# Zur Eötvösschen Drehwaage

von

Karl Kilchling

Zusammenfassung Es wird das allgemeine Prinzip angegeben, nach welchem die Attraktionsmassen am Gehänge der Eötvösschen Drehwaage bemessen und angeordnet sein müssen, damit sie als Gradiometer zur Messung des horizontalen Gradienten der Schwere dienen kann.

Das allgemeine Gehänge der Eötvösschen Drehwaage besitzt bekanntlich eine obere und eine untere Masse, die an dem horizontalen Balken befestigt sind. Fig. 1 stellt dieses sogenannte Gehänge II. Art im drehbaren Gehäuse im Schnitt dar. Im Gleichgewichtszustand ist sein Torsionsmoment f, das ist das Produkt aus Torsionskonstante des Aufhängedrahtes und dem Torsionswinkel $\vartheta - \vartheta_0$, um welchen es unter dem Einfluß der Schwerkraft aus der torsionsfreien Null-Lage $\vartheta_0$ gedreht wird, $f = \tau \cdot (\vartheta - \vartheta_0)$ 1.) dem Drehmoment der Schwerkräfte gleich. Dieses läßt sich durch einen Ausdruck darstellen, der vier kennzeichnende Differentialformen und vier bezeichnende Integrale enthält. Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

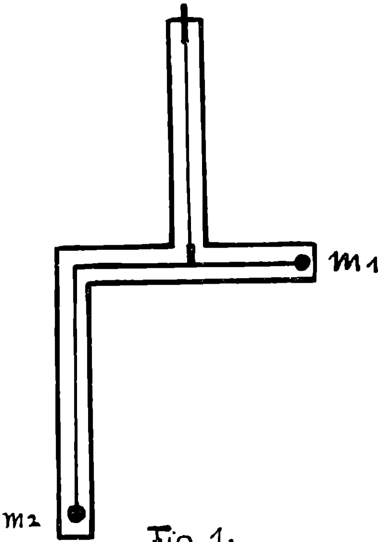



Fig. 1.

$$
\begin{aligned}
f \quad & \frac{1}{2}\sin 2\alpha \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) + \cos 2\alpha \, \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} \Bigg] \cdot \int (\xi^2 - \eta^2) \cdot dm \\
2.) \quad & + \Bigg[ \cos 2\alpha \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) - 2 \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} \Bigg] \cdot \int \xi \, \eta \, dm
\end{aligned}
$$

$$- \left[ \sin \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial z} - \cos \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial z} \right] \cdot \int \xi \quad \zeta \cdot dm$$

$$- \left[ \cos \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial z} - \sin \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial z} \right] \int \eta \quad dm$$

Darin ist W die Potentialfunktion der Schwerebeschleunigung, $\alpha$ das Azimut des Gehäuses auf der Seite der tieferen Masse, gemessen von der Nord- = x-Richtung über die Ost- = y-Richtung. Die $\xi$-Richtung ist die des horizontalen Balkens, $\eta$ die der dazu horizontalen Senkrechten und $\zeta$ die des Lotes im Gehängeschwerpunkt oder angenähert in der Balkenmitte. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind Koordinaten der Massenpunkte des Gehänges.

Die vier Integrale sind über alle Massen des Gehänges zu erstrecken, also über den horizontalen Balken, die obere und die untere Attraktionsmasse. In erster Annäherung kann man den Balken gegenüber den beiden Massen vernachlässigen und diese selbst als punktförmig auffassen.

Dann hat den Definitionen entsprechend die obere Masse die Koordinaten $\xi_1$ = halbe Balkenlänge = $-1$

$\eta_1 = 0$

$\zeta_1 = 0$

Für die untere Masse ist

$\xi_2 = +1$

$\eta_2 = 0$

$\zeta_2$ = Höhendifferenz der Massen = h.

Setzt man diese Werte in die vier Integrale ein, so werden sie

$$\int (\xi^2 - \eta^2) \, dm = \left( \xi_1^2 - \eta_1^2 \right) \cdot m_1 + \left( \xi_2^2 - \eta_2^2 \right) \cdot m^2 = \left( (-1^2) - 0^2 \right) \cdot m + \left( 1^2 - 0^2 \right) \cdot m$$

$$= 2 \; m \; 1^2 = \varkappa = \text{Trägheitsmoment des Gehänges,}$$

$$\int \xi \; \eta \; dm = \xi_1 \quad \eta_1 \quad m_1 + \xi_2 \quad \eta_2 \quad m_2 = 0$$

$$\int \xi \; \zeta \; dm = \xi_1 \quad \zeta_1 \cdot m_1 + \xi_2 \quad \zeta_2 \quad m_2 = 1 \cdot 0 \quad m + 1 \; h \; m$$

$$= m \cdot 1 \cdot h$$

$$\int \eta \; \zeta \; dm = \eta_1 \cdot \zeta_1 \cdot m_1 + \eta_1 \quad \zeta_2 \quad m_2 = 0$$

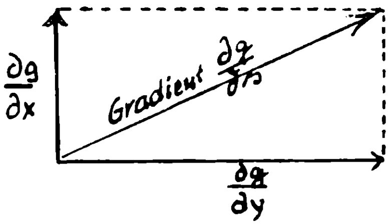
Die Eötvössche Drehwaagegleichung für das Gehänge II. Art ist demnach

$$f = \tau \cdot (\vartheta - \vartheta_0) = \varkappa \cdot \quad \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \cos 2\alpha \, \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y}$$

$$- \; m \quad h \quad l \qquad \sin \alpha \; \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial z} - \cos \alpha \; \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial z}$$

Da $\frac{\partial W}{\partial z}$ die Schwerebeschleunigung g $\quad W_z$ in der z-Richtung ist, so stellt $\frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial z} = W_{zx} \quad \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial z}}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$ die Zunahme der Schwerebeschleunigung in der x- oder Nordrichtung bei einer Verschiebung von 1 cm, das heißt die Nordkomponente des horizontalen Schweregradienten dar; entsprechend ist $\frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial z} = W_{yz} = \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial z}}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ die Ostkomponente (Figur 2).

Fig. 2.




Die beiden Differentialausdrücke $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad W_{yy} - W_{xx}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} = W_{xy}$ hängen eng mit den Krümmungen $\frac{1}{r}$ der Niveauflächen des Schwerepotentials der Erde zusammen.

Aus 5 Messungen in 5 Azimuten der Waage erhält man 5 Gleichungen mit den 5 Unbekannten $W_{yy} - W_{xx}$, $W_{xy}$, $W_{xz}$, $W_{yz}$, $\vartheta_0$ und kann diese berechnen.

Das Eötvösgehänge I. Art ist ein gewöhnliches Coulomb-Cavendish-Gehänge (Figur 3). Die beiden Massen haben die Ko-

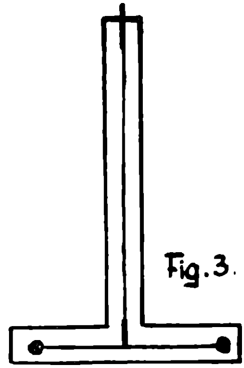


Fig. 3.

ordinaten

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \quad \text{und} \quad & \xi_2 &= 1 \\ \eta_1 &= 0 & \eta_2 &= 0 \\ \zeta^1 &= 0 & \zeta_2 &= 0 \end{aligned}$$

so daß die 4 Integrale die Werte annehmen

$$\int (\xi^2 - \eta^2)\, dm = 2\, m\, l^2 = \varkappa \qquad \int \xi \cdot \zeta \cdot dm = 0$$

$$\int \xi \quad \eta \cdot dm = 0 \qquad \int \eta \cdot \zeta \quad dm = 0$$

und die Drehwaagegleichung die Form hat:

$$f = \tau\,(\vartheta - \vartheta_0) = \varkappa \cdot \frac{-\,1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \cos 2\alpha \, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{3.)}$$

In ihr kommen nur die mit den Krümmungen der Niveauflächen der Schwere zusammenhängenden Größen $\frac{d^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = W_{yy} - W_{xx}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = W_{xy}$ und die Null-Lage $\vartheta_0$ vor, so daß 3 Azimutstellungen zu ihrer Bestimmung genügen. Da die Drehwaage I. Art nur Krümmungen der Niveauflächen mißt, heißt sie auch Krümmungsvariometer.

Von den 4 Integralen der allgemeinen Drehwaagegleichung 2) bleiben beim Eötvösgehänge II. Art das erste und dritte endlich, das zweite und vierte werden Null, während beim Gehänge erster Art nur das erste endlich ist und die drei anderen zu Null werden. Es liegt nahe, ein Gehänge zu konstruieren, für welches die Gleichungsglieder mit den Ausdrücken $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = W_{yy} - W_{xx}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = W_{xy}$ wegfallen und diejenigen mit den Ausdrücken $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} = W_{xz}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial g}{\partial y} = W_{yz}$ stehen bleiben. Ein solches Gehänge mißt Größe und Richtung des Gradienten der Schwerebeschleunigung und heißt Gradienten-Variometer oder Gradiometer. Shaw und Lancaster-Jones haben im Mining Mag., Mai 1929, unter dem Titel „The Gravity Gradiometer" ein geeignetes Gehänge angegeben, dessen drei gleiche Massen auf den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes angeordnet sind und dessen horizontaler Balken gabelförmig von den Winkelhalbierenden gebildet wird, in deren Schnittpunkt der vertikale Stiel des Gestänges zum Torsionsdraht führt (Figuren 4 und 5).

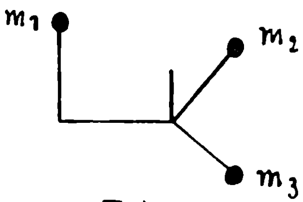



Fig4. perspekt.

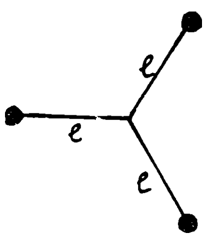



Fig.5 Grundriss

Unter Verwendung der früheren Bezeichnung ist

$$\xi_1 = -1 \qquad \xi_2 = +\frac{1}{2} \qquad \xi_3 = +\frac{1}{2}$$

$$\eta_1 = 0 \qquad \eta_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \eta_3 = +\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\zeta_1 = -h \qquad \zeta_2 = 0 \qquad \zeta_3 = 0$$

$$\int (\xi^2 - \eta^2)\, dm = 0$$

$$\int \xi\, \eta\, dm = 0$$

$$\int \xi\, \zeta\, dm = +m\, h\, l$$

$$\int \eta\, \zeta\, dm = 0$$

4.)

$$f \qquad \tau\,(\vartheta - \vartheta_0) = m\, h\, l \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} \cos\alpha - \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} \sin\alpha \right)$$

Die Messung in drei Azimuten liefert aus dieser Gradiometer-Gleichung drei Gleichungen mit den drei Unbekannten $\vartheta_0$ = Null-Lage des Gehänges, $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x}$ $W_{xz} = X$ — Nordkomponente und $\frac{\partial_2 W}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial g}{\partial y}$ $W_{yz} = Y$ — Ostkomponente des horizontalen Gradienten der Schwere.

Das Gradiometer von Shaw und Lancaster-Jones ist nur ein Sonderfall eines allgemeineren Gehängeprinzips, nach welchem beliebig viele Gradiometerformen angegeben werden können. Wie gezeigt, geht die allgemeine Drehwaagegleichung in die Gradiometergleichung über, wenn die drei Integrale $\int (\xi^2 \quad - \quad \eta^2)\ dm$, $\int \xi\, \eta\ dm \int \eta\, \zeta\ dm$ Null sind und das Integral $\int \xi\, \zeta\ dm \quad 0$ ist. Im Folgenden sind dafür einige Beispiele gegeben, deren Zahl sich beliebig vermehren läßt. Für diese Gehängeformen gilt ganz allgemein die Gradiometergleichung

$$f = \tau \quad (\vartheta - \vartheta_0) = m \cdot h \quad l \qquad W_{yz} \cdot \cos \alpha - W_{xz} \cdot \sin \alpha$$

B e i s p i e l 1 Das Gehänge besteht aus drei Massen m1 = 2 m2 = 2 m3, von denen die zwei gleichen m2 und m3 in einer horizontalen Ebene angeordnet sind, während die dritte (m1) ihnen gegenüber einen Höhenunterschied h besitzt (Figuren 6 und 7). Der Grundriß ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Abmessungen aus den Figuren 6 und 7 und den angegeben Zahlen zu entnehmen sind.

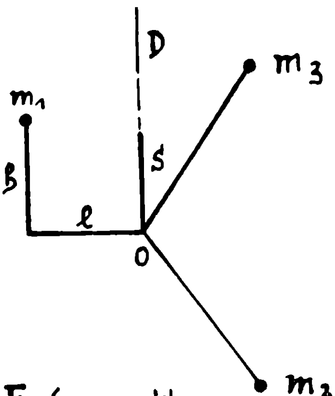



Fig. 6. perspekt.

$m_1 = 2\ m_2 = 2\ m_3 = 2\ m$

D = Torsionsdraht

S = Trägerstab des Gestells

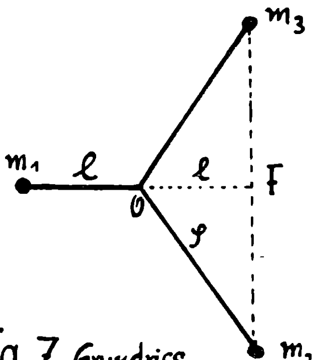



Fig. 7. Grundriss

$O\ m_1 = O\ F = l$

$\varphi = 54^0\ 44'\ 8''$

$F\ m_2 = F\ m_3 = l \quad \sqrt{2}$

$O\ m_2 = O\ m_3 = l \quad \sqrt{3}$

| | | |
|---|---|---|
| $m_1 = 2\,m$ | $m_2 = m$ | $m_3 = m$ |
| $\xi_1 \quad -l$ | $\xi_2 \quad l$ | $\xi_3 = l$ |
| $\eta_1 = 0$ | $\eta_2 = l \cdot \sqrt{2}$ | $\eta_3 = -l \cdot \sqrt{2}$ |
| $\zeta_1 = -h$ | $\zeta_2 - 0$ | $\zeta_3 = 0$ |

Daraus ergibt sich

$$\int (\xi^2 - \eta^2) \cdot dm = \left((-l)^2 - 0^2\right) m_1 + \left(l^2 - (l\sqrt{2})^2\right) m_2 + \left(l^2 - (-l\sqrt{2})^2\right) m_3 = 2\,m\,l^2 - m \cdot l^2 - m\,l^2 = 0$$

$$\int \xi \cdot \eta \cdot dm = (-l) \cdot o \cdot m_1 + l \cdot l \cdot \sqrt{2} m_2 + l \cdot (-l \cdot \sqrt{2}) \cdot m_3 = o + \sqrt{2}\;m\,l^2 - \sqrt{2}\,m\,l^2 = 0$$

$$\int \xi \cdot \zeta \cdot dm = (-l) \cdot (-h)\,m_1 + l \cdot o \cdot m_2 + l \cdot o \cdot m_3 = m\,h\,l$$

$$\int \eta\,\zeta \cdot dm = 0$$

$$f = \tau\,(\vartheta - \vartheta_0) = m\,h\,l \left[W_{yz} \cos\alpha - W_{xz} \cdot \sin\alpha\right]$$

$$= 4\,m\,\frac{h \cdot l}{4}\left[W_{yz} \cdot \cos\alpha - W_{xz} \cdot \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{M \cdot h \cdot l \cdot}{4}\left[W_{yz} \cdot \cos\alpha - W_{xz} \cdot \sin\alpha\right]$$

$M = 4\,m =$ Gesamt-Attraktionsmasse

B e i s p i e l 2 : Das Gehänge trägt vier gleich große Massen, von denen zwei in einer Horizontalebene liegen; die beiden anderen sind gleich weit unterhalb und oberhalb dieser Ebene angebracht.

Die Horizontalprojektion der 4 Massen ist ein Quadrat, dessen Diagonalen den Projektionen des Gestänges entsprechen (Figuren 8 und 9).

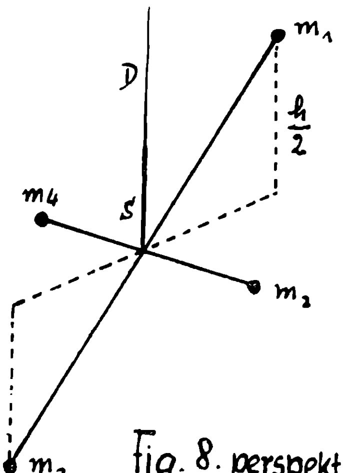



Fig. 8. perspekt.

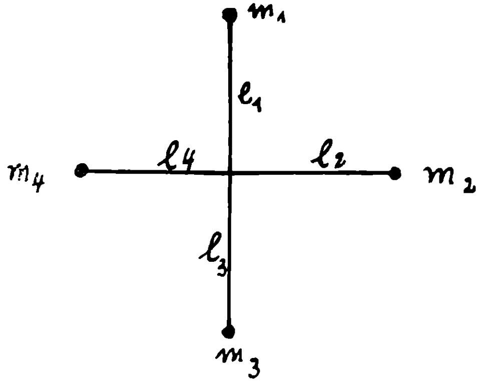



Fig. 9 Grundriss.

$$m_1 \qquad m_2 \qquad m_3 = m_4$$

$$l_1 \qquad l_2 \qquad l_3 = l_4$$

$$-1 \qquad \xi_2 \qquad 0 \qquad = 1 \qquad = 0$$

$$\eta_1 \qquad 0 \qquad = -1 \qquad \eta_3 \qquad 0 \qquad \eta_4 \qquad 1$$

$$= -\frac{h}{2} \qquad = \quad 0 \qquad \zeta_3 = \frac{h}{2} \qquad 0$$

Daraus ergeben sich die 4 Integrale

$$\int (\xi^2 - \eta^2)\, dm \qquad 0$$

$$\int \xi \qquad dm \qquad 0$$

$$\int \xi \cdot \qquad dm \qquad - m\ h\ l$$

$$\int \eta \qquad dm \quad = 0$$

Es ergibt sich auch für dieses Gehänge die Gradiometergleichung.

B e i s p i e l 3 Verkürzt man den horizontalen Balken auf die Hälfte und macht die daran sitzenden Massen viermal so groß,

so daß $l_1$ $l_3$ $2\,l_2$ $2\,l_4$

und $m_2$ $m_4$ $4\,m_1$ $4\,m_3$

so ergibt sich wieder die Gradiometergleichung.

B e i s p i e l 4 Eine weitere Form wäre zum Beispiel:

$l_2$ $l_4$ $2\,l_1$ $2\,l_3$

$m_1$ $m_3$ $4\,m_2$ $4\,m_4$

B e i s p i e l 5 Unter Verwendung von 6 gleichen Massen entsteht ein Gradiometer, wenn sie an den Ecken eines Sechseckes so in einer schrägen Ebene angeordnet werden, daß die Horizontalprojektion ein regelmäßiges Sechseck ist.

Setzt man das Verfahren fort, so läßt die Extrapolation den Schluß zu, daß z. B. eine schräg gestellte Ellipse, d. h. also ein Ellipsenreifen, dessen Horizontalprojektion ein Kreis ist, als Gradiometergehänge verwendet werden kann. Eine nochmalige Erweiterung führt schließlich zur Ellipsenscheibe als Gradiometergehänge.

Allen Gradiometergehängen ist gemeinsam, daß an dem normalen Drehwaagebalken symmetrisch zu beiden Seiten weitere Attraktionsmassen angebracht sind, die man der Einfachheit halber als Quermassen bezeichnen könnte.

Der Gedanke, in der allgemeinen Drehwaagegleichung 2) das dritte Integral nicht verschwinden zu lassen, wohl aber das erste, zweite und vierte, kann in der Form abgewandelt werden, daß die drei ersten Integrale zu Null gemacht werden, während das vierte endlich bleibt. Auf die Durchführung dieser Möglichkeit wurde im Vorstehenden verzichtet.