Ueber die Begründung der projectivischen Beziehung der reellen Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe in der reinen Geometrie und die Einführung der Zahlen in die reine Geometrie.

Von

P. E. Neumayr.

I.

Die Aufgabe des ersten Theiles dieser Abhandlung ist die Darstellung eines Capitels aus der reinen Geometrie mit Rücksicht auf die Bedenken, die gegen die Form, in welcher v. Staudt dasselbe behandelt hat, sich geltend gemacht haben, und mit Verwertung der Winke, die in neuester Zeit in dieser Richtung gegeben wurden. Dabei mussten des Zusammenhanges wegen die Fundamentalsätze wiederholt werden; doch glaubte ich die uneigentlichen Elemente nicht besonders erwähnen zu müssen, da auch v. Staudt die Gleichberechtigung derselben von vorne herein nachgewiesen hat.[1])

Der Kürze wegen sei hier erwähnt, dass durchaus A, B, C, ... Punkte, a, b, c, ... Gerade, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... Flächen bedeuten; soll im Allgemeinen eine Art dieser Elemente bezeichnet werden, so dienen dazu die Buchstaben α, β, γ, ...

[1]) Geometrie der Lage von Dr. Georg Karl Christian v. Staudt; Nürnberg 1847, § 5. — In weiteren Citaten bedeutet St. G. das genannte Büchlein, während St. B. die „Beiträge zur Geometrie der Lage" von demselben Verfasser (Nürnberg 1856 bis 1860) bezeichnet.

§ 1. Fundamentalsätze.

I.

α) Wenn zwei Dreiecke ganz in zwei verschiedenen Ebenen liegen, aber je zwei homologe Seiten sich schneiden, so gehen die Verbindungslinien der homologen Ecken durch einen Punkt. [1])

Beweis. Sind A B C und A_1 B_1 C_1 die beiden Dreiecke, so schneiden sich nach der Voraussetzung A B und A_1 B_1 in C', B C und B_1 C_1 in A', C A und C_1 A_1 in B', also liegen AA_1 und BB_1, BB_1 und CC_1, CC_1 und AA_1 in je einer Ebene, also gehen AA_1, BB_1, CC_1 durch den diesen drei Ebenen gemeinsamen Punkt.

α') Wenn zwei Dreiflache ganz zwei verschiedenen Strahlenbündeln angehören, aber je zwei homologe Kanten sich schneiden, so liegen die Schnittlinien der homologen Flächen in einer Ebene. [1])

Der Satz ist in dieser Form selbstverständlich.

α_1) Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene liegen, aber kein Element gemeinsam haben, und die drei Schnittpunkte der homologen Seiten in einer Geraden liegen, welche keine der Dreiecksseiten ist, so gehen die Verbindungslinien der homologen Ecken durch einen Punkt. [2])

Beweis. Bezeichnen wir wieder, wie oben, mit A', B', C'

α'_1) Wenn zwei Dreiseite in einer Ebene liegen, aber kein Element gemeinsam haben, und die drei Verbindungslinien der homologen Ecken durch einen Punkt gehen, welcher kein Eckpunkt der Dreiseite ist, so liegen die Schnittpunkte der homologen Seiten in einer Geraden. [2])

Beweis. Bezeichnen wir die Ecken der Dreiseite mit A,

---

[1]) St. G. Nr. 87.

[2]) St. G. Nr. 90.

die Schnittpunkte der homologen Seiten, so liegen nach der Voraussetzung $A' B' C'$ in einer Geraden. Denkt man sich nun durch diese Gerade eine neue Ebene gelegt und auf derselben ein Dreieck $A_2 B_2 C_2$ verzeichnet, dessen Seiten beziehungsweise durch $A' B' C'$ gehen, so schneiden sich $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ in einem Punkte; es sind also AA_1, BB_1, CC_1 die Projectionen der Geraden AA_2, BB_2, CC_2 von jenem Punkte auf die ursprüngliche Ebene, müssen sich also wie letztere in einem Punkte schneiden.

B, C und A_1, B_1, C_1, und den Durchschnittspunkt von AA_1, BB_1, CC_1 mit S, projiciren dann das Dreieck ABC aus einem beliebigen Punkte M und das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ aus einem anderen Punkte M_1 der Geraden MS, so entstehen zwei Dreikante $M(ABC)$ und $M_1(A_1 B_1 C_1)$, von denen je zwei homologe Kanten beziehungsweise in den Punkten A_2, B_2, C_2 sich schneiden; also liegen die Durchschnitte der homologen Flächen der Dreikante in der Ebene des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ und in der Geraden, in welcher diese Ebene die ursprüngliche schneidet, die Schnittpunkte der homologen Seiten der Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$.

II.

α) Wenn zwei vollständige ebene Vierecke ganz in zwei verschiedenen Ebenen liegen und fünf Seiten des einen Vierecks die homologen Seiten des anderen schneiden, so gehen die Verbindungslinien der homologen Ecken durch einen Punkt und es schneiden sich auch die beiden übrigen Seiten. [1])

α') Wenn zwei vollständige Vierflache ganz zwei verschiedenen Strahlbündeln angehören und fünf Kanten des einen Vierflaches die homologen Kanten des andern scheiden, so liegen die Durchschnittslienien der homologen Flächen in einer Ebene, und es schneiden sich auch die beiden übrigen Kanten. [1])

[1]) St. G. Nr. 88.

Beweis. Seien ABCD und $A_1 B_1 C_1 D_1$ die zwei Vierecke, und schneiden sich AB und $A_1 B_1$, AC und $A_1 C_1$, AD und $A_1 D_1$, BC und $B_1 C_1$, BD und $B_1 D_1$, in je einem Punkte; so gehen AA_1, BB_1, CC_1 durch einen Punkt, ebenso AA_1, CC_1, DD_1, also auch BB_1, CC_1, DD_1, also scheiden sich auch CD und $C_1 D_1$.

α_1) Wenn zwei vollständige Vierecke in einerlei Ebene liegen und die Schnittpunkte von fünf Seiten des einen Viereckes mit den homologen Seiten des anderen in einer Geraden liegen, welche durch keinen der Eckpunkte geht, so gehen die Verbindungslienien der homologen Ecken durch einen Punkt und die beiden übrigen Seiten schneiden sich ebenfalls in einem Punkte jener Geraden. [1])

Beweis. Dieser Satz lässt sich ganz ähnlich wie der nebenstehende auf die früheren Sätze zurückführen.

α'_1) Wenn zwei vollständige Vierseite in einerlei Ebene liegen und die Verbindungslienien von fünf Ecken des einen Vierseits mit den homologen Ecken des anderen durch einen Punkt gehen, welcher auf keiner der Seiten liegt so schneiden sich die homologen Seiten auf einer Geraden, und die Verbindungslinie der beiden übrigen Ecken geht durch denselben Punkt. [1])

Diese beiden Sätze werden ganz ähnlich wie bei beiden vorhergehenden auf die entsprechenden Sätze I zurückgeführt.

Ein specieller Fall der Sätze II erlaubt noch eine andere Ausdrucksweise, wie folgt:

α) und α_1) Wenn auf einer Geraden g drei feste Punkte A, B, C sich befinden und ein beliebiges ebenes Viereck so

α') Wenn durch eine Gerade g drei bestimmte Ebenen 𝔄, 𝔅, ℭ gelegt sind, und ein beliebiges Vierflach so con-

[1]) St. G. Nr. 91.

construirt wird, dass durch A und B je zwei Seiten, durch C aber eine Seite desselben geht, so schneidet die sechste Seite des Vierecks die Gerade g in einem ganz bestimmten Punkte D. [1])

struirt wird, dass auf 𝔄 und 𝔅 je zwei Kanten, auf ℭ aber eine Kante desselben liegt, so bestimmt die sechste Kante mit g eine feste Ebene 𝔇.

α'_1) Wenn durch einen Punkt G drei Gerade a, b, c in einer Ebene gegeben sind und ein beliebiges Vierseit so construirt wird, dass auf a und b je zwei Ecken, auf c aber eine Ecke desselben liegt, so liegt die sechste Ecke des Vierseits auf einer festen durch G gehenden Geraden d.

§ 2. Harmonische Elemente. [2])

Definition und Bezeichnungen.

α) Vier Punkte A B C D auf einer Geraden heissen harmonisch, wenn sie so liegen, dass es möglich ist, ein vollständiges ebenes Viereck zu construiren, von dem je zwei Seiten durch A und B, je eine Seite durch C und D geht.

α') Vier Ebenen 𝔄 𝔅 ℭ 𝔇 durch eine Gerade heissen harmonisch, wenn sie so liegen, dass es möglich ist, ein vollständiges Vierflach zu construiren, von dem je zwei Kanten auf 𝔄 und 𝔅, je eine Kante auf ℭ und 𝔇 liegt. [3])

---

[1]) St. G. Nr. 93.

[2]) St. G. § 8.

[3]) *Der nachfolgende Satz zeigt die Identität dieser Definition mit der gewöhnlich gebrauchten; diese Form wurde hier vorgezogen, weil sie alle drei Arten von Elementen als gleichberechtigt erscheinen lässt.* — v. Staudt und nach ihm Lyroth schreiben die harmonischen Elemente in der Ordnung $\alpha\ \gamma\ \beta\ \delta$; hier wurde jedoch die Schreibweise beibehalten, die in der neueren Geometrie üblich geworden.

α_1) Ist gleichlautend mit α.

α'_1) Vier Strahlen a b c d durch einen Punkt in einer Ebene heissen harmonisch, wenn sie so liegen, dass es möglich ist, ein Vierseit zu construiren, von dem je zwei Ecken auf a und b, je eine Ecke auf c und d liegt. [1])

Aus diesen Definitionen erhellt unmittelbar, dass, wenn $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier harmonische Elemente sind, dasselbe auch gilt von $\alpha\ \beta\ \delta\ \gamma$, $\beta\ \alpha\ \gamma\ \delta$, $\beta\ \alpha\ \delta\ \gamma$.

Von vier harmonischen Elementen sind drei ($\alpha\ \beta\ \gamma$) willkürlich, das vierte δ ist durch die drei früheren bestimmt.

Man sagt auch: δ ist das vierte harmonische Element zu den drei gegebenen Elementen $\alpha\ \beta\ \gamma$ u. s. w. Die Elemente α und β und ebenso γ und δ heissen einander zugeordnet.

Beziehungen zwischen harmonischen Gebilden.

I.

α) und α_1) Werden vier harmonische Punkte mit einem Punkte verbunden, der nicht auf der Geraden liegt, so sind die vier Verbindungsstrahlen harmonisch.

