Zwei Bemerkungen zu Airy's Theorie des Regensbogens.

Von W. Wirtinger in Innsbruck.

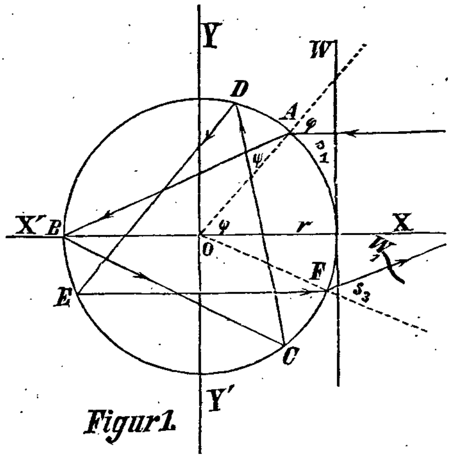
I.

Im Verkehr mit Collegen Pernter, der in einer seither publicirten Abhandlung (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 106. IIa. 1897) den Regenbogen nach Airy's Theorie eingehend bearbeitet hat, fand ich Anlass zu den folgenden beiden Bemerkungen, von denen sich die eine auf die Wellenfläche, die andere auf das Intensitätsintegral bezieht. Ich veröffentliche sie auf Wunsch des Collegen Pernter, da eine gewisse Vereinfachung der Darstellung dadurch erreicht wird. Wegen ausführlicher Literaturangaben verweise ich auf Pernter's Abhandlung und auf Mascart's Traité d'Optique I (1889).

Das wesentliche von Airy's Theorie des Regenbogens besteht darin, dass er die Wellenfläche der nach mehrmaligen Reflexionen im Innern des Tropfens austretenden Strahlen bestimmt. Diese zeigt in der Nähe des Minimums der Deviation einen Wendepunkt, dessen Umgebung nun in Fresnel'scher Weise als Ursprung einer Beugungserscheinung behandelt wird. Die Ableitung der Gleichung der Wellenfläche geschieht meist unter Zuhilfenahme der Brennflächen. Ich gebe eine directe Ableitung.

*

Sei r der Radius einer Kugel, welche von einer Substanz mit dem Brechungsexponenten n erfüllt ist, sei W die Wellenfläche des einfallenden Lichtes, seien c_1 und c_2 die Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten im ersten und zweiten Medium, s_1 der Weg, den ein Strahl von W



Figur 1.

aus im ersten Medium zurücklegt, s_2 der Weg des Strahles innerhalb der Kugelfläche, und s_3 der Weg nach dem Austritt aus der Kugel bis zur neuen Wellenfläche W_1, so ist bekanntlich

$$\frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} + \frac{s_3}{c_1} = \text{const.}$$

$$\text{also } s_3 = \text{const.}\, c_1 - s_1 - n\, s_2.$$

Ist ferner φ der Einfallswinkel, ψ der Brechungswinkel, so ist

$$s_1 = r - r \cos \varphi, s_2 = 2 (\varkappa + 1) r \cos \psi$$

wenn der Strahl $\varkappa$ Reflexionen zu erleiden hat. Damit wird bei geeigneter Wahl der Constanten

$$s_3 = r \cos \varphi - 2 (\varkappa + 1) n\, r \cos \psi.$$

Als Deviation D bezeichnen wir den Winkel, um welchen der einfallende Strahl durch Reflexion und Brechung im positiven Sinn gedreht wird. Es ist dann

$$D = 2\varphi - 2(\varkappa + 1)\psi + \varkappa\pi$$

Ferner bildet der Radius des Eintrittspunktes mit dem des Austrittspunktes den Winkel $2(\varkappa + 1)\psi$ und daher der letztere mit der positiven X Achse den Winkel $D + \pi - \varphi$, weil D ja der mit der negativen X Richtung im positiven Sinne genommene Winkel ist.

Damit ergeben sich nun die Coordinaten eines Punktes von W_1 durch Projection des aus OF und s_3 bestehenden Linienzuges auf die X und Y Axe. F bezeichnet dabei den Austrittspunkt des Strahles. Man erhält so

$$x = r\cos(D + \pi - \varphi) + s_3 \cos(D + \pi)$$
$$y = r\sin(D + \pi - \varphi) + s_3 \sin(D + \pi)$$

Bringen wir durch Drehung des Coordinatensystem die positive YAxe in die der Richtung des mit dem Maximum der Deviation austretenden Strahles entgegengesetzte Richtung, so ist der Drehungswinkel $D_1 + \frac{\pi}{2}$ und wir erhalten, wenn D_1 das Maximum der Deviation bezeichnet

$$\text{I.} \quad x' = -r\sin(D - D_1 - \varphi) - s_3 \sin(D - D_1)$$
$$y' = -r\cos(D - D_1 - \varphi) - s_3 \cos(D - D_1)$$

Diese Gleichungen geben zusammen mit der früheren Formel für D_1 s_3 und der Brechungsgleichung $\sin\varphi = n \sin \psi$ die exacte Gleichung des Meridians der neuen Wellenfläche. Es mag beiläufig erwähnt werden, dass diese Curve vom Geschlechte 1 ist und durch elliptische Functionen mit dem Modul n^{-1} dargestellt werden kann.

Diese Curve ist nun für D nahe an D_1 zu untersuchen. Seien nun φ_1 und ψ_1 die zu D_1 gehörigen Winkel φ und ψ, so entwickeln wir zu diesem Zwecke die Gleichungen I nach Potenzen von $\varphi - \varphi_1 = \alpha$, wobei wir aber nur ein Glied über das constante hinausgehen. Da $D - D_1$ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnen muss, so bekommen wir für x' einfach

$$x' = r(\sin\varphi_1 + \alpha\cos\varphi_1).$$

Bei Y' jedoch müssen wir bis zu Gliedern dritter Ordnung gehen. Wir schreiben

$$Y' = -r\cos(D-D_1)\cos\varphi - r\sin(D-D_1)\sin\varphi - s_3\cos(D-D_1)$$

Da $D-D_1$ von der zweiten Ordnung ist, so ist $\cos(D-D_1)$ bis auf Glieder vierter Ordnung gleich 1 und $\sin(D-D_1)$ bis auf Glieder sechster Ordnung gleich $D-D_1$. Es genügt daher, um Glieder dritter Ordnung zu erhalten, wenn wir setzen

$$Y' = -r\,(2\cos\varphi - 2\,n\,(\varkappa+1)\cos\psi + (D-D_1)\sin\varphi)$$

Hier sind $\cos\varphi_1$, $\cos\psi_1$, $D-D_1$ bis einschliesslich Glieder dritter Ordnung, $\sin\varphi$ bis einschliesslich Glieder erster Ordnung zu entwickeln. Setzt man noch $\psi = \psi_1 + \beta$, so erhält man zur Berechnung dieser Entwicklungen nach der Taylor'schen Formel:

$$D - D_1 = -(\varkappa+1)\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 - \tfrac{1}{3}(\varkappa+1)\left(\frac{d^3\beta}{d\alpha^3}\right)_0 \alpha^3$$

Ferner ist wegen des Maximums

$$dD = 0 \quad \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_0 = \frac{1}{\varkappa+1}.$$

Der angehängte Index 0 bei den Differentialquotianten bedeutet, dass nach der Differentiation $\alpha = o$ zu setzen ist. Man erhält aus

$$\sin\varphi = n\sin\psi$$

$$\cos\varphi = n\cos\psi\,\frac{d\beta}{d\alpha}$$

$$\frac{d\cos\psi}{d\alpha} = -\sin\psi\,\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\sin\varphi}{n}\,\frac{d\beta}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2\cos\psi}{d\alpha^2} = -\frac{\cos\varphi}{n}\,\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{\sin\varphi}{n}\,\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$$

$$\frac{d^3\cos\psi}{d\alpha^3} = \frac{\sin\varphi}{n}\,\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{2\cos\varphi}{n}\,\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \frac{\sin\varphi}{n}\,\frac{d^3\beta}{d\alpha^3}$$

Bildet man damit die angegebenen Reihen und setzt in die Formel für y' ein, so heben sich die Glieder zweiter und erster Ordnung und man erhält:

$$y' = 2\varkappa(\varkappa + 2)\, r \cos\varphi_1 - \tfrac{1}{3}(\varkappa + 1)\cos\varphi_1 \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^3$$

Durch zweimalige Differentiation der Brechungsgleichung findet man

$$\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\varkappa + 1}\left(1 - \frac{1}{(1+\varkappa)^2}\right)$$

Setzt man noch $\varkappa + 1 = p$ und beachtet, dass

$$\cos\varphi_1 = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{p^2 - 1}} \quad \sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{p^2 - 1}}$$

verlegt man ferner den Anfang der Coordinaten in den $\alpha = o$ entsprechenden Punkt, so erhält man, wenn man noch α aus den so erhaltenen Gleichungen eliminirt

$$\text{II.} \qquad \eta = \frac{(p^2 - 1)^2}{3 r^2 p^2 (n^2 - 1)} \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{n^2 - 1}}\, \xi^3$$

in genauer Uebereinstimmung mit Maseart l. c. und Boitel.

II.

Durch physikalische Ueberlegungen, deren mathematische Rechtfertigung noch aussteht, gelangt man nun von der obigen Gleichung aus dazu, die Intensitätsvertheilung durch das Quadrat des Integrales

$$1) \quad W(m) = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(w^3 - m w)\, d w$$

darzustellen. Airy hat das Integral in eine Potenzreihe entwickelt und tabellirt, Stokes später für grosse Werte von m semiconvergente Entwicklungen angegeben. Die Entwicklungen beider gehen aus der Theorie der Bessel-schen Functionen hervor, wie nun gezeigt werden soll.

Das Integral ist der reelle Theil von

$$U(m) = \int_0^\infty e^{i(w^3 - m w)\frac{\pi}{2}} dw \tag{2}$$

und nach den Principien der complexen Integration von Cauchy sieht man leicht ein, dass man statt längs der reellen Axe zu integriren auch längs einer vom Nullpunkt unter dem Winkel von 30^0 mit der reellen Axe ins Unendliche gehenden Geraden integriren darf. Setzt man also $w = \rho e^{\frac{i\pi}{6}}$, so erhält man

$$U(m) = e^{\frac{\pi i}{6}} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}\left(\rho^3 + i m \rho e^{\frac{i\pi}{6}}\right)} d\rho \tag{3}$$

wo nun unter dem Integral nach m beliebig oft differentiert werden darf. Man erhält so

$$\left.\begin{aligned} U'(m) &= -\frac{i\pi}{2} e^{\frac{\pi i}{3}} \int_0^\infty \rho\, e^{-\frac{\pi}{2}\left(\rho^3 + i m \rho e^{\frac{i\pi}{6}}\right)} d\rho \\ U''(m) &= -i\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^\infty \rho^2 e^{-\frac{\pi}{2}\left(\rho^3 + i m \rho e^{\frac{i\pi}{6}}\right)} d\rho \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und daraus

$$3U'(m) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 m U = -$$

$$- i\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^\infty \left(3\rho^2 + i m e^{\frac{i\pi}{6}}\right) e^{-\frac{\pi}{2}\left(\rho^3 + i m e^{\frac{\pi i}{6}} \rho\right)} d\rho$$

$$= \frac{i\pi}{2}$$

Da W der reelle Theil von U ist, so folgt daraus die von Stokes benützte Differentialgleichung

$$W''(m) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{m}{3} W(m) = 0 \tag{5}$$

Aus den Formeln 3) und 4) findet man noch für $m = 0$ mit Hilfe der Substitution $\frac{\pi}{2} \rho^3 = t$

$$W(o) = \cos \frac{\pi}{6} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}\rho^3} d\rho = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(1/3)$$

6)

$$W'(o) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \int_0^\infty \rho\, e^{-\frac{\pi}{2}\rho^3} d\rho = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\, \Gamma(2/3)$$

Da die Differentialgleichung 5) eine Riccatische ist und nach bekannten Formeln (s. z. B. Lommel, Bessel'sche Functionen 1868 p. 111 ff.) durch Bessel'sche Functionen integrirbar ist, so erhält man den Ausatz

$$7)\quad W(m) = \pi^{1/3} \sqrt{\frac{m}{3}} \left[A\, J_{1/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right) + B\, J_{-1/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)\right]$$

wo die Constanten A und B aus den Formeln 6) zu bestimmen sind. Benützt man die Formeln

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z})\right) = -\,1/2\, z^{-\frac{1+\nu}{2}} J_{\nu+1}(\sqrt{z})$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(\sqrt{z})\right) = 1/2\, z^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(\sqrt{z})$$

für $z = 3^{-3} \pi^2 m^3$ so findet man leicht

$$8)\quad W'(m) = 1/6\, \pi^{4/3}\, m \left[A\, J_{-2/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right) - B\, J_{2/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)\right].$$

Da man allgemein

$$9)\quad J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p}\, p!\, (\nu+1)\ldots(\nu+p)}$$

so findet man, wenn man bei der Ausrechnung die Relation

$$\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

berücksichtigt

$$A = B = 1/3\, \pi^{2/3}$$

Man erhält also

$$
10)\quad
\begin{aligned}
W(m) &= \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}\left[J_{1/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)+J_{-1/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)\right]\\
W'(m) &= \frac{\pi^2}{18} m \left[J_{-2/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)-J_{2/3}\left(\frac{\pi m^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Wenn man die Bessel'schen Functionen durch die Potenzreihen unter 9) ausdrückt, so erhält man die Airy'sche Reihe. Nimmt man aber die von Jacobi herrührenden und neuerdings von Weber[1]) genauer untersuchten halbconvergenten Entwicklungen, so erhält man die Formeln von Stokes.

Bezeichnet man nämlich das Produkt

$$
\prod_{\mu=1\ldots k}\frac{(2\mu-1)^2-4\nu^2}{2\mu-1}
$$

mit $c_{k\nu}$, so gilt die folgende semiconvergente Entwicklung

$$
\begin{aligned}
J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big[&\left(1-c_{2\nu}(8z)^{-2}+c_{4\nu}(8z)^{-4}\ldots\right)\cos\left(z-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)\\
&+\left(c_{1\nu}(8z)^{-1}-c_{3\nu}(8z)^{-3}+\ldots\right)\sin\left(z-\frac{\pi}{4}-\nu\frac{\pi}{2}\right)\Big]
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man die beiden hier auftretenden Reihen mit R_ν und S_ν, so folgt

$$
J_\nu(z)+J_{-\nu}(z) = 2\cos\frac{\nu\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[R_\nu\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+S_\nu\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right]
$$

$$
J_{-\nu}(z)-J_\nu(z) = 2\sin\frac{\nu\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[R_\nu\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+S_\nu\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right]
$$

[1]) Mathem. Annalen 37.

Diese Formeln liefern ausgerechnet und in 10 eingesetzt

$$
11)\quad
\begin{aligned}
W(m) &= 2^{1/2}(3\,m)^{-1/4}\left[R_{1/3}\cos\left(z-\tfrac{\pi}{4}\right)+S_{1/3}\sin\left(z-\tfrac{\pi}{4}\right)\right]\\
W'(m) &= 2^{3/4}\,3^{-3/4}\,\pi^{5/4}\left[R_{2/3}\cos\left(z+\tfrac{\pi}{4}\right)+S_{2/3}\sin\left(z+\tfrac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Dabei ist $z = 3^{-3/2}\pi\, m^{3/2}$.

Das sind aber gerade die Formeln von Stokes[1]).

[1]) Mathem. and phys. Papers II. p. 343, 347.