$ entweder δ, oder d treffen. Fände aber ersteres statt, so wäre $\alpha\beta\gamma d$ ein Quadrupel, welches mit Q die einzige d gemeinschaftlich hätte. Dann aber müsste gemäss der in 3) hervorgehobenen Folgerung d_1 sich unter $\alpha\beta\gamma$ befinden, was nicht möglich ist, da keine dieser 3 Geraden zwei der abc schneidet. Wenn somit δ_1 und d sich treffen, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Quadrupel Q'.

Ergänzt nun $Q_1 \equiv a_1 b_1 c_1 d_1$ das Quadrupel Q zum Doppelquadrupel, so liegen die ausserhalb QQ_1 befindlichen 8 Geraden auf einem Doppelquadrupel. Von diesem muss mithin Q' der eine Bestandtheil sein; $Q_1' \equiv \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ ist der zweite. Es ist aus 3) klar, dass die Paare $a_1 \alpha_1$, $b_1 \beta_1$, $c_1 \gamma_1$, $d_1 \delta_1$ eine neue Gruppe II liefern, die man als durch I schon gegeben ansehen kann, und insofern als Ergänzungsgruppe von I betrachten wird, als I und II sämmtliche 16 Geraden umfassen. Zwei solche Gruppen bilden ein System 𝔖 von Paaren. Auf diese Weise lassen sich alle 40 Paare in fünf verschiedene Systeme unterbringen. Insofern eine bestimmte der 16 Geraden mit 5 andern gepaart ist, gibt sie Anlass zu 5 verschiedenen Gruppen, die jede in einem der 5 Systeme auftritt.

5. Die 5 Kummerschen Kegel (σ).

Die 8 in einem 𝔖 vorkommenden Paare sind in 8 Ebenen enthalten, welche alle durch denselben Punct σ gehen.

Der Beweis beruht auf folgendem Satze:

Hat man zwei Büschel (Y^2), (Z^2) von Flächen 2ten Grades, von welchen der eine die Kegelschnitte a^2, b^2, der andere a^2, c^2 zur Basis hat, so enthalten die Ebenen YZ, auf welchen sich irgend zwei Flächen Y^2, Z^2 durchdringen, einen festen Punct σ:

Eine solche Ebene $Y_1 Z_1$ schneide die Ebene B des b^2 in der Geraden b_1 und die Ebene C von c^2 in c_1; σ sei der Schnittpunct von $b_1 c_1$; er liegt auf der Schnittlinie BC.

Sind Y^2, Z^2 zwei beliebige der Flächen so, gehen Z_1^2, Z^2 durch a^2 auf der Fläche Y_1^2 und durch c^2 ausserhalb Y_1^2; folglich schneiden sich die Ebenen $Z_1 Y_1$, ZY_1 in einer festen Geraden von C, d. h. in c_1; also hat ZY_1 mit B eine durch σ gehende Gerade b gemein. Die Flächen Y_1^2, Y gehen durch a^2 auf Z und durch b^2 ausserhalb Z; folglich müssen die Ebenen ZY, ZY_1 sich auf der Ebene B durchschneiden also in b, und es geht YZ durch σ.

Jedes Paar der Gruppe I wird von jedem der II geschnitten, daher liegen 2 Paare aus verschiedenen Gruppen stets auf einer durch a^2 gehenden Fläche 2ten Grads. Setzt man demnach $b^2 \equiv b$, β, $c^2 \equiv c$, γ; und nennt B, C, A_1, B_1, C_1, D_1 die Ebenen der Paare b, β; c, γ, $a_1 \alpha_1$, etc.; so schneieen sich dem Satze zufolge diese 6 Ebenen in einem Puncte σ, und wenn man dann etwa a, α; d, δ die Rolle von $b\beta$, $c\gamma$ zuweist, so ergibt sich die oben aufgestellte Behauptung.

Nach 2. wurden die Paare b, $\beta \equiv b^2$, c, $\gamma = c^2$ durch 2 Geraden e_3, e_5 von Q^2 geliefert. Schneidet eine variable Gerade e der Fläche Q^2 diese e_3, e_5 in y, z und heissen Y^2, Z^2 die diesen Puncten zugeordneten Flächen, so sind diese in den Büscheln (a^2, b^2), (a^2, c^2), und durchdringen sich in e^2 auf F^4, d. h. F^4 wird durch diese projectivisch auf einander bezogene Büschel erzeugt. Dabei geht die variable Ebene E des e^2 stets durch σ, und schneidet F^4 in einem zweiten Kegelschnitt e_1^2, welcher zu der Geraden e_1 von Q^2 gehört, die e auf der Ebene Σ — in ζ — trifft. Die Ebene E ist Polarebene von ζ in Bezug auf H^2, und umhüllt deshalb einen Kegel 2ten Grads (σ). Zugleich berührt E die F^4 doppelt, nämlich in den Puncten r, ϱ, die der Ebene $ee_1 \equiv R$ zugewiesen sind, und sowohl in e^2 als e_1^2 liegen müssen.

Die 5 mit einer bestimmten Geraden a gepaarten liegen in 5 durch a gehenden Ebenen, und in jeder von diesen liegt eine Spitze σ von einem der F^4 doppelt umschriebenen Kegel 2ten Grads.

Der Ort des Punctes ζ ist q^2, der Schnitt von Q^2 und Σ, die Ebene ee_1 ist Tangentialebene von Q^2 im Puncte ζ; also gehen diese Ebenen ee_1 durch einen festen Punct Z den Pol von Σ in Bezug auf Q^2, und ihre Punctepaare r, ϱ liegen zugleich auf H^2 und der Fläche Z^2; mithin auf einer Raumcurve 4ter Ordnung σ^4.

6. Der in der vorigen Nummer aufgestellte Satz über die Büschel (a^2, b^2), (a^2, c^2) führt unmittelbar zu der Consequenz, dass diese Büschel auf jedem Strahl des fixen Punctes σ identische Involutionen j ausschneiden. Die Doppelpuncte dieser j haben alsdann zum Ort eine Fläche 2ten Grades H^2.

Beweis. Y_1^2 sei dem einen Büschel entnommen, und werde von einer beliebigen durch σ gehenden Ebene Y in y^2 geschnitten. Es leuchtet sofort ein, dass die Flächen des Büschels (a^2, y^2) dieselben j ausschneiden, da eine solche j bestimmt ist durch ein Paar, wovon der eine Punct σ ist, der andere in der Ebene von a^2 liegt, und durch ein zweites auf Y_1^2.

Wird hierbei Y variabel gedacht, so liegen die Spitzen der Kegel, welche zugleich a^2 und y^2 enthalten, auf einer Fläche H^2. Jeder Strahl von σ durchdringt H^2 in zwei Puncten r und ϱ, die, wie man sieht, die Doppelpuncte der auf diesem Strahl auftretenden j sein müssen. Nach dieser Vorbemerkung lässt sich zeigen, dass die Tangentialebenen der 5 Kegel (σ) die **einzigen** Bitangentialebenen von F^4 sind.

Gesetzt B sei eine Bitangentialebene, sie enthält zwei Kegelschnitte von F^4, etwa b^2 und e^2; diese schneiden sich auf a^2 und überdies in 2 Puncten r, ϱ, den Berührungspuncten von B, F^4.

Durch a^2, e^2 lege man eine Fläche Z^2, so wird dieselbe einen Kegelschnitt c^2 aus F^4 schneiden, dessen Ebene C offenbar $r\varrho$ enthält — als Schnittpuncte von b^2 und e^2. Mit Hülfe der hier aufgestellten Büschel (a^2, b^2), (a^2, c^2) lässt sich F^4 projectivisch erzeugen, und es werden die Ebenen, auf welchen sich homologe Flächen Y^2, Z^2 durchdringen, nach 5. einen festen Punct σ der Geraden $r\varrho$ enthalten und einen der F^4 doppelt umschriebenen Kegel (σ) umhüllen. Um die letztere Aussage zu rechtfertigen, stelle man sich eine Ebene F vor, welche a^2 in x, x_1, b^2 in y, y_1, c^2 in z, z_1 schneidet, dann sind in F zwei projectivische Kegelschnittbüschel $(xx_1\ yy_1)$, $(xx_1\ zz_1)$ zu denken, deren Erzeugniss eine C^4 der F^4 sein wird. Alsdann müssen die Geraden, welche die construirten Punctepaare der C^4 tragen, bekanntlich einen Kegelschnitt berühren.

Zieht man von σ an alle Flächen Y^2 oder Z^2 Tangenten, so tritt H^2 als Ort ihrer Berührungspuncte auf. Bestimmt man ferner von σ in Bezug auf die Kegelschnitte e^2, in welchen F^4 von je zwei homologen Flächen Y^2, Z^2 geschnitten wird, die Polaren, so erzeugen diese eine Regelfläche Σ_1^2; denn die Polarebenen von σ in Bezug auf die Y^2 und Z^2 drehen sich um 2 feste Geraden, und sind einander projectivisch zugewiesen. In jeder Ebene durch σ und e^2 befindet sich noch ein Kegelschnitt e_1^2 von F^4, welcher e^2 auf a^2 und sonst noch in 2 Puncten r, ϱ schneidet, deren Verbindungslinie durch σ geht. Die Polaren von σ in Bezug auf e^2 und e_1^2 treffen sich in σ', der von σ durch r, ϱ harmonisch getrennt ist; sie sind Geraden der Σ_1^2 von verschiedenen Schaaren, jede schneidet H^2 in den beiden Puncten, wo sie respective e^2, e_1^2 begegnet. Wenn es sich ereignet, dass diese beiden Puncte für ein e^2 zusammenfallen, so existirt von σ an e^2 nur eine Tangente, d. h. e^2 zerfällt. Die Fläche Σ_1^2 enthält aber acht Geraden — von jeder Schaar 4 — welche H^2 berühren. Mithin treten unter den e^2 8 Geradenpaare auf, die in 2 Gruppen von 4 Paaren geordnet sind derart, dass je 2 Paare derselben Gruppe windschief sind, während jedes Paar der einen Gruppe auf jedem der andern aufsteht.

Da es, wie wir bewiesen haben, auf F^4 nur 5 differente Systeme solcher Gruppen gibt, so existiren auch keine andere doppelt umschriebenen Kegel, als die uns jene Systeme lieferten.

7. Zusammenhang der 5 Kegel:

Wir fanden (v. Band V der Abh.) die 8 Doppeltangenten einer C^4 in 4 Paare angeordnet und bezeichneten mit σ, σ', σ'', σ''' die Schnittpuncte von je einem Paare, dabei zeigte sich, dass von σ 4 einfache Tangenten an die C^4 gehen, deren Berührungspuncte wir $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ nannten. Die Paare gebenüberliegender Seiten des Vierecks $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ schneiden sich in $\sigma', \sigma'', \sigma'''$. Legt man hiernach durch 2 der Puncte, σ, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, σ_4 etwa durch σ, σ_1 Ebenen, se schneiden diese gewisse C^4 aus F^4. Die Raumcurve t^4, welche H^2 und Σ_1^2 gemein haben, wird durch eine solche Ebene in 4 Puncten τ_1, τ_2, τ_2, τ_4 geschnitten, so dass $\sigma\tau$ einfache Tangenten der C^4 sind. Also gehen durch σ_1 die Verbindungslinien zweier Paare der vier τ, etwa $\tau_1\tau_2$, $\tau_3\tau_4$. Dreht sich demnach die schneidende Ebene um $\sigma\sigma_1$, so erkennt man, dass σ_1 die Spitze eines der Kegel 2ter Ordnung ist, welche die t^4 enthalten. Ein Gleiches gilt von σ_2, σ_3, σ_4; das heisst: σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 formiren das conjugirte Quadrupel der Flächen H^2, Σ_1^2 — die letztere Fläche hiess in der citirten Abhandlung des 5. Bandes S —.

Die Raumcurven σ^4 (a. a. Orte V.)

Am Schluss der Nr. 5 ergab sich, dass die zu σ gehörende σ^4 die Durchdringung von F^4 mit einer durch a^2 gehenden Fläche Z^2 darstellt. Diese Z^2 ist der Ort der Paare r, ϱ für alle durch den Punct z gelegten Ebenen R, und z ist der Pol von Σ in Bezug auf Z^2, oder Z^2 ist dem Kegel $z(a^2)$ längs a^2 umbeschrieben. Dieser Punct z, welcher auch Pol von Σ in Bezug auf Q^2 ist, hängt jedoch, was seine Lage betrifft, nur von F^4 selbst ab.

Legt man nämlich durch die Tangenten von a^2 je ein Paar Tangentialebenen an Q^2 und verbindet deren Berührungspuncte, so muss jede solche Verbindungslinie durch z gehen; d. h. z ist von Σ durch ein solches Paar Ebenen harmonisch getrennt.

Wir haben schon früher bemerkt, dass ein solches Ebenenpaar durch eine Tangente von a^2 gehend, die beiden durch diese möglichen Tangentialebenen der F^4 für ihre beiden in a^2 sich durchsetzenden Mäntel sind, werden indess noch einmal näher hierauf eingehen. Die Bestimmung des Punctes z ist demnach ganz unabhängig von der Fläche Q^2, und wir können von allen andern Raumcurven σ_1^4, σ_2^4 etc. aussagen, dass durch jede und a^2 eine Fläche 2ten Grads Z^2 bestimmt ist, die dem Kegel $z(a^2)$ längs a^2 umbeschrieben ist.

Hieraus folgt sodann leicht, dass man irgend 2 der Ramcurven σ^4, etwa σ^4, σ_1^4 als Grundcurven zweier Büschel 2ten Grads annehmen kann, um mittels derselben die F^4 projectivisch zu erzeugen.

Da aber der Kegel (σ) als Fläche in dem einen Büschel auftritt und F^4 längs σ^4 berührt, so muss die ihm zugewiesene Fläche φ^2 im Büschel (σ_1^4) durch σ^4 gehen, mit andern Worten: je zwei der 5 Raumcurven σ^4 liegen auf einer Fläche 2ten Grads

Im Allgemeinen ist ein Punct des a^2 Biplanarpunct von F^4, doch sind auf a^2 4 Uniplanarpuncte (Wendepuncte bei Clebsch) 1, 2, 3, 4 auf a^2. Es sind die Berührungspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten von a^2 und q^2; und durch sie gehen sämmtliche Raumcurven σ^4 (conf. Band V.). Beachtet man, dass σ^4 und σ_1^4 auf φ^2 liegen, so ergibt sich, dass σ^4, σ_1^4 sich in 4 anderen Puncten $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ einer Ebene X treffen müssen. Wir werden jetzt zeigen, dass diese Ebene X mit der Ebene Σ von 1 2 3 4 coinzidirt, dass demnach $1'$ $2'$ $3'$ $4'$ unendlich nahe der Gruppe 1 2 3 4 sind.

Durch einen Kegelschnitt K^2 des Büschels (1 2 3 4) und σ^4, σ_1^4 lassen sich 2 Flächen 2ten Grads resp. ψ^2, ψ_1^2 legen; variirt dabei jener Kegelschnitt K^2, so erhält man zwei projectivisch aufeinander bezogene Büschel $(\psi^2) \barwedge (\psi_1^2)$. Das Erzeugniss dieser Büschel besteht offenbar aus Σ, ferner einer Ebene X durch $1'2'3'4'$ — indem ψ^2, ψ_1^2 ausser K^2 noch einen Kegelschnitt K_1^2, der $1'2'3'4$ enthält, gemein haben — endlich aus der den Büscheln gemeinsamen Fläche φ^2. Nun muss X der Σ aus dem Grunde unendlich nahe liegen, weil bei der Annahme $a^2 \equiv K^2$ man statt ψ^2 die Z^2, statt ψ_1^2 die Z_1^2 erhält, zwei Flächen, welche nach dem Obigen den Kegel za^2 längs a^2 berühren, sich also in zwei zusammenfallenden Kegelschnitten a^2, a_1^2 durchdringen, von denen a_1^2 in X fällt. Wir schliessen demnach, dass je zwei der Curven σ^4 sich in den 4 Uniplanarpuncten der F^4 berühren. Auch bemerkt man, dass zwei homologe Flächen ψ^2, ψ_1^2 sich längs K^2 berühren müssen.

8. Die Curven σ^4 gehören zu einer ∞^1 Schaar von Curven s^4, längs welchen F^4 von Flächen F^2 berührt wird.

Man kann, wie gesagt, F^4 projectivisch durch 2 Büschel von F^2 erzeugen, wovon der eine σ^4 zur Basis hat, der andere irgend eine der 4 andern σ_i^4. Wenn daher F_1^2 beliebig durch σ^4 gelegt wird, so schneidet sie aus F^4 noch s^4, so dass auch durch s^4 und σ_i^4 eine F^2 geht. Somit hat man auch in σ^4, s^4 die Basen zweier zur Erzeugung der F^4 dienlichen Büschel. Weil aber in dem einen die Fläche F_1^2 selbst ist, so folgt wie unter 7., dass der F_1^2 im andern eine Fläche homolog sein muss, die F^4 längs s^4 berührt.

Die Raumcurve σ^4 gehört ferner zu einer ∞^3 Schaar von Curven 4ter Ordnung der F^4, welche sämmtlich aus σ durch Kegel 2ten Grades projizirt werden und längs welcher F^4 von einer F_2^4 mit 2 Doppelpuncten berührt wird.

R_0 sei eine Ebene, welche aus Q^2, H^2 die Kegelschnitte p^2, p_0^2 schneidet, r_0, ϱ_0 seien die Spitzen der beiden Kegel, welche a^2, p_0^2 in einander projiziren. Die Flächen P^2, welche den Puncten p von p^2 zugewiesen sind, gehen alle durch r_0, ϱ_0. und werden von einer F_2^4 eingehüllt, die a^2 zur Doppellinie, r_0, ϱ_0 zu Doppelpuncten hat.

Jedem Puncte p von p^2 entspricht P^2, welche durch die Kegelschnitte e^2, e_1^2 von F^4 geht, die den in p sich schneidenden Geraden e, e_1 von Q^2 entsprechen. Aber je zwei Flächen P_1^2, P_2^2 schneiden sich in einem der Geraden $p_1 p_2$ entsprechenden Kegelschnitt k^2, dessen Ebene K die Polarebene des Durchstosspunctes von $p_1 p_2$ und Σ ist in Bezug auf H^2; daher liegen r_0, ϱ_0 in K. Berührt $p_1 p_2$ den p^2 etwa in p_1, so wird k_1^2 die Schnittlinie zweier unendlich nahen in P_1^2 vereinigten Flächen. Der Ort von k_1^2 ist sodann die Enveloppe der P^2; er ist leicht projectivisch zu ermitteln. Zu dem Ende nehme man zwei feste Tangenten von p^2 an I, II und schneide sie in t_1, t_2 durch eine variable Tangente. Wenn die den I, II entsprechenden Kegelschnitte k_1^2, k_2^2 sind, so wird die Fläche T_1^2 dem Büschel (a^2, k_1^2), T_2^2 dem Büschel (a^2, k_2^2) angehören, und T_1^2, T_2^2 durchdringen sich in k^2, welcher der Geraden t_1 t_2 entspricht. Da nun $(T_1^2) \barwedge (T_2^2)$, so beschreibt k^2 eine Fläche F_2^4, wie sie vorher näher definirt wurde. Jede P^2 berührt F_2^4 längs k^2, welche der Tangente von p^2 im Puncte p entspricht.

Diese Tangente liegt in der Ebene ee_1, der das Paar r, ϱ zugewiesen ist. Mithin fällt r, ϱ auf k^2, und da e^2, e_1^2 durch r und ϱ gehen, aber auch auf P^2 liegen, so berührt P^2 die F^4 in r, ϱ. Durchläuft endlich p die p^2, so dreht sich die Ebene ee_1 um einen festen Punct $\mathfrak{z}$, den Pol von R_0 in Bezug auf Q^2, folglich ist der Ort des Paares r, ϱ die Raumcurve 4ter Ordnung, in welcher die durch a^2 gehende $\mathfrak{Z}^2$ die F^4 noch durchdringt.

Um das Verständniss des Vorstehenden möglichst unabhängig von einer früheren Entwickelung zu machen, möge die Bestimmung der Tangentialebenen von F^4 in den gepaarten Puncten r, ϱ gegeben werden. r, ϱ sei erhalten durch die Ebene $R \equiv ee_1$ — welche die Geraden e, e_1 von Q^2 bestimmen. — Die P^2 für den Schnittpunkt p von e, e_1 schneidet aus F^4 die Linien e^2, e_1^2, auf welchen r und ϱ liegt, und berührt F^4 in r, ϱ. Es handelt sich daher um die Tangentialebenen von P^2.

Trifft e die H^2 in p_0, p_0', so sind dies nach 1. die Spitzen zweier zugleich durch a^2, e^2 gehenden Kegel, folglich fällt der Pol von E in Bezug auf P^2 in die Gerade e, etwa nach $\mathfrak{p}$; ebenso liegt der Pol von E_1 — in welcher Ebene e_1^2 ist — auf e_1 in $\mathfrak{p}_1$. Daher sind $r\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$, $\varrho\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ die gesuchten Tangentialebenen. Was die Lage der Puncte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ gegen p betrifft, so ist leicht darzuthun, dass p von $\mathfrak{p}$ durch p, p' harmonisch getrennt wird, und dass demzufolge $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ einerlei ist mit der Polare ven p in Bezug auf die in der Ebene ee_1 aus H^2 geschnittene Linie 2ten Grades. Jene harmonische Trennung bedeutet aber, dass p, $\mathfrak{p}$ zu der Involution $\mathfrak{j}$ gehören, die vom Büschel $(P^2) \equiv (a^2, e^2)$ auf $p\mathfrak{p}$ bestimmt wird. Diese $\mathfrak{j}$ hat zu Doppelpuncten die Kegelspitzen p_0, p_0'; eines ihrer Paare besteht aus den Puncten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, der Ebenen Σ, E; ein zweites liegt auf P^2. Weil wegen der Definition von p, $\mathfrak{p}$ das in P^2 liegende Paar der $\mathfrak{j}$ sowohl p von $\mathfrak{a}$, als $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{e}$ harmonisch trennt, so hat man in p, $\mathfrak{p}$ wiederum ein Paar von $\mathfrak{j}$, wie man sofort sieht, wenn man durch Projection die $\mathfrak{j}$ auf einen Kegelschnitt überträgt.

Durch Anwendung unserer Construction zeigt sich der biplanare Charakter eines Doppelpunctes x von a^2: Das Paar r, ϱ, von welchem x der eine Punct ist, befindet sich auf dem Strahl σx und die Ebene R, von welcher es herrührt, muss die Σ in der zu σx in Bezug auf H^2 conjugirten Geraden schneiden, und Tangentialebene von Q^2 sein. Die Conjugirte zu σx ist die Tangente xt von a^2, und durch xt gehen z w e i Tangentialebenen der Q^2, die als R auftreten. Berührt eine dieser R in p die Q^2 und schneidet sie H^2 in k^2, so wäre die Polare von p in Bezug auf k^2 mit x durch eine Ebene zu verbinden, wodurch offenbar die benutzte R selbst entsteht.

Verlegt man x in einen der Puncte 1, 2, 3, 4, wo die Tangente von a^2 ebenfalls Q^2 berührt, so erhält man nur e i n e R, die Tangentialebene des Kegels $z(a^2)$. (v. 7.).

Wir fanden (6.) eine Regelfläche Σ_1^2 als Ort des Punctes σ', der von Σ durch ein variabeles Paar r, ϱ der F^4 harmonisch getrennt wird. Sie ist gemäss der einleitenden Betrachtung die Polarfigur von Q^2 in Bezug auf H^2 und schneidet H^2 in t^4, auf welcher die Berührungspuncte aller einfachen von σ an F^4 möglichen Tangenten liegen. D i e s e t^4 h a t 8 P u n c t e p m i t Q^2 g e m e i n, d u r c h w e l c h e d i e 8 G e r a d e n $e_1 \dots e_8$ v o n Q^2 g e h e n, d i e z u r B e s t i m m u n g d e r 16 G e r a d e n v o n F^4 f ü h r t e n.

Indess wird es für die Folge von Nutzen sein, die acht e auf eine neue Art zu bestimmen, u n d z w a r, s i e d u r c h e i n e H ü l f s f l ä c h e d i r e k t a u s Q^2 z u s c h n e i d e n: H^2, Q^2 durchdringen sich in einer Raumcurve R^4, deren Tangentenfläche — 8ter Ordnung —

Q^2 in der doppelt zu zählenden R^4 und einem Ort 8ter Ordnung schneidet, welcher, wie leicht zu begreifen, in die e zerfällt.

9. Die F_i^4 mit i Doppelpuncten D_i und ihre Geraden.

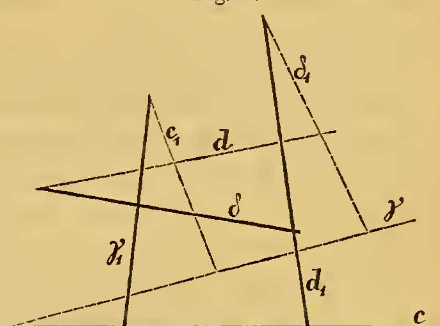
a) Wenn H^2, Q^2 sich in einem Puncte D_1 berühren, so wird*) D_1 Doppelpunct von F_1^4, natürlich auch Doppelpunct der R^4, deren Tangentenfläche jetzt 6ter Ordnung ist. Letztere schneidet Q^2 in 4 Geraden e, die paarweise verschiedenen Schaaren angehören, und der adoptirten Bezeichnungsweise conform e_5, e_7; e_6, e_8 heissen mögen. Sie liefern 4 Geradenpaare der F_1^4: c, γ; d, δ; c_1, γ_1; d_1, δ_1, welche ein Doppelquadrupel bilden.

Zum Beweise beziehe ich mich auf Fig. 1., zu deren Motivirung die 2. Anmerkung dient. Man erkennt als Transversale der 3 windschiefen $cc_1\delta$ die Gerade γ_1, zu der ebenso wie zu jenen δ_1 allein windschief liegt. Folglich ist $cc_1\delta\delta_1$ ein Quadrupel und dieses wird durch $dd_1\gamma\gamma_1$ zum Doppelquadrupel $\left\{\begin{matrix} c\,c_1\,\delta\,\delta_1 \\ d\,d_1\,\gamma\,\gamma_1 \end{matrix}\right\}$ ergänzt.

Ermittelung der andern 4 Paare:

Durch D_1 gehen 2 Geraden e_1, e_2 der Q^2 und berühren hier H^2. Jede derselben vertritt auch die ihr unendlich nahe (benachbarte), beziehlich e_3, e_4. Denn jede Ebene durch e_1 schneidet R^4 in zwei Puncten, Q^2 in zwei durch dieselben gehenden Geraden, die beide sich mit e_2 vereinigen, wenn die um e_1 sich drehende Ebene e_2 aufnimmt. Während nun e_2 das Paar a_1, α_1 liefert, gibt die benachbarte e_4 ein windschiefes b_1, β_1, wobei a_1 unendlich nahe bei b_1, α_1 bei β_1 zu denken ist. Ebenso erhält man durch e_1 und die ihr benachbarte e_3 die Paare a, α; b, β in analoger Disposition.

Fig. 1.



Die beiden Transversalen von a, β sind in b_1, α_1, die von b, α in a_1 β_1 gegeben, und entsprechend liegen in a, β und b, α die Transversalen

---

*) Anmerkung 1. Zur Erläuterung mag an dieser Stelle Folgendes dienen: Zur Construction des Schnittes C^4 von F^4 mit einer beliebig durch σ gelegten Ebene $\mathfrak{E}$ verfahre man also: $\mathfrak{e}$ sei der Pol von $\mathfrak{E}$ in Bezug auf H^2; die durch $\mathfrak{e}$ gehenden Tangentialebenen R der Q^2 liefern die in $\mathfrak{E}$ befindlichen, auf C^4 fallenden Paare r. ϱ. Sei h^2 die Schnittlinie von $\mathfrak{E}$, H^2, welche auf a^2 die Puncte x, $\mathfrak{x}$ habe. Alsdann kann man die fraglichen r, ϱ durch Benützung der Tracen in $\mathfrak{E}$ der durch $\mathfrak{e}$ gedachten R finden. Diese umhüllen einen Kegelschnitt q_1^2 und man erlangt ein Paar r, ϱ, indem aus x, $\mathfrak{x}$ die Puncte projizirt, welche irgend eine Tangente von q_1^2 mit h^2 gemein hat — als Schnittpuncte der Projizirenden. —

Auf einer Geraden durch x, welche h^2 in y schneidet, treten nur 2 Puncte r auf, entsprechend den von y an q_1^2 möglichen Tangenten, wobei die Paarlinge ϱ auf $y\mathfrak{x}$ fallen müssen. Daraus folgt, dass x und $\mathfrak{x}$ Doppelpuncte der C^4 sind.

Wenn H^2, Q^2 sich in D_1 berühren, so dass für jede durch σD_1 gehende $\mathfrak{E}$ der Pol $\mathfrak{e}$ in die gemeinschaftliche Tangentialebene der Flächen H^2, Q^2 fällt, so berühren sich auch q_1^2, h^2 in D_1. Bestimmt man sodann die auf xD_1 — oder $\mathfrak{x}D_1$ — vorkommenden r der C^4, so zeigt sich, dass diese beiden Puncte in D_1 coincidiren, weil die beiden von D_1 — als y angesehen — an q_1^2 möglichen Tangenten zu einer einzigen vereinigt sind. Folglich haben xD_1 und $\mathfrak{x}D_1$ je zwei in D_1 zusammenfallende Puncte mit F^4 gemein, und alle Schnitte dieser Fläche mit den durch σD_1 denkbaren Ebenen $\mathfrak{E}$ bekommen in D_1 einen Doppelpunct.

resp. von b_1, α_1 und a_1, β_1 vor. Aber jede der hier auftretenden vier durch D_1 gehenden Geraden zählt für zwei, weshalb man sie binäre nennen kann, um sie von den zuerst gefundenen 8, den unären zu unterscheiden. Es wird nicht überflüssig sein, anzugeben, welche Transversalen zwei nicht im nämlichen Quadrupel liegende unäre Geraden haben, z. B. c, d. Es sind dies offenbar a_1 und b_1, das heisst zwei benachbarte oder eine binäre. Ebenso haben c_1, d_1; δ, γ; δ_1, γ_1 je zwei benachbarte Transversalen, resp. in den binären (a, b); (α_1, β_1); (α, β). (Vergl. Nr. 14.) *)

b) Berühren sich H^2, Q^2 in D_1, D_2, so werden diese Puncte Doppelpuncte der F_2^4.

Es sind 2 Fälle zu unterscheiden:

Erstens. R^4 besteht aus 2 Linien 2ter Ordnung und in Q^2 liegt keine Tangente von R^4. Durch D_1 aber (ebenso durch D_2) gehen 2 Geraden e_1, e_2 der Q^2, sie liefern 2 Paar durch D_1 gehende binäre Geraden von F_2^4. So treten im Ganzen 8 binäre Geraden auf, welche die 16 umfassen.

Diese F_2^4 ist wie die unter 8. behandelte die Enveloppe von ∞^1 Flächen P^2: Eine Ebene F durch D_1, D_2 gelegt, schneidet F_2^4 in einer C^4 mit 4 Doppelpuncten, d. h. in zwei durch D_1 D_2 Kegelschnitten b^2, e^2, die sich noch auf a^2 treffen. Durch a^2, e^2 lege man eine beliebige Fläche Z_0^2, welche aus F_2^4 die Linie c^2 schneidet. c^2 geht dann durch D_1 D_2 und hat auch mit a^2 zwei Puncte gemein. In a^2, b^2; a^2, c^2 liegen jetzt die Grundcurven zweier Büschel (Y^2), (Z^2) vor. Schneidet eine Y_1^2 ausser a^2, b^2 noch y^2 aus F_2^4, so hat y^2 zwei Punkte mit a^2, und 2 Puncte mit c^2 gemein; mithin wird eine Z_2^2, die noch einen Punct von y^2 aufnimmt, die y^2 ganz enthalten. Somit lässt sich F_2^4 projectivisch durch die Büschel (Y^2), (Z^2) erzeugen. Aber man kann zur projectivischen Erzeugung auch die Büschel (a^2, y^2), (a^2, c^2) wählen, denn die Y_1^2 geht durch b^2, und offenbar liegen a^2, b^2, c^2 auf einer Fläche 2ter Ordnung. Heisst diese Z_1^2, als im Büschel (a^2, c^2) befindlich, so entspricht sie der Y_1^2 in der projectivischen Beziehung. Nun geht aber eine andere Z_2^2 des Büschels (a^2, c^2) durch y^2; und dieser muss eine Y_2^2 entsprechen, die längs y^2 die F_2^4 berührt. Jede Y^2 des Büschels (a^2, b^2) schneidet hiernach aus F_2^4 eine y^2 aus, längs welcher F_2^4 von einer bestimmten Fläche 2ten Grades berührt wird.

---

*) Anmerkung 2. Entnimmt man der in Nr. 4 construirten allgemeinen Gruppe I zwei beliebige Paare a, α; b, β, so erkennt man darin 4 Combinationen von je 2 windschiefen Geraden. Man erhält demnach eben so viele Combinationen von je zwei Transversalen. Es ist klar, dass die 8 Transversalen sämmtlich verschieden sind, und dass keine derselben in der Gruppe I vorkommt. Mit anderen Worten, die Geraden der Gruppe II sind selbst die Transversalen. Wenn daher a_1, α_1; b_1, β_1 zwei Paare von II sind, so hat man in ihnen 4 der gedachten Transversalen. Nun sind c_1, d_1 die 2 windschiefen Transversalen von a, b; γ_1, δ_1 die der Combination α, β. Folglich müssen in der Theilgruppe a_1, α_1; b_1, β_1 noch 2 Combinationen windschiefer Transversalen sein. Setzt man voraus, dass eine dieser Combinationen den windschiefen a, b angehört, so muss die andere zu α, β gehören. Will man daher durch Zeichnung die vorliegenden Paare wiedergeben, so kann man a, α beliebig annehmen, auf diesen die Paare $a_1 \alpha_1 \equiv xy$, $b_1 \beta_1 \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{y}$ beliebig aufsetzen, wobei x, $\mathfrak{x}$ auf a, y, $\mathfrak{y}$ auf α stehen mögen. Alsdann muss b, β so gezeichnet werden, dass seine Geraden zugleich auf x, y und auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ stehen. Wenn dann b die x trifft, so muss b auch $\mathfrak{x}$, nicht aber $\mathfrak{y}$ schneiden, weil im letztern Falle β auf y, $\mathfrak{x}$ stände, und keine der Combinationen aus $x \mathfrak{x} y \mathfrak{y}$ würde 2 Transversalen zweier windschiefen der Paare a, α; b, β liefern können.

Zweitens. R^4 besteht aus der Geraden $D_1 D_2$ und einer durch D_1 u. D_2 gehenden R^3: Die Tangentenfläche der R^3 ist 4ter Ordnung und hat mit Q^2 die doppelt gezählte R^3 und noch zwei Geraden e_2, e_4 gemein.

Diese ergeben 2 Paar unäre Geraden. Durch D_1 geht eine von $D_1 D_2$ verschiedene Gerade e_3 der Q^2, sie liefert zwei binäre Geraden durch D_1, ebenso verhält es sich bei D_2. Wendet man endlich auf $D_1 D_2$, welche H^2 in jedem ihrer Puncte berührt, unsere Construction (1.) an, so ist zu beachten, dass $D_1 D_2$ die Ebene Σ in ζ_0 auf a^2 trifft, dass demnach die beiden an a^2 von ζ_0 zu ziehenden Tangenten zusammenfallen — ihre Berührungspuncte in ζ_0 selbst liegen. — Es fallen mithin die beiden binären Geraden, welche $D_1 D_2$ liefert, mit ihr zusammen, und es liegen die Geraden der F_2^4 vor in 2 Paar binären $\equiv 8$, der quaternären $D_1 D_2 \equiv 4$ und 4 unären Geraden.

c) Berühren sich H^2, Q^2 in 3 Puncten D_1, D_2, D_3 und besteht R^4 aus den Geraden $D_3 D_1, D_3 D_2$, nebst einem Kegelschnitt R^2 durch $D_1 D_2$, so geht durch D_1 u. D_2 noch je eine Gerade e der Q^2, wodurch man 2 Paar binäre Geraden bekommt. Durch D_3 gehen dann noch die quaternären $D_3 D_1$, $D_3 D_1$, und ausserdem hat F_3^4 keine Gerade.

d) Berühren sich H^2, Q^2 in 4 Puncten D, so hat F_4^4 nur die vier quaternären Geraden $D_1 D_2$, $D_1 D_3$, $D_4 D_2$, $D_4 D_3$.

Weil eine quaternäre Gerade ϑ stets den Flächen H^2 und Q^2 gemeinsam ist, so liegt der Pol σ' jeder durch ϑ gehenden Ebene in Bezug auf H^2 auf ϑ, und es ist ϑ ein Bestandtheil von t^4 (8.). Hieraus folgt, dass eine Gerade, die von σ nach irgend einem Puncte von ϑ gezogen wird, hier die F^4 berühren muss, und dass t^4 im Falle *c*) aus 2 Geraden und einem Kegelschnitt, bei *d*) aus 4 Geraden besteht.

e) Die Regelfläche F_0^4 mit Doppelkegelschnitt.

Berühren sich H^2, Q^2 längs d, welche die in Σ liegenden Curven a^2, q^2 von H^2, Q^2 im nämlichen Puncte δ durchdringt, so nehme man ξ beliebig auf q^2 an. Die Gerade e der Q^2, welche durch ξ geht, schneidet d in p_0, die beiden Tangenten, die sich von ξ an a^2 ziehen lassen, berühren a^2 in a, α. Dadurch ergeben sich 2 Geraden $p_0 a$, $p_0 \alpha$ der F_0^4 in der Polarebene $a p_0 \alpha$ von ξ in Bezug auf H^2. In jedem Puncte von d treffen sich daher 2 Geraden, deren Ebene einen Kegel 2ten Grads einhüllt, nämlich die Polarfigur von q^2 in Bezug auf H^2. Legt man ferner durch d irgend eine Ebene F, welche a^2 noch in a schneidet, zieht hier die Tangente an a^2, die 2 Puncte ξ_1, ξ_2 von q^2 enthält, so liefern die zugehörigen e_1, e_2 zwei Paare von Geraden, von welchen je eine Gerade durch a geht, beide aber in F sein werden.

II. F^3 und ihre 27 Geraden.

10. Es werde vorausgesetzt, dass Q^2 die Ebene Σ im Puncte q berührt, dass somit q^2 aus zwei Geraden $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$ der Q^2 besteht. Bedeutet R eine variabele Tangentialebene von Q^2; r, ϱ das ihr zugewiesene Paar auf einem Strahl von σ, σ' den Pol von R in Bezug auf H^2, so ist r von ϱ harmonisch getrennt einmal durch σ, σ', sodann durch die H^2. Hiernach ist auf jeder durch σ gehenden Geraden r, ϱ bestimmt, wenn σ' bekannt ist. Der Ort von σ' ist

aber die Polarfigur Σ_1^2 von Q^2 in Bezug auf H^2, die im vorliegenden Falle durch σ, den Pol von Σ geht.

Nimmt man die Raumcurve t^4, in welcher H^2, Σ_1^2 sich durchsetzen, als Basis eines Flächenbüschels (φ^2) an, so sieht man sogleich, dass die Puncte r, ϱ auf einem Strahl von σ die Doppelpuncte der von (φ^2) auf diesem Strahle bestimmten Involution sind, weil H^2 und Σ_1^2 in diesem Büschel sind. Also ist der Ort von r, ϱ einerlei mit dem Orte für die Berührungspuncte der von σ an die φ^2 möglichen Tangenten, d. h. mit dem Erzeugniss F^3 des Büschels (φ^2) und dem dazu projectivischen Büschel der Polarebenen von σ in Bezug auf die einzelnen φ^2. Die Axe des letztgenannten Büschels wird dann eine Gerade der F^3; sie ist die Schnittlinie von Σ —. Polarebene von σ bezüglich H^2 — und der Tangentialebene von Σ_1^2 im Puncte σ, somit die Polare $\mathfrak{q}$ von q in Bezug auf a^2. F^3 enthält ferner a^2 — ais Schnitt von Σ, H^2 und die beiden Geraden l, λ der Σ_1^2, die sich in σ schneiden, und in der eben erwähnten Tangentialebene dieser Fläche liegen.

Alle auf F^3 denkbaren Geraden ordnen sich naturgemäss in 2 Kategorien: A) solche, welche a^2 treffen, B) solche, welche auf $\mathfrak{q}$ stehen. Jener gibt es 16, die nach Nr. 2 bestimmt werden. Was die in der Abtheilung B) befindlichen Geraden betrifft, so kann in einer durch $\mathfrak{q}$ gelegten Ebene E nur dann eine solche vorkommen, wenn der Kegelschnitt, den E mit der ihr entsprechenden φ^2 gemein hat, zerfällt. Damit dies geschehe, muss entweder Berührung stattfinden zwischen E und φ^2, oder φ^2 muss eine Kegelfläche sein. Soll ersteres sein, so muss der Pol σ von E bezüglich φ^2 auf dieser Fläche liegen, d. h. φ^2 muss die durch σ gehende Σ_1^2 sein, und es ergeben sich die Geraden l, λ; was die zweite Möglichkeit angeht, so existiren im Büschel (φ^2) — oder durch t^4 — vier und nur 4 Kegel, deren Spitzen (nach 7.) σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 sind. Mithin geht durch jeden dieser Puncte ein Geradepaar (resp. l_1, λ_1; l_2, λ_2; etc.) und ausser den 5 Paaren l, λ; l_1, λ_1 etc. gibt es keine Gerade der F^3, welche $\mathfrak{q}$ trifft; F^3 enthält daher im Ganzen 27 Geraden.

11. Arrangement der 27.

Zunächst ist zu bemerken, dass keine Gerade der Abtheilung B 2 der Kegelspitzen σ enthält; da sonst in der durch sie und $\mathfrak{q}$ gehenden Ebene 4 Geraden liegen würden.

Die 16 A denken wir in die 5 Systeme $\mathfrak{S}$ (v. 4.) angeordnet, oder, was auf eins hinausläuft, in zwei Doppelquadrupel $\begin{Bmatrix} a\ b\ c\ d \\ a_1 b_1 c_1 d_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta \\ \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \end{Bmatrix}$

Versteht man unter a, α irgend ein Paar, so liegt in seiner Ebene $\mathfrak{A}$ noch eine Gerade von F^3, die weder $\mathfrak{q}$ ist, noch unter der A; mithin eine der B sein muss, z. B. l_1. Die Ebenen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, der drei Paare b, β; c, γ, d, δ die mit a, α die Gruppe I constituiren, gehen ebenso wie $\mathfrak{A}$ durch σ_1. Da aber die Gerade, in welcher $\mathfrak{A}$ von einer der drei anderen Ebenen geschnitten wird — als Transversale von 4 Geraden — auf F^3 liegt, so muss sie l_1 sein, d. h. die Geradenpaare einer Gruppe in A werden von **einer** Geraden der Abtheilung B geschnitten. In dem System $\mathfrak{S}_1$, welches die Gruppe I enthält, befindet sich die Gruppe II: $a_1\alpha_1$; $b_1\beta_1$ etc. die 4 zugehörigen Ebenen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ etc. müssen sich entweder in l_1 oder in λ_1 durchschneiden. Wäre l_1 die Schnittlinie, so könnte das Paar a_1, α_1 nicht wie es sein muss auf jedem Paar der Gruppe I stehen; mithin ist λ_1 die Schnittlinie. —

Jede der 10 Gruppen hat demnach eine der Geraden B zur Transversale, und es leuchtet ein, dass man auf diese Weise alle 10 Geraden B erhält. Jede l wird somit getroffen von $\mathfrak{q}$, λ und 4 Geradenpaaren aus A. Sie kann aber von keiner ferneren Geraden geschnitten werden. Denn wäre m eine solche, so gehörte sie nothwendig in die Abtheilung A, und in der Ebene lm wäre noch eine zweite μ der A. Durch m, μ wäre sodann eine der 10 Gruppen bestimmt; diese wurden aber alle berücksichtigt.

Fassen wir endlich eine Gerade a von A auf: Sie ist mit 5 Geraden derselben Abtheilung gepaart, die zu je 2 windschief sind; also wird a noch von 5 verschiedenen zu je zwei windschiefen von B geschnitten. Wenn etwa a von l geschnitten wird, so kann sie nicht auch von λ geschnitten werden, da sonst a, l, λ, $\mathfrak{q}$ in einer Ebene lägen, folglich wird a von 5 Geraden B getroffen, von den übrigen nicht. Damit ist dargethan, dass jede der 27 von fünf und nur fünf Paaren geschnitten wird.

Unter $\mathfrak{q}$ werde eine willkührliche der 27 verstanden; die übrigen 26 sind in 2 Abtheilungen A', B' zu denken, von welchen B' die 5 auf $\mathfrak{q}$ stehenden Paare $\mathfrak{p}_1$., $\mathfrak{p}_2$ . . $\mathfrak{p}_5$ umfasst. Es entsteht die Frage, ob den 16 Geraden in A' auch die Eigenschaften zuzusprechen sind, welche den eben betrachteten A zukommen, und es wird diese Frage bejaht werden müssen, wenn nachgewiesen ist, dass eine Jede der 16 von fünf windschiefen in A' geschnitten wird; denn auf dieser Eigenschaft allein beruhte die Untersuchung I.

Den erforderlichen Nachweis liefern wir dadurch, dass wir die Geraden A' mit Hülfe der als gegeben angesehenen B' also construiren:

Sind $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_4$ irgend vier Paare aus B', m, μ das noch fehlende Paar, so entnehme man jenen vier zu je zwei windschiefe Gerade. Da dieselben die Transversale $\mathfrak{q}$ haben, so liefern sie noch eine,*) und diese wird auf F^3 liegen, sowie zu den A' gehören.

Wendet man dies Verfahren so oft an, als es die Paare $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_4$ gestatten, nämlich $2^4 = 16$mal, so erhält man sämmtliche A', weil nicht die nämliche Gerade zweimal auftreten kann, da sie bei dieser Unterstellung wie leicht zu sehen, in der Ebene irgend eines der 4 Paare enthalten wäre, was nicht möglich ist. Nun wird die Gerade m ausser von $\mathfrak{q}$, μ noch von 8 Geraden der A' getroffen, μ von den 8 andern.

Daraus folgt, dass jede der construirten Geraden fünf windschiefen der B' begegnet, und da sie $\mathfrak{q}$ nicht trifft, ebenso keine der fünf anderen aus B', im Ganzen doch von 10 Geraden getroffen wird, so müssen unter diesen 10 fünf windschiefe der Abtheilung A' sein. Erwägt man, dass $\mathfrak{q}$ von Keiner der A' getroffen wird, so kann man sagen:

Je zwei windschiefe der 27 haben fünf Transversalen unter ihnen.

Für die 16 Geraden A' gelten sonach ohne Weiteres die in Nro 3 u. 4 entwickelten Beziehungen. Umfasst man alle 27, so existiren, weil jede mit 10 andern gepaart ist

$\frac{27.10}{2} = 135$ verschiedene Paare.

Ist a, α ein solches, so liegt in seiner Ebene $\mathfrak{A}$ noch die Gerade l. Es gibt nun noch 8 Gerade, welche a treffen, α nicht, 8 andere, welche α, nicht aber a treffen; die übrigen

*) Selbstverständlich ist, dass 4 windschiefe Gerade der F^3 nicht hyperboloidisch liegen können.

$27 - 16 - 3 = 8$ Geraden x sind daher windschief sowohl zu a als zu α. Da auf l ausser dem Paar a, α noch 4 Paare stehen, deren Geraden weder a, noch α treffen, so sind diese die acht x; d. h.:

Jedes Paar a, α bestimmt eine einzige Gruppe von 5 Paaren, unter welchen a, α vorkommt. Die Ebenen dieser Paare schneiden sich in einer bestimmten der 27 Geraden — in l — Die 135 Paare vertheilen sich somit in $\frac{135}{5} = 27$ verschiedene Gruppen, welche einerlei mit denjenigen sind, die auf je einer der 27 stehen.

12. a, b, c seien drei windschiefe der 27; einer derselben etwa c weisen wir die Rolle der $\mathfrak{q}$ zu, dann fallen a, b in die Abtheilung A'. Dieselben haben, wie eben gesehen, 5 Transversalen, von welchen (nach 3, a) zwei in A' sich befinden, folglich sind die 3 andern in B'. d. h. Drei windschiefe der 27 haben drei Transversalen unter ihnen.

Wie viele Geraden gibt es, die keine der 3 angenommenen schneiden.

Ausser den 3 Transversalen hat jede der Combinationen ab, ac, bc noch 2, ferner wird a auschliesslich noch von $10-3-4 = 3$ Geraden geschnitten, und gleiches gilt für b, c. Demnach bleiben $27-3.3-3.2-3-3 = 6$, von welchen jede zu a, b und c windschief ist.

Vier windschiefe a, b, c, d besitzen 2 Transversalen t_1, t_2 also können 5 windschiefe a, b, c, d, e höchstens 2 Transversalen haben. Wenn wir der e die Rolle von $\mathfrak{q}$ übertragen, so dass a, b, c, d unter den A' sind, so werden diese 4 entweder ein Quadrupel $\mathfrak{Q}$ bilden oder nicht.

a) Wenn ersteres stattfindet, so liegt von den beiden Transversalen t_1, t_2 (nach 3 d) keine in der Abtheilung A', also treffen beide e. Alsdann gibt es in A' keine zu $abcd$ windschiefe, weil aber die in B' enthaltenen auf e stehen, so existirt unter den 27 überhaupt keine, die windschief zu $abcde$ wäre.

Wird umgekehrt angenommen, dass die 5 windschiefen Geraden 2 Transversalen haben, so können $abcd$ keine Transversale unter den A' besitzen, folglich bilden sie unter diesen ein Quadrupel, und es muss jede der 22 Geraden wenigstens einer der fünf begegnen.

b) $abcd$ ist kein Quadrupel, und es werde abc durch $\mathfrak{d}$ zu einem Quadrupel $abc\mathfrak{d}$. Von den Transversalen t_1, t_2 der $abcd$ gehört alsdann eine etwa t_1 unter die A', während t_2 auf e steht. Hier haben somit $abcde$ die einzige Transversale t_2. Ferner wird t_1 von a, b, c, d und noch einer Geraden f aus A' getroffen, und es sind d, f, $\mathfrak{d}$ die einzigen gegen a, b und c windschiefen der A' (v. 3. d, wo statt d, f, $\mathfrak{d}$ beziehlich δ, δ_1, d steht).

Mithin sind dies auch die einzigen zu $abce$ windschiefen; $\mathfrak{d}$ aber schneidet d, dagegen schneiden d, f einander nicht. Das heisst: Es existirt nur eine einzige Gerade f, welche keiner der $abcde$ begegnet.

Es ist damit bewiesen, dass mehr als 6 windschiefe unter den 27 überhaupt nicht denkbar sind, und dass, wenn $abcdef$ sechs zu je 2 windschiefe Gerade sind, d. i. eine Geradensechs bilden, je 5 derselben eine und nur eine Transversale besitzen.

Fünf windschiefe Gerade haben, wie aus dem Vorstehenden erhellt, wenigstens eine Transversale. Gehören 5 solche Gerade der Abtheilung A' an, so haben sie nur eine Transversale: Nämlich — nach 3. d — haben sie eine einzige Transversale unter den A', wäre eine zweite m möglich, so müsste dieselbe zu den 10 auf e stehenden Geraden B' gehören. Auf m stehen ausser e und der μ in der Ebene em nur noch 4 Paare von Geraden aus A'; also trifft m nur 4 windschiefe Gerade dieser Abtheilung.

Will man sich deshalb eine Geradensechs verschaffen, so braucht man nur zu e irgend 5 windschiefe der Abtheilung A' zu fügen. Es ist zweckmässig, die Geraden einer Sechs mit a_1, a_2 . . . a_6 zu bezeichnen, unter (a) soll ihre Gesammtheit ausgedrückt werden. Je 5 a haben eine einzige Transversale b, nämlich b_i, wo i diejenige der Zahlen 1, . . . 6 ist, die bei den fünf angenommenen a nicht als Index verwendet wurde. Je zwei b sind hiernach die beiden Transversalen einer bestimmten Combination von vier a, folglich windschief, und die b liefern eine zweite Sechs (b).

Die 12 Geraden a, b heissen nach Schläffli eine Doppelsechs, für welche das Zeichen (ab) stehen mag. Aus der Construction von (ab) geht hervor, dass a_i Transversale über die fünf b ist, denen der Index i fehlt, dass also (ab) durch ein und dasselbe Verfahren erlangt wird, man mag von den a oder den b ausgehen.

Wie schon bemerkt, hat jede Combination von vier a ihre beiden Transversalen in (b) und vice versa. Ebenso hat jede Combination von drei a ihre 3 Transversalen in (b); dagegen hat eine beliebige Combination von zwei a fünf Transversalen (Nr. 11), wovon in (b) nur 4 vorliegen.

Also entspricht jedem Zweier a_i, a_k der a eine bestimmte, nicht in (ab) befindliche Gerade $a_{i,\,k}$; und es sind die 15 auf diese Weise gefundenen $a_{i,\,k}$ von einander verschieden, weil sonst eine derselben mindestens drei a träfe, also in (b) wäre, was ausgeschlossen wurde. Durch $a_{i,\,k}$ sind demgemäss sämmtliche 15, ausserhalb (ab) liegende Geraden der F^3 repräsentirt; sie sind aber offenbar auch durch das Zeichen $b_{i,\,k}$ darstellbar, wenn man darunter die nicht in (a) vorkommende Transversale von b_i, b_k begreift.

Auf eine positive Bestimmung von $a_{i,\,k}$ kommt man sogleich, wenn man bedenkt, dass die Paare a_i, b_k; a_k, b_i von der Schnittlinie ihrer Ebenen getroffen werden, dass diese somit eine der 27 ist, auch weder unter (a) noch (b) vorkommt, weil (a) nur windschiefe zu a_i, (b) nur windschiefe zu b_i enthält. Man wird zugleich gewahr, dass $a_{i,\,k}$, $b_{i,\,k}$ die nämliche Gerade bezeichnen, für welche man kurz $\overline{ik}$ setzen kann. Behält i seinen Werth, während k die von i verschiedenen annimmt, so erhält man in den $\overline{ik}$ die 5 (windschiefen) Transversalen über a_i, b_i

Zu einer $\overline{ik}$ gibt es überhaupt — wie zu jeder Geraden — 16 windschiefe. Als Transversale von a_i, a_k kann ik keine der andern a treffen, da sie dann in (b) wäre, ebenso. wird $\overline{ik}$ von keiner der vier b geschnitten, die weder den Index i, noch k haben. Sodann ist $\overline{ik}$ windschief zu jeder andern $\overline{ik}$, die mit ihr einen gemeinsamen Index hat, d. h. zu 8 neuen Geraden. Hiemit sind die 16 erschöpft, welche $\overline{ik}$ nicht treffen.

Folglich muss jede $\overline{i_1k_1}$, für welche sowohl i_1 als k_1 von i und k verschieden sind, die $\overline{ik}$ schneiden.

Zu $\overline{12}$ sind unter dem 15 $\overline{ik}$ windschief:

$$\begin{Bmatrix} \overline{13}, & \overline{14}, & \overline{15}, & \overline{16} \\ \overline{23}, & \overline{24}, & \overline{25}, & \overline{26} \end{Bmatrix}$$

und diese 8 Geraden sind ein Doppelquadrupel $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$. Will man aus $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ drei zu je zwei windschiefe Gerade haben, so muss man sie entweder dem $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q}_1$ entnehmen, und 4 windschiefe sind allein die Geraden von $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q}_1$. Also kann man aus den 15 $\overline{ik}$ Gruppen von höchstens 5 windschiefen bilden, und zwar gehört eine gegebene $\overline{ik}$ zu zwei und nur zwei solchen Gruppen. Jede dieser Gruppen besitzt 2 Transversalen, respective a_i, b_i; a_k, b_k, mithin gehört keine derselben einer Sechs an.

13. Construction der Doppelsechs (ab).

Zu einer Geraden a_i ist unter den b eine einzige windschief, nämlich b_i, ihre homologe. Sollen mithin in (ab) mehr als zwei gegenseitig windschiefe möglich sein, so müssen sie sämmtlich entweder zu (a), oder (b) gehören.

Erstens: (ab) ist bestimmt durch zwei willkührliche homologe Gerade a_1, b_1.

Von den 10 auf b_1 stehenden Geraden scheide man die 5 Transversalen über a_1 und b_1 aus, dann bleiben 5 windschiefe Gerade $a_2 \ldots a_6$ übrig. Soll nun die Doppelsechs möglich sein, so müssen darin 5 Gerade sein, die alle von b_1 geschnitten werden, und gegen a_1 windschief sind; offenbar sind $a_2 \ldots a_6$ die einzig möglichen, und durch die 6 windschiefen $a_1 \ldots a_6$ ist jetzt auch (b) bestimmt.

Zweitens. Durch 4 windschiefe Gerade ist (ab) bestimmt.

Die vier Geraden müssen entweder zu (a) oder (b) gehören, sie seien $a_1 a_2 a_3 a_4$. Von den 3 Transversalen über $a_2 a_3 a_4$ treffen zwei a_1, die dritte muss zu a_1 windschief sein, sie heisse b_1. Die etwa mögliche Doppelsechs muss daher a_1, b_1 zu homologen haben und ist nach dem Vorigen bestimmt. Nämlich es existiren 5 und nur 5 Gerade, die alle von b_1 geschnitten werden, dagegen windschief zu a_1 sind; offenbar sind $a_2 a_3 a_4$ drei derselben.

Drittens. Werden von (ab) nur drei Gerade $a_1 a_2 a_3$ gegeben, so müssen deren Transversalen ebenfalls in (ab) sein, und zwar als b_4 b_5 b_6. a_2 a_3 haben, abgesehen von den drei b, noch zwei Transversalen, von welchen jetzt keine die a_1 schneidet. Eine dieser z. B. b_1 muss homolog zu a_1 sein. Nimmt man dies an, so ist (ab) bestimmt, genügt auch der Bedingung, a_2, a_3 zu enthalten.

Viertens. Soll (ab) zwei windschiefe enthalten, nicht als homologe, was erledigt wurde, so seien es etwa b_5 b_6. Dann sind von ihren 5 Transversalen irgend 4 als $a_1 a_2 a_3 a_4$ in der gesuchten (ab), und die Doppelsechs ist auch bestimmt. Denn $a_2 a_3 a_4$ haben ausser den auf a_1 stehenden b_5, b_6 noch eine Transversale, windschief zu a_1; also müsste diese die zu a_1 homologe b_1 werden.

Setzt man dies fest, bestimmt danach (ab), so kommen in (ab) vor b_5, b_6 als Transversalen von a_1, die windschief zu b_1 sind; demzufolge sind auch $a_2 a_3 a_4$ als Transversalen über $b_1 b_5 b_6$ in (ab).

Fünftens. Ist nur eine Gerade a_1 der zu suchenden (ab) gegeben, so kann und muss man als homologe b_1 irgend eine der 16 zu a_1 windschiefen setzen.

14. F_i^3 mit i Doppelpuncten.

Der Fall, dass zwei windschiefe Gerade der F^3, allgemeiner 2 solche der F^4 benachbart — unendlich nahe — liegen, verdient eine besondere Berücksichtigung. Wir legen die Construction mittels zweier Geraden e_1, e_3 — derselben Schaar von Q^2 angehörend — zu Grunde: e_1, e_3 berühren H^2 beziehlich in p_1, p_3, welche Puncte den Curven R^4, t^4 gemeinsam sind, die beide auf H^2 liegen — letztere auch auf F^4. ξ_1, ξ_3 bedeuten wie früher die Durchstosspuncte von e_1, e_3 in Σ.

Zieht man von ξ_1 an a^2 die Tangenten $\xi_1 a$, $\xi_1\alpha$ — a, α sind ihre Berührungspuncte, so liefert e_1 das Geradenpaar $p_1 a$, $p_1\alpha$ der F^4, wofür kürzer a, α geschrieben werde. In gleicher Weise gelangt man mittels e_3 zum Paare b, β. Die Ebenen $p_1 a\alpha$, $p_3 b\beta$ sind die Polarebenen von ξ_1, ξ_3 bezüglich H^2 (1. u. 2.).

Wenn nun e_3 sich in infinitum der e_1 nähert, so gelangt b in eine Nachbarlage von a und gleichzeitig β in eine solche von α. Auch $p_1 p_3$ muss unendlich klein werden; denn sobald e_3 die Lage von e_1 annimmt, decken sich die Polarebenen von ξ_1, ξ_3, und wäre $p_1\, p_3$ endlich, so fielen in dieselbe zwei verschiedene Geradenpaare, und nebstdem der Kegelschnitt, welcher der durch ξ_1 gehenden Geraden der andern Schaar von Q^2 entspricht, was nicht möglich. Also sind a, b ebenso wie α, β benachbarte windschiefe Geraden der F^4. Ferner berühren sich in p_1 die Raumcurven R^4, t^4; aber e_1 berührt (Nr. 9) die R^4 in p_1, mithin t^4 im selben Puncte, und auch F^4, welche t^4 enthält. Weil die Geraden a, α der F^4 durch p_1 gehen, die Fläche in p_1 eine Tangente — e_1 — besitzt, die ausserhalb der Ebene $a\alpha$ liegt, so muss p_1 ein Doppelpunct von F^4, also auch von t^4 sein. Nennen wir e_2 die noch durch p_1 gehende Gerade der Q^2, so hat auch diese 2 Puncte von t^4, in p_1 zusammenfallend, d. i. sie berührt H^2 in p_1. Jetzt haben H^2, Q^2 in p_1 die nämliche Tangentialebene, und es liefert $e_2 \equiv e_4$ (nach 9. a) zwei windschiefe Paare a_1, α_1; b_1, β_1 von F^4, wobei a_1, b_1; α_1, β_1 benachbart sind:

Existirt auf F^4 eine Gerade a, zu welcher eine andere b von F^4 benachbart und windschief ist, so besitzt F^4 einen Doppelpunct D_1 auf a, welche selbst zu vier in D_1 zusammenstossenden binären Geraden der F^4 gehört.

a) F_1^3 mit einem Doppelpunct D_1.

Wir legen die in Nro 10 auseindergesetzte Erzeugung der F^3 mittels des Büschels (φ^2) zu Grunde, und behalten die schon gebrauchten Benennungen, wonach F^3 in der Ebene Σ den Kegelschnitt a^2 und die Gerade $\mathfrak{q}$, Q^2 in Σ die Geraden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ hat. $\sigma_1 \ldots \sigma_4$ sind die Spitzen der vier durch die Basis t^4 von (φ^2) gehenden Kegel 2ten Grads. Sie sind (7.) conjugirt in Bezug auf H^2, Σ_1^2 also auch in Bezug aut H^2, Q^2, da Q^2 die Polarfigur von Σ_1^2 bezüglich H^2 ist. Die von $\mathfrak{q}$ verschiedenen 26 Geraden vertheilen sich in 2 Kategorien A, B; erstere umfasst die auf a^2 stehenden 16, letztere die 5 Paare l, λ, die auf $\mathfrak{q}$ stehen, und von denen jedes in einem der σ zusammenstösst.

Wenn H^2, Q^2 sich in D_1 berühren, und demgemäss (Anm. 1) D_1 Doppelpunct von F_1^3 wird, so fallen in D_1 zwei der Kegelspitzen σ, etwa σ_3, σ_4, und σ_1, σ_2 finden sich in der gemeinsamen Tangentialebene von H^2, Q^2 für den Punct D_1. — Die windschiefen Geradenpaare l_3, λ_3 und l_4, λ_4 vereinigen sich jetzt, und man kann l_4 zu l_3, λ_4 zu λ_3 benachbart auffassen. Zu den 4 binären Geraden der Abtheilung A, die ebenso wie unter 9. bezeichnet werden sollen, treten also noch zwei hinzu: l_3, λ_3, oder auch l_4, λ_4.

Die unären Geraden bestehen aus dem Doppelquadrupel $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1 \equiv \begin{Bmatrix} cc_1 & \delta\delta_1 \\ dd_1 & \gamma\gamma_1 \end{Bmatrix}$ aus der Kategorie A, den 3 Paaren l, λ (durch σ), $l_1\lambda_1$ (durch σ_1), ferner l_2 λ_2 (durch σ_2) aus B, endlich aus q.

Betrachten wir eine binäre Gerade a aus A; a ist mit drei andern b_1, α, α_1 gepaart, und es müssen die drei Ebenen ab_1, $a\alpha$, $a\alpha_1$ je eine Gerade aus B enthalten (Nro 11). Nun kann aber eine solche Ebene keine der binären l_3 λ_3 enthalten; weil die 6 in D_1 zusammentreffenden Geraden Kanten des Kegels sind, auf welchem die Doppelpunctstangenten der durch D_1 gelegten ebenen Schnitte von F^3 liegen (v. Anmerkung 1.).

Die Ebene $a\alpha$ geht als Polarebene von ξ_1 durch σ; muss daher entweder l oder λ aufnehmen — z. B. l. l_1, l_2 seien die in ab_1, $a\alpha_1$ befindlichen Geraden. Zu jedem der drei gedachten Paare existirt ein benachbartes windschiefes Paar: So gehört zu a, α das Paar b, β, und es muss (Nro 11) die Ebene $b\beta$ ebenfalls durch l gehen. Gleiches gilt für l_1, l_2:

Die 6 Ebenen, welche je zwei der binären Geraden verbinden, gehen durch je eine l oder λ der sechs unären Geraden in B; und durch eine bestimmte l geht noch eine unendlich nahe Ebene, in der 2 binäre Gerade aus A sind.

Die auf einer l stehenden Paare sind sonach: q, λ; 2 benachbarte Paare binärer Geraden, und die beiden noch fehlenden Paare müssen in dem Doppelquadrupe $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ vorkommen.

Man sieht hieraus, dass eine beliebige der 6 unären l, λ nur zwei windschiefe des Quadrupels und zwei andere von $\mathfrak{Q}_1$ trifft.

Aber $\mathfrak{Q}$ hat 2 Transversalen, welche beide in B sein müssen; folglich zu den binären gehören; es seien diese l_3, l_4. $\mathfrak{Q}_1$ hat ebenfalls zwei Transversalen, welche nur λ_3, λ_4 sein können. Auf diese Weise erlangen wir die Doppelsechs: $\begin{Bmatrix} cc_1 & \delta\delta_1 & \lambda_4\lambda_3 \\ dd_1 & \gamma\gamma_1 & l_3\, l_4 \end{Bmatrix}$

Hiernach begegnet l_3 der λ_3 und 4 unären Geraden c, c_1 δ, δ_1, also noch vier andere Geraden, die keine andern sein können, als die 4 binären in A; dasselbe gilt für λ_4. Folglich trifft auch die binäre a sowohl l_3 als λ_4, sie begegnet 5 binären Geraden und den mit diesen gepaarten unären.

Wie wir eben sahen, verhält sich jede der unären l, λ ebenso wie die q, nämlich sie wird von 3 Paaren unärer und 2 Paaren binärer Geraden geschnitten. Man kann dasselbe leicht für eine unäre Gerade in A nachweisen, z. B. für c:

c ist gepaart mit den unären d_1, γ, γ_1 (siehe die Doppelsechs), und die Ebenen cd_1, $c\gamma$, $c\gamma_1$ enthalten drei verschiedene l, unter welchen weder l_3 noch l_4, noch λ_3 noch λ_4 sein kann. Auf c stehen somit 3 Paar unäre Geraden. Ueberdies wird c noch geschnitten von a_1, b_1 aus A, von l_3, l_4 aus B; folglich müssen diese Geraden zu 2 Paaren sich combiniren lassen. a_1, b_1 sind aber (nach 9.) benachbart und windschief, l_3, l_4 ebenfalls; daher stehen auf c zwei benachbarte Paare binärer Geraden a_1, l_3; b_1, l_4.

Der binäre Charakter von l_3, λ_3 ist eine Consequenz der Umkehr des im Eingang dieser Nummer ausgesprochenen Satzes.

Befindet sich auf einer Geraden x der F^4 — oder F^3 — ein Doppelpunct D, ausserhalb der Doppellinie a^2, so enthält F^4 eine der x benachbarte, gegen sie windschiefe Gerade.

Nämlich die Ebenen F des Büschels durch x schneiden aus F^4 Curven 3ter Ordnung C_3, welche sämmtlich D und den 2ten Doppelpunct auf x enthalten, überdies x in einem variablen Puncte f schneiden.

Dabei entsprechen die Puncte f projectivisch den Ebenen F. Wählt man unter jenen C^3 drei beliebige, so bestimmen ihre Tangenten in den f ein Hyperboloid x^2, das sich F^4 längs x anschmiegt, mit andern Worten dessen der x benachbarte Gerade in jedem ihrer Puncte von F^4 einen mindestens von der 2ten Ordnung unendlich kleinen Abstand hat, oder ganz in F^4 liegt.

b) F^3_2 mit 2 Doppelpuncten D_1, D_2.

Berühren sich H^2, Q^2 in D_1, D_2, so werden diese zu Doppelpuncten der F^3_2.

Zwei Fälle können eintreten:

Erstens. R^4 besteht aus 2 durch D_1, D_2 gehenden Kegelschnitten. Nach 9. *b)* ist die erhaltene F^3_2 stets Enveloppe von ∞^1 Flächen 2ter Ordnung y^2. Vier binäre Geraden gehen durch D_1, vier andere durch D_2.

Zum Unterschied von 9. *b)*, wo D_1, D_2 nicht in F^4_2 liegt, fällt diese Gerade hier auf F^3_2, weil sie 4 Puncte der Fläche enthält. Sie muss auch, da sie H^2 in D_1, D_2 durchstösst, auf q stehen. Hievon abgesehen ergibt sich dies also:

t sei die Schnittlinie der Tangentialebenen, die H^2 und Q^2 in D_1, D_2 haben; auf t liegen, nebenbei bemerkt, die Spitzen σ_1, σ_2 zweier Kegel, welche die R^4 enthalten. t durchstosse die Ebene Σ in τ, und τ' sei von τ durch D_1, D_2 harmonisch getrennt. Alsdann ist die Ebene $t\tau'$ Polare von τ bezüglich H^2, Q^2, und sie muss durch σ und durch den Punct q gehen, in welchen Q^2 die Σ berührt. Deshalb muss die Polarebene von q in Bezug auf H^2 — welche bekanntlich durch q geht — auch τ enthalten, d. h. τ befindet sich in q.

In dem Büschel (φ^2) mit der Grundcurve t^4 sind die Kegel σ_1, σ_2, und an die Stelle der anderen Kegel treten zwei Ebenen durch D_1, D_2. Nämlich t^4 ist der Ort für die auf H^2 befindlichen Pole von Tangentialebenen der Q^2 in Bezug auf H^2. Mithin besteht t^4 aus zwei durch D_1, D_2 gehenden Kegelschnitten in den Ebenen Σ_1, Σ_2.

Das Ebenenpaar $\Sigma_1\,\Sigma_2$ ist somit eine φ^2, welche aus F^3 die doppeltgezählte Gerade $D_1\,D_2$ schneidet. Die diesem Paare in der zu Grunde liegenden projectivischen Beziehung zugewiesene Ebene durch q ist also die q$D_1 D_2$, und es schneidet die letztere aus F^3 zwei in $D_1\,D_2$ vereinigte binäre Geraden — eine quaternäre $l_3 \equiv l_4 \equiv \lambda_3 \equiv \lambda_4$.

Die Kegel σ_1, σ_2 liefern zwei unäre Paare l_1, λ_1; l_2, λ_2, beide auf q stehend. Endlich besteht noch das unäre Paar l, λ durch σ.

Auf l stehen, wie oben die binären a, α, wie die benachbarten b, β.

Bezeichnen wir die in D_2 zusammenstossenden binären durch c, γ; d, δ; c_1, γ_1; d_1, δ_1, wobei benachbart sind:

$$cd,\ \gamma\delta,\ c_1 d_1,\ \gamma_1\delta_1;$$

so wird dieselbe l von zwei benachbarten Paaren dieser Gruppe getroffen, und das 5te Paar ist $\mathfrak{q}$, λ. Dasselbe Verhalten zeigen die 5 anderen unären Geraden l, λ; nur $\mathfrak{q}$ zeichnet sich dadurch aus, dass sie die quaternäre $D_1 D_2$ trifft.

Bei den binären tritt keinerlei Unterschied in ihrem Verhalten zu Tage. Z. B. a ist gepaart mit α, α_1, b_1, die gleichwie a zu D_1 gehören. Dann enthalten die Ebenen $a\alpha$, $a\alpha_1$, ab_1 drei windschiefe l, wovon keine l_3 sein kann, sie seien wieder l, l_1, l_2. Legt man demnach durch al_3 eine Ebene, so muss die in dieser sich ergebende dritte Gerade nothwendigerweise eine der binären von D_2 sein. Oder a wird ausser von α, α_1, b_1 noch stets von zwei windschiefen der Abtheilung A getroffen, die somit unter den in D_2 zusammenstossenden binären sein müssen. Diese müssen benachbart sein, weil, wenn sie einen endlichen Winkel bildeten, a und l_3 in ihrer Ebene liegen würden. Sie sind nach der festgehaltenen Bezeichnungsweise in c_1, d_1 gegeben. Die Ebenen ac_1, ad_1 schneiden aus F^3 je eine Gerade, die nicht eine der unären sein kann, weil a nur l, l_1, l_2 trifft, und die Ebenen al, al_1, al_2 von ac_1, ad_1 verschieden sind. Folglich schneidet ac_1 aus F^3 die l_3, ad_1 die benachbarte l_4; also:

Auf a stehen 3 Paare, aus je einer binären und einer unären Geraden gebildet, ferner zwei benachbarte Paare, bestehend aus der quaternären $l_3 \equiv l_4$ und 2 benachbarten c_1, d_1.

Hinsichtlich der quaternären l_3 ist zu bemerken: Jede binäre von D_1 liegt mit einer von D_2 in einer durch l_3 gehenden Ebene, so dass vier Paare binärer Geraden auf l_3 stehen. Das 5te Paar ist in der Ebene $\mathfrak{q}l_3$ und besteht aus $\mathfrak{q}$ und der mit l_3 vereinigten λ_3. Die vier auf l_3 stehenden Paare heissen:

$$ac_1,\ a_1c,\ \beta\delta,\ \beta_1\delta_1 \quad \text{(cf. 11.)}.$$

Zweitens. R^4 besteht aus der Geraden $D_1 D_2$ oder l_3 und einer durch D_1, D_2 gehenden Raumcurve 3ter Ordnung R^3.

Nicht wie im vorhergehenden Falle wird $\mathfrak{q}$ von l_3 getroffen. Denn l_3 ist den Flächen H^2, Q^2 gemeinsam, weshalb ihr Durchstosspunct ζ_0 in Σ einer der Schnittpuncte von a^2 mit dem in die Geraden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ zerfallenden q^2 ist; ζ_0 liege auf $\mathfrak{e}_1$. Durch D_1 geht ausser l_3, mit welcher e_2, e_4 vereint sind, die Gerade e_1 von Q^2, deren benachbarte e_3, und deren Durchstosspunct $\zeta_1 = \zeta_3$ auf $\mathfrak{e}$ liegt. Analog hat man in D^2 die e_5 mit dem Durchstosspunct ζ_5 auf $\mathfrak{e}$, und ihre benachbarte e_7.

e_1 und e_3 liefern die unendlich nahen windschiefen Paare a, α; b, β; e_5, e_7 ergeben c, γ; d, δ, so dass wie oben

ab, cd, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ unendlich nahe liegen, und sämmtliche 4 Paare windschief gegeneinander sind.

Die Polarebenen der Puncte von $\mathfrak{e}$ bezüglich H^2 werden sich in einer durch σ gehenden Geraden der Fläche Σ_1^2 — Polarfigur von Q^2 — schneiden, das heisst in einer der Geraden l, λ von F_2^3, etwa in l. Durch diese l gehen somit die Ebenen der 4 gedachten windschiefen Paare.

Die Tangentenfläche der R^3 schneidet aus Q^2 zwei Gerade e_6, e_8 (in Nr. 9 *b*. mit e_2, e_4 bezeichnet), welche die Sekante l_3 oder e_2 von R^3 nicht schneiden, deshalb auf e_1 in ζ_6, ζ_8 stehen werden. Sie liefern 2 windschiefe Paare unärer Art: m, μ; n, ν, deren Ebenen die Gerade λ enthalten müssen. Die Polarebene von ζ_0 in Bezug auf H^2 ist die Tangentialebene dieser Fläche in ζ_0, enthält folglich l_3 und geht ebenfalls durch λ.

Von den 4 Kegelspitzen $\sigma_1 \ldots \sigma_4$ sind hier zwei in D_1, zwei in D_2 zu denken; im Büschel (φ^2) sind nur die beiden Kegel enthalten, welche die ebenfalls zerfallende t^4 aus D_1, D_2 projiziren. Denn da $\sigma_1 \ldots \sigma_4$ das conjugirte Quadrupel von H^2, Q^2 darstellen, so sind sie Spitzen von Kegeln, welche durch die R^3 und die Gerade l_3 sich legen lassen. Es gibt aber nur zwei solche Kegel, deren Spitzen D_1, D_2 sind. Uebrigens ist leicht zu sehen, dass l_3 ein Bestandtheil der t^4 wird. Nämlich t^4 ist der Ort der auf H^2 befindlichen Pole von Tangentialebenen der Q^2 in Bezug auf H^2 mit anderen Worten, der Berührungspuncte derjenigen Ebenen, welche Q^2 und H^2 berühren.

Jede durch l_3 gelegte Ebene F berührt gleichzeitig Q^2, H^2 und zwar H^2 auf l_3, etwa in x, sie schneidet H^2 in einer durch x gehenden Geraden f Durch f geht an Q^2 noch eine Tangentialebene ausser F, sie berühre H^2 in y auf f.

Während sich F um l_3 dreht, beschreibt x die Gerade l_3, dagegen y einen zweiten Theil t^3 der t^4. Kommt F in die Lage, dass sie in D_1 oder D_2 die H^2 berührt, so gelangt sowohl x wie y nach D_1, bez. D_2.

t^3 enthält mithin D_1 und D_2; und wird aus ihnen durch 2 Kegel D_1^2, D_2^2 projizirt, die zu den φ^2 gehören. Die Polarebenen von σ in Bezug auf D_1^2, D_2^2 schneiden aus diesen Flächen 2 Geradenpaare l_1, λ_1; l_2, λ_2, die als binäre zu betrachten sind. Sie stehen auf q, welche überdies noch von l, λ getroffen wird.

Die 27 Geraden der F_2^3 sind nunmehr dargestellt

durch 7 unäre q, l, λ, m, μ, n, ν.

durch 4 binäre Paare a, α; c, γ; l_1, λ_1; l_2, λ_2.

und die quaternäre Gerade l_3.

Auf q stehen l, λ und die binären Paare l_1, λ_1; l_2, λ_2.

Auf l stehen q, λ und die unären a, α; $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$.

Auf λ stehen q, l die quaternäre l_3, und m, μ; $n\nu$.

Da e_1, e_3, e_5, e_7 die Gerade e_6 schneiden, welche m, μ liefert, so muss m, μ auf jedem der Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ stehen, also muss m (ebenso μ) 4 windschiefen der genannten Paare begegnen und zwar dürfen die aus benachbarten Paaren genommenen windschiefen keinen endlichen Winkel einschliessen. Trifft aber m die benachbarten a, b und die c, d; so muss μ zugleich $\alpha\beta\gamma\delta$ schneiden.

Das Gesagte gilt in gleicher Weise für n, ν, so dass wenn n Transversale über $ab\gamma\delta$ ist, ν es über $\alpha\beta cd$ sein muss.

Dies genügt, um die auf m stehenden Paare zu erkennen: Wie oben hervorgehoben enthält die Ebene m, μ (als Polarebene von ζ_6) die Gerade λ. Da ζ_0, ζ_6 zur selben Schaar gehören, so sind m, μ, n, γ windschief gegen die quaternäre l_3. Aber die Ebenen ma, mb müssen aus F_2^3 je eine Gerade l ausschneiden (11.). Wenn nun diese nicht durch denselben Doppelpunct D_1, oder D_2 gingen, so wäre $l_3 \equiv D_1 D_2$ selbst in ma und mb, was dem widerstreitet, dass m und l_3 sich nicht begegnen. Aus demselben Grunde kann keine dieser l durch D_2 gehen, und weil endlich a, b benachbart sind, so müssen die l zwei unendlich nahe der a in D_1 befindlichen, etwa l_1 und die ihr benachbarte sein. Analog ergeben sich in den Ebenen mc, md 2 unendlich nahe l_2:

Auf m stehen l, μ und zwei benachbarte Paare al_1, bl_1, sowie cl_2, dl_2. Es ist klar, dass sich die 3 unären n, μ, ν genau wie m verhalten.

Betrachten wir eine binäre a. Da ζ_1, ζ_0 verschiedenen Schaaren zukommen, so liegt a mit l_3 in einer Ebene, und es muss in dieser noch eine von den auf $\mathfrak{q}$ stehenden Geraden liegen.

l ist diese nicht, denn l_3 schneidet λ, ist mithin windschief zu l. Kann es l_3 selbst sein? In diesem Falle müsste die Ebene al_3 die F_3^2 längs l_3 berühren.

Wir verweisen auf Nr. 9 b, wo gezeigt wurde, dass die Polarebene von ζ_0 bezüglich H^2, d. h. die Tangentialebene der H^2 im Puncte ζ_0 die F_2^3 längs l_3 tangirt. Diese Ebene enthält aber die Gerade λ, gegen welche a windschief liegt, da a die l trifft.

Auch kann keine der Geraden l_1, λ_1 in der Ebene al_3 sein, weil in den Ebenen al_1, $a\lambda_1$, eine der unären $m\,n\,\mu\,\nu$ enthalten ist, die windschief gegen l_3 liegen.

Demnach folgt, dass a, l_3 von einer l_2, λ_2 geschnitten werden.

Also stehen auf a die Paare:

$$\alpha,\ l;\ m,\ l_1;\ n\,l_1;\ l_3\,l_2$$

— in letzteren sind 2 Paare vereint. —

Was l_1 angeht, so steht auf ihr zunächst λ_1, $\mathfrak{q}_1$, sodann a, m. Es handelt sich darum, ein Paar zu finden, dessen beide Gerade zu a und m windschief sind, und welches von den Geraden n, μ, ν eine enthält. Da nun n mit a, μ mit m in einer Ebene liegt, so könnte allein ν zu diesem fraglichen Paare gehören. ν ist gepaart mit n, α, β, c, d, und von diesen treffen n, α die a, während c, d die Gerade m schneiden; so dass einzig das Paar $\nu\beta$ übrig bleibt, dessen Geraden zu a und m windschief sind; mithin steht auch $\nu\beta$ auf l_1. Ueberdies wird l_1 geschnitten von der quaternären l_3 und einer der binären c, γ; so dass auf l_1 wie auf a drei unäre Paare, ein binäres stehen.

Was endlich die quaternäre l_3 betrifft, so enthalten die 4 Ebenen, welche durch sie und bez. a, α c, γ gehen, noch je eine der Geraden $l_2\,\gamma_2$, $l_1\,\lambda_1$, und ausserdem enthält die Ebene $l_3\,\lambda$ die quaternäre Gerade doppelt.

Damit sind für alle Geraden die auf ihnen stehenden 5 Paare nachgewiesen. Als selbstverständlich wurde stets angenommen, dass eine Gerade, wenn sie einer andern begegnet, auch die dieser letztern benachbarte treffen muss, nur in einem Doppelpunct ist dies nicht nöthig. Wenn die Ebene eines binären Paares die Gerade x aus F_2^3 schneidet, und x nicht durch den Doppelpunct geht, welchem das gedachte Paar zukommt, so steht auf x auch das benachbarte Paar. Wenn hingegen die Geraden eines binären Paares je einen Doppelpunct tragen, wie in dem zuerst behandelten Fall dieser Nummer a, c_1, wo dann x die quaternäre Gerade l_3 ist, so wird l_3 von dem Nachbarpaare b, d_1 nicht getroffen, weil diese Paare nicht windschief liegen.

c) F_3^3 mit 3 Doppelpuncten D_1, D_2, D_3.

Berühren sich H^2, Q^2 in 3 Puncten D, so zerfällt R^4 in 2 Gerade $D_3 D_1$, $D_3 D_2$ und eine durch D_1, D_2 gehende Linie 2ten Grads. t^4 besteht ebenfalls aus den genannten Geraden und einem Kegelschnitt t^2 durch D_1, D_2.

Die drei Geraden sind quaternäre der F_3^3, die eine $D_1 D_2 = l_3$ trifft $\mathfrak{q}$ (nicht a^2) die beiden anderen stehen in ξ_0, ξ'_0 auf a^2, durch ξ_0 geht $\mathfrak{e}$, durch ξ'_0 sodann $\mathfrak{e}_1$.

Durch D_1 geht ausser $D_1 D_3$ noch eine Gerade von Q^2: e_1, welche $\mathfrak{e}_1$ in ξ_1 trifft,
durch D_2 geht e_2, „ $\mathfrak{e}$ „ ξ_2 „

Mittels e_1, e_2 ergeben sich die binären Paare a, α und $a_1\,\alpha_1$, die nicht windschief sind, und wobei conform unserer unveränderlichen Bezeichnungsweise a, α_1 sich treffen etwa in r, ebenso α, a_1 in ϱ. Es ist r, ϱ das Punctepaar der F_3^3, das der $e_1\, e_2$ verbindenden Ebene R zugewiesen wurde.

In dem Büschel (φ^2) befindet sich der Kegel D_3^2, welcher aus D_3 die zerfallende Curve t^4 projizirt. Die Polarebene von σ in Bezug auf ihn schneidet aus D_3^2 zwei binäre Gerade l_1, λ_1, die auf $\mathfrak{q}$ stehen. In demselben Büschel ist noch ein Paar Ebenen Σ_1, Σ_2, wovon jene alle D enthält, diese den Kegelschnitt t^2. Dieses Ebenenpaar schneidet F_2^2 ausser t^4 in der doppeltgerechneten quaternären Geraden l_3; nämlich die demselben projectivisch entsprechende Polarebene von σ enthält $\mathfrak{q}$ und l_3, berührt mithin F_3^3 längs l_3.

Die unären Geraden l, λ sind wie bisher vorhanden.

Wie früher gezeigt, berührt die Polarebene von ξ_0 bezüglich H^2 längs D_3D_1 die F_3^3, die entsprechende Ebene von ξ_0 berührt längs D_3D_2 diese Fläche. In diesen Ebenen befinden sich aber beziehlich l, λ; so dass die eine quaternäre — D_3D_1 — l trifft, die andere λ.

Auf $\mathfrak{q}$ stehen: l, λ, die binären l_1, λ_1 und die quaternäre l_3 zweimal.

Auf l stehen: $\mathfrak{q}$, λ, das binäre Paar a_1, α_1 und sein benachbartes b_1, β_1; die quaternäre D_3D_1.

Auf λ: $\mathfrak{q}$, l, das binäre Paar a, α und das benachbarte b, β.

Man muss hier bemerken, dass, wenn ab und $\alpha\beta$ benachbart sind, im andern binären Paare $a_1\beta_1$, $\alpha_1 b_1$ es sein müssen, wenn unsere Bezeichnung gültig bleiben soll. Denn a trifft dieser zufolge die Geraden α_1, b_1 — nicht a_1, β — α trifft a_1, β_1 — nicht α_1, b_1 —, und zwei windschiefe Gerade, welche a begegnen, und in einem ausserhalb a liegenden Puncte D_2 einander unendlich nahe sind, müssen benachbarte sein.

Die binäre Gerade a wird also geschnitten von α und in der Ebene $a\alpha$ liegt noch λ, ferner von α_1, und in der Ebene $a\alpha_1$ liegt noch l_3, endlich geht durch a und die quaternäre D_1D_3 eine Ebene. Diese muss noch eine Gerade von F_3^3 enthalten, welche aus den oben angeführten Gründen nicht D_1D_3 selbst, auch nicht l oder λ sein kann. Da sie aber nach Früherem eine der auf $\mathfrak{q}$ stehenden Geraden sein muss, so folgt, dass sie l_1 oder λ_1 sein wird. Auf a steht sonach das unäre Paar α, λ, ein Paar gebildet von der quaternären l_3 und b_1, sowie das benachbarte l_3, α_1, endlich ein Paar bestehend aus den quaternären D_1D_3 und l_1, welches zwei vereinigte Paare repräsentirt.*)

---

*) Bemerkenswerth ist der Specialfall, wo R^4 aus einem Kegelschnitt r^2 und 2 in D_3 auf r^2 sich treffenden Geraden D_3D_1, D_3D_2 besteht. Alsdann wird die Tangente von r^2 im Puncte D_3 die dritte

Indessen gewährt wohl folgende Construction von l_1, λ_1 die klarste Einsicht in das Verhalten der binären und quaternären Geraden:

Man ziehe aus D_3 die beiden Transversalen über a, a_1 und α, α_1, so müssen diese einmal auf F^3 liegen, sodann können sie nicht auf a^2 stehen, weil es durch D_3 nur eine einzige Transversale über a, a^2 gibt, nämlich D_3D_1, die in Anbetracht der Lage von $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_2$ zu a_1 windschief ist. Stehen aber die Transversalen auf q, so sind sie offenbar einerlei mit l_1, λ_1.

Diese Construction kann ähnlich benutzt werden, um die Paare l_1, λ_1; l_2, λ_2 der vorigen Nummer (Zweitens.) zu finden. Dort hätte man von D_1 aus über c, q; γ, q je eine Transversale l_1, λ_1; ebenso sind l_2, λ_2 identisch mit den durch D_2 über a, q; β, q möglichen Geraden.

d) F_4^3 mit 4 Doppelpuncten D.

Berühren sich H^2, Q^2 in 4 Puncten D, so dass R^4 — gleichfalls t^4 — aus den Geraden:

$$\text{(I.)} \qquad D_3D_1,\ D_3D_2,\ D_4D_1,\ D_4D_2$$

besteht, so werden diese quaternäre Gerade der F_4^3 und stehen auf a^2, zugleich paarweise auf $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$.

Aber auch die Geraden D_1D_2, D_3D_4 treten als quaternäre auf, und da sie H^2 in D_1, D_2 — bez. D_3, D_4 — begegnen, so treffen sie a^2 nicht; sondern q. Durch die Geraden (I.) lässt sich kein Kegel 2ten Grads legen, wohl aber zwei Ebenenpaare Σ_1, Σ_2; Σ_3, Σ_4, wovon jenes die Schnittlinie D_3D_4 diese D_1D_2 habe.

Die Polarebene von σ in Bezug auf $\Sigma_1\Sigma_2$ geht durch q und berührt F_4^3 längs D_3D_4, da sie diese Gerade doppelt ausschneidet. Genau so verhält sich die Ebene durch q und D_1D_2. Die unären Geraden λ, l, die auch der Σ_1^2 angehören, bleiben hier bestehen, sie sind mit q die einzigen unären; binäre gibt es nicht.

Von den quaternären (I.) sind D_3D_1, D_4D_2 windschief, ebenso die beiden andern; dieselben treffen mithin beide entweder $\mathfrak{e}$, oder $\mathfrak{e}_1$; etwa $\mathfrak{e}$. Weil die Polarebenen aller Puncte von $\mathfrak{e}$ durch l gehen, so stehen jene quaternären auf l, die beiden andern auf λ.

Wie oben dargethan, berühren die Ebenen lD_3D_1, lD_4D_2 die F_4^3 beziehlich längs D_3D_1, D_4D_2. So ist das Verhalten der unären Geraden hier ein gleichartiges, auf jeder steht ein unäres Paar und jede wird von 2 windschiefen quaternären Geraden getroffen.

Hiernach wäre es überflüssig, etwas betreffend das Verhalten der quaternären Geraden zu sagen, da dies deutlich aus dem Vorstehenden erkannt wird.

---

quaternäre Gerade, und die binären fallen aus. Der Kegel aber, welcher aus D_3 der F_3^3 umschrieben ist, zerfällt, weil die 3 quaternären Geraden in einer Ebene $D_1D_2D_3$ liegen. Jetzt sind nur noch die 3 unären q, l, λ vorhanden. Weil nun die l mit D_3D_1 eine Ebene bildet, so muss jede durch D_3 gehende Gerade, die nicht in der Ebene $D_3D_1D_2$ enthalten ist, wohl aber in D_3D_1l die F^3 noch in einem auf l befindlichen Puncte treffen, der nie unendlich nahe bei D_3 fällt. Hieraus folgt sodann, dass D_3 ein Uniplanarpunct mit der Tangentialebene $D_3D_1D_2$ ist.

Besteht R^4 aus 2 sich in D_3 berührenden Kegelschnitten r^2, so wird D_3 Biplanarpunct (Specialfall ad *b*.). Gleiches tritt ein, wenn R^4, ohne zu zerfallen in D_3 eine Spitze hat (Specialfall ad *a*). Ausser q, l, λ gibt es im ersten Falle noch 2, im zweiten noch 6 unäre Gerade.

III. Beziehungen der verschiedenen Geradensechs unter sich und zu anderen Gebilden.

Für die geometrische Untersuchung der auf einer Fläche 3ter Ordnung F^3 befindlichen Gebilde liefern die nachstehenden Erörterungen unentbehrliche Hülfsmittel.

A. Verhalten einer gegebenen Sechs $(a_1 \,..\, a_6)$ gegen die 21 anderen Geraden und die noch möglichen Geradensechs.

Irgend eine Gerade von F^3 gehört entweder zu den a, oder zu den sechs b, welche mit jenen die Doppelsechs (ab) bilden, oder zu den 15 Geraden c, von welchen jede zwei, aber nur zwei der a trifft. Eine dieser c wird durch ik bezeichnet, wenn sie a_i, a_k schneidet. Zwei der 15 Combinationen bedeuten zwei windschiefe, oder zwei sich schneidende c, je nachdem sie einen Index gemein haben, oder nicht.

Will man daher unter diesen c drei windschiefe angeben, so müssen je zwei derselben einen gemeiusamen Index besitzen. Nun können hiebei nur zwei Fälle eintreten, entweder alle drei haben den nämlichen Index, wie 12, 13, 14; oder man hat zu nehmen 12, 13, 23. Im letztern Falle wird jede der noch möglichen Combinationen c entweder keine der Zahlen 1, 2, 3 enthalten, und eine solche c wird 12, 13 und 23 schneiden, oder c enthält ewta 1, also noch eine von 2, 3 verschiedene Zahl, und muss demgemäss 23 schneiden. Es gibt folglich keine c, welche zu allen drei: 12, 13, 23 windschief ist.

Sollen sonach 4, zu je zwei windschiefe c gewählt werden, so müssen sie sämmtlich einen gemeinschaftlichen Index bekommen. Da es nun 5 Combinationen mit einem gemeinschaftlichen Element — etwa 1 — gibt, so existiren unter den c noch Gruppen von 5 Windschiefen, nicht aber von mehr.

Weil ferner jede der 5 Geraden 12, 13, 14, 15, 16 sowohl a_1 als b_1 schneidet, und die andern 5, welche noch auf a_1 stehen, unter den b sind, die 5, welche noch b_1 treffen unter den a; so ergibt sich, dass a_i von jeder c getroffen wird; welche den Index i hat, nicht aber von den übrigen c.

Ferner folgt, dass fünf c zur Bildung einer Sechs nicht gebraucht werden können, da sie zwei Transversalen haben. Immerhin kann man aber vier c nehmen z. B. 12, 13, 14, 15 wodurch (v. 13.) eine sie enthaltende Sechs bestimmt ist. Die beiden fehlenden Geraden sind hier leicht aufzufinden: Sie müssen nämlich unter den a und b sein, und von diesen sind offenbar a_6, b_6 allein windschief zu den angenommenen vier c, und wie dies sein muss, auch windschief zu einander. Also:

Eine Geradensechs, welche vier c enthält, nimmt a und die homologe b auf.

Wenn demnach eine Sechs zwei a enthält, und aus diesem Grunde keine b enthalten kann, aber auch nicht vier c, so folgt, dass sie wenigstens noch eine a enthalten muss, mehr aber auch nicht, weil sie sonst mit $(a_1 \ldots a_6)$ selbst identisch wäre.

Man kann sofort die Sechs angeben, zu welcher drei beliebige a — $a_1 a_2 a_3$ — gehören. Die fehlenden drei können nur unter den c sein, und es dürfen die entsprechenden Combinationen keine der Zahlen 1, 2, 3 enthalten, müssten demnach sein: 45, 46, 56 und in der That genügen diese.

Wir schliessen hieraus:

Die ausser der zu Grunde gelegten Doppelsechs (ab) noch vorkommenden Geradensechs bestehen entweder

1. aus drei beliebigen a und drei dann bestimmten c; oder
2. aus drei b und drei c, oder
3. aus einer a, der homologen b und vier c.

Nehmen wir ad 1. an: $a_1\ a_2\ a_3$ 45, 46, 56 so muss deren Ergänzung die Transversalen $b_4\ b_5\ b_5$ von $a_1\ a_2\ a_3$ besitzen, folglich noch 12, 13, 23; so dass diese zu 2 gehört.

Nehmen wir aber ad 3. an:

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ a_6,\ b_6,$$

so ist deren Ergänzung offenbar:

$$62,\ 63,\ 64,\ 65,\ a_1,\ b_1;$$

gehört sonach auch zu 3.

Mithin: Eine von (ab) verschiedene Doppelsechs hat entweder in ihrer einen Hälfte drei a, in ihrer andern drei b — die Transversalen jener a — oder aber in der einen Hälfte ein a und ein b mit gleichem Index i, sodann in der zweiten Hälfte auch ein a und ein b mit demselben von i verschiedenen Index.

Durch Annahme der drei a oder b ist im ersten Fall die Doppelsechs bestimmt, im zweiten ist sie es auch, wenn man über die aus $(a\,b)$ zu nehmenden Geraden verfügt hat. Z. B. bedingt die Wahl a_1, b_1 für die eine, a_6, b_6 für die andere Hälfte, dass in dieser letzteren die vier c: 12, 13, 14, 15 vorkommen, denn diese c müssen den Index 1 haben, weil sie sämmtlich a_1 treffen und dürfen 6 nicht haben, weil sie mit a_6 windschief sind. Man kann hier noch zufügen:

Ausser $(a\,b)$ existirt keine Sechs mit weniger als drei c. Verwendet man nun zur Bildung einer solchen drei c mit demselben Index, d. h. drei, mit welchen noch zwei andere c windschief liegen, so muss von diesen eine in die Sechs eingehen; denn die 3 fehlenden können nach obigem weder auschliesslich a, noch b, noch theils a, theils b sein.

𝔅. Verhalten der Geradensechs gegen einen auf F^3 liegenden Kegelschnitt a^2.

In der Ebene von a^2 liege die Gerade q von F^3, und es mögen die 16 auf a^2 stehenden Geraden die Abtheilung A, die 10 andern die Abtheilung B bilden. (v. 10.)

1. Nimmt man zur Construction einer Sechs vier Gerade aus A — $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ — so sind 2 Fälle zu unterscheiden:

a) Die vier a sind unter den A ein Quadrupel (v. I. 3), mit anderen Worten, unter den A ist keine windschief gegen alle vier. Da von den beiden Unbekannten q nicht die eine sein kann, weil die andere dann q träfe, so müssen diese beide zu B gehören. In diesem Falle stehen (v. I. 3.) die beiden Transversalen über $a_1 a_2 a_3 a_4$ auf q.

b) $a_1 a_2 a_3 a_4$ bilden kein Quadrupel, haben also eine der A zur Transversale t. Dann gibt es noch eine Gerade in A, welche t schneidet, mit den 4 angenommenen windschief ist, daher zusammen mit q die Sechs completirt.

Eine Geradensechs, welche genau drei, oder zwei der Abtheilung A entnommene Geraden besitzt, kann nicht existiren: Denn bei dieser Voraussetzung kann q nicht zur Sechs gehören, da sonst die fehlende zwei oder drei in A wären; also müssten die zu den drei, resp. zwei in A befindlichen noch erforderlichen drei resp. vier auf q stehen. Somit würde q zur ergänzenden Sechs gehören, und träfe wenigstens eine der in A angenommenen Geraden, was nicht stattfindet.

3. Soll endlich die Sechs eine einzige a_1 von A enthalten, so ist sie durch diese Forderung auch bestimmt; denn es gibt 5 Transversalen von a_1, q; folglich auch 5 zu a_1 und untereinander windschiefe, auf q stehende Gerade.

Im Falle 1. *a*) verhält sich die ergänzende Sechs ebenso wie die angenommene, da die Transversalen eines Quadrupels wieder ein solches bilden. Die auftretende Doppelsechs hat in jeder Hälfte vier einpunctige und vier Nullsecanten von a^2.

Bei 1. *b*) verhält sich die ergänzende Sechs wie ad 3. Die Doppelsechs hat in der einer Hälfte 5 einpunctige, 1 zweipunctige Secante q, in der andern eine einpunctige, und 5 Nullsecanten des a^2.

Bei 3. ergibt sich dasselbe wie ad 1. *b*).

Anwendung:

Man lege im Falle 1. *a*) durch a^2 und das Quadrupel $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ eine Fläche F^4, so durchdringt sie die F^3 noch in einer Raumcurve 6ter Ordnung R^6, für welche die Geraden $(a_1 \dots a_6)$ wie sofort erkannt wird, 4 punctige Secanten sind. Hieraus folgt, dass durch R^6 keine zweite F^3, noch weniger F^2 möglich ist. Ferner ergibt sich, dass die ergänzende Sechs $(b_1 \dots b_6)$ aus Nullsecanten von R^6 besteht:

Zunächst kann R^6 keine 4 noch 5 punctige Secante ausser den a besitzen, da diese mit irgend einer a in einer Ebene liegen müsste. Eine Transversale b über fünf a kann deshalb diesen a nicht sämmtlich auf R^6 begegnen, ebensowenig 4 oder drei a auf R^6 treffen.

Würde dies aber für zwei a — oder nur ein a — stattfinden, für die anderen 3 — oder vier a — nicht, so hätte eine durch drei der letzteren gelegte F^2 mehr als 12 Puncte mit R^6 gemein.

Kann nun b keine der fünf a auf R^6 schneiden, so kann sie auch sonst keinen Punct von R^6 enthalten, weil dann gar mehrere F^2 durch R^6 gingen. Die 15 Geraden c sind jetzt 2 punctige Secanten der R^6, weil jede c mit einer a und einer b in einer Ebene liegt. Wenn man alsdann durch 2 vierpunctige Secanten a und die c, welche diese a schneidet, ferner einen Punct p auf R^6 einen Büschel von F^2 legt, so wird durch die F^2 noch ein variabler Punct q aus R^6 geschnitten, woraus der rationale Character der Curve hervorgeht; also R^6_0. (v. Bobek in den Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch. 1887. März.)

Legt man im Falle 3. durch a^2, a_1 eine Fläche F^3_1, so wird F^3 von dieser noch in R^6 durchdrungen, für welche die Geraden a offenbar 3 punctige Secanten sind. Sodann ist q eine b der ergänzenden Sechs, und zwar 1 punctige Secante der R^6. Gleiches gilt von den anderen b, da jede a^2 und a_1 trifft. Hier sind die fünfzehn c, wovon jede mit einer a und einer b in einer Ebene liegt, 2punctige Secanten. Ist p das Geschlecht der R^6, so ist $p-1$ die Mannigfaltigkeit der durch a^2, a_1 möglichen Flächen 2ter Ordnung, also $p-1=2$, $p=3$.

(V. Nöther's gekrönte Preisschrift über die alg. Raumcurven.)

𝔈. Auf F^3 befinde sich die Raumcurve 3ter Ordnung R_0^3.

Damit ist eine Doppelsechs gegeben $(a\,b)$, deren eine Hälfte a aus Nullsecanten, die andere aus 2punctigen Secanten der Curve besteht.

Man überzeugt sich hievon leicht in folgender Weise: Eine Tritangential-Ebene der F^3, zeigt, dass immer eine Gerade c vorhanden sein muss auf F^3, die R_0^3 1punctig schneidet. Alle 2punctige Secanten von R_0^3, welche c schneiden, erfüllen eine Regelschaar F^2, von welcher wie man sieht, zwei Gerade in die Fläche F^3 fallen müssen.

Hat hiernach R_0^3 eine 2punctige Secante b_i auf F^3, so treten in den 5 Tritangentialebenen durch b_i auch 5 windschiefe Nullsecanten a auf. Würde man durch eine dieser a Tritangentialebenen legen, so fände man 5 windschiefe 2 punctige Secanten.

Diese können aber nicht die einzigen sein, weil sie sonst bei drei verschiedenen Nullsecanten auftreten müssten, drei windschiefe Gerade der F^3 aber nur 3 Transversalen haben. Folglich sind wenigstens 6 zweipunctige Secanten auf F^3, mehr aber nicht, weil auf F^3 keine Gruppe von mehr als 6 windschiefen Geraden existirt.

Ebenso folgt, dass es 6 Nullsecanten gibt, die auch zu je zwei windschief sein müssen. Liefern also jene Bisecanten die Sechs $(b_1 \ldots b_6)$, so müssen die Nullsecanten ihre Ergänzung bilden, da eine derselben fünf b schneidet.

Es ist somit klar, dass die fünfzehn c 1punctige Secanten von R_0^3 sind. Was die Lage aller möglichen Sechs gegen R_0^3 betrifft, so findet sich Alles, was man darüber sagen kann, unter 𝔄. schon ausgeführt.

Um aber bei gegebener $(a\,b)$ eine Raumcurve R_0^3 zu construiren, welche die eine Hälfte b zu Bisecanten hat, braucht man nur 4 dieser b als Sehnen von R_0^3 anzunehmen sowie noch 2 Puncte ς, ς' auf F^3.

Die sich ergebende Curve hat dann 10 Puncte auf F^3. Zu einer 1ten Anwendung benutzen wir die Doppelsechs, welche durch 3 beliebige a bestimmt ist. Sie ist 𝔄.:

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 45, & 46, & 56 \\ 23, & 13, & 12, & b_6 & b_5 & b_4 \end{Bmatrix}$$

Legt man durch R_0^3 und ihre drei einpunctigen Secanten 45, 46, 56 eine F^4, so durchdringt diese F^3 noch in R^6 und es werden sowohl die angenommenen 1 punctigen Secanten c als auch $a_1\,a_2\,a_3$ für die R_6 Quadrisecanten sein.

Fasst man nun in der andern Hälfte eine zweipunctige Secante b von R_0^3 auf, so trifft sie noch zwei der angenommenen c. ist folglich Nullsecante der R^6. Wenn man dagegen in dieser Hälfte eine der einpunctigen Secanten von R_0^3 betrachtet, so schneidet sie jede der angenommenen c, wird somit auch Nullsecante der R^6. Auf diese Weise finden wir demnach die unter 𝔅. behandelte R_0^6 wieder.

Bei dieser Gelegenheit dürfte es angezeigt sein, eine Mittheilung von Herrn Em. Weyr „Ueber rationale Raumcurven", publicirt in den Sitzungsberichten dieser Gesellschaft, Jahr 1882 in einigen wesentlichen Puncten richtig zu stellen.

Erstens wird (pag. 163) bewiesen, dass durch eine rationale R_0^6 eine **einzige** F^3 möglich ist. Der Beweis stützt sich darauf, dass der Restschnitt 3ter Ordnung, den zwei durch eine R^6 gehende F^3 gemein haben eine der von Sturm betrachteten Formen haben müsse; aber diese Formen umfassen nicht alle Fälle.

Uebrigens ist die Behauptung nicht wahr; und Herr Weyr selbst gibt (pag. 162) eine R_0^6 an mit einer fünfpunctigen Sekante D.

Durch diese gehen sicher ∞^1 Flächen F^3, weil jede F^3, welche D enthält und noch durch 14 beliebige Puncte der R_0^6 geht, diese Curve ganz aufnehmen wird.

Eine zweite Correctur ist von besonderer Wichtigkeit, weil wir durch sie dazu gelangen, alle denkbaren R_0^6 klar zu erkennen.

Die Trisecanten einer R_0^6 sind die Erzeugenden einer Regelfläche F_{20}, welche F^3 ausser in R_0^6 in einem Ort 24ter Ordnung schneidet, und es muss dieser Ort aus Geraden von F^3 bestehen.

Hieraus wird pag. 164 geschlossen, insofern eine Quadrisecante für 4 Trisecanten zu rechnen hat: „Eine R_0^6 hat 6 Quadrisecanten." Allerdings ist $4 \,.\, 6 = 24$; aber muss denn eine Gerade, welche zugleich auf F_{20} und F^3 liegt vier Puncte mit R_0^6 gemein haben, und ist es undenkbar, dass sie nur drei, oder etwa 5 Puncte dieser Curve enthält? Offenbar müsste eine derartige Annahme ausgeschlossen sein, wenn die obige Folgerung gezogen werden darf. Die Sache verhält sich wirklich ganz anders, indem die in Rede stehenden gemeinsamen Geraden von F_{20}, F^3 theils 3, theils 4, theils 5 punctige, endlich auch ausschliesslich Quadrisecanten sein können. Streng wird man also verfahren:

Besitzt R_0^6 **eine** 5punctige Secante S_5 **nicht aber mehr**, was man annehmen kann, weil sonst R_0^6 auf einer F^2 läge, und als eine hinreichend bekannte Curve nicht weiter in Betracht zu ziehen wäre — so repräsentirt S_5 10 Trisecanten, bleiben $24 - 10 = 14$ gemeinschaftliche Gerade von F_{20}. F^3.

Da 14 nicht durch 4 theilbar ist, so kann diese Zahl nicht durch lauter Quadrisecanten aufgebracht werden; d. h. F_{20}, F^3 haben sicher eine Gerade S_3 gemein, die nicht mehr als Trisecante für R_0^6 ist. Mittels der F_{20}, oder auch wie Weyr pag. 165 zeigt man, dass S_3 noch von 3 Trisecanten ausserhalb der Curve R_0^6 geschnitten wird. Diese sind demnach ebenfalls auf F^3 und bestimmen mit S_3 drei Tritangentialebenen der F^3, in welchen 3 Nullsecanten von R_0^6 sein werden. Mithin muss das durch diese und S_3 gelegte Hyperboloid noch 9 Puncte der R_0^6 ausschneiden. Dies Hyperboloid hat aber mit F^3 nur noch zwei windschiefe Gerade gemein, also muss von diesen die eine 5punctige, die andere 4punctige Secante der R_0^6 sein. Wir finden demnach: *a)* **Hat** R_0^6 **eine 5 punctige Secante, so hat sie auch eine einfache Trisecante auf** F^3, zudem aber auch eine Quadrisecante; und es ist auch keine 2te Quadrisecante von F_0^6 möglich, wenn nicht eine F^2 die Curve enthalten soll.

b) **Hat** R_0^6 **eine einfache Trisecante auf** F^3, **so besitzt sie eine 5 punctige und eine 4 punctige Secante.** Im Gesammtschnitt 24. Ordnung rechnen diese beiden für $10 + 4$ Trisecanten, bleiben also noch 10 gemeinschaftliche Gerade von F_{20}, F^3, die sämmtlich einfache Trisecanten der R_0^6 sein werden.

Durch diese R_0^6 gehen, wie schon oben bemerkt ∞^1 Flächen dritter Ordnung.

Wird jetzt die Voraussetzung gemacht, dass R_0^6 keine fünfpunctige Secante hat, so kann sie auch keine einfache Trisecante auf F^3 haben, und es muss der Gesammtschnitt 24. Ordnung aus lauter, d. i. sechs Quadrisecanten bestehen. Durch diese R_0^6 geht keine zweite F^3.

Endlich sind wir zur Umkehr berechtigt:

Geht durch R_0^6 nur eine F^3, so dass sie demgemäss keine fünfpunctige-Secante haben kann; so besitzt sie 6 Quadrisecanten. (Siehe $\mathfrak{B}$.) Gehen aber zwei F^3 durch R_0^6, so besitzt sie nothwendig eine fünfpunctige und eine Quadrisecante; weshalb dann auch eine Regelfläche F_0^3 durch die Curve geht, welche die 5punctige Secante zur doppelten, die 4punctige zur einfachen Leitlinie hat.

Daher: Die Restcurve dieser R_0^6 besteht aus einer doppeltzählenden und einer einfachen Geraden, die sich nicht treffen. (Nöther.)

2. Anwendung.

Man verstehe unter $\mathfrak{R}^3$ drei windschiefe Gerade der F^3: a_1, a_2, a_3 und schneide F^3 mit einer durch $\mathfrak{R}^3$ gelegten F_1^3 in R_p^6.

Um zu sehen, wie die ausserhalb $\mathfrak{R}^3$ befindlichen Geraden der F^3 sich gegen a_1, a_2, a_3 verhalten, bediene man sich irgend einer Doppelsechs $(a\,b)$, in der die Gruppe $\mathfrak{R}^3$ vorkommt.

Es zeigt sich dann sofort, dass für $\mathfrak{R}^3$ sechs Nullsecanten existiren, wovon drei zu den a, drei zu den fünfzehn c gehören, nämlich:

$$a_4,\quad a_5,\quad a_6,\quad 45,\quad 46,\quad 56.$$

Auch besitzt $\mathfrak{R}^3$ sechs Bisecanten:

$$12,\quad 13,\quad 23 \quad \text{und} \quad b_1,\quad b_2,\quad b_3.$$

Ueberdies sind die Transversalen der $\mathfrak{R}^3$, nämlich b_4, b_5, b_6 dreipunctige, alle übrigen neun Geraden c einpunctige Secanten.

Demzufolge hat R_p^6:

Sechs 3punctige, ebenso viele 1punctige, neun 2punctige, drei Nullsecanten; doch bilden hier weder die dreipunctigen, noch die einpunctigen Sekanten eine Geradensechs, wie dies oben stattfand.

Wegen der Restcurve $\mathfrak{R}^3$ kann R_p^6 keine der Species vom Geschlechte Null sein. Wäre aber $p > 1$, so müssten durch $\mathfrak{R}^3$ wenigstens ∞^1 Flächen 2ter Ordnung gehen, was nicht möglich ist, also $p = 1$. Für diese R_1^6 ist jede der angenommenen a Quadrisecante; denn die Ebene durch a_1 und die einpunctige Secante b_2 der R_1^6 enthält noch 12, eine zweite 1punctige Secante der Curve.

Wird umgekehrt auf F^3 eine R_1^6 — vom Geschlecht 1 — vorausgesetzt, so muss ihre Restcurve aus 3 windschiefen Quadrisecanten der R_1^6 bestehen.

Beweis. Um möglichst kurz zu sein, werde F^3 ohne Doppelpunct gedacht. Durch die gesuchte Restcurve muss eine, aber nur eine F^2 gehen; sie muss deshalb eine Gerade zum Bestandtheil haben, da sonst ∞^2 F^2 durch sie möglich wären — R_0^3 —. Ihr zweiter Bestandtheil kann, wie man gleich einsieht, keine zerfallende oder nicht zerfallende Linie 2ter Ordnung sein, folglich könnte er nur aus zwei windschiefen Geraden, oder einer doppelt zählenden Geraden bestehen. Wäre die Unzulässigkeit letzterer Annahme bewiesen, so folgte von selbst, dass die drei Geraden zu je zwei windschief sein müssen.

Ist aber im Restschnitt eine doppelt zählende Gerade a_2, so ist auch eine einfache a_1 darin. Nun können die durch a_2 gehenden zwei F^3 nicht eine der a_2 benachbarte windschiefe enthalten, weil F^3 auf a_2 keinen Doppelpunct hat (v. 11), sie können auch nicht längs a_2 eine gemeinschaftliche Tangentenebene besitzen.[1])

Soll aber eine F^2 durch a_2 existiren, für welche diese a_2 im Schnitt F^2, F^3 doppelt zählt, so kann a_2 nur dann einfach auf F^2 sein, wenn F^2 noch eine der a_2 benachbarte die a_2 treffende oder nicht treffende Gerade von F^3 enthält. Da aber Beides nach dem Gesagten ausgeschlossen erscheint, so könnte nur noch a_2 eine doppelt zählende Gerade der F^2 sein.

Wäre jetzt a_1 windschief zu a_2, so könnte eine solche F^2 nicht auch a_1 enthalten; schneidet sich dagegen a_1, a_2, so genügt jede der ∞^1 F^2, welche aus der Ebene $a_1 a_2$ und irgend einer durch a_2 gelegten Ebene besteht, der Forderung, und das Geschlecht der R_p^6 wäre $= 2$.

Hiernach hat R_1^6 drei windschiefe Quadrisecanten, worunter nebenbei keine zwei benachbarte sind.

𝔇. Die Quadrisecanten aller R_p^6.

Die supponirte Existenz einer Quadrisecante bedingt ersichtlich mindestens 7 scheinbare Doppelpuncte für die R_p^6; also $p \lesseqgtr 3$.

Erstens. R_3^6 hat entweder keine Quadrisecante, oder unendlich viele. Nämlich, wenn sie eine hat, so liegt R_3^6 *) auf einer F^2; hat mithin die eine Schaar von Geraden zu Quadrisecanten. Dass R_3^6 keine Quadrisecante zu haben braucht, zeigt das angeführte zweite Beispiel (𝔅).

---

[1]) Man kann den Satz aufstellen:

Wenn eine Gerade a_2 im Schnitt zweier F^3 doppelt zählt, diese F^3 ohne Doppelpuncte sind, so gibt es im Büschel dieser F^3 stets eine Regelfläche F_0^3 mit der Doppelgeraden a_2.

Es ist klar, dass die Flächen eine der a_2 benachbarte windschiefe Gerade nicht enthalten können. Gesetzt, in a_2 fielen zwei sich schneidende Gerade der Flächen zusammen. In der alsdann auftretenden gemeinschaftlichen Tangentenebene liege noch a_1 von F^3. Legt man durch a_2, a_1 irgend eine F^2, so hat diese mit F^3 eine R^4 gemein, die a_2 in zwei Puncten schneidet. R^4 ist die Basis eines Büschels F^2, der mit dem Ebenenbüschel durch a_2 die F_1^3 erzeugt; mithin bekommt diese zwei Doppelpuncte auf a_2. Soll nun in anderer Weise a_2 doppelt zählen, so betrachte man eine Ebene E, welche a_2 in einem beliebigen Puncte s schneidet; dann müssen sich die Curven, welche E mit den F^3 gemein hat, in s berühren; d. h. in jedem Puncte von a_2 haben die beiden F^3 eine gemeinsame durch a_2 gehende Tangentenebene.

Legt man hierauf eine Ebene durch a_2, so wird diese Bitangentialebene beider F^3, und ihre Berührungspuncte auf a_2 werden die nämlichen zwei Puncte sein. Die F^3 haben ausser a_2 noch eine Raumcurve R^7 gemein, eine beliebige durch a_2 gelegte Ebene enthält nur 2 Puncte dieser Curve ausserhalb a_2, also ist a_2 5punctige Secante der $R_p{}^7$. Die adjungirten Flächen 2ter Ordnung haben, wie im Text zu sehen, sämmtlich die a_2 zur Doppellinie, ihre Mannigfaltigkeit ist also 2; folglich $p = 3 = 7 - 4$. Alsdann aber liegt (Bobek a. a. O.) R^7 auf einer Regelfläche F_0^3 mit der Doppelgeraden a_2.

Zweitens. R_2^6 liegt auf einer Regelfläche F_0^3, deren Doppelgerade einzige Quadrisecante der Curve ist.*) Eine zweite kann die Curve nicht besitzen, da diese auf F_0^3 liegen würde; die Geraden von F_3^0, die einfache Leitlinie mitgerechnet sind Bisekanten der R_2^6.

Drittens. R_1^6 hat 3 windschiefe Quadrisecanten.

Viertens. R_0^6 hat entweder sechs Quadrisekanten, oder nur eine, und in diesem Falle stets eine 5punctige Secante.

Schlussbemerkung. Eine nahe liegende Anwendung bietet die Bestimmung der Ordnung x für die Trisecantenfläche F^x einer auf F^3 liegenden Raumcurve.

Handelt es sich 1. um R_1^6, so ist diese Curve — weil vom Geschlechte 1 — fünffach auf F^x. Ihre drei Quadrisecanten $a_1\, a_2\, a_3$ sind 4fache Gerade dieser Fläche. Ferner befinden sich unter den Geraden von F^3 noch 6 Trisecanten der R_1^6, nämlich die sechs zur Gruppe $a_1\, a_2\, a_3$ windschiefen a_4, a_5, a_6, $\overline{4}5$, $\overline{4}6$ $\overline{5}6$. (v. 𝔄.); daher $3x = 5 . 6 + 3 . 4 + 6$, $x = 16$.

2. R_2^6 ist 4fach auf F^x. Die Restcurve, welche eine durch R_2^6 gelegte F_1^3 aus F^3 schneidet, besteht aus einem Kegelschnitte a^2 und einer ihm nicht begegnenden Geraden l Diese l wird Quadrisecante von R_2^6, und demnach 4fache Gerade der F^x; überdies hat R_2^6 8 Trisecanten auf F^3, nämlich die Geraden $l_1, \lambda_1, l_2, \lambda_2 \dots l_4, \lambda_4$, welche weder a^2 noch l treffen; daher $3x = 4 . 6 + 4 + 8$, $x = 12$.

3. R_3^6 ist 3fache Curve von F^x, und wird durch eine irreductibele R_0^3 zum vollständigen Schnitt zweier F^3 ergänzt. Es sind auf F^3 6 Gerade, welche R_6^3 nicht treffen (v. 𝔈). Sie sind Trisecanten von R_3^6 und zwar die einzigen, welche diese Curve auf F^3 haben kann, also: $3x = 3 . 6 + 6$, $x = 8$.

*) Bobek a. a. O.

Druckfehler:

In *Nr. 1.* lies σ' statt σ^1, und in der drittletzten Zeile e^2, e_1^2 statt e, e_1.

In *Nro 2.* zu Anfang: $(p) \;\overline{\wedge}\; (p_1)$ statt $(p)\ \pi\ (p)$

$p^2 \;\overline{\wedge}\; p_1^2$ „ $(P^2)\, \pi\, (P_1^2)$.