Beweis. Seien ABCD vier harmonische Punkte auf der Geraden m, S ein beliebiger Punkt ausserhalb derselben, sei ferner SA=a, SB=b, SC=c, SD=d. Zieht man nun durch A eine beliebige

α') Werden vier harmonische Ebenen durch eine neue Ebene geschnitten (jedoch nicht in ihrer gemeinsamen Schnittlinie), so bilden die entstehenden Schnittlinien vier harmonische Strahlen.

Beweis. Seien $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ vier harmonische Ebenen durch die Gerade m und $\mathfrak{S}$ eine neue Ebene, die mit m nur einen Punkt (Z) gemein hat und deren Schnittlinien mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ beziehungsweise a, b, c, d

[1]) Vergl. pag. 148, Anm. 3.

Gerade f, welche b in M und c in N schneidet, zieht dann BM=g, welche a in P schneidet, so muss PM=h als sechste Seite des Viereckes MNPS durch D gehen.

Nun ist mfgh ein Vierseit, von dem zwei Ecken (mf=A und hg=P) auf a, zwei andere (mg=B und fh=M) auf b liegen, während eine Ecke (fg=N) auf c und eine andere (hm=D) auf d liegt.

heissen; construirt man nun ein Vierflach, welches seine Spitze auf m, aber nicht in Z hat, so dass zwei Kanten desselben in der Ebene 𝔄, zwei in der Ebene 𝔅, je eine in den Ebenen 𝔈 und 𝔇 liegen, so bilden die Schnittlinien dieses Vierflaches mit 𝔖 ein Vierseit, von dem je zwei Ecken auf a und b und je eine Ecke auf c und d liegt.

α'_1) Werden vier harmonische Strahlen durch eine Gerade geschnitten (die nicht durch den Träger des harmonischen Gebildes geht), so sind die vier Schnittpunkte harmonisch.

Der Beweis besteht in einer einfachen Umkehrung des für den reciproken Satz gegebenen Beweises.

Aus diesen Sätzen ergeben sich eine Reihe ähnlicher als Folgesätze. Auch sieht man jetzt ein, dass es genügt, die folgenden allgemeinen Sätze für eine Art von Elementen zu beweisen.

II.

Sind $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier harmonische Elemente, so sind die Elemente α und β durch die Elemente γ und δ getrennt. [1])

Beweis (für vier harmonische Punkte). Wir setzen hiebei einen Satz axiomatischen Charakters voraus, der also lautet: „In einem Dreiecke ABN muss eine Gerade m, welche

[1]) St. G. Nr. 93.

AN zwischen A und N, BN zwischen B und N trifft, AB ausserhalb A und B treffen.“ [1])

Seien nun ABC drei Punkte auf einer Geraden g und zwar möge C zwischen A und B liegen; verbindet man nun die drei genannten Punkte mit einem Punkte N, welcher nicht auf der Geraden g liegt, und wählt auf NC einen beliebigen Punkt Q zwischen C und N, so muss AQ die Gerade BN in einem Punkte P zwischen B und N und BQ die Gerade A N in einem Punkte M zwischen A und N, also MP die Gerade AB in einem Punkte D ausserhalb AB treffen. — Aehnlich beweisst man, dass D zwischen A und B liegt, wenn C ausserhalb A und B angenommen wird.

III.

Sollen $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier harmonische Elemente sein und bleiben zwei zugeordnete Elemente fest, so können die beiden andern nur in entgegengesetztem Sinne sich bewegen. [2])

Beweis (für einen Fall bei vier harmonischen Punkten). Seien ABCD vier harmonische Punkte und zwar C zwischen A und B gelegen; sei ferner EFGH ein Viereck, so dass EF und GH durch A, EH und FG durch B, FH und EG beziehungsweise durch C und D gehen. Nimmt man nun einen Punkt C′ zwischen C und B, so schneidet FC′ die Gerade HG zwischen H und G in H′ also BH′ die die Gerade EF zwischen E und F in E′, also E′G den Träger der harmonischen Punkte zwischen B und D in D′. Aehnlich geht der Beweis in den übrigen möglichen Fällen.

IV.

Sollen $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier harmonische Elemente sein und bleiben α und γ oder β und δ ungeändert, so können die beiden andern Elemente nur im selben Sinne sich bewegen. [2])

---

[1]) C liegt zwischen A und B soll heissen A und B sind durch C und den unendlich fernen Punkt der Geraden AB getrennt.

[2]) Dieser Satz findet sich in VII B. der Annalen von Clebsch und Neumann S. 531.

Der Beweis beruht auf ähnlichen Principien, wie der vorhergehende.

V.

Sind $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier harmonische Elemente, so liegen auch $\gamma\ \delta\ \alpha\ \beta$ harmonisch.

Beweis. Sind ABCD vier harmonische Punkte, EFGH ein Viereck von dem die Seiten EF und GH durch A, FG und HE durch B gehen, hingegen die Seite EG den Punkt C und FH den Punkt D trifft, und bezeichnet man den Schnittpunkt von EG und FH mit K, so liegen die Schnittpunkte der homologen Seiten der Dreiecke EFB und DCK in einer Geraden, also gehen die Lienien ED, FC, BK durch einen Punkt L. Nun ist EKFL ein Viereck, von dem je zwei Seiten durch C und D gehen und je eine durch A und B [1]).

Aus den bisher über die harmonischen Elemente angeführten Sätzen ergeben sich sofort eine Reihe oft gebrauchter Folgerungen, z. B.

Weiss man von einem der Gebilde $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha\beta\delta\gamma$, $\beta\alpha\gamma\delta$, $\beta\alpha\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha\beta$, $\gamma\delta\beta\alpha$, $\delta\gamma\alpha\beta$, $\delta\gamma\beta\alpha$, dass es ein harmonisches ist, so folgt dasselbe auch für alle übrigen.

Zur Bestimmung des vierten Elementes eines harmonischen Gebildes ist notwendig und hinreichend, dass drei Elemente desselben gegeben sind und angegeben ist, von welchem derselben das vierte getrennt ist.

Wenn $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ und $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$ zwei ungleichartige harmonische Gebilde sind und die Elemente α_1, β_1, γ_1 bezüglich in den Elementen α, β, γ liegen, so liegt auch δ_1 in δ; u. s. w.

§ 3. Das vollständige Grundgebilde erster Stufe und die Reihe der harmonischen Elemente.

Stetigkeit der Gebilde [2]). Der Geraden schreiben wir Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder, wie wir gewöhn-

[1]) St. G. Nr. 96.

[2]) Obwohl diese Abhandlung eigentlich sich in jeder Geometrie unmittelbar an die Definition der Grundgebilde erster Stufe anschliessen

lich sagen, Stetigkeit zu, auch wenn wir selbe nicht als Element des Raumes, sondern als Grundgebilde erster Stufe, d. h. als aus Punkten bestehend auffassen. Da aber der Ausdruck: „die Gerade ist eine stetige Reihe von Punkten" ohne weitere Erklärung nichts Geometrisches aussagt, so ist es namentlich für die folgende Ueberlegung [1]) wichtig, den Satz in anderer Form auszusprechen.

Verstehen wir unter einem Stücke einer Geraden entweder ein wirklich endliches Stück oder auch ein unendliches (welches seine beiden Enden im Endlichen hat, aber den unendlich fernen Punkt in sich enthält), so können wir die Stetigkeit innerhalb eines solchen Stückes definiren durch das folgende

Axiom: [2]) „Zerfallen alle Punkte eines Stückes einer Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jede Klasse für sich wieder ein Stück derselben Geraden ist, so existirt immer ein und nur ein Punkt, der diese Eintheilung der Punkte in zwei Klassen hervorbringt." [3])

Anmerkung. Diesen Theilungspunkt haben beide Stücke, solange sie vereint liegen, gemein; die Frage, wohin derselbe gehöre, wenn man sich die beiden Stücke getrennt denkt, ist eine widersinnige, da man zugleich mit der Trennung auch die Stetigkeit an dieser Stelle aufgehoben denken muss.

Aus dieser Definition lässt sich sogleich eine Folgerung ziehen: Es existirt immer ein Punkt, welcher diese Trennung hervorbringt, heisst mit anderen Worten, man kann nie die

---

sollte, schalte ich selbe wegen des Zusammenhanges mit dem Folgenden hier ein. — Der Kürze wegen spreche ich hier nur von der Geraden, da die Uebertragung des hier Gesagten auf die anderen Grundgebilde erster Stufe sich von selbst ergibt.

[1]) F. Klein, Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann VII. B. S. 531.

[2]) Es kann hier nicht untersucht werden, ob das Wort „Axiom" im strengen Sinne zu nehmen oder ob der Satz eigentlich ein „Postulat" ist; vgl. hierüber F. Klein l. c. § 1.

[3]) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872.

Theilung zwischen zwei Punkten hindurch erfolgt denken; der Grund davon kann nicht der sein, dass die zwei Punkte ihrer Lage nach sich nicht unterscheiden; denn in diesem Falle müsste man sagen, die Theilung werde durch zwei Punkte hervorgebracht; es muss also notwendig der Grund der sein, dass zwischen zwei Punkten immer noch ein Punkt sich befindet. Daraus ergibt sich Folgendes:

a) Zwischen zwei verschiedenen Punkten befinden sich immer noch unendlich viele Punkte [1]).

b) Nehme ich auf einer Geraden zwei beliebige Punkte an, so kann ich immer die Gerade so theilen, dass der eine der Punkte dem einen, der andere dem andern Theile angehört; — denn als Theilungspunkt kann ja einer der unendlich vielen Zwischenpunkte dienen.

Grenze einer Elementenreihe. Nach dem Vorhergehenden ist es möglich, dass eine unendliche Reihe von Punkten definirt ist, welche fortwährend in demselben Sinne sich fortsetzt, dabei aber nie einen bestimmten Punkt P überschreitet, während sie doch jeden vor P befindlichen Punkt überschreitet. In diesem Falle heisst P ein Grenzpunkt der Reihe.

Umgekehrt ist der Punkt P völlig bestimmt [2]), wenn er als Grenzpunkt einer bestimmten unendlichen Punktreihe definirt ist, die fortwährend im selben Sinne sich fortsetzt; denn er ist dann der Punkt, welcher die Gerade, die als Träger jener Punktreihe fungirt, in zwei Theile theilt, wovon der eine mit der Punktreihe keinen Punkt gemeinsam hat, während alle Punkte der Reihe mit Punkten des anderen Theiles zusammenfallen.

Die Reihe der harmonischen Elemente. Nimmt man auf einer Geraden drei beliebige Punkte an und con-

---

[1]) Ich bemerke ausdrücklich, dass dieses nicht eine der stetigen Punktreihe allein eigenthümliche Eigenschaft ist, sondern dass sie nur auch eine notwendige Folge der Stetigkeit ist.

[2]) Klein (l. c.) definirt die Stetigkeit durch die Forderung dieser Bestimmtheit.

struirt dazu den vierten harmonischen, wählt aus den nun erhaltenen vier Punkten drei aus und construirt dazu den vierten harmonischen u. s. f., so gelangt man nach und nach zu einer beliebig grossen Anzahl von Punkten. Die Gesammtheit dieser Punkte möge die Reihe der harmonischen Punkte heissen. Bedenkt man nun, dass der zu drei gegebenen Punkten vierte harmonische mit keinem der drei Punkte zusammenfällt und je nach der Anordnung, die man den drei Punkten ertheilen mag, einem jeden der drei Segmente angehört, in welche die Gerade durch die drei Punkte getheilt wird [1]), so sieht man, dass man die Reihe der harmonischen Punkte über die ganze Gerade sich erstreckend, und die Punkte der Reihe selbst einander beliebig nahe denken kann. Es frägt sich hier aber darum, ob alle Punkte der Geraden der Reihe der harmonischen Punkte angehören oder nicht. Als Vorbereitung zur Antwort auf diese Frage dient der folgende Satz:

„In einer vollständigen [2]) Punktreihe gibt es keine zwei verschiedenen Punkte F und G, zwischen welchen nicht Punkte der Reihe der harmonischen Punkte liegen, wie immer die drei ursprünglichen Punkte der Reihe angenommen werden.“ [3])

Der Beweis für diesen Satz ist vollständig, wenn er für die folgenden vier Fälle hergestellt ist:

a) Der Punkt F und der Punkt G gehören selbst noch der harmonischen Reihe an. In diesem Falle sieht man unmittelbar, dass, wenn A ein beliebiger Punkt der Reihe ausserhalb des Segmentes FG ist, und man den Punkt D so construirt, dass FGAD harmonisch liegen, der Punkt D zwischen F und G liegen muss.

---

[1]) Vergl. § 2.

[2]) D. i. im Unendlichen geschlossenen.

[3]) Diesen Satz haben Lyroth und Zeuthen unabhängig von einander gefunden; er ist mitgetheilt von F. Klein in der schon citirten Abhandlung.

b) F gehört der Reihe der harmonischen Punkte an, G aber nicht. Ist dann I ein Punkt der Reihe (G zwischen F und I), so müssen nach a) zwischen F und I Punkte der Reihe liegen; man kann also annehmen, dass zwischen G und I in beliebiger Nähe von G noch Punkte der Reihe liegen, da man sonst die Grenze G noch weiter vorschieben könnte. Ein solcher Punkt der Reihe zwischen G und I sei B, und zwar möge sich B so nahe an G befinden, dass, wenn 1) FBAG harmonisch liegen, A zwischen B und I liegt. Construirt man nun 2) FBIC harmonisch, so folgt unmittelbar (§ 2, III), dass C zwischen F und G liegt.

c) Weder F noch G seien Punkte der Reihe. Dann kann man wieder annehmen, dass ausserhalb FG in beliebiger Nähe von F und G Punkte der Reihe vorkommen. Sei nun A ein Punkt der Reihe (F zwischen A und G gelegen) und seien die Gebilde 1) FGAH und 2) AGFI harmonisch; sei ferner B ein Punkt der Reihe zwischen G und I (wenn man nämlich A so angenommen hat, dass nach 2) G zwischen F und I liegt); construirt man dann 3) AHBB' harmonisch, so liegt B' zwischen A und F (wie sich aus einer Vergleichung von 1) und 3) ergibt). Nimmt man nun zwischen B' und F einen Punkt C, welcher der Reihe angehört, und construirt 4) AHCK harmonisch, so liegt K zwischen B und G (man vergleiche 4) mit 3) und 4 mit 1). Sei dann noch 5) ICAL harmonisch, so liegt L zwischen H und G (vergl. 5) mit 2) und 5) mit 4). Endlich sei 6) BCAD ein harmonisches Gebilde, also D ein Punkt der Reihe, so liegt D zwischen H und L (vergl. 6) mit 3) und 6) mit 5), also auch zwischen F und G.

d) Wären die Punkte F und G nicht einmal wirklich verzeichnet, sondern F als der Grenzpunkt einer Reihe von Punkten $M M' M'' \ldots$ und G als der Grenzpunkt einer Reihe $N N' N'' \ldots$ definirt, so müsste man um das Intervall FG, welches keinen Punkt der harmonischen Reihe enthalten soll, zu bezeichnen die zwei Fälle unterscheiden, ob die Reihen $M^{(n)}$ und $N^{(n)}$ gleich oder entgegengesetzt verlaufen. Im ersteren Falle ersetze man das Intervall durch F_1 $N^{(m)}$, im letzteren Falle durch F_1 G_1 wenn nämlich F_1 ein Punkt ist, den die Reihe $M^{(n)}$ nicht überschreitet und G_1 ein Punkt, den die Reihe $N^{(m)}$ nicht überschreitet. Innerhalb dieser neuen Intervalle müssen dann Punkte der Reihe liegen, also auch innerhalb F G.

Wir können nun noch einen Schritt weiter gehen; da nämlich die Reihe der harmonischen Punkte offenbar discret ist, gibt es in der Geraden natürlich auch Punkte, der genannten Reihe nicht angehören. Wir können aber Folgendes behaupten:

„Jeder Punkt der Geraden, der nicht unmittelbar der der Reihe der harmonischen Punkte angehört, kann als Grenzpunkt eines bestimmten Theiles dieser Reihe definirt werden."

Diese Behauptung ergibt sich aus dem schon Gesagten sofort; denn sei P ein solcher Punkt und N ein Punkt in der Nähe, der der Reihe angehört, so lässt sich stets eine bestimmte Art die Reihe fortzusetzen angeben, so dass alle durch diese Fortsetzung erhaltenen Punkte zwischen N und P liegen, und dass auch jeder folgende Punkt zwischen dem vorhergehenden und dem Punkte P liegt.

Fassen wir demnach nochmals das Gesagte zusammen, so können wir das Verhältniss zwischen der Gesammtheit der Punkte der Geraden und der Reihe der harmonischen Punkte also angeben:

„Jeder Punkt der Geraden ist entweder unmittelbar zur Reihe der harmonischen Punkte gehörig, oder ein Grenzpunkt eines bestimmten Theiles derselben."

§ 4. Projectivische Verwandschaft zwischen einförmigen Gebilden [1].

Zwei Grundgebilde erster Stufe heissen zu einander projectivisch (π), wenn sie so auf einander bezogen sind,

[1] St. G. § 9.

dass jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde in dem andern und ausserdem jedem Grenzelemente einer Reihe harmonischer Elemente in dem einen das Grenzelement der entsprechenden Reihe in dem andern Gebilde entspricht. [1])

Wenn von beliebig vielen Gebilden jedes folgende einem der vorhergehenden projectivisch ist, so sind alle zu einander projectivisch.

Will man zwei einförmige Gebilde projectivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen des einen drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, beliebig annehmen, wodurch aber dann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element im anderen Gebilde zugewiesen ist.

Zwei projectivische einförmige Gebilde können auch perspectivisch liegen. Das ergibt sich aus den bekannten Definitionen der perspectivischen Lage, wenn man folgenden Satz zu Hilfe nimmt:

„Wenn zwei verschiedene projectivische Grundgebilde gegeben sind, so dass drei Elemente des einen Gebildes
$\left\{\begin{array}{l}\text{in den entsprechenden Elementen des andern liegen}\\ \text{durch die entsprechenden Elemente des andern gehen}\end{array}\right\}$, so
$\left\{\begin{array}{l}\text{liegen alle Elemente des einen in den entsprechenden}\\ \text{gehen alle Elemente des einen durch die entsprenden}\end{array}\right\}$ des andern.

Der Beweis wird hier für den Fall gegeben, dass das eine Gebilde eine Punktreihe, das dazu projectivische ein Strahlbüschel ist; für alle anderen Fälle kann der Beweis diesem nachgebildet werden.

Sei also A, B, C . . . eine Punktreihe und a, b, c . . . ein Strahlbüschel, die projectivisch auf einander bezogen sind, und ausserdem noch a, b, c beziehungsweise durch die Punkte A, B, C gehend, so folgt unmittelbar aus den Sätzen über

[1]) Die Notwendigkeit dieses Zusatzes zu der von v. Staudt gegebenen Definition hat F. Klein nachgewiesen. Mathematische Annalen von Clebsch und Neumann VII. B S. 536.

die harmonischen Gebilde [1]), dass alle jene Strahlen, welche man von a, b, c ausgehend durch Construction des vierten harmonischen Strahles unmittelbar erhält, durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen müssen; aber auch von jenen Strahlen, die nur als Grenzstrahlen eines bestimmten Theiles der Reihe der harmonischen Punkte definirt sind, lässt sich auf indirectem Wege leicht zeigen, dass sie durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen; denn sei p ein solcher Strahl und P der ihm entsprechende Punkt, so können, wenn p nicht durch P gehen soll, nur zwei Fälle eintreten, entweder muss p die Gerade vor P treffen (wenn man nämlich das gerade Gebilde in dem Sinne beschrieben denkt, in welchem die Reihe der harmonischen Elemente sich fortpflanzt, welche eines unserer Grenzelemente (z. B. P) definirt) oder es muss der Punkt, in welchem p das gerade Gebilde schneidet, hinter P liegen; beide Fälle sind aber unmöglich; denn ginge:

1) p durch einen Punkt N, der vor P liegt, so müssten zwischen N und P Punkte der Reihe liegen, deren Grenzelement P ist; durch diese Punkte müssten die entsprechenden Strahlen des Büschels gehen, also könnte p nicht der Grenzstrahl der entsprechenden Reihe sein. — Würde hingegen

2) p durch einen hinter P gelegenen Punkt Q gehen, so müssten Strahlen des Büschels die Gerade zwischen P und Q treffen, die der Reihe angehören, als deren Grenzstrahl p definirt ist; diese Strahlen müssten durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen; solche finden sich aber zwischen P und Q nicht.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich unmittelbar ein Satz, der im Vereine mit seiner Umkehrung geeignet ist, nicht nur den Namen „projectivische Beziehung" zu erklären, sondern auch das Wesen dieser Beziehung klarzustellen. Derselbe lautet also:

„Hat man eine Reihe von Grundgebilden erster Stufe,

[1]) Vergl. oben § 2.

so dass jedes folgende als Schnitt oder Schein des vorhergehenden betrachtet werden kann, so sind alle diese Gebilde zu einander projectivisch."

Der umgekehrte Satz lässt sich also aussprechen:

„Sind zwei Grundgebilde zu einander projectivisch, so kann stets das eine als das erste und das andere als das letzte einer Reihe von Gebilden dargestellt werden, in welcher jedes folgende Gebilde ein Schnitt oder Schein des vorhergehenden ist."

Der Beweis des ersten Satzes ergibt sich aus den Sätzen über harmonische Elemente von selbst.

Für den zweiten Satz ist, wenn man den vorhergehenden Satz mit berücksichtiget, der Beweis vollständig, wenn er für zwei projectivische Punktreihen gegeben ist, die man selbst noch in einer Ebene liegend annehmen kann.

Seien also $A B C \ldots.$ auf dem Träger $\mathfrak{A}$ und $A_1 B_1 C_1 \ldots$ auf dem Träger $\mathfrak{A}_1$ zwei projectivische Punktreihen in einer Ebene. Zieht man nun durch A eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}_2$, ferner die Gerade $A A_1$ nimmt auf dieser einen beliebigen neuen Punkt M an, verbindet M mit B_1 und C_1, bezeichnet die Punke, in welchem $M B_1$ und $M C_1$ die Gerade $\mathfrak{A}_2$ schneiden, mit B_2 und C_2, zieht die Geraden $B_2 B$ und $C_2 C$ und bezeichnet den Schnittpunkt dieser zwei Geraden mit S, so findet man, dass von dem ursprünglichen Gebilde $A B C \ldots.$ der Büschel $S (A B C \ldots.)$ ein Schein, von diesem das Gebilde $A B_2 C_2 \ldots.$ ein Schnitt, von diesem der Büschel $M (A B_2 C_2 \ldots.)$ ein Schein und endlich von diesem $A_1 B_1 C_1 \ldots.$ ein Schnitt ist.

Durch die bisherigen Ueberlegungen wurden die Grundlagen der reinen projectivischen Geometrie so weit begründet, dass man die Identität zwischen der gewöhnlichen und unserer Definition der projectivischen Beziehung einsieht, und somit die über diese Beziehung geltenden Sätze auch in unserem Systeme beweisbar erkennen muss. Es ist somit die Aufgabe des ersten Theiles dieser Arbeit abgeschlossen.

II.

Die allgemeine Arithmetik gibt in ihrer Fundamentaldefinition nicht den Inhalt des Begriffes „Zahl" an, sondern bestimmt allein den Umfang desselben. Zahlen heissen alle jene Objecte, welche den dort näher definirten Operationen sich fügen und dabei dieselben Gesetze befolgen, welche man an den „natürlichen Zahlen" nachweisen kann. Die Reihe der rein mentalen Objecte nun, welchen diese Eigenschaft zukommt, wird in der allgemeinen Arithmetik vollständig behandelt; dieselben bilden auch weiterhin den Gegenstand der reinen Mathematik.

Sind so die abstracten Zahlen erschöpft, dann entsteht die weitere Frage, ob diesen bisher rein begrifflichen Objecten ein reales Substrat entpreche oder mit anderen Worten, ob es unter dem Realen Dinge oder Beziehungen gebe, die man derart untereinander verknüpfen könne, dass auch ihnen nach der oben angedeuteten Wortdefinition der Name „Zahl" zukomme. Mit der Erörterung dieser Frage bahnen wir den Weg zur berechtigten Anwendung der Mathematik auf reale Gebiete.

Das nächstliegende dieser Gebiete ist die Geometrie; in ihr hat schon Euklid ein System von Operationen gelehrt, welches dem der gemeinen arithmetischen vier Species genau entspricht [1]); er verknüpft dabei die Strecken ausschliesslich in Bezug auf ihre absolute Grösse. Ein anderes für die Geometrie äusserst wichtiges System von Operationen erhält man durch gleichzeitige Verwertung von Grösse und Richtung der Strecken in der Ebene, wie Argand, Bellavitis und Moebius gelehrt haben [2]). Noch weitere Systeme entsprechen der Rechnung mit höheren complexen Zahlen.

Auffallend bei allen diesen Systemen muss es erscheinen, dass alle schon von vorne herein auf den Begriff der

---

[1]) H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867; § 18.

[2]) Ebendaselbst § 20.

Grösse [1]) basirt sind, da doch dieser Begriff kein der allgemeinen Arithmetik wesentlich angehöriger ist. In der That war es vor Staudt nicht gelungen, ein reales Substrat der Zahlenlehre zu finden, das nicht den Begriff der Grösse mit sich brächte [2]); erst das von v. Staudt erfundene „Rechnen mit Würfen“ leistet dieses.

Indem also der zweite Theil der vorliegenden Arbeit eine Darstellung dieses „Rechnens“ ist, schliesst er sich in so ferne an den ersten Theil an, als dort das grundlegende Capitel der reinen Geometrie dargestellt wurde, hier aber (unter Voraussetzung der Lehren der reinen Geometrie) die Grundlage für die Anwendung der reinen Mathematik auf geometrische Probleme untersucht wird.

§ 1. Würfe.

Unter einem Wurfe versteht man den Inbegriff von vier Elementen eines und desselben Elementargebildes mit Rücksicht auf die Ordnung, in der dieselben angeschrieben werden [3]).

Zwei Würfe heissen projectivisch, wenn die beiden Grund-Gebilde, in denen sie liegen, projectivisch so auf einander bezogen werden können, dass den vier Elementen des einen Wurfes die vier Elemente des andern in derselben Ordnung entsprechen [3]).

Aus diesen Definitionen ergeben sich auf rein geometrischem Wege eine Reihe von Sätzen über die Würfe, z. B.:

Zwei Würfe, welche einem und demselben dritten Wurfe projectivisch sind, sind unter einander projectivisch [3]).

Wenn man in einem Wurfe zwei Elemente unter sich, sowie auch die beiden andern unter sich vertauscht, so ist

---

[1]) „Grösse“ wird hier im engeren Sinne genommen, wo es mit „Quantität“ gleichbedeutend ist.

[2]) Dadurch erklärt sich die unglückliche Definition „Mathematik ist die Wissenschaft von den Grössen.“

[3]) St. B. Nr. 24.

der neu entstehende Wurf dem ursprünglichen projectivisch [1]) es sind also unter den 24 Würfen, die aus 4 Elementen gebildet werden können, sechs Gruppen von je vier Würfen, die zu einander projectivisch sind [2]).

Sind die vier Elemente, aus denen der Wurf besteht, harmonisch gelegen, so heisst der Wurf ein harmonischer [2]).

Aus dieser Definition ergeben sich wieder eine Reihe von Sätzen, wie z. B.:

Alle harmonischen Würfe sind einander projectivisch [2]).

Ist einer von zwei projectivischen Würfen harmonisch, so ist es auch der andere [3]).

Ist unter den 24 Würfen aus vier Elementen einer harmonisch, so sind es deren acht [2]).

Der Inbegriff von drei verschiedenen Elementen, wovon eines zweimal angeschrieben ist, heisst ein uneigentlicher Wurf und zwar von der ersten Art, wenn das doppelte Element an der ersten und dritten oder an der zweiten und vierten Stelle steht; von der zweiten Art, wenn das doppelte Element an der ersten und zweiten oder an der dritten und vierten Stelle steht; von der dritten Art endlich, wenn das doppelte Element an den ersten und vierten oder an der zweiten und dritten Stelle steht [4]). Es sind also uneigentliche Würfe

erster Art $\alpha\beta\gamma\beta$ und $\beta\alpha\beta\gamma$
zweiter Art $\alpha\beta\gamma\gamma$ und $\gamma\gamma\alpha\beta$
dritter Art $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $\beta\alpha\alpha\gamma$

---

[1]) St. G. Nr. 119.

[2]) St. B. Nr. 24.

[3]) St. G. Nr. 117.

[4]) St. B. Nr. 256. — Die hier angebrachte Abänderung gegen die v. Staudt'sche Schreibweise bringt die wünschenswerte Uebereinstimmung mit der neueren Geometrie mit sich.

§ 2. Die eigentlichen Würfe sind Zahlen.

Diese Behauptung ist erwiesen, wenn wir ein System von geometrischen Operationeu definiren, die gestatten aus mehreren Würfen auf gesetzmässige Art neue abzuleiten, so dass die Gesetze dieser Operationen mit den für das Zahlenrechnen gültigen gesetzen übereinstimmen. Wir beginnen sogleich mit der Definition der

Gleichheit zweier Würfe.

Zwei Würfe sollen gleich heissen, wenn sie projectivisch sind [1]).

Nach dieser Definition ist es möglich, einen beliebigen Wurf durch einen andern zu ersetzen, der mit einem schon gegebenen Wurfe drei Elemente gemein hat, da man, wenn man zwei einförmige Grundgebilde projectivisch auf einander beziehen will, zu drei Elementen des einen die drei entsprechenden des andern beliebig annehmen kann.

Addition und Subtraction.

Sind $w_1 = \alpha\beta\gamma\delta_1$ und $w_2 = \alpha\beta\gamma\delta_2$ zwei Würfe in einem Elemsntargebilde und man bestimmt ein Element σ desselben Gebildes so, dass $\alpha\alpha_1 . \delta_1\, \delta_2 . \beta\sigma$ eine Involution ist, denn heisst der Wurf $\alpha\beta\gamma\sigma = w$ die Summe der beiden Würfe w_1 und w_2 $(w = w_1 + w_2)$ [2]),

Anmerkung. Bei dieser Construction der Summe kann es vorkommen, dass w ein uneigentlicher Wurf wird, für die folgenden Beweise ist dieser Fall ausgeschlossen, da die uneigentlichen Würfe im nächsten § eigens behandelt werden.

Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches. Die Richtigkeit dieses Satzes für die oben definirte Addition kann wie folgt bewiesen werden:

Sei wie früher $w_1 = \alpha\beta\gamma\delta_1$, $w_2 = \alpha\beta\gamma\delta_2$, $w = w_1 + w_2 = \alpha\beta\gamma\sigma$; nimmt man nun in einem andern oder in demselben

---

[1]) St. B. Nr. 256.

[2]) St. B. Nr. 258; J. Lüroth: das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen (mathematische Annalen von Clebsch und Neumann VIII. Bd.) Nr. 57.

Elementargebilde die drei Elemente $\alpha' \beta' \gamma'$ ganz beliebig an und construirt $w_1 = \alpha' \beta' \gamma' \delta'_1$, $w_2 = \alpha' \beta' \gamma' \delta'_2$, dann ist die Summe dieser beiden Würfe $w' = \alpha' \beta' \gamma' \sigma'$, wenn $\alpha \alpha'. \delta'_1 \delta'_2 . \beta' \sigma'$ eine Involution bilden.

Bezieht man nun beide Gebilde projectivisch so auf einander, dass den Elementen $\alpha \beta \gamma$ des ersten beziehungsweise die Elemente $a' \beta' \gamma'$ des zweiten entsprechen, so folgt aus $\alpha \beta \gamma \delta_1 = \alpha' \beta' \gamma' \delta'_1$ und $\alpha \beta \gamma \delta_2 = \alpha' \beta' \gamma' \delta'_2$

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta_1\ \delta_2 \text{ project. } \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'_1\ \delta'_2$$

und weil der Involution $\alpha \alpha.\ \delta_1 \delta_2.\ \beta \sigma$ wieder eine Involution entsprechen muss, entspricht auch dem Elemente σ das Element σ', also ist

$$\alpha \beta \gamma \delta_1\ \delta_2\ \sigma \text{ project. } \alpha' \beta' \gamma' \delta'_1\ \delta'_2\ \sigma',$$

woraus folgt $\alpha \beta \gamma \sigma = \alpha' \beta' \gamma' \sigma'$ oder $w' = w$ [1]).

Die Commutativität der zweigliedrigen Summe $(w_1 + w_2 = w_2 + w_1)$ folgt unmittelbar aus dem Umstande, dass bei der Construction von σ die beiden Elemente δ_1 und δ_2 symmetrisch benützt werden [1]).

Die Associativität der dreigliedrigen Summe $[(w_1 + w_2) + w_3 = (w_1 + w_3) + w_2 = w_1 + w_2 + w_3]$ ergibt sich aus folgender Ueberlegung:

Sei wieder $w_1 = \alpha \beta \gamma \delta_1$, $w_2 = \alpha \beta \gamma \delta_2$, $w_3 = \alpha \beta \gamma \delta_3$, und sei ausserdem gefunden worden: $w_1 + w_2 = \alpha \beta \gamma \sigma_3$, $w_1 + w_3 = \alpha \beta \gamma \sigma_2$, so müssen $\alpha \alpha.\ \delta_1 \delta_2.\ \beta \sigma_3$ und $\alpha \alpha.\ \delta_1 \delta_3.\ \beta \sigma_2$ Involutionen sein, woraus folgt [2])

$$\alpha\ \delta_2\ \sigma_2\ \delta_3\ \sigma_3\ \beta\ \sigma \text{ project. } \alpha\ \sigma_2\ \delta_2\ \sigma_3\ \delta_3\ \sigma\ \beta$$

d. h. $\alpha \alpha.\ \delta_2 \sigma_2.\ \beta \sigma$ und $\alpha \alpha.\ \delta_3 \sigma_3.\ \beta \sigma$ sind Involutionen. Daraus ergibt sich

$$\alpha \beta \gamma \delta_2 + \alpha \beta \gamma \sigma_2 = \alpha \beta \gamma \sigma \text{ oder } (w_1 + w_3) + w_2 = \alpha \beta \gamma \sigma$$
$$\alpha \beta \gamma \delta_3 + \alpha \beta \gamma \sigma_3 = \alpha \beta \gamma \sigma \text{ oder } w_3 + (w_1 + w_2) = \alpha \beta \gamma \sigma$$

also ist

$$w_2 + (w_1 + w_3) = w_3 + (w_1 + w_2) = w_1 + w_2 + w_3 \text{ }^{3})$$

---

[1]) Lüroth l. c.

[2]) Lüroth Nr. 54.

[3]) Lüroth Nr. 59, vergl. St. B. Nr. 259.

Der Unterschied (w_2) zweier Würfe (w und w_1) wird definirt durch die Forderung, dass $w_1 + w_2 = w$ sein soll[1]).

Dieser Forderung genügt stets ein und nur ein Wurf; denn, wenn $w = \alpha\beta\gamma\delta$ und $w_1 = \alpha\beta\gamma\delta_1$ angenommen wird und das Element δ_2, welches in dem involutorischen Gebilde $\alpha\alpha.\beta\delta\ldots..$ dem Elemente δ_1 zugeordnet ist, dann und nur dann ist $\alpha\beta\gamma\delta_2$ der gesuchte Wurf. Obige Construction ist aber bekanntlich eindeutig[2]).

Multiplication und Division.

Sind $w_1 = a\beta\gamma\delta_1$ und $w_2 = \alpha\beta\gamma\delta_2$ zwei Würfe in einem Elementargebilde und man bestimmt ein Element π desselben Gebildes so, dass $\alpha\beta.\delta_1\delta_2.\gamma\pi$ eine Involution ist, dann heisst der Wurf $\alpha\beta\gamma\pi = w$ das Product der beiden Würfe w_1 und w_2, $(w = w_1 \,.\, w_2)$[3]).

Gleiches mit Gleichem multiplicirt gibt Gleiches, was durch wörtliche Wiederholung des entsprechenden Beweises für Summen bewiesen wird[4]).

Die Commutativität des zweigliedrigen Productes $(w_1.w_2 = w_2.w_1)$ ergibt sich ebenfalls aus demselben Umstande, wie die Commutativität der zweigliedrigen Summe[5]).

Die Associativität des dreigliedrigen Productes lässt sich ebenfalls nachweisen; wir brauchen zu diesem Nachweise den folgenden

Hülfssatz. Das Produkt der zwei Würfe $\alpha\beta\gamma\mu$ und $\alpha\beta\mu\pi$ ist der Wurf $\alpha\beta\gamma\pi$. $(\alpha\beta\gamma\pi = \alpha\beta\gamma\mu \,.\, \alpha\beta\mu\pi)$.

Beweis. $\alpha\beta\gamma\pi = \alpha\beta\gamma\mu \,.\, \alpha\beta\gamma\nu$, wenn $\alpha\beta \,.\, \gamma\pi \,.\, \mu\nu$ eine Involution ist; dann ist aber $\alpha\beta\gamma\nu = \beta\alpha\pi\mu = \alpha\beta\mu\pi$, also $\alpha\beta\gamma\pi = \alpha\beta\gamma\mu \,.\, \alpha\beta\mu\pi$[5]).

---

1) St. B. Nr, 261.
2) Lüroth Nr. 60.
3) St. B. Nr. 268.
4) Lüroth Nr. 61.
5) Lüroth Nr. 62.

Dieses vorausgesetzt lässt sich die Associativität wie folgt beweisen:

Sei $w_1 = \alpha\beta\gamma\delta_1$, $w_2 = \alpha\beta\gamma\delta_2$, $w_3 = \alpha\beta\gamma\delta_3$, ferner $w_1 . w_2 = \alpha\beta\gamma\pi_3$ und $(w_1 . w_2) . w_3 = \alpha\beta\gamma\pi$, so ist wegen $\alpha\beta\gamma\delta_1 . \alpha\beta\gamma\delta_2 = \alpha\beta\gamma\pi_3$ das Gebilde $\alpha\beta . \delta_1\delta_2 . \gamma\pi_3$ ein involutorisches, also $w_2 = \alpha\beta\gamma\delta_2 = \beta\alpha\pi_3\delta_1 = \alpha\beta\delta_1\pi_3$; ferner ist wegen $\alpha\beta\gamma\pi_3 . \alpha\beta\gamma\delta_3 = \alpha\beta\gamma\pi$ $\alpha\beta . \pi_3\delta_3 . \gamma\pi$ eine Involution, also $w_3 = \alpha\beta\gamma\delta_3 = \beta\alpha\pi\pi_3 = \alpha\beta\pi_3\pi$, also nach dem Hülfssatze $w_2 w_3 = \alpha\beta\delta_1\pi_3 . \alpha\beta\pi_3\pi = \alpha\beta\delta_1\pi$, also $w_1 . (w_2 . w_3) = \alpha\beta\gamma\delta_1 . \alpha\beta\delta_1\pi = \alpha\beta\gamma\pi = (w_1 . w_2) . w_3$ [1].

Das distributive Princip $[w_1 (w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3]$ kann ebenfalls mit Benützung des vorigen Hülfssatzes nachgewiesen werden.

Sei $w_1 = \alpha\beta\gamma\delta_1$, $w_2 = \alpha\beta\delta_1\delta_2$, $w_3 = \alpha\beta\delta_1\delta_3$, $w_2 + w_3 = \alpha\beta\delta_1\sigma$, so ist $\alpha\alpha . \delta_2\delta_3 . \beta\sigma$ eine Iuvolution und $w_1 (w_2 + w_3) = \alpha\beta\gamma\delta_1 . \alpha\beta\delta_1\sigma = \alpha\beta\gamma\sigma$; anderseits ist $w_1 . w_2 = \alpha\beta\gamma\delta_3$ und $w_1 . w_3 = \alpha\beta\gamma\delta_2$; wird nun $w_1 w_2 + w_1 w_3 = \alpha\beta\gamma\sigma'$ gesetzt, so muss $\alpha\alpha . \delta_2\delta_3 . \beta\sigma'$ eine Involution, also $\sigma = \sigma'$ sein, also ist $w_1 (w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3 = \alpha\beta\gamma\sigma$ [2].

Der Quotient (w_2) zweier Würfe $\left(\frac{w}{w_1}\right)$ ist definirt durch die Forderung, dass $w = w_1 . w_2$ sein soll.

Diese Forderung wird immer und zwar eindeutig erfüllt, wenn man ($w = \alpha\beta\gamma\delta$ und $w_1 = \alpha\beta\gamma\delta_1$ vorausgesetzt) das Element δ_2 construirt, welches in der Involution $\alpha\beta . \gamma\delta \ldots$ dem Elemente δ_1 zugeordnet ist [3].

§. 3. Fortsetzung.

Der im vorhergehenden § durchgeführte Beweis für die Behauptung, dass die eigentlichen Würfe Zahlen seien, hat noch eine Lücke. Wir haben nämlich bisher vorausgesetzt, dass das Resultat der Operationen, die wir definirt haben, ebenfalls ein eigentlicher Wurf sei; es ist desshalb noch zu

---

1) Lüroth Nr. 62.

2) Ebendas. Nr. 63.

3) Ebendas. Nr. 63 und St. B. Nr. 271.

untersuchen, wann dieses nicht der Fall ist und ob die früher nachgewiesenen Gesetze auch dann noch gelten.

Was nun die erste Frage betrifft, sieht man beim Durchgehen der früheren Operationen Folgendes:

Ein uneigentlicher Wurf erster Art ist das Resultat der Addition zweier Würfe $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha\beta\gamma\delta_1$, wenn in dem involutorischen Gebilde $\alpha\alpha.\beta\beta\ldots$ dem Elemente δ das Element δ_1 zugeordnet ist; die Subtraction ergibt einen uneigentlichen Wurf erster Art nur wenn Minuend und Subtrahend einander gleich sind; durch Multiplication oder Division kann aus zwei eigentlichen Würfen nie ein uneigentlicher Wurf hervorgehen.

Ein uneigentlicher Wurf zweiter Art kann herauskommen bei der Addition; es ist nämlich $\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\beta\delta=\alpha\beta\gamma\gamma$; bei der Subtraction, wenn $\alpha\alpha.\gamma\delta_1.\beta\delta$ eine Involution ist ($\alpha\beta\gamma\delta-\alpha\beta\gamma\delta_1=\alpha\beta\gamma\gamma$); bei der Multiplication ist $\alpha\beta\gamma\delta.\alpha\beta\delta\gamma=\alpha\beta\gamma\gamma$; bei der Division ist $\alpha\beta\gamma\delta:\alpha\beta\gamma\delta=\alpha\beta\gamma\gamma$.

Ein uneigentlicher Wurf dritter Art kann durch das „Rechnen" mit eigentlichen Würfen nie herauskommen.

Wollen wir nun die Frage beantworten, ob und in wie ferne in den angeführten Fällen die Rechnungsregeln gelten, so müssen wir unterscheiden, ob wir es mit Sätzen zu thun haben, welche nur zwei bekannte Würfe voraussetzen, oder mit solchen, die mehrere gegebene Würfe erfordern, für die ersteren gelten die früheren Beweise, bei den letzteren ist wieder eine Unterscheidung notwendig. So sieht man beim Durchgehen der vier Operationen Folgendes unmittelbar:

Addition. $\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\delta_1=\alpha'\beta'\gamma'\delta'+\alpha'\beta'\gamma'\delta'_1$, wenn $\alpha\beta\gamma\delta=\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ und $\alpha\beta\gamma\delta_1=\alpha'\beta'\gamma'\delta'_1$ ist, mögen nun die beiden Würfe addirt einen uneigentlichen Wurf geben, oder mag ihr Unterschied oder ihr Product oder Quotient ein solcher sein. Dasselbe gilt von der Commutativität der zweigliedrigen Summe. Der frühere Beweis für die Associativität der zweigliedrigen Summe gilt hingegen nur für den Fall, dass weder w_1+w_2 noch w_1+w_3 noch w_2+w_3 für sich einem uneigentlichen Wurfe gleich wird; tritt nun dieser

Fall ein, so ist bisher die Addition noch nicht definirt und wir können den Fall erst dann näher ansehen, wenn wir die Rechnungsoperationen mit den uneigentlichen Würfen definirt haben.

Subtraction. Haben wir früher nachgewiesen, dass im Allgemeinen die Definition der Subtraction eindeutig ist und beachten wir dazu, dass nur in einem Falle ein uneigentlicher Wurf erster Art und ebenfalls nur in einem Falle ein uneigentlicher Wurf zweiter Art herauskommen kann und muss, so ist damit die Eindeutigkeit der Subtraction dargethan.

Multiplication. Hier sind nach dem Gesagten nur zwei Sätze eigens zu behandeln, nämlich die Associativität des eingliedrigen Productes und das distributive Princip. Bezüglich des ersteren Satzes gilt eine analoge Ueberlegung, wie oben bei dem entsprechenden Satze der Addition. — Für das distributive Princip $[w_1\ (w_2+w_3)=w_1 w_2+w_1 w_3]$ gilt der frühere Beweis, so lange keiner der Ausdrücke w_2+w_3, $w_1 w_2+w_1 w_3$ für sich ein uneigentlicher Wurf ist; ist aber dieses der Fall, so werden wir wieder auf die Definition der Rechnungsoperationen mit uneigentlichen Würfen hingewiesen.

Division. Die Eindeutigkeit der Division für alle Fälle, in welchen Dividend und Divisor eigentliche Würfe sind, folgt ebenso, wie die Eindeutigkeit ddr Subtraction.

Aus den bisherigen Ueberlegungen ergibt sich, dass die Behauptung: „Eigentliche Würfe sind Zahlen" im Allgemeinen zwar zutrifft, dass jedoch um alle Ausnahmen zu beseitigen, auch die Definition der Rechnungsoperationen mit uneigentlichen Würfen erster und zweiter Art notwendig ist. Ob dieses aber auch hinreichend ist, muss erst noch untersucht werden.

§. 4. Das Rechnen mit uneigentlichen Würfen.

Uneigentliche Würfe sollen als gleich betrachtet werden, wenn sie von derselben Art sind [1]).

[1]) St. B. Nr. 256.

Uneigentliche Würfe erster Art[1]).

Addition. Sei $w = \alpha\beta\gamma\delta$, $w' = \alpha\beta\gamma\beta$ (also ein uneigentlicher Wurf erster Art), so bemerkt man bei der Ausführung der Addition nach der früheren Definition, dass selbe sich selbst widerspricht, wenn nicht $\sigma = \delta$ wird. Wir definiren also $w + w' = w$. Ebenso definirt man, dass die Summe von zwei uneigentlichen Würfen erster Art wieder ein solcher ist.

Jetzt findet man, dass alle notwendigen Gesetze auch hier wieder gelten; einige derselben lassen sich nämlich auf die für die eigentlichen Würfe angegebene Art beweisen, wenn man nur den obigen Begriff der Gleichheit beachtet; andere müssen durch eine neue Methode bewiesen werden; nur die letzteren sollen hier ausdrücklich Erwähnung finden.

Die Associativität der dreigliedrigen Summe ergibt sich wie folgt:

a) Wenn alle drei Würfe uneigentliche erster Art sind, so ist $w'_1 = w'_2 = w'_3$; ferner $w'_1 + w'_2 = w'_1$, $w'_2 + w'_3 = w'_1$, also $(w'_1 + w'_2) + w'_3 = w'_2 + w'_3 = w'_1$ und $w'_1 + (w'_2 + w'_3) = w'_1 + w'_3 = w'_1$, also .....

b) Wenn ein Wurf ein eigentlicher ist. $w + (w'_1 + w'_2) = w + w'_1 = w$; ebenso ist $(w + w'_1) + w'_2 = w + w'_2 = w$. Nimmt man nun noch die Commutativität der zweigliedrigen Summe zu Hülfe, so ist dieser Fall erlediget.

c) Wenn zwei Würfe eigentliche sind. $w + (w_1 + w') = w + w_1$ und $(w + w_1) + w' = w + w_1$, also ist mit Rüchsicht auf die Commutativität der zweigliedrigen Summe der Beweis vollständig.

Subtraction. Construirt man die Differenz wie früher, so findet man, wenn $w = \alpha\beta\gamma\delta$, $w' = \alpha\beta\gamma\beta$ ist, 1) $w - w' = w$, 2) $w' - w'_1 = w'$, 3) $w' - w = \alpha\beta\gamma\beta - \alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta'$, wo δ' in der Involution $\alpha\alpha.\ \beta\beta\ldots.$ dem Elemente δ zugeordnet ist. Es ist also die Subtraction auch wenn die

[1]) Im Folgenden soll, auch wenn es nicht ausdrücklich bemerkt ist, w'_r einen uneigentlichen Wurf erster Art, w''_r einen uneigentlichen Wurf zweiter Art bezeichnen.

uneigentlichen Würfe erster Art zu den Würfen gezählt werden, eine eindeutige Operation.

Multiplication. Da die frühere Definition des Productes für unseren Fall einen Widerspruch in sich schliessen würde, so stellen wir folgende neue Definition auf: „Das Product zweier Würfe, von denen einer (oder beide) ein uneigentlicher Wurf erster Art ist, ist ebenfalls ein uneigentlicher Wurf erster Art."

Anmerkung. Zu dieser neuen Definition gelangt man, indem man einen geometrischen Satz als hodegetisches Princip benützt. Wollen wir nämlich das Product zweier eigentlichen Würfe construiren, so kann das am einfachsten geschehen, wenn wir für $\alpha \beta \gamma$ drei Punkte ABC eines Kegelschnittes nehmen; construiren wir dann noch D_1 und D_2, so dass $w_1 = ABCD_1$, $w_2 = ABCD_2$, verbinden D_1 mit D_2 und A mit B und ziehen von C aus durch den Schnittpunkt jener zwei Verbindungslienien eine Gerade, welche den Kegelschnitt noch einmal in P schneidet, so ist $ABCP$ das Product $w_1 \, w_2$. Durch Beibehaltung dieser Construction gelangen wir zu unserer Definition [1]).

Um diese Definition zu rechtfertigen, muss zuerst darauf hingewiesen werden, dass in keinem andern Falle ein uneigentlicher Wurf erster Art als Product erscheinen kann [2]).

Die Hauptsätze der Multiplication ergeben sich dann aus dieser Definition auf rein arithmetische Weise, ähnlich wie die bei der Addition bewiesenen Sätze.

Division. Aus dem Gesagten geht hervor, dass auch ein Quotient $\frac{w'}{w}$ eindeutig als uneigentlicher Wurf erster Art definirt ist; dagegen müsste der Quotient $\frac{w}{w'}$ neu definirt werden; mit Rücksicht auf den folgenden § unterlassen wir jedoch dieses und verwerfen den uneigentlichen Wurf erster Art als Divisor.

Uneigentliche Würfe zweiter Art.

Addition und Subtraction. Die uneigentlichen Würfe zweiter Art zeigen bezüglich dieser Operationen keine

---

[1]) Lüroth Nr. 61.

[2]) Vergl. § 3.

Eigenthümlichkeit; es gelten für die Verbindungen dieser Würfe untereinander, sowie für die Verbindung derselben mit eigentlichen Würfen und mit uneigentlicüen Würfen erster Art die in den vorhergehenden §§, beziehungsweise in diesem § angeführten Sätze und Beweise.

Multiplication. Ist $w = \alpha\beta\gamma\delta$ und $w'' = \alpha\beta\gamma\gamma$, so findet man bei der Ausführung der Multiplication, wie sie für eigentliche Würfe definirt wurde, $w\,w'' = w$ und $w''\,w = w$, woraus dann die übrigen Gesetze der Multiplication wieder rein arithmetisch hergeleitet werden können.

Division. Der Quotient $\frac{w''}{w} = \alpha\beta\gamma\xi$, wo $\gamma\gamma.\,\alpha\beta\,.\,\delta\xi$ eine Involution ist, also ist $\alpha\beta\gamma\xi = \beta\alpha\gamma\delta = \alpha\beta\delta\gamma$. Ebenso ist $\frac{w}{w''} = w$ eindeutig bestimmt.

Uneigentliche Würfe dritter Art.

Diese Würfe unterwerfen sich den Gesetzen der Rechnung nicht; denn, wie man sieht, kann man auf sie die früheren Definitionen nicht mehr anwenden ohne auf Widersprüche zu stossen; ebenso begegnet man Schwierigkeiten, wenn man neue Definitionen einführen will, da die Eindeutigkeit der Operationen nicht mehr hergestellt werden kann. Doch können wir leicht diese Art von Würfen entbehren; denn, wie wir gesehen haben, kann beim Rechnen mit eigentlichen Würfen nie ein Wurf dritter Art herauskommen; es sind also die im vorigen § noch übrig gebliebenen Lücken bereits durch das über die uneigentlichen Würfe erster und zweiter Art Gesagte ausgefüllt. Ebenso kann ein uneigentlicher Wurf dritter Art durch die definirten Operationen mit uneigentlichen Würfen erster und zweiter Art (in Verbindung mit eigentlichen Würfen) sich nicht ergeben, da wir die Division mit uneigentlichen Würfen erster Art ausgeschlossen haben.

Fassen wir nun die Resultate der letzten drei §§ zusammen, so können wir sagen, dass die Gesammtheit der eigentlichen Würfe mit Hinzunahme der uneigentlichen Würfe erster und zweiter Art ein System von Zahlen bildet, welches (nach Dedekind [1]) als ein Körper bezeichnet werden kann.

§. 5. Einführung der bestimmten Zahlen.

Nachdem wir uns im Allgemeinen überzeugt haben, dass Würfe Zahlen sind, entsteht nun die Frage, welcher bestimmten Zahl wir einen bestimmten Wurf gleichsetzen werden. Zu einer rationellen Beantwortung dieser Frage finden wir an den Eigenthümlichkeiten der uneigentlichen Würfe die geeigneten Anhaltspunkte.

Von dem uneigentlichen Wurfe erster Art haben wir bemerkt, dass, wenn derselbe als Addend oder Subtrahend auftritt, die Summe oder der Rest dem andern Addend oder dem Minuend gleich wird; dass ferner ein Product dann und nur dann ein uneigentlicher Wurf erster Art wird, wenn wenigstens ein Factor ein solcher ist; dass endlich der uneigentliche Wurf erster Art als Divisor zu verwerfen ist. Dieses nun sind genau dieselben Eigenthümlichkeiten, die in der Arithmetik an der Null bemerkt werden, wir werden daher setzen:

$$\alpha\beta\gamma\beta=0$$

Der uneigentliche Wurf zweiter Art zeigt nur die Eigenthümlichkeit, dass er als Factor oder als Divisor das Product oder den Quotienten ungeändert lässt, selbst aber als Quotient bei der Division eines Wurfes durch sich selbst herauskommt; wir setzen daher

$$\alpha\beta\gamma\gamma=1$$

Jetzt können wir aus dem Früheren einige Regeln angeben, die für weitere Constructionen von Nutzen sind, zunächst wollen wir die Werte der 24 Würfe aus vier Elementen durch einander ausdrücken: wir finden:

---

[1]) Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeuene Dirichlet, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Braunschweig 1871. Supplement X. pag. 424.

$$\alpha\beta\gamma\delta=\beta\alpha\delta\gamma=\gamma\delta\alpha\beta=\delta\gamma\beta\alpha=m$$

$$\alpha\beta\delta\gamma=\beta\alpha\gamma\delta=\gamma\delta\beta\alpha=\delta\gamma\alpha\beta=\frac{1}{m}$$

$$\alpha\gamma\beta\delta=\beta\delta\alpha\gamma=\gamma\alpha\delta\beta=\delta\beta\gamma\alpha=1-m$$

$$\alpha\gamma\delta\beta=\beta\delta\gamma\alpha=\gamma\alpha\beta\delta=\delta\beta\alpha\gamma=\frac{1}{1-m}$$

$$\alpha\delta\beta\gamma=\beta\gamma\alpha\delta=\gamma\beta\delta\alpha=\delta\alpha\gamma\beta=\frac{m-1}{m}$$

$$\alpha\delta\gamma\beta=\beta\gamma\delta\alpha=\gamma\beta\alpha\delta=\delta\alpha\beta\gamma=\frac{m}{m-1}$$

Ferner können wir zu einer Zahl m die entgegengesetzte —m construiren; denn ist $\alpha\beta\gamma\delta=m$, so ist $\alpha\beta\gamma\delta'=-m$, wenn $\alpha\alpha\,.\,\beta\beta\,.\,\delta\delta'$ ein Involution bilden.

Weiter ergibt sich, dass ein harmonischer Wurf gleich —1 zu setzen ist, denn, da $\alpha\beta\gamma\gamma=+1$, ist $\alpha\beta\gamma\delta=-1$, wenn das Gebilde $\alpha\alpha\,.\,\beta\beta\,.\,\gamma\delta$ ein involutorisches ist; dann ist aber $\alpha\beta\gamma\delta=\alpha\beta\delta\gamma$, also sind die Würfe harmonisch [1].

Will man nun überhaupt eine ganze positive Zahl construiren, so wird man einfach selbe in eine Summe von kleineren Zahlen oder in eine Summe von Producten und dergl. zerlegen und diese letzteren durch successive Addition der Einheit darstellen. — Speciell kann man die Zahl 2 auch in der Weise construiren, dass man einen harmonischen Wurf $\alpha\beta\gamma\delta=-1$ construirt; dann ist nämlich $\alpha\gamma\beta\delta=1-(-1)=2$; ebenso ist dann auch $\alpha\delta\beta\gamma=\frac{-1-1}{-1}=2$.

Eine ganze negative Zahl kann aus —1 abgeleitet werden, wie eine ganze positive Zahl aus +1, oder man kann zuerst den absoluten Wert der Zahl construiren und diesen dann von Null ($\alpha\beta\gamma\beta$) subtrahiren.

Eine gebrochene positive oder negative Zahl wird erhalten, indem man Zähler und Nenner für sich und dann ihren Quotienten construirt. — Zu bemerken ist $\alpha\gamma\delta\beta=\alpha\delta\gamma\beta=\frac{1}{2}$, wenn $\alpha\beta\gamma\delta=-1$.

[1] St. G. Nr. 118.

Es entspricht also jeder gegebenen rationalen Zahl ein Wurf, aber auch nur ein Wurf; denn da für die Würfe die Rechnungsregeln gelten, muss dass Resultat immer dasselbe sein, auf welchem Wege immer die Construction der Zahl unternommen wird.

Bevor wir nun in unserer Untersuchung weiterfahren, müssen wir noch eine Frage beantworten, die von nun an nicht mehr umgangen werden kann. Denken wir uns nämlich etwa auf einer Geraden drei feste Punkte ABC und fragen nach der Lage des Punktes D, wenn der Wurf ABCD nacheinander verschiedene rationale Werte annimmt, so finden wir nacheinander folgende Sätze:

I. Alle positiven ganzen Zahlen liegen in der Richtung ABC zwischen C inclusive und A exclusive, und zwar kommt für die grössere Zahl D näher gegen A zu liegen.

Beweis. Sei $ABCD_r = r$ eine positive ganze Zahl und liege D_r im obigen Sinne zwischen C und A; sei ferner $ABCD_{r+1} = r+1$, so muss $AA . CD_r . BD_{r+1}$ eine Involution sein; der zweite Doppelpunkt dieser Involution muss zwischen C und D_r liegen, also da $AMCD_r$ und $AMBD_{r+1}$ harmonische Würfe sind, muss D_{r+1} im obigen Sinne zwischen D_r und A liegen. — Da nun für $ABCD_2 = 2$ unsere Behauptung ganz ähnlich, wie hier für den allgemeinen Fall erwiesen werden kann, ist der Satz bewiesen.

II. Alle positiven echten (rationalen) Brüche liegen zwischen B und C (in der Richtung ABC).

Beweis. Sei $ABCD_r = r$ eine positive ganze Zahl, ebenso $ABCD_s = s$ und $s > r$; ferner $ABCQ = \frac{r}{s}$, so ist $AB . QD_s . CD_r$ eine Involution, in welcher, da D_s zwischen D_r und A liegt, Q zwischen B und C liegen muss.

III. Jede positive rationale Zahl liegt im Sinne ABC näher an A als jede kleinere positive rationale Zahl.

Beweis. Sei $ABCD = m$ eine positive rationale Zahl und ebenso $ABCD' = m'$, sei ferner $ABCS = m + m'$, so muss $AA . DD' . BS$ eine Involution sein, deren zweiter Doppelpunkt zwischen D und D′ liegt; es muss daher, da B vor D und D′ liegt, S hinter beiden liegen.

Es braucht wol kaum ausdrücklich bemerkt zu werden, dass aus den Beweisen, die hier zum ersten und dritten Satze gegeben wurden, auch hervorgeht, dass der Punkt A bei der angegebenen Construction von positiven rationalen Zahlen nicht überschritten werden kannn. Daraus folgt dann auch, dass eine jede Reihe von Punkten, die einer beständig wachsenden Reihe von rationalen Zahlen entspricht, einen Grenzpunkt haben muss, der zunächst (im Sinne A B C) entweder vor A liegen oder A selbst sein muss.

Wir werden aber unten (pag. 179) zeigen, dass für den Fall, dass die erwähnte Reihe der rationalen Zahlen den Grenzwert $+\infty$ hat, kein anderer Punkt als A selbst der Grenzpunkt der betreffenden Reihe von Punkten sein kann.

Aehnlich finden wir auch die Lage der negativen Zahlen in der entgegengesetzten Richtung von B aus.

Jetzt können wir weiter untersuchen, ob auch jeder irrationalen Zahl ein Wurf entspricht. Denken wir uns eine irrationale Zahl μ definirt als den Grenzwert einer Reihe von rationalen Zahlen $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_r \ldots\ldots$, welche z. B. beständig zunehmen, so gibt es rationale Zahlen g, welche die Eigenschaft haben, dass $g > m_r$, was immer auch r bedeuten mag. Denken wir uns die Würfe $ABCM_1 = m_1$, $ABCM_2 = m_2$ u. s. w. und $ABCG = g$ construirt, so bilden die Punkte $M_1, M_2, M_3 \ldots$ eine Reihe, welche sich beständig gegen G hin fortsetzt, ohne aber dieses zu erreichen, wie unmittelbar aus den früher angeführten Sätzen folgt; es ist also durch eine Definition einer irrationalen Zahl ein Punkt M auf der Zahlenlienie definirt, welcher der Grenzpunkt der Reihe $M_1 \; M_2 \; M_3 \ldots\ldots$ ist. Es kann nun aber dieselbe irrationale Zahl auch als Grenzwert einer anderen Zahlenreihe $n_1 \; n_2 \; n_3 \ldots \; n_r \ldots\ldots$ definirt sein; dadurch wäre uns auf der Zahlenlienie ein Punkt N ähnlich wie früher M definirt; dieser Punkt N ist aber mit M identisch. Zum Beweise dieser Behauptung müssen die zwei

Fälle unterschieden werden, ob (wenn wir wieder $ABCN_1 = n_1$ u. s. w. setzen) die Punktreihen M_1 M_2 $M_3 \ldots\ldots$ und N_1 N_2 $N_3 \ldots\ldots$ im selben oder im entgegengesetzten Sinne sich fortsetzen. Im ersten Falle muss jeder bestimmte Punkt M_r der ersten Reihe von der zweiten Reihe und ebenso jeder Punkt N_r von der ersten Reihe überschritten werden; also kann N weder vor M noch nach M liegen, da in jedem Falle zwischen N und M (oder M und N) sich Punkte der einen Reihe befinden müssten, welche von der andern nicht erreicht würden. Im zweiten Falle müssten, wenn M und N nicht identisch wäre, zwischen beiden Punkten Punkte sowol der Reihe M als auch der Reihe N liegen, und zwar müssten beide Reihen ineinander greifen; es müsste daher nach den Sätzen über die Lage der rationalen Zahlen in der Ebene auch Zahlen der ersten Reihe geben, welche grösser wären als einige Zahlen der zweiten Reihe (welche in diesem Falle beständig abnehmen würde); es könnte also nicht $\lim n_r = \lim m_r$ sein, was doch angenommen wurde. Es ist also durch jede Definition einer irrationalen Zahl (μ) stets ein und derselbe Punkt M auf der Geraden definirt, auf welcher man die rationalen Zahlen aufgetragen hat. Wir werden daher den Wurf $ABCM = \mu$ zu setzen haben.

Aus der eben angestellten Ueberlegung folgt von selbst, dass eine irrationale Zahl nach jeder kleineren und vor jeder grösseren rationalen Zahl zu liegen kommt, woraus dann weiter folgt, dass A auch der Grenzpunkt einer Reihe von Punkten ist, welche einer beständig und ins Unendliche wachsenden Reihe von irrationalen Zahlen entspricht.

Wir können also als Zusammenfassung unserer bisherigen Resultate sagen:

„Jeder reellen Zahl x entspricht ein Wurf ABCX, so zwar, dass, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ sich ändert, X stets im Sinne ABC sich bewegen muss und zwar von A nach B, wenn x von $-\infty$ bis 0 geht, von B nach A, wenn x von 0 bis $+\infty$ geht."

Von gleicher Wichtigkeit und zum Abschlusse unseres Systemes unbedingt notwendig ist der umgekehrte Satz, den wir also aussprechen können:

„Jedem gegebenen, d. i. geometrisch definirten Wurfe entspricht eine reelle Zahl."

Beweis. Derselbe setzt folgenden Satz voraus: Wenn ABCM ein geometrisch gegebener Wurf ist und ABC zugleich die Fundamentalpunkte sind, von welchen ausgehend man sich die Reihe der harmonischen Punkte construirt denkt, und wenn endlich M ein Punkt dieser Reihe ist, so ist der Wurf ABCM eine rationale Zahl. — Man sieht nämlich sofort, dass, wenn man die Punkte ABC in irgend einer Reihenfolge nimmt und dazu den vierten harmonischen H construirt, der Wurf ABCH eine rationale Zahl (-1, $\frac{1}{2}$ oder $+2$) sein muss. Hierauf lässt sich allgemein Folgendes zeigen: Sei $ABCM_1 = m_1$, $ABCM_2 = m_2$, $ABCM_3 = m_3$, wo m_1, m_2, m_3 rationale Zahlen sind und sei ferner $M_1\,M_2\,M_3\,N = -1$, so ist der Wurf ABCN eine rationale Zahl, wenn keiner der Punkte M_1, M_2, M_3 mit einem der Fundamentalpunkte identisch ist; denn man construire K_1 so, dass $ABCK_1 = m_2 - m_3 = r$, K_2 so, dass $ABCK_2 = m_1 - m_3 = r_2$, P_1 so, dass $ABCP_1 = m_1\,r_1$, P_2 so, dass $ABCP_1 = m_1\,r_1$, P_2 so, dass $ABCP_2 = m_2\,r_2$, S so, dass $ABCS = m_1 r_1 + m_2 r_2 = s$, T so, dass $ABCT = r_1 + r_2 = t$, X so, dass $ABCX = \frac{s}{t} = x$, so ist ABCX sicher eine rationale Zahl. Nun lässt sich aber zeigen, dass X mit N identisch ist; es ist nämlich

$$M_1\,M_2\,M_3\,N = -1 = \frac{1-\frac{m_1}{m_3}}{1-\frac{m_2}{m_3}} : \frac{1-\frac{m_1}{x}}{1-\frac{m_2}{x}} = \frac{1-\frac{ABCM_1}{ABCM_3}}{1-\frac{ABCM_2}{ABCM_3}} : \frac{1-\frac{ABCM_1}{ABCX}}{1-\frac{ABCM_2}{ABCX}}$$

jeder der hier angedeuteten Quotienten ist ein Wurf, der sicher eine Zahl ist; darum muss auch jeder dazu projectivische Wurf dieselbe Zahl sein; es folgt also weiter:

$$M_1\,M_2\,M_3\,N = \frac{AM_3\,M_2\,B}{AM_3\,M_1\,B} : \frac{AX\,M_2\,B}{AX\,M_1\,B} = \frac{AM_3\,M_2\,M_1}{AX\,M_2\,M_1} = M_1\,M_2\,M_3\,X.$$

— Ganz derselbe Gedanke gibt nur in entsprechend einfacherer Form den Beweis, dass obiger Satz auch gilt, wenn einer oder zwei der Punkte M_1, M_2, M_3 mit Fundamentalpunkten zusammentreffen; nur müssen hiebei alle möglichen Fälle besonders bewiesen werden. Es ist also gezeigt, dass es nicht möglich ist, einen neuen Punkt H' der harmonischen Reihe zu construiren, ohne dass der Wurf ABCH' eine rationale Zahl würde

Ist also ABCM ein geometrisch gegebener Wurf, so ist M entweder ein Punkt der harmonischen Reihe oder das Grenzelement eines bestimmtenTheiles derselben, welcher sich stets im selben Sinne fortsetzt. Im ersten Falle ist, wie wir gesehen haben, ABCM eine rationale Zahl; im zweiten Falle entspricht jener Theil der Reihe, dessen Grenzpunkt M ist, einer Reihe von rationalen Zahlen, welche entweder beständig zunehmen oder beständig abnehmen. Nun können wieder zwei Fälle eintreten; der erste Fall ist der, wo diese Reihe von Zahlen eine bestimmte Zahl nie überschreitet; dann muss selbe einen endlichen Grenzwert g haben; dieser Zahl g muss aber ein Wurf entsprechen; dieser Wurf kann kein anderer sein als ABCM; denn wäre es ein anderer, z. B. ABCN, so müsste N im Sinne, in welchem der fragliche Theil der harmonischen Reihe sich fortsetzt, entweder vor M oder nach M liegen. Läge er vor M, so müssten zwischen M und N noch Punkte der Reihe liegen, somit auch die Zahl g von jener Zahlenreihe überschritten werden, deren Grenzwerth sie sein soll. Läge N nach M, so müssten zwischen M und N wieder Punkte der harmonischen Reihe liegen; ein solcher sei K, dann ist der Wurf $ABCK = k$ eine rationale Zahl, die von der Reihe der rationalen Zahlen, deren Grenzwert g sein soll, nicht überschritten wird; es könnte also g wieder nicht der fragliche Granzwert sein. Es ist also in diesem Falle $ABCM = g$, also sicher eine reelle Zahl, wenn auch nicht entschieden ist, ob selbe rational oder irrational sei. Der zweite mögliche Fall wäre der, dass die oben genannte Reihe der Zahlen jede endliche Zahl überschritte. Das kann aber nicht eintreffen, wenn nicht M mit A identisch ist; denn wäre z. B. der Grenzpunkt M einer Reihe $M_1, M_2\ M_3 \ldots.$, welche sich im Sinne ABC gegen A hin fortsetzt, und läge M vor A, so könnte ($ABCM_1 = m_1$ u. s. w. gesetzt) die Reihe der Zahlen m_1, m_2, $m_3 \ldots\ldots$ nicht ins unendliche wachsen. Es müssten nämlich zwischen M und A sich Punkte z. B. K befinden von der Art, dass $ABCK = k$ eine positive Zahl wäre; diese Zahl k könnte aber von den Zahlen m_1, m_2, $m_3 \ldots\ldots$ nicht überschritten werden. Ist aber $M \equiv A$, so wissen wir ohnehin aus den früheren Untersuchungen, dass $ABCA = \infty$ zu setzen ist.

Schlussbemerkung.

Aus den bisherigen Untersuchungen erkennen wir sofort, dass zwischen den Würfen und den Doppelverhältnissen der neueren Geometrie eine Analogie obwaltet; wir können nun geradezu behaupten, dass bei unserer Schreibweise ein Wurf ABCD und ein Doppelverhältniss ABCD denselben Wert haben. Dies geht daraus hervor, dass die uneigentlichen Würfe mit den gleichgeschriebenen uneigentlichen Doppelverhältnissen denselben Wert haben und dass ferner, wenn bei den Würfen $ABCD_1 + ABCD_2 = ABCS$ auch die gleichlautende Gleichung von Doppelverhältnissen gilt, was man auf ganz gewöhnliche Weise ausrechnen und auch für die übrigen Rechnungsoperationen wiederholen kann. Daraus folgt nämlich sofort, dass unsere Behauptung gilt, so lange ABCD eine rationale Zahl ist; dann lässt sich weiter folgern, dass dasselbe auch der Fall ist, wenn ABCD eine irrationale Zahl ist, indem man die schon wiederholt zur Anwendung gelangte Methode benützt und zeigt, dass dann das Doppelverhältniss ABCD weder einen grösseren noch einen kleineren Wert haben kann.