

## AUFLÖSUNGSMETHODE

FÜR

## ALGEBRAISCHE BUCHSTABENGLEICHUNGEN

MIT EINER EINZIGEN UNABHÄNGIGEN BUCHSTABENGRÖSSE.

VON

Dr. IGNAZ HEGER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 26. JUNI 1856.

**Vorbemerkung.**

Die vorliegende Abhandlung enthält die Auseinandersetzung einer allgemeinen Auflösungsmethode für jene algebraischen Gleichungen von der Form:  $F(x, a) = 0$ , welche nebst der Unbekannten  $x$  noch eine zweite Buchstabengrösse  $a$  in sich schliessen.  $F(x, a)$  bedeutet eine algebraische Function der zwei Buchstabengrössen  $x$  und  $a$  von der Gestalt:  $S [Ha^a x^r]$ , stellt also ein Polynom vor mit Gliedern von der Form  $Ha^a x^r$ .

Gleichungen dieser Art ergeben sich dem mathematischen Forscher ungleich häufiger als numerische, d. h. als jene, welche nur die Unbekannte  $x$  in sich schliessen und durch bestimmte Zahlwerthe derselben erfüllt werden. Bei den meisten geometrischen und mechanischen Problemen ist eine Curve, oder eine Fläche, oder ein anderes analoge Gebilde zu erforschen, gegeben durch eine gewöhnliche oder eine Differentialgleichung. Liegt eine gewöhnliche Gleichung vor, so kann diese nur eine Buchstabengleichung sein, aber keine Zahlengleichung, denn die letzteren bestimmen nur vereinzelt Punkte, aber keine ausgedehnten Gebilde. Hat man hingegen eine Differentialgleichung vorliegen, so handelt es sich zunächst um ihre Integration, und diese erfordert sehr oft, als untergeordnete Rechnungsoperation, die Auflösung einer höheren algebraischen Gleichung, die jedoch nur bisweilen eine Zahlengleichung, bei weitem öfter eine Buchstabengleichung ist. Man gelangt also bei sehr vielen Problemen theils direct, theils indirect zu Buchstabengleichungen und es erseht demnach eine allgemeine Auflösungsmethode für dieselben von Wichtigkeit.

Es müsste auch Wunder nehmen, wenn ein so wichtiger Gegenstand, wie der hier erwähnte, bisher ganz unbeachtet, oder auch nur die darauf bezüglichen Untersuchungen

erfolglos geblieben wären, da doch fast jeder Analyst, der sich mit geometrischen oder mechanischen Problemen beschäftigt, zu solchen Gleichungen gelangt, die sich dann meist, wie ein unübersteigliches Hinderniss, der weiteren Forschung in den Weg stellen. Ein so wichtiger Gegenstand konnte, der Natur der Sache nach, schon von den Mathematikern der ältesten Zeit nicht unbeachtet bleiben. Es finden sich auch schon die ersten Versuche zur Auflösung solcher Gleichungen in den Werken von Newton, Stirling, Crammer, Lagrange und Anderen, und ihre Untersuchungen über diesen Gegenstand waren auch nicht ohne Erfolg geblieben.

Wir wollen sie hier in Kürze aufzählen:

Die allerersten Versuche dieser Art, die mehr sind, als ein blosses Probiren und zufälliges Errathen, und bereits ein geregeltes Verfahren darstellen, finden sich in den Werken Newton's. Sie beziehen sich nur auf den allereinfachsten Fall, nämlich auf die Auflösung einer Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse. Das dabei eingeschlagene Verfahren geht darauf hinaus, die Wurzeln in Reihenform ab- oder aufsteigend zu entwickeln, findet sich aber dort nur in den allgemeinsten Umrissen skizzirt. Das eigenthümlich Neue bei dieser Methode ist eine geometrische Construction, die den Schlüssel zur Auflösung bildet und mit dem Namen: „analytisches Parallelogramm“ belegt wurde. Diese geometrische Construction wurde hierauf in mancherlei Problemen der analytischen Geometrie mit vielem Nutzen angewendet. Beispiele solcher Anwendungen und auch eine ausführliche Auseinandersetzung der Newton'schen Methode findet man in den Werken: Stirling, *Lineae tertii ordinis* und noch genauer in: Crammer, *Introduction a l'analyse de lignes courbes algebriques*.

Diese geometrische Construction Newton's wurde später von De Gua in einer höchst unwesentlichen Weise verbessert, und nun mit einem neuen Namen: „analytisches Dreieck“ belegt (*Usage de l'analyse de Descartes etc.*).

Eine wichtigere und bemerkenswerthe Änderung bewirkte Lagrange und zwar, indem er erstens: die bisher unerlässliche geometrische Construction Newton's durch ein rein analytisches Verfahren ersetzte, zweitens: die Entwicklung der Wurzeln in Form von Kettenbrüchen bewerkstelligte. Die erste dieser beiden Änderungen war eine wesentliche Verbesserung, da man jetzt durch eine hinlänglich einfache Rechnung und Vergleichung zum Ziele gelangte, wozu sonst nur die geometrische Construction führen konnte, aber auch die zweite war von wesentlichem Nutzen, da man vermittelst der Entwicklung in Kettenbrüchen auch jene Genüge leistenden Werthe, die in Form eines algebraischen Bruches mit einem geschlossenen Polynome im Zähler und im Nenner erscheinen, in geschlossener Form durch eine endliche Anzahl von Rechnungs-Operationen ermitteln konnte, während dieselben in absteigender oder aufsteigender Reihenform nicht in geschlossener Form darstellbar sind. Hiemit hatte also die Lösungsmethode Newton's einen solchen Grad der Vollkommenheit und Ausbildung erlangt, dass man die in Form von geschlossenen Polynomen oder eines algebraischen Bruches erscheinenden, kurz die geschlossenen rationalen Genüge leistenden Functionen für eine algebraische Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse durch ein geregeltes Verfahren sich verschaffen konnte. Dieses Verfahren war zwar auch geeignet, die incommensurablen Wurzeln in Gestalt unendlicher Reihen absteigend oder aufsteigend geordnet, oder in Form eines unendlichen Kettenbruches darzustellen, aber man hatte kein sicheres Mittel sich von der Convergenz solcher Reihen zu überzeugen, da alle damals bekannten und zur Verfügung gestellten Kennzeichen unzulänglich waren.

Übrigens war diese Auflösungsmethode noch mancherlei Vervollständigungen bedürftig, wenn sie den praktischen Anforderungen genügen sollte. Dahin sind alle jene Untersuchungen zu zählen, welche über die Unterbrechung der Stetigkeit Aufschluss geben, denen die Genüge leistenden Functionen der Buchstabengleichung unterliegen, und namentlich alle darin erscheinenden Nenner und Irrationalgrößen ans Tageslicht bringen. Dieselben bilden einen sehr wichtigen Theil der allgemeinen Auflösungsmethode, weil nur mit ihrer Hilfe gewisse Eigenschaften der Genüge leistenden Functionen klar eingesehen werden können. Noch einen andern und nicht unwichtigen Vortheil gewähren diese Untersuchungen, denn mit ihrer Hilfe gelingt es bisweilen, die geschlossene Form der Genüge leistenden Functionen zu gewinnen. Von all' diesen nutzbringenden Untersuchungen und ihrer zweckmässigen Anwendung ist nicht die leiseste Andeutung in den erwähnten Werken zu finden.

Später beschäftigte sich Fourier sehr angelegentlich mit diesem Gegenstande und wir haben, gewissen Andeutungen in seinem Werke nach, allen Grund zu glauben, dass er eine allgemeine Auflösungsmethode für solche Gleichungen und zwar nicht bloß für eine einzelne Gleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengröße, sondern auch mit einer beliebig grossen Anzahl von solchen, und auch für Systeme von mehreren solchen Gleichungen gefunden habe. Leider sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen, gleichwie viele andere von ihm aufgefundenen Schätze des Wissens für uns verloren gegangen. Aber auch in seinem Werke findet sich keine Andeutung jener eben früher erwähnten Untersuchungen über die Unstetigkeit der Genüge leistenden Functionen.

Endlich wurde derselbe Gegenstand von Petzval genauer behandelt. Bei seinen Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen gelangte derselbe nicht nur zu einer Reihe von Integrationsmethoden für dieselben, sondern fand auch Auflösungsmethoden für eine algebraische Gleichung, welche nebst der Unbekannten  $x$  noch andere constante Parameter beherbergt. Dieser Fund war auch einmal der Gegenstand seiner öffentlichen Vorträge an der Wiener Universität, und die Grundzüge dieser Methode finden sich in seinem Werke: „Integration der linearen Differentialgleichungen“ niedergelegt. Diesen zuletzt erwähnten Arbeiten verdankt diese Abhandlung ihr Entstehen. Es wurde mir nämlich erst später kund, dass schon Fourier, wiewohl auf einem andern Wege, denselben Gegenstand behandelt hatte, wie sich dies in seinem Werke: „Analyse des équations déterminées“ angedeutet findet, in welches dieser grosse Mathematiker seine Untersuchungen über Gleichungen niederlegen wollte. Leider ist der grösste Theil hiervon für uns verloren gegangen, weil die Herausgabe des zweiten Bandes durch seinen Tod vereitelt wurde. Der erschienene erste Band enthält glücklicher Weise eine kurze übersichtliche Darstellung: „Exposée synoptique“ des Gesamtinhaltes. Hieraus nun ist ersichtlich, dass das vierte Buch dieses Werkes eine allgemeine Auflösungsmethode für Buchstabengleichungen und Systeme von solchen enthalten sollte. Dasselbst sind in gedrängter Kürze die Grundzüge dieser Methode auseinandergesetzt; allein sie scheinen bisher selbst gelehrten Lesern ganz und gar unverständlich geblieben zu sein, vermuthlich wegen der ganz eigenthümlichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes, und wären es vielleicht auch für mich geblieben, wenn ich nicht durch die auf einem ähnlichen Gedankengange gegründeten Untersuchungen Petzval's über die linearen Differentialgleichungen zu ihrem Verständnisse geleitet worden wäre. Es ist mir auch gelungen, die Methode Fourier's zur Auflösung von Buchstabengleichungen und Systeme von solchen genau in derselben Weise wieder aufzufinden, wie sie einst dieser grosse Analyst

selbst, seinen eigenen Andeutungen nach, gehabt haben mochte. Es lag dies zwar so eigentlich nicht in der ursprünglichen Absicht; ich ging vielmehr, so wie jeder andere an meiner Stelle, auch darauf aus, auf diesem wenig betretenen Felde wo möglich einiges Eigenthum zu gewinnen und glaube wirklich einiges gefunden zu haben; in der Mehrzahl der Fälle jedoch geschah es, dass ich zwar meinte, einen eigenen Fund gethan zu haben und dann, Fourier's Exposéé synoptique zur Hand nehmend, zu meiner Überraschung gewahr ward, wie derselbe darin bereits angedeutet war, mit wenigen, aber so bezeichnenden Worten, dass kein Zweifel übrig bleiben konnte, Fourier habe dasselbe bereits selbst besessen. Ich fand mich dadurch nur noch mehr bestimmt, in dieser Abhandlung, welche einen Theil dieses Fundes zum Gegenstande hat, genau den von Fourier eingeschlagenen Weg beizubehalten. Es ist dies keineswegs bloß ein Opfer, welches man den Manen dieses grossen Mannes bringt, ich hege vielmehr die Überzeugung, dass diese Darstellungsweise zugleich die allgemeinste von allen sei, indem sie nicht bloß auf eine einzige Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse Anwendung verstattet, sondern allgemeine Giltigkeit besitzt, wie gross auch die Anzahl der Gleichungen und der überschüssigen Buchstabengrößen sein mag.

Das in dieser Abhandlung gelöste Problem stellt, wie aus diesen Bemerkungen ersichtlich ist, nur den einfachsten Fall dar. Die darin auseinandergesetzte Lösungsmethode verstattet aber eine allgemeine Anwendung auf beliebig gestaltete algebraische Buchstabengleichungen und Systeme von solchen mit beliebig vielen überschüssigen Buchstabengrößen. Dieser Abhandlung sollen auch mehrere andere nachfolgen, welche die complicirteren Probleme behandeln, wodurch die Theorie der algebraischen Buchstabengleichungen eine erschöpfende Darstellung gewinnen wird. Diese Reihe von Abhandlungen wird, wie schon erwähnt, zum grössten Theile als eine Wiederherstellung der von Fourier zuerst aufgefundenen, aber durch seinen Tod leider verloren gegangenen allgemeinen Lösungsmethode für Buchstabengleichungen anzusehen sein; ob und wie weit mir dies wirklich gelungen ist oder nicht, mag jeder Leser durch Vergleichung meiner Arbeit mit dem oberwähnten Exposéé synoptique selbst entscheiden.

Wir halten es noch für unerlässlich, einige wenige Worte über die in Rede stehenden Lösungsmethoden vorausszuschicken, um Missverständnisse zu vermeiden. Die Auflösung einer Gleichung oder eines Systemes von mehreren solchen ist nie als Zweck, sondern nur als ein Mittel zum Zwecke anzusehen. Hat nämlich die Behandlung irgend eines Problemes zu einer Gleichung geführt, so handelt es sich darum, aus derselben jene Schlussfolgerungen abzuleiten, die zur Beantwortung der gestellten Fragen dienen. Eine Lösungsmethode, die diesem praktischen Zwecke entsprechen soll, muss daher eigentlich in der Erörterung jener Eigenschaften bestehen, die in der Gleichung zwar schon niedergelegt sind, aber in einer viel zu bündigen, und deshalb für uns unverständlichen Weise. Wäre es möglich, diese Eigenschaften aus der Gleichung selbst schon zu ersehen, so wäre eine Auflösung derselben überflüssig und nur ein zweckloser Umweg. Weil aber diese unmittelbare Einsicht in der Regel nicht möglich ist, so wird man sich bemühen müssen, durch gewisse Operationen diesen Zweck zu erreichen. Die Methode nun, welche durch ein regelmässiges Verfahren zu dieser Einsicht führt, belegen wir mit dem Namen einer Lösungsmethode. Indem wir hier von dem praktischen Werthe ausgehen, werden wir eine Lösungsmethode an und für sich verwerfen, wenn sie für die Unbekannte zwar einen Genüge leistenden Werth liefert, aber in einer Gestalt,

welche die wissenswerthen Eigenschaften ebenso und vielleicht noch in einem grösseren Masse verhüllt, als die Gleichung selber. Wir erwähnen hier nur die Cardanische Formel für die Gleichung des dritten, und die ihr ähnliche für jene des vierten Grades als einen solchen Fall. Wir werden daher keineswegs zunächst auf geschlossene Formen der Wurzeln Jagd machen, und für uns können unendliche Reihen denselben und mitunter einen viel höheren Werth besitzen, wenn sie die leichte Beantwortung der gestellten Frage ermöglichen. Die Auflösung einer Gleichung wird eher als ein Discutiren der wichtigen Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe anzusehen sein. Ein solches Discutiren lässt sich, der Natur der Sache nach, nicht mit einem einzigen Schlage vollenden, sondern zerfällt in eine Anzahl von Partialuntersuchungen und zwar in eine um so grössere, je mehr verschiedene Eigenschaften zu erörtern sind, je complicirter das Problem ist. Es genügt deshalb nicht, die Wurzeln einer Gleichung nur in einer einzigen Form darzustellen, sondern man ist genöthigt, sie sich in mehreren verschiedenen Formen zu verschaffen, weil eine jede einzelne Form in der Regel nur eine einzige Eigenschaft aufzuklären vermag, über alle übrigen Eigenschaften aber keinen Aufschluss gewährt. Nur in den allereinfachsten Fällen genügt es, die Wurzeln in einer einzigen Form zu besitzen. In dem hier behandelten Probleme sind die Genüge leistenden Werthe der Unbekannten  $x$  Functionen von  $a$  und die Auflösungsmethode hat demnach solche Functionen aufzustellen und ihre wichtigen Eigenschaften aufzudecken. Man erreicht diesen Zweck durch die nachfolgenden Untersuchungen:

Erstens: Man entwickelt die Genüge leistenden Functionen in Form einer absteigend nach Potenzen von  $a$  geordneten Reihe und erhält hierdurch Aufschluss über ihr Verhalten für sehr grosse Werthe von  $a$ .

Zweitens: Man eruiert alle jene endlichen Werthe von  $a$ , für welche die Genüge leistende Function einer Unterbrechung der Stetigkeit unterliegt.

Drittens: Man entwickelt die Genüge leistenden Functionen in Reihenform, aufsteigend geordnet nach Potenzen einer Grösse  $a - a$ , wo  $a$  einen jener speciellen Werthe von  $a$  vorstellt, welchem eine Unterbrechung der Stetigkeit entspricht, und die durch die vorhergehende Untersuchung ermittelt sind. Auf diesem Wege gelangt man zur Kenntniss aller Nenner und Irrationalgrössen, die in den Genüge leistenden Werthen erscheinen. Man wird dadurch oft noch überdies in den Stand gesetzt, eine einfache und geschlossene Form aufzufinden.

Wir haben hier offen bekannt, dass die in Rede stehenden Auflösungsmethoden vorzüglich auf Reihenentwicklungen basirt seien, und geschlossene Formen nur nebenher gesucht werden, wenn sie ohne weitläufige Rechnungen erhalten werden können. Es steht zu erwarten, dass dieses offene Geständniss bei den meisten Lesern statt als eine Anempfehlung zu gelten, gerade das Gegentheil bewirken dürfte. Man pflegt meistens in Reihenentwicklungen nur ein unbequemes Verfahren zu erblicken, und entschliesst sich erst dazu, wenn geschlossene Formen durchaus den Dienst versagen. Bei vielen Lesern mag sogar der Zweifel rege werden, ob denn doch diese Auflösungsmethode eine neue sei, da bekanntlich mittelst der Taylor'schen und Mac-Laurin'schen Formel die Entwicklung explicirter und implicirter Functionen in Reihen gelingt. Wir haben auch die volle Überzeugung, dass diese Auflösungsmethode nur allmählich sich Geltung verschaffen werde, bis eine klare Vorstellung über den praktischen Zweck derselben wird Platz gegriffen haben, dann aber kein Zweifel mehr bestehen könne, dass sie alles leiste, was man vernünftigerweise von ihr zu fordern berechtigt ist.

Der leichteren Übersicht wegen ist die Behandlung des vorliegenden Problems in vier Abschnitte getheilt worden:

Der erste Abschnitt lehrt die absteigend nach Potenzen von  $a$  geordnete Reihen-Entwicklung.

Der zweite Abschnitt zeigt, wie die aufsteigend nach Potenzen einer Grösse  $a - a$  geordnete Reihen-Entwicklung einzuleiten ist und zwar für beliebige aber bestimmte Zahlwerthe von  $a$ .

Der dritte Abschnitt enthält die Untersuchungen, die auf die Unterbrechung der Stätigkeit bei den Genüge leistenden Functionen Bezug haben, ferner die Ermittlung aller Nenner und Irrationalgrössen, die in den Wurzeln erscheinen. Es sind dort auch die Grundzüge jener Untersuchungen aufgeführt, welche bisweilen zu geschlossenen Formen der Wurzeln führen.

Der vierte Abschnitt hat die Bestimmung des Ergänzungsgliedes und die Untersuchungen über die Convergenz der unendlichen Reihen zum Gegenstande, zu welchen man bei der Auflösung meistens gelangt. Dort finden die gelehrten Methoden ihre wahre Begründung und Rechtfertigung. Ferner geschieht dort Erwähnung von der geometrischen Bedeutung der verschiedenen Entwicklungsweisen, insbesondere ihrer Anwendbarkeit zur Bestimmung Asymptoten bei Curven von einfacher Krümmung.

Die vorliegende Abhandlung umfasst nur die beiden ersten Abschnitte.

Entwicklung der Wurzeln in Form einer nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Buchstabengrösse geordneten Reihe.

### Einleitung.

Im Folgenden ist eine Methode auseinandergesetzt, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Buchstabengrössen in eine Reihe zu entwickeln, geordnet nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Buchstabengrösse. Die gegebene Gleichung ist:

$$P = 0.$$

$P$  bedeutet eine Summe von Gliedern von der Form  $H a^x x^r$ .  $x$  stellt die unbekannte oder abhängige,  $a$  die unabhängige Buchstabengrösse vor,  $H$ ,  $\alpha$  und  $r$  sind bestimmte Zahlwerthe. Diese Form der Gleichung ist eine sehr allgemeine. In ihr ist die ganze und rationale algebraische Gleichung als specieller Fall enthalten. Sind nämlich alle  $\alpha$  und  $r$  ganze, positive Zahlen, die Nullwerthe mit eingerechnet, so lässt sich das Gleichungspolynom stets auf die folgende Form bringen:

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$$

und in dieser bedeuten  $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \dots, A_1, A_0$  selbst wieder Polynome, deren Glieder die allgemeine Form  $H a^x$  besitzen. Wir suchen hier eine Function von  $a$ , die die Eigenschaft besitzt, anstatt  $x$  in das Polynom  $P$  substituirt, dasselbe in einen identisch, d. h. für jeden beliebigen Werth von  $a$  sich auf Null reducirenden Ausdruck zu verwandeln. Wir verfügen jedoch im Voraus über die Form dieser Genüge leistenden Function, und setzen sie in Gestalt eines nach absteigenden Potenzen von  $a$  geordneten Polynomes voraus:

$$x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots + h_r a^{\xi_r}$$

in welchem zwischen den Exponenten die Relation:

$$\xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_r$$

besteht und die Gliederanzahl entweder eine endliche oder unendliche sein kann.

Eine solche willkürliche Voraussetzung der Functionsform fordert allerdings einerseits ihre Rechtfertigung, andererseits aber eine genügende Motivirung. Von der Ersteren dispensiren wir uns vor der Hand, indem wir später ohnehin zeigen werden, dass eine solche Entwicklungsweise der Wurzeln stets zulässig und die dabei erhaltene meistens unendliche Reihe für gewisse genügend grosse Werthe der unabhängigen Buchstabengrösse  $a$  convergent sei. In Bezug der Letzteren wollen wir hier nur erwähnen, dass man die Auflösungen der Gleichungen des ersten und die der binomischen höheren Grades schon seit langer Zeit in solcher Form zu suchen gewohnt sei, und zu diesem Behufe die bekannten Regeln zur Division und zum Wurzelausziehen besitze. Die im Folgenden behandelte Methode würde daher schon, insoferne sie eine Verallgemeinerung dieser beiden Regeln darstellt, hinreichend motivirt sein. Wir wollen uns auch jetzt mit dieser Motivirung begnügen, und werden später, wenn wir diesen Gegenstand mehr werden erörtert haben, über den Zweck und die eigentliche Bedeutung einer solchen Entwicklungsweise die nöthigen Bemerkungen folgen lassen.

Dadurch, dass wir  $x$  in dieser Form auffassen, wird das Problem wesentlich verändert. In der That, da nun  $x$  als die Summe von Gliedern von Form  $ha^\xi$  aufgefasst wird, treten an die Stelle der einzigen Unbekannten  $x$ , deren mehrere, nämlich einem jeden einzelnen Gliede  $ha^\xi$  dieser Reihe entsprechend, deren zwei: der Exponent  $\xi$  und der Coefficient  $h$ . Wäre demnach  $x$  eine aus  $r + 1$  solchen Gliedern zusammengesetzte Reihe, wie die folgende:

$$h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots + h_r a^{\xi_r}$$

so wären an die Stelle der einen Unbekannten  $x$  deren  $2r + 2$  an der Zahl getreten. Aber diese Vergrößerung der Anzahl der Unbekannten ist hier, weit entfernt ein Nachtheil zu sein, vielmehr ein Vortheil, denn diese neuen Unbekannten sind keine Functionen von  $a$  mehr, sondern Zahlen.

Durch die über die Functionsform von  $x$  gemachte Voraussetzung ist daher das Problem in ein wesentlich verschiedenes verwandelt worden. Da der Natur der Sache nach  $x$  eine bestimmte Function von  $a$  bedeutet, so werden die  $2r + 2$  Grössen:

$$\begin{array}{c} \xi_0, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_r \\ h_0, h_1, h_2 \dots h_r \end{array}$$

$2r + 2$  Bedingungsgleichungen zu erfüllen haben, da nur auf solche Weise diese Grössen ihrem Zahlwerthe nach vollkommen bestimmt sein können. Es ist andererseits bekannt, dass die Gleichung  $P = 0$ , als nach  $x$  einem höheren Grade angehörig, mehrere und in der Regel von einander verschiedene Auflösungen zulasse, und dass demnach nicht ein einziges, sondern mehrere verschiedene Systeme von Zahlwerthen für diese  $2r + 2$  Grössen sich werden auffinden lassen. Hieraus wäre man schon geneigt zu vermuthen, dass die zur Bestimmung dieser Grössen dienenden Gleichungen, namentlich für die dem Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  zukommenden Grössen  $\xi_0$  und  $h_0$  von höherem Grade sein werden. Allein wir werden zu unserer nicht geringen Überraschung sehen, dass die Exponenten  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_r$  stets nur durch Gleichungen des ersten Grades gegeben sind, während allerdings die zur Bestimmung von  $h_0, h_1 \dots h_r$

dienenden Gleichungen von höherem Grade sein können; und trotzdem entspricht doch im Allgemeinen einer Gleichung höheren Grades nach  $x$  nicht ein einziges System von Werthen  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ , sondern deren mehrere. Dieser scheinbare Widerspruch wird sich aber alsbald beheben, wenn wir die Bedingungen kennen lernen, welchen die Exponenten  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  entsprechen müssen. Diese Bedingungen sind ganz eigenthümlicher Art, so zwar, dass der erste Exponent  $\xi_0$  (gelegentlich auch die späteren  $\xi_1, \xi_2, \dots$ ) nicht eine einzige und bestimmte Gleichung, sondern im Gegentheile so viele Bedingungen zu erfüllen hat, als das Polynom  $P$  Glieder von der Form  $Ha^r x^r$  besitzt. Von all' diesen Bedingungen ist eine einzige eine Gleichung, alle übrigen aber Ungleichungen.

Um sich von der Natur dieser Bedingungen eine Vorstellung machen zu können, denke man sich aus einem jeden einzelnen Gliede  $Ha^r x^r$  des Gleichungspolynoms  $P$  eine lineare Function  $a + r\xi_0$  abgeleitet. Man erhält, dermassen verfahren, so viele verschiedene Functionen vom ersten Grade nach  $\xi_0$ , als Glieder im Gleichungspolynome bestehen. Substituirt man nun anstatt  $\xi_0$  beliebige Werthe, so werden diese Functionen der Reihe nach bestimmte, aber in der Regel gänzlich von einander verschiedene Werthe erlangen. Nur für gewisse Werthe von  $\xi_0$  werden zwei, gelegentlich auch mehrere dieser Functionen gleiche Werthe besitzen.  $\xi_0$  ist nun, um als Exponent im Anfangsgliede von  $x$  zu gelten, so zu wählen, dass zwei oder mehrere dieser Functionen gleiche Werthe aufweisen. Man würde dieser Bedingung auf mehrere verschiedene Arten genügen können, in der Regel auf so viele verschiedene Arten, als Combinationen zu Amben zwischen diesen linearen Functionen möglich sind, und es wären demnach in der Regel eben so viele verschiedene Werthe von  $\xi_0$  zulässig. Allein die hier erwähnte Bedingung ist nicht die einzige, die man zu erfüllen hat, man muss noch überdies Sorge tragen, dass alle übrigen Functionen kleinere oder doch wenigstens keine grösseren Werthe erhalten, als die zwei einander gleichgesetzten. Durch diese hinzutretende Bedingung erweisen sich viele jener durch Gleichsetzen von zwei beliebigen Functionen  $a + r\xi_0$  gewonnenen Werthe  $\xi_0$  als unbrauchbar, weil für dieselben eine oder mehrere der übrigen Functionen grössere Werthe erlangen, und es tritt dadurch eine Verringerung ihrer Anzahl ein. Nichts desto weniger bleiben meistens mehrere verschiedene Werthe von  $\xi_0$  übrig, so zwar, dass durch diese neue Bedingung nur gewisse der erwähnten Combinationen zu Amben sich als brauchbar erweisen.

Wir lernen hiermit ein Problem kennen, eigenthümlich in soferne, als die zu suchende Grösse nicht eine bestimmte Gleichung, sondern nebst einer mit einer gewissen Unbestimmtheit versehenen Gleichung noch eine Anzahl von anderen Bedingungen zu erfüllen hat, die nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen ausgedrückt sind. Zur Auflösung dieses Problemes werden wir durch eine geometrische Construction gelangen; aber eigentlich gehören alle derartigen Probleme, in welchen Bedingungen vorkommen, die nicht durch Gleichungen allein, sondern durch Ungleichungen ausgedrückt werden, in ein eigenes Gebiet und erfordern eine eigenthümliche Behandlungsweise. In soferne ist daher die Bestimmung des Exponenten  $\xi_0$  von der Auflösung von Ungleichungen abhängig. Dass wir dieselben hier von einer geometrischen Construction abhängig machen und auf solche Weise die Analyse der Ungleichungen umgehen können, verdanken wir dem günstigen Umstande, dass wir eine einzige Unbekannte  $\xi$  zu bestimmen haben, und die Abhängigkeit der hier in Betracht kommenden Functionen dieser Grösse, nämlich die der verschiedenen  $a + r\xi$  durch Linien in der Ebene darzustellen vermögen. Übersteigt jedoch die Anzahl dieser Unbekannten die



Zahl zwei, so sind solche geometrische Betrachtungen nicht mehr möglich, und man besitzt kein Mittel, die Auflösung von Ungleichungen zu umgehen. Wir geben hier der geometrischen Auflösungsmethode nur darum den Vorzug vor dem viel vollkommeneren und in Wahrheit bequemeren analytischen Verfahren, weil wir die Theorie der Ungleichungen, deren Wichtigkeit sich hier zum ersten Male ergibt, nicht als bekannt voraussetzen berechtigt sind, und weil die geometrischen Constructionen, so zu sagen, eine populäre Darstellung der Natur solcher Probleme und des zu ihrer Auflösung dienenden Verfahrens abgeben. Wir werden in der That darauf hinweisen, wie hier bei der geometrischen Construction Schritt für Schritt genau dasselbe geschieht, wie bei der analytischen Auflösungsmethode.

In der Regel werden die verschiedenen Auflösungen  $x$ , in der erwähnten Form aufgestellt, sich schon in dem Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  von einander unterscheiden und es gehört zu den Ausnahmefällen, dass zwei oder mehrere Auflösungen dasselbe Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  gemeinschaftlich besitzen. Mit der Bestimmung der Anfangsglieder wird demnach meistens jede einzelne Auflösung schon isolirt und von allen übrigen unterschieden sein. Schreitet man nun zur Bestimmung der nachfolgenden Glieder, so wird sich zu einem bestimmten solchen Anfangsgliede nur eine einzige Reihe von Folgegliedern ergeben. Wir ersehen also hieraus, dass die Bestimmung des Anfangsgliedes die Trennung der Wurzeln bewerkstellige, während die Bestimmung der Folgeglieder die Approximation vorstellt, analog dem bei Zahlengleichungen eingeleiteten Verfahren, welches gleichfalls in zwei Theile zerfällt, nämlich in die Trennung der Wurzeln und in das eigentliche Approximationsverfahren. Da nun die Bestimmung der Anfangsglieder einen ganz anderen Zweck erfüllt als die Bestimmung der Folgeglieder, so wird auch das zur Bestimmung der Anfangsglieder dienende Verfahren, der Natur der Sache nach, ein ganz anderes und complicirteres sein als dasjenige, welches die Folgeglieder liefert, und es zerfällt daher die Reihe der nachfolgenden Untersuchungen in zwei Hauptabtheilungen. In der ersten wird von der Bestimmung der Anfangsglieder gehandelt, während die zweite die Bestimmung der Folgeglieder lehrt.

## I. Bestimmung des Anfangsgliedes.

### §. 1.

Das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  enthält zwei Grössen, nämlich den Exponenten  $\xi_0$  und den Coefficienten  $h_0$ , die ihrem Zahlwerthe nach zu bestimmen sind. Die Bestimmung des Anfangsgliedes wird daher in zwei Theile zerfallen, nämlich in die Bestimmung von  $\xi_0$  und in die von  $h_0$ . Eine jede dieser beiden Grössen hat gewisse Bedingungen zu erfüllen. Sind uns diese Bedingungen bekannt, so werden wir auch ihre Zahlwerthe anzugeben im Stande sein, und der nächste Schritt, den wir zu thun haben, besteht in der Erörterung dieser Bedingungen. Haben wir dann diese Bedingungen aufgefunden, so werden wir noch anzugeben haben, wie man diese Bedingungen erfüllen und so zu den Zahlwerthen von  $\xi_0$  und  $h_0$  gelangen könne; denn, wie schon bemerkt wurde, sind zwar  $\xi_0$  und  $h_0$  durch Gleichungen gegeben, allein diese Gleichungen lassen sich nicht unmittelbar bilden, sondern es führt erst eine eigenthümliche Untersuchung zu denselben.

Zu den Bedingungen, welche die beiden Grössen  $\xi_0$  und  $h_0$  zu erfüllen haben, kann man auf sehr verschiedenen Wegen gelangen. Wir wählen hier den von Fourier betretenen Weg der directen Substitution, d. h. wir substituiren eine absteigend geordnete, mit dem Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  versehene Reihe anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$ , wobei  $h_0$  und  $\xi_0$  unbestimmte Zahlen vorstellen, und untersuchen, für welche Werthe der unbestimmt gelassenen Grössen  $\xi_0$  und  $h_0$  dieses Substitutionsresultat in seinem ersten, mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Gliede auf Null gebracht werden könne. Wir geben dieser Ableitungsweise den Vorzug vor allen übrigen, weil wir so unabhängig von allen Lehrsätzen, die zur allgemeinen Theorie der Gleichungen gehören, zu den gesuchten Bedingungen gelangen und andererseits dabei den Vortheil geniessen, über die Beschaffenheit der mit bestimmten Zahlwerthen versehenen Grössen  $a$  und  $\rho$  keinerlei beschränkende Annahmen zu machen. Diese Bedingungen gelten daher nicht bloß für ganze, rationale und geschlossene Polynome  $P$ , sondern auch für solche, denen diese Eigenschaften fehlen.

Schreiten wir nun zur Ausführung dieser Substitution. Eine kurze Überlegung zeigt, dass sich dieselbe nur bis zu einer gewissen Weite hin ausführen lassen, so lange über den Zahlwerth des Exponenten  $\xi_0$  keine bestimmte Verfügung getroffen ist. In der That hat man die statt  $x$  genommene Reihe zuerst in jedes einzelne Glied des Gleichungspolynoms zu setzen und wird dabei aus einem jeden solchen Gliede  $H a^{\rho} x^{\xi_0}$  einen mehrgliedrigen Ausdruck erhalten, der gleichfalls nach absteigenden Potenzen von  $a$  geordnet ist, und ein Anfangsglied von der Form:

$$(1) \quad H h_0^{\rho} a^{\rho + \rho \xi_0}$$

besitzt. Weiter als bis hierher lässt sich die Substitution nicht ausführen, ohne dem  $\xi_0$  einen bestimmten Werth zu ertheilen, denn der nächste Schritt besteht in der Summirung aller dieser verschiedenen Ausdrücke, welche den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynoms entsprechen, und hiezu ist es nöthig, die verschiedenen Glieder von der Form (1) in Bezug auf die in ihnen erscheinenden Potenzen von  $a$  mit einander zu vergleichen. Gesetzt,  $\xi_0$  wäre mit einem bestimmten Zahlwerthe versehen, so wären es auch die Gradzahlen  $\rho + \rho \xi_0$  und man könnte ohne alle Schwierigkeit entscheiden, welches der verschiedenen Glieder von der Form (1) die höchste Potenz von  $a$  besitzt. So aber, da der Zahlwerth von  $\xi_0$  noch unbestimmt ist, kann eine solche Vergleichung der Gradzahlen  $\rho + \rho \xi_0$  nicht unternommen und daher auch die Substitution nicht weiter geführt werden. Allein gerade diese nur bis hierher und nicht weiter ausgeführte Substitution gibt die Bedingungen an, welchen bei der Wahl von  $\xi_0$  entsprochen werden muss. Wie eben bemerkt wurde, handelt es sich nun zunächst darum, die verschiedenen Gradzahlen  $\rho + \rho \xi_0$  mit einander zu vergleichen und unter ihnen die grösste auszuwählen. Der Erfolg einer solchen Vergleichung kann jedoch ein doppelter sein: Entweder findet sich nämlich unter denselben eine einzige solche, mit dem grössten Zahlwerthe versehene Gradzahl; oder es kommt dieser grösste Zahlwerth zweien oder mehreren derselben gemeinschaftlich zu. Der ersterwähnte Fall wird sich häufiger zutragen, während der zweite nur für specielle Werthe von  $\xi_0$  eintreten kann. Die Unterscheidung dieser zwei Fälle ist für den Gang der weiteren Substitution und für die Form des höchsten Gliedes im Substitutionsresultate  $P_0$  von Wichtigkeit. Findet sich nämlich eine einzige Gradzahl der verschiedenen  $\rho + \rho \xi_0$  mit dem grössten Zahlwerthe versehen, so wird sich bei der Summirung der Ausdrücke, welche den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynoms entsprechen, nur ein einziges Glied vorfinden, welches  $a$  in

der höchsten Potenz besitzt, und da dasselbe die Form (1) besitzt, so wird der Coefficient  $IIh_0^r$ , mit dem diese höchste Potenz von  $a$  multiplicirt erscheint, stets von Null verschieden ausfallen, so lange  $h_0$  von Null verschieden ist. In einem solchen Falle ist daher an ein identisches Nullwerden des Substitutionsresultates  $P_0$  nicht zu denken, weil wenigstens die höchste Potenz von  $a$  stets einen von Null verschiedenen Coefficienten  $IIh_0^r$  besitzen wird. Solche Werthe von  $\xi_0$ , welche einer einzigen der Gradzahlen  $\alpha + r\xi_0$  den grössten Zahlwerth ertheilen, sind demnach nicht geeignet, anstatt  $\xi_0$  im Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  gesetzt zu werden. Ist hingegen  $\xi_0$  so gewählt, dass der grösste Zahlwerth nicht einer einzigen, sondern zweien oder mehreren der Gradzahlen  $\alpha + r\xi_0$  gemeinschaftlich zukommt; so sind auch zwei oder mehrere der Glieder (1) vorhanden, welche dieselbe und höchste Potenz von  $a$  besitzen; bei der nun einzuleitenden Summirung der einzelnen Ausdrücke stellen sich dieselben zu einem einzigen mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Gliede des Substitutionsresultates  $P_0$  zusammen. Der Coefficient dieser höchsten Potenz von  $a$  ist demnach ein zwei- oder mehrgliedriger Ausdruck, nämlich die Summe von zwei oder mehreren Gliedern von der Form  $IIh_0^r$ . Jetzt ist es aber auch möglich, diesen Coefficienten der Nulle gleich zu machen durch von Null verschiedene aber zweckmässig gewählte Werthe von  $h_0$ . Wir sind auf solche Weise schon zu den gesuchten Bedingungen gelangt, welchen die mit  $\xi_0$  und  $h_0$  bezeichneten Grössen im Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  genügen müssen. Wir haben auch gesehen, dass die Wahl jeder dieser beiden Grössen einen eigenthümlichen Zweck erfüllt: die zweckmässige Wahl des Exponenten  $\xi_0$  bewirkt nämlich, dass zwei oder mehrere Glieder des Gleichungspolynoms zu dem mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Gliede des Substitutionsresultates  $P_0$  einen Bestandtheil liefern, so zwar, dass der Coefficient dieser höchsten Potenz von  $a$  ein zwei- oder mehrgliedriger,  $h_0$  enthaltender Ausdruck wird, der daher eine Reduction zulässt, wenn man dem  $h_0$  einen bestimmten Zahlwerth ertheilt. Die zweckmässige Wahl der zweiten, mit  $h_0$  bezeichneten Grösse bezweckt, dass bei dieser, zufolge der Wahl von  $\xi_0$ , möglich gewordenen Reduction im Coefficienten des höchsten Gliedes im Substitutionsresultate derselbe den Werth Null erlangt. Wir finden hier unsere früher gemachten Bemerkungen bewahrheitet:  $\xi_0$  nämlich, so wie  $h_0$  sind aus Gleichungen zu ziehen; allein in Bezug auf diese Gleichungen waltet noch eine Unbestimmtheit.

Die Gleichung, welche  $\xi_0$  liefert, ist immer vom ersten Grade, weil sie besagt, dass zwei der Gradzahlen  $\alpha + r\xi_0$ , welche, wie man sieht, lineare Functionen von  $\xi_0$  sind, einander gleich sein müssen. Trotzdem ist es dennoch denkbar, dass für  $\xi_0$  mehrere Zahlwerthe erhalten werden können.

Die Möglichkeit mehrerer brauchbarer Zahlwerthe für  $\xi_0$  hat eben in der erwähnten Unbestimmtheit ihren Grund, da der Grössen  $\alpha + r\xi_0$  so viele als Glieder des Gleichungspolynoms vorhanden sind, also mit Ausnahme der binomischen Gleichungen stets mehr als zwei; und man wird daher mehrere Gleichungen des ersten Grades aufzustellen im Stande sein, welche die verlangte Gleichheit zweier linearer Functionen  $\alpha + r\xi_0$  aussprechen und daher auch mehrere Werthe für  $\xi_0$  finden. Ist eine bestimmte solche Gleichung aufgestellt, und der ihr entsprechende Werth von  $\xi_0$  bestimmt, so ist hiemit auch zugleich die Gleichung bestimmt, welche  $h_0$  liefert. Der aus dieser Gleichung des ersten Grades gezogene Werth von  $\xi_0$  ertheilt nämlich zweien, gelegentlich aber auch mehreren linearen Functionen  $\alpha + r\xi_0$  denselben grössten Werth. Dieser grösste Werth ist zugleich der Exponent von  $a$  im ersten Gliede des Substitutionsresultates  $P_0$ , so lange man noch nicht den Werth von  $h_0$  specialisirt hat. Der Coefficient,

mit dem diese höchste Potenz von  $a$  multiplicirt erscheint, ist ein zwei- oder mehrgliedriges Polynom, welches  $h_0$  in verschiedenen Potenzen enthält, und lässt sich auf eine sehr einfache Weise bilden. Diejenigen Functionen  $a + r\xi_0$  nämlich, welche einerlei und grössten Werth erlangen, entsprechen gewissen Gliedern des Gleichungspolynomes  $P$ .

Setzt man nun in der Summe der so bezeichneten Glieder des Gleichungspolynoms anstatt  $a$  und  $x$  die Werthe 1 und  $h_0$ , so geht dadurch ein in der Regel zwei-, gelegentlich aber mehrgliedriger  $h_0$  enthaltender Ausdruck hervor, welcher eben der gesuchte Coëfficient dieser höchsten Potenz von  $a$  im Substitutionsresultate ist.

Diese Regel ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Form (1), welche eben das höchste Glied des aus  $Ha^ax^r$  hervorgehenden Substitutionsresultates ist. Es ist nun nur noch nöthig, diesen  $h_0$  enthaltenden Ausdruck der Nulle gleich zu setzen, so hat man die dem erwähnten  $\xi_0$  entsprechende Bestimmungsgleichung für das zugehörige  $h_0$ . Diese Gleichung ist nach  $h_0$  meistens von höherem Grade, und es ist daher möglich, zu einem einzigen Werthe von  $\xi_0$  mehrere zugehörige  $h_0$  zu finden. Wir ersehen also hieraus, dass sowohl der Werth von  $\xi_0$ , als die zugehörigen Werthe von  $h_0$  bestimmt sind, wenn man durch Gleichsetzen zweier linearer Functionen  $a + r\xi_0$  von einer bestimmten Gleichung des ersten Grades in  $\xi_0$  ausgegangen ist. Die bei der Wahl dieser Gleichung bestehende Unbestimmtheit bewirkt daher, trotzdem dass sie nur dem ersten Grade angehört, die Möglichkeit verschiedener  $\xi_0$ , deren jedem wieder bestimmte  $h_0$  in einer gewissen Anzahl angehören. Die Unbestimmtheit der Gleichung in  $\xi_0$  erstreckt sich aber keineswegs so weit, dass man nur beliebige zwei der linearen Functionen  $a + r\xi_0$  einander gleichsetzen dürfte, um einen brauchbaren Werth für  $\xi_0$  zu erhalten; die Wahl der beiden einander gleichzusetzenden Functionen  $a + r\xi_0$  ist vielmehr durch weitere Bedingungen von eigenthümlicher Art beschränkt. Es ist nämlich nicht hinreichend, dass  $\xi_0$  so gewählt werde, dass zwei oder mehrere lineare Functionen gleich werden, sondern die gleichgesetzten Functionen müssen zugleich den grössten Werth besitzen. Wollte man daher, um zu allen möglichen verschiedenen Werthen von  $\xi_0$  zu gelangen, die linearen Functionen zu je zweien auf alle denkbaren Weisen einander gleichsetzen, so müsste hinterher erst eine Untersuchung der so gewonnenen Werthe für  $\xi_0$  folgen, welche zu entscheiden hätte, ob keine der übrigen linearen Functionen  $a + r\xi_0$  einen grösseren Werth erhält als die zwei einander gleichgesetzten. Diese Untersuchung wäre mit jedem einzelnen der gewonnenen Zahlwerthe von  $\xi_0$  vorzunehmen, und nur jene von ihnen, welche dieser Bedingung entsprechen, sind als brauchbare Werthe von  $\xi_0$  anzusehen, alle übrigen aber nicht.

Es versteht sich wohl von selbst, dass dieser Weg, zu den Werthen von  $\xi_0$  zu gelangen, nicht der bequemste und kürzeste sei, weil in der Mehrzahl der Fälle bei einem solchen Gleichsetzen zweier ganz willkürlich erwählter linearer Functionen die nachträgliche Untersuchung des gewonnenen Werthes denselben als unbrauchbar bezeichnen würde. Wir wollen daher zu einem directen Verfahren schreiten, welches gleichzeitig auf alle Bedingungen Rücksicht nimmt, und welches ohne alle Umwege und fruchtlose Versuche zu allen möglichen Werthen von  $\xi_0$  führt. Haben wir diesen Zweck erreicht, so wird auch die Aufstellung der entsprechenden Gleichungen in  $h_0$ , wie wir bereits gesehen haben, keinerlei Unbestimmtheit und Schwierigkeit unterliegen. Wie schon früher bemerkt wurde, gehört dieses Problem eigentlich in das Gebiet der Auflösung von Ungleichungen. Wir werden auch später uns darüber deutlicher erklären. Vor der Hand aber versuchen wir durch geometrische Constructionen zur Auflösung zu gelangen.

§. 2.

Das Problem ist folgendes: Es ist ein Polynom  $P$  gegeben, bestehend aus mehreren Gliedern von der Form  $Ha^r x^r$ ; aus den Exponenten  $a$  und  $r$  eines jeden einzelnen solchen Gliedes bilde man eine Function von  $\xi_0$ , nämlich die  $a + r\xi_0$ , deren Bildungsweise von selbst ersichtlich ist; nun sollen jene Zahlwerthe von  $\xi_0$  angegeben werden, welche unter all diesen verschiedenen Functionen zweien oder mehreren denselben gleiche, allen übrigen aber kleinere Werthe ertheilen. Diese Bedingungen sind es, welche  $\xi_0$  zu erfüllen hat. Betrachten wir nun  $\xi_0$  als Abscisse, die lineare Function  $a + r\xi_0 = \eta$  als zugehörige Ordinate, so lässt sich für jede lineare Function die zwischen  $\xi$  und  $\eta$  bestehende Abhängigkeit durch eine Linie, und zwar durch eine gerade Linie darstellen. Diese gerade Linie stellt die Gesamtheit aller Punkte auf der Ebene dar, deren Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$  in derjenigen Abhängigkeit zu einander stehen, wie sie die Gleichung

$$\eta = a + r\xi$$

zwischen ihnen feststellt. Für jede einzelne lineare Function, gewissermassen also für jedes einzelne Glied  $Ha^r x^r$  ergibt sich eine bestimmte solche Gerade, also für alle die verschiedenen linearen Functionen ein ganzes System solcher Linien, deren jede eine andere Lage besitzt. Hier in der verzeichneten Figur ist es nicht schwer zu sehen, welche der linearen Functionen für einen gewissen Bereich der Werthe von  $\xi$  den grössten Werth besitzt.

Um hievon eine deutliche Darstellung zu geben, wählen wir ein Beispiel, nämlich die Gleichung

$$\underset{a}{ax^4} + \underset{b}{x^4} + \underset{c}{x^3} + \underset{d}{a^2x^2} - \underset{e}{x^2} - \underset{f}{a^2x} + \underset{g}{2ax} + \underset{h}{a^2} - \underset{i}{a} = 0.$$

Die linearen Functionen der einzelnen Glieder sind folgende:

$$\begin{aligned} \eta_a &= 1 + 4\xi, & \eta_b &= 4\xi, & \eta_c &= 3\xi, & \eta_d &= 2 + 2\xi, \\ \eta_e &= 2\xi, & \eta_f &= 2 + \xi, & \eta_g &= 1 + \xi, & \eta_h &= 2, & \eta_i &= 1. \end{aligned}$$

Das durch diese Gleichungen bestimmte System von Linien ist in Fig. 1 dargestellt. Jede Linie ist mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche den entsprechenden  $\eta$  und den correspondirenden Gliedern des Gleichungspolynoms angefügt sind. In dieser Zeichnung sehen wir alsbald, dass für alle möglichen Werthe von  $\xi$  nur drei Linien die oberste Lage einnehmen, nämlich für  $\xi < 0$  ist die mit  $h$  bezeichnete Linie die am höchsten gelegene, für jene Werthe von  $\xi$  die zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  liegen die Linien  $d$  und für grössere  $\xi$  als  $\frac{1}{2}$  die Linie  $a$ . In den Durchschnittpunkten  $A$  und  $B$ , welchen die Werthe  $\xi = 0$  und  $\xi = \frac{1}{2}$  entsprechen, ist es nicht mehr eine einzige Linie, welche das grösste  $\eta$  besitzt, sondern es sind deren mehrere. Im Punkte  $A$  schneiden sich drei Linien, nämlich die  $h, f$  und  $d$ ; sie besitzen alle drei dort dieselbe höchste Lage, allen dreien entspricht dieselbe grösste Ordinate  $\eta = 2$ , während alle übrigen Linien kleinere Werthe für ihre Ordinaten liefern. Wir schliessen hieraus, dass wenn man anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom eine absteigend geordnete, mit dem Anfangsgliede  $ha^0 = h$  beginnende Reihe substituirt, ein Substitutionsresultat hervorgeht, in welchem  $a^2$  die höchste darin erscheinende Potenz von  $a$  ist, und dass dieses mit  $a^2$  versehene höchste Glied des Substitutionsresultates sich aus drei Bestandtheilen zusammensetzen werde, welche aus den drei durch die Linien  $h, f$  und  $d$  bezeichneten Gliedern:  $a^2, -a^2x, a^2x^2$  hervorgehen. Der in diesem höchsten Gliede erscheinende Coëfficient ist demnach ein Trinom, namentlich das folgende:

$$1 - h + h^2,$$

welches, der Nulle gleichgesetzt, die quadratische Bestimmungsgleichung:

$$h^2 - h + 1 = 0,$$

und demnach die zwei imaginären Werthe

$$h_0 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$$

liefert. Wir haben somit zwei verschiedene Anfangsglieder der nach absteigenden Potenzen von  $a$  geordneten Reihenentwicklung von  $x$  kennen gelernt, sie sind:

$$x_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) \text{ und } x_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

Wenden wir uns nun zu dem zweiten Durchschnittpunkte  $B$ . Dort schneiden sich die zwei Linien  $d$  und  $a$ , sie besitzen dort, d. h. für  $\xi = \frac{1}{2}$  dieselbe und grösste Ordinate  $\eta = 3$ , während alle übrigen Linien gleichfalls kleinere Ordinaten aufweisen. Wir schliessen hieraus auf ein Anfangsglied von der Form  $h_0 x^{\frac{1}{2}}$ . Die zur Bestimmung des Coëfficienten  $h_0$  dienende Gleichung ist aus den durch die Linien  $d$  und  $a$  bezeichneten Glieder  $a^2 x^2$  und  $a x^{\frac{1}{2}}$  abzuleiten und ist folgende:

$$h^4 + h^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade und besitzt die Wurzeln:  $0, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ . Wir erhalten also zwei neue Anfangsglieder von  $x$ , nämlich:

$$x_0 = \sqrt{-a}$$

$$x_0 = -\sqrt{-a}.$$

Es darf hier nicht befremden, dass diese Bestimmungsgleichung in  $h$  dem vierten Grade angehört, in Wahrheit aber nur zwei brauchbare Werthe für  $h$  liefert: Fassen wir nämlich die vier verschiedenen Anfangsglieder zusammen, so können wir alle vier dadurch angedeuteten Wurzeln unbeschadet mit einem Anfangsgliede wie  $h_0 a^{\frac{1}{2}}$  beginnend ansehen, nur muss dann der Coëfficient  $h_0$  den beiden zuerst aufgefundenen Auflösungen entsprechend den Werth 0 bekommen, und so hätten wir die Bedeutung der zwei gleichen Nullwurzeln dargethan. Wir sehen an diesem Beispiele, dass es sich um das Auffinden bestimmter Durchschnittpunkte handelt, die aber von den am höchsten gelegenen Linien des verzeichneten Systemes gebildet werden.

In der Figur bestehen noch unzählig viele Durchschnittpunkte, aber sie sind für das gegenwärtige Problem, nämlich für die Bestimmung des Anfangsgliedes der absteigenden Entwicklung ohne allen Werth. Das, was wir also hier noch zu geben haben, ist ein Verfahren, diese am höchsten gelegenen Durchschnittpunkte aufzufinden. Hierzu werden uns folgende Bemerkungen leiten: Zwischen je zwei solchen unmittelbar auf einander folgenden Durchschnittpunkten liegt als Verbindungslinie ein abgegrenztes Stück einer Geraden. In unserem Beispiele gehört dieses Stück  $AB$  der mit  $d$  bezeichneten Linie an. Wären mehrere Durchschnittpunkte vorhanden, so würden mehrere solche Verbindungslinien bestehen. Jede solche Verbindungslinie zwischen zwei nächstgelegenen Durchschnittpunkten ist das Stück einer Geraden im Systeme, welche dort die höchste Lage einnimmt und das grösste  $\eta$  aufweist. Alle diese Stücke reihen sich an einander, und bilden eine zusammenhängende gebrochene Linie. Fügen wir zu diesen abgegrenzten geraden Linienstücken noch jene zwei Linienstücke hinzu, deren eine sich von dem

am meisten links gelegenen Durchschnittspunkte in der Richtung der negativen  $\xi$ , deren andere aber von dem am meisten rechts gelegenen Durchschnittspunkte in der Richtung der positiven  $\xi$  gleichfalls ins Unendliche sich erstreckt, und welche in diesen Bereichen die höchste Lage einnehmen, so ergänzen sich diese zwei nach einer Richtung hin abgegrenzten, nach der andern aber unbegrenzten Linien mit den früher erwähnten Verbindungslinien zweier nächster Durchschnittspunkte zu einer gebrochenen Linie, die sich von  $\xi = -\infty$  bis  $\xi = +\infty$  ausdehnt. In unserem Beispiele ist diese gebrochene Linie die  $hABa$ . Sie vereinigt in sich jene Linienstücke des verzeichneten Systemes, welche die grössten Ordinaten  $\eta$  aufweisen, und ist aus einer endlichen Anzahl von geraden Stücken zusammengesetzt, die in den Durchschnittspunkten an einander stossen. Die beiden Endstücke dieser gebrochenen Linie sind nach einer Richtung hin unbegrenzt, alle übrigen Mittelstücke sind aber nach beiden Richtungen begrenzt. Diese gebrochene Linie gibt ein Bild von der Abhängigkeit, in welcher der Exponent  $\eta$  der höchsten Potenz von  $a$ , die im Substitutionsresultate  $P_0$  erscheint, und der Exponent  $\xi_0$  des Anfangsgliedes der anstatt  $x$  substituirten Reihe zu einander stehen.

Wir ersehen hieraus, dass diese zwei Grössen nicht in einem stätigen Zusammenhange zu einander stehen, im Gegentheile besteht eine bestimmte Abhängigkeit nur innerhalb gewisser Grenzen, überschreitet man diesen Bereich, so tritt eine neue Relation zwischen ihnen auf. Wir haben auch den Grund hievon bereits kennen gelernt, und diese Erscheinung findet darin ihre Erklärung, dass das mit der höchsten Potenz von  $a$  versehene Glied des Substitutionsresultates je nach dem dem  $\xi_0$  im Anfangsgliede von  $x$  ertheilten Zahlwerthe bald aus dem einen, bald aus einem anderen Gliede des Gleichungspolynoms  $P$  hervorgeht. Die gebrochene Linie gibt von diesem Überspringen von Glied zu Glied ein klares Bild und gibt auch Aufschluss über die Art und Weise, in welcher dieses Überspringen geschieht. Die gebrochene Linie weist nämlich eine eigenthümliche Gesetzmässigkeit in der Aufeinanderfolge der sie zusammensetzenden Linienstücke aus. Übergehen wir nämlich von  $\xi = -\infty$  durch alle möglichen Zwischenstufen zu  $\xi = +\infty$ , also von kleineren  $\xi$  zu immer grösseren, so wird sich zeigen, dass die Linienstücke in solcher Weise auf einander folgen, dass diejenige den Anfang macht, welcher das kleinste  $\mathfrak{r}$  entspricht, d. h. jene Linie, die mit der Abscissenaxe den kleinsten Winkel einschliesst, und dass die nachfolgenden Linien immer grössere  $\mathfrak{r}$  aufweisen, also stets grössere Winkel mit der Abscissenaxe einschliessen. Man gelangt also so zur Wahrnehmung, dass sie steigend nach  $\mathfrak{r}$  geordnet erscheinen. Bei dem gewählten Beispiele findet man diese Bemerkung bestätigt. Es ist auch leicht einzusehen, dass es sich so verhalten müsse, denn von zwei verschiedenen  $\eta = a + \mathfrak{r}\xi$  wird bei wachsendem  $\xi$  diejenige raseher wachsen, welche das grössere  $\mathfrak{r}$  besitzt, so zwar, dass wenn eine gewisse lineare Function  $\eta = a + \mathfrak{r}\xi$  für ein bestimmtes  $\xi$  den grössten Werth erhalten hat, für grössere  $\xi$  nur diejenigen Functionen sie erreichen und übersteigen können, welchen ein grösseres  $\mathfrak{r}$  und demgemäss ein raseheres Wachsthum eigen ist. Die gebrochene Linie wird folglich nach links diejenigen Linienstücke aufweisen, die die kleinsten, nach rechts aber jene, welche die grössten Winkel mit der Abscissenaxe einschliessen, namentlich werden die beiden Endstücke den beiden Functionen mit den extremen Werthen von  $\mathfrak{r}$ , und zwar das linke Ende der mit dem kleinsten  $\mathfrak{r}$ , das rechte Ende aber der mit dem grössten  $\mathfrak{r}$  versehenen Function entsprechen. Zufolge dieser Anordnung der Linienstücke, dass auf ein bestimmtes derselben nur immer ein solches folgen kann, welches einen grösseren Winkel mit der Abscissenaxe einschliesst, wird diese gebrochene Linie ihre Concavität nach auf-, ihre Convexität nach abwärts wenden (wenn es uns gestattet ist

diese nur bei krummen Linien gebräuchlichen Bezeichnungen auf gebrochene auszudehnen). Wir ersehen hieraus, dass, wenn wir von den kleinsten Werthen von  $\xi$  zu immer grösseren überschreiten, und zwar durch alle möglichen Zwischenstufen das grösste  $\eta$  sprungweise von einer Geraden des Systemes zu einer anderen, jedoch mit einem grösseren  $\chi$  versehenen übergeht. Ein solcher Sprung findet immer Statt bei den Eckpunkten der gebrochenen Linie. Bei diesem Übergange von den kleinsten  $\xi$  zu den grössten zeigt sich aber, dass nicht alle Linien des verzeichneten Systemes an der gebrochenen Linie Theil nehmen, sondern nur einige derselben. Von einigen derselben ist es schon von vorne her ersichtlich, dass sie niemals das grösste  $\eta$  aufweisen können. Ergeben sich nämlich mehrere parallele Linien, wie die  $a$  und  $b$ , die  $d$  und  $e$ ,  $f$  und  $g$ ,  $h$  und  $i$ , in dem erwähnte Beispiele, so behält von solchen parallelen Linien die eine stets die höchste Lage gegen alle übrigen; man kann demnach die Zeichnung in allen solchen Fällen dadurch vereinfachen, dass man von solchen parallelen Linien nur diejenige beibehält, welche unter ihnen stets das grösste  $\eta$  ausweist, alle übrigen aber auslässt. Dies wird geschehen, wenn man von denjenigen Functionen  $\alpha + \chi \xi$ , welche dasselbe  $\chi$  aber verschiedene  $\alpha$  ausweisen, nur eine einzige, nämlich die mit dem grössten  $\alpha$  versehene erwählt, und ihr entsprechend die Gerade im Systeme verzeichnet. So würde in dem erwähnten Beispiele, welches auch so geschrieben werden kann

$$(2) \quad (a+1)x^4 + x^3 + (a^2-1)x^2 - (a^2-2a)x + (a^2-a) = 0$$

die Berücksichtigung der linearen Functionen:

$$\eta = 1 + 4\xi, \quad \eta = 3\xi, \quad \eta = 2 + 2\xi, \quad \eta = 2 + \xi, \quad \eta = 2$$

vollkommen hinreichen. Diese linearen Functionen sind aus den Gradzahlen der Unbekannten  $x$  und der mit ihnen multiplicirten Polynome in  $a$  gebildet. Durch diesen Vorgang werden also gewisse lineare Functionen beseitigt. Hieraus folgt aber keineswegs, dass alle übrig bleibenden linearen Functionen wirklich an der gebrochenen Linie einen Antheil nehmen, nur lässt sich darüber nicht ohne eine weitere Untersuchung entscheiden. So sehen wir z. B. in dem gewählten Beispiele, dass nur vier derselben, nämlich die:  $2$ ,  $2 + \xi$ ,  $2 + 2\xi$ ,  $1 + 4\xi$ , zu dem grössten Werthe gelangen, und daher zur gebrochenen Linie einen Bestandtheil liefern, während die  $3\xi$  in der ganzen Ausdehnung der Werthe von  $\xi$  unter diesem grössten Werthe bleibt, und daher unter der gebrochenen Linie verläuft. Die lineare Function  $2 + \xi$  nimmt für kein endliches Intervall, sondern nur für den einzigen Werth  $\xi = 0$  an der gebrochenen Linie Antheil.

Die linearen Functionen lassen sich daher in drei Abtheilungen theilen: 1. solche, welche ein Liniestück zur gebrochenen Linie liefern, 2. solche, welche nur einen Punkt und zwar einen Eckpunkt geben, und 3. solche, welche an der gebrochenen Linie gar keinen Antheil nehmen. Wie sich die linearen Functionen eintheilen, eben so trennen sich die Glieder des Gleichungspolynoms in drei Gruppen. Den ersterwähnten linearen Functionen entsprechen nämlich jene Glieder des Gleichungspolