Über einen Satz von Bertini.

Von

E. Netto in **Giessen.**

Herr Lüroth hat im neunten Bande der mathematischen Annalen S. 163 - 165 den Satz bewiesen, dass man eine unicursale Curve so auf eine Gerade beziehen kann, dass die Punkte beider sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Diesen Satz hat Herr Gordan im Bande 29 der Annalen S. 318 dahin erweitert, dass „wenn zwei rationale Functionen

$$f_1(x, y, z, \ldots), f_2(x, y, z, \ldots)$$

einer algebraischen Gleichung genügen, deren Coëfficienten von x, y, z, ... unabhängig sind,

$$G(f_1, f_2) = 0,$$

dann eine rationale Function von f_1 und f_2 gefunden werden kann, durch welche umgekehrt f_1 und f_2 rational darstellbar sind.“

In engem Zusammenhange mit diesen Sätzen steht ein von Bertini'gefundenes und bewiesenes Theorem. Es findet sich in den Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, Ser. 2, Vol. XV; fasc. 1 (Sitzung vom 12. Jan. 1882) und geht darauf hinaus, dass ein lineares System von ganzen Functionen, wenn jede Function des Systems zerfällt, entweder einen allen Functionen des Systems gemeinsamen Factor hat, oder in Functionen zerfällt, die alle einem Büschel angehören.

Für diesen Satz hat Herr Lüroth in den Math. Ann. Bd. 42 S. 457—470 einen Beweis veröffentlicht, der sich von dem Bertini'schen dadurch unterscheidet, dass er den algebraischen Charakter mehr hervorhebt. Dieser Beweis stützt sich auf den oben angeführten Satz von Gordan über rationale Functionen, deren Werte eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension bilden. Im Bande 44 (1894) S. 539—552 kommt Herr Lüroth auf den gleichen Gegenstand zurück, um den Bertini'schen Satz auch ohne Benutzung des Gordan'schen Theorems zu beweisen, und um dieses dann seinerseits aus jenem herzuleiten.

Ich will im Folgenden einen neuen Beweis für den Bertinischen Satz geben, der sich gleichfalls wie der erste Lüroth'sche auf das angegebene Gordan'sche Theorem stützt, im übrigen aber völlig von demselben verschieden ist und, wie ich glaube, wegen der Einfachheit der Betrachtungen, auf die er sich gründet. Beachtung verdient.

Es sei die ganze Function von x, y, z, . . . mit dem Parameter λ

$$f_1(x, y, z, \ldots) - \lambda f_2(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

für jeden Wert von λ in rationale ganze Factoren von x, y, z, . . . zerlegbar, ohne dass f_1 und f_2 einen gemeinsamen Teiler in x, y, z, . . . besitzen. Wir setzen den Ausdruck (1) gleich

$$g_1(x, y, z, \ldots) \cdot g_2(x, y, z, \ldots), \tag{2}$$

wobei die Coëfficienten der g_1, g_2 noch völlig unbestimmt sind, und die Grade der Factoren nach den einzelnen Variablen so gewählt sein sollen, dass eine derartige Zerlegung (2) von (1) möglich ist. Multiplicirt man dann (2) aus und setzt die einzelnen Coëfficienten der entstehenden Potenzproducte der x, y, z, . . . gleich den entsprechenden Coëfficienten in (1), dann entsteht ein System von Gleichungen zwischen den unbestimmten Coëfficienten der g und zwischen λ. Dieses System hat unserer Annahme nach eine Lösung, und folglich lässt sich durch Elimination eine irreductible Gleichung

$$\Phi(\rho, \lambda) = 0 \tag{3}$$

herstellen, welche ρ als Unbekannte und λ als Parameter enthält, derart, dass alle Coëfficienten von g_1 und von g_2 rationale Functionen einer Wurzel ρ_1 von (3) werden. Wir können demnach schreiben

$$\begin{aligned} &f_1(x, y, z, \ldots) - \lambda f_2(x, y, z, \ldots) \\ &= g_1(x, y, z, \ldots; \rho_1) \cdot g_2(x, y, z, \ldots; \rho_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn wir nun in (4) den x, y, z, . . . irgend welche ganzzahligen Werte geben, x_0, y_0, z_0, . . ., für welche f_1 und f_2 nicht verschwinden, dann hat die so aus (4) entstehende Gleichung in

ρ mit der irreductiblen Gleichung (3) eine Wurzel ρ_1 gemeinsam und ihr Polynom ist folglich ein Multiplum von $\Phi(\rho, \lambda)$ aus (3). Da aber (4) in λ vom ersten Grade ist, so fällt (3) bis auf einen unwesentlichen constanten Factor mit

$$f_1(x_0, y_0, z_0, \ldots) - \lambda f_2(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$
$$= g_1(x_0, y_0, z_0, \ldots; \rho) \cdot g_2(x_0, y_0, z_0, \ldots; \rho)$$

zusammen. Daraus ist ersichtlich, dass (3) in λ linear ist. Folglich kann gesetzt werden, indem man (3) nach λ auflöst,

$$(3^a) \qquad \lambda = a_0\rho^\varkappa + a_1\rho^{\varkappa-1} + \ldots + a_\varkappa,$$

so dass die $a_0, a_1, \ldots a_\varkappa$ constante Coëfficienten sind.

Trägt man dies nun in (4) ein, dividirt durch $-a_0 f_2(x, y, z, \ldots)$ und setzt $a_1 = a_0 b_1$, $a_2 = a_0 b_2$, ... $a_\varkappa = a_0 b_\varkappa$, so folgt, dass der Ausdruck

$$(5) \qquad -\frac{f_1(x, y, z, \ldots)}{a_0 f_2(x, y, z, \ldots)} + b_\varkappa + b_{\varkappa-1}\rho + b_{\varkappa-2}\rho^2 + \ldots + b_1\rho^{\varkappa-1} + \rho^\varkappa$$

in zwei rationale ganze Factoren zerlegbar sein muss, welche ganz in ρ sind, und deren Coëfficienten gebrochene oder ganze Functionen von $x, y, z, \ldots$ werden.

Wir setzen (5), wobei $\mu \leqq \nu$ sein soll, diesen Überlegungen gemäss,

$$(5^a) \qquad = (\rho^\mu + h_1\rho^{\mu-1} + \ldots + h_\mu) \cdot (\rho^\nu + k_1\rho^{\nu-1} + \ldots + k_\nu),$$

wobei die h und die k die unbekannten gebrochenen Functionen von $x, y, z, \ldots$ bedeuten. Wir wissen, dass bei richtiger Annahme von μ und ν wirklich (5) gleich (5^a) gemacht werden kann; μ und ν sollen passend gewählt sein.

Es ist demnach das System von $\varkappa - 1 = \mu + \nu - 1$ Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} k_1 + h_1 &= b_1, \\ k_2 + k_1 h_1 + h_2 &= b_2, \\ &\ldots\ldots \\ k_\nu h_{\mu-1} + k_{\nu-1} h_\mu &= b_{\varkappa-1} \end{aligned}$$

bei richtiger Wahl des Constanten $b_1, b_2, \ldots b_{\varkappa-1}$ durch passende Functionen h und k möglich.

Die Gleichungen (6) geben der Reihe nach aus den ersten ν Zeilen

$$(7) \qquad \begin{aligned} k_1 &= b_1 - h_1 \\ k_2 &= b_2 - h_1(b_1 - h_1) - h_2 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Setzt man diese Resultate in die folgenden $(\mu - 1)$ Gleichungen ein, so entstehen eben so viele Relationen zwischen $h_1, h_2, \ldots h_\mu$. Diese Relationen sind von einander unabhängig. Wäre dies nämlich nicht der Fall, und wäre mindestens eine der Gleichungen (6) eine Folge der übrigen, so würden die Gleichungen (6) in Verbindung mit der ergänzenden

$$(6^a) \qquad h_\varkappa - \frac{f_1(x, y, z, \ldots)}{a_0 f_2(x, y, z, \ldots)} = h_\mu k_\nu$$

weniger als $(\mu + \nu)$ unabhängige Bedingungen für die Bestimmung der $(\mu + \nu)$ Functionen $h_1, \ldots h_\mu;\ k_1, \ldots k_\nu$ liefern. Das System (6), (6^a) hätte also unendlich viele Lösungen, d. h. die Zerlegung von (5) in die Factoren (5^a) wäre auf unendlich viele Arten möglich. Das widerspricht aber dem Theorem von der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen Function von $x, y, z, \ldots$ Deshalb sind die $(\mu - 1)$ durch Eintragung von (7) in die letzten Gleichungen von (6) entstehenden Relationen unter einander unabhängig.

Eliminirt man aus ihnen nun einmal $h_3, h_4, \ldots h_\mu$, so entsteht eine Gleichung

$$F_1(h_1, h_2) = 0,$$

aus welcher nach dem Lüroth-Gordan'schen Satze folgt, dass man setzen kann

$$\varphi = R(h_1, h_2);\ h_1 = R_1(\varphi),\ h_2 = R_2(\varphi).$$

Eliminirt man ferner aus jenem Systeme $h_2, h_4, \ldots h_\mu$, so entsteht eine Gleichung

$$F_2(h_1, h_3) = F_2[R_1(\varphi), h_3] = 0,$$

aus welcher nach dem Lüroth-Gordan'schen Satze wieder folgt, dass man setzen kann

$$\psi = S(\varphi, h_3);\ \varphi = S_1(\psi),\ h_3 = S_2(\psi)$$

oder auch wegen der bereits erfolgten Bestimmung von φ, h_1 und h_2

$$\psi = T(h_1, h_2, h_3);$$

$$h_1 = T_1(\psi),\quad h_2 = T_2(\psi),\quad h_3 = T_3(\psi).$$

In gleicher Weise kann man weiter gehen und erkennt dabei, dass es eine rationale Function ω von $x, y, z, \ldots$ oder auch von $h_1, h_2, \ldots h_\mu$ giebt, durch welche die h sämtlich in der Gestalt

$$h_1 = V_1(\omega),\ h_2 = V_2(\omega),\ \ldots\ h_\mu = V_\mu(\omega)$$

ausgedrückt werden können.

Der erste Factor von (5^a) geht hierdurch in eine ganze Function von ρ und von ω über. Gleiches folgt für den zweiten.

Wir nehmen nun an, jener erste Factor sei in x, y, z, ... irreductibel. Dann kann er in ω nur vom ersten Grade sein, denn wäre er von höherem Grade in ω, so könnte man ihn in lineare Factoren

$$(\omega-\alpha_1)\,(\omega-\alpha_2)\,\ldots\,.$$

zerspalten. Es ist also für ihn zu setzen

$$\rho^\mu + h_1\rho^{\mu-1} + \ldots + h_\mu = \lambda_1(\rho).\omega + \lambda_2(\rho); \tag{8}$$

und dadurch erhalten wir die Zerlegung

$$-\frac{f_1}{a_0 f_2} + b_\varkappa + b_{\varkappa-1}\rho + \ldots + b_1\rho^{\varkappa-1} + \rho^\varkappa$$
$$= [\omega.\lambda_1(\rho) + \lambda_2(\rho)].\psi(\omega, \rho),$$

in welcher der erste Factor der rechten Seite irreductibel ist. Wir multipliciren die letzte Gleichung mit $-a_0f_2$ und schreiben unter Benutzung von (3^a)

$$f_1-\lambda f_2 = -a_0f_2.[\omega.\lambda_1(\rho) + \lambda_2(\rho)].\psi(\omega, \rho). \tag{9}$$

Dies gilt, wenn ρ und λ durch die Gleichung (3^a) mit einander verbunden sind; und da (3^a) irreductibel ist, so gilt es für alle Wurzeln ρ_α von (3^a). Demnach ist $f_1-\lambda f_2$ durch alle Ausdrücke

$$\omega(x, y, z, \ldots).\lambda_1(\rho_\alpha) + \lambda_2(\rho_\alpha)$$

teilbar. Wir setzen nun, indem P und Q ganze Functionen bedeuten,

$$\omega(x, y, z, \ldots) = \frac{P(x, y, z, \ldots)}{Q(x, y, z, \ldots)}$$

und

$$\frac{\lambda_2(\rho_\alpha)}{\lambda_1(\rho_\alpha)} = -\psi(\rho_\alpha);$$

dann wird $f_1-\lambda f_2$ auch durch alle Functionen

$$P(x, y, z, \ldots) - \psi(\rho_\alpha)\,Q(x, y, z, \ldots)$$

teilbar, wenn wir ρ_α alle Wurzeln von (3^a) durchlaufen lassen.

Sind nun

$$\psi(\rho_1) = \tau_1,\ \psi(\rho_2) = \tau_2,\ \ldots\ \psi(\rho_\nu) = \tau_\nu$$

die unter einander verschiedenen Werte von $\psi(\rho_\alpha)$, dann ist $f_1-\lambda f_2$ auch durch das Product der von einander verschiedenen, irreductiblen Factoren

$$\Pi\Big(P(x, y, z, \ldots) - \tau_\alpha\, Q(x, y, z, \ldots)\Big) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \nu)$$

teilbar. Dieses Product enthält, da es in den ρ_α symmetrisch ist, nicht mehr die τ, sondern nur die Coëfficienten von (3^a). Dabei tritt aber λ wirklich auf, weil sonst, der Voraussetzung entgegen, f_1 und f_2 einen von λ unabhängigen gemeinsamen Factor hätten. Weil nun aber $f_1 - \lambda f_2$ den Parameter λ nur in der ersten Potenz enthält, so muss das letzte Product bis auf einen unwesentlichen constanten Factor mit $f_1 - \lambda f_2$ übereinstimmen; d. h. es wird

$$f_1(x, y, z, \ldots) - \lambda f_2(x, y, z, \ldots)$$
$$= \text{cst.}\ \Pi\Big(P(x, y, z, \ldots) - \tau_\alpha\, Q(x, y, z, \ldots)\Big).$$

Der Definition nach sind die $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu$ Wurzeln einer Gleichung, deren Coëfficienten Constante sind. Setzt man wieder wie oben $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ so folgt genau wie dort, dass diese Gleichung die Form hat

$$\lambda = \alpha_0 \tau^\nu + \alpha_1 \tau^{\nu-1} + \ldots . + \alpha_\nu .$$

Damit ist nun der Bertini'sche Satz in vollem Umfange bewiesen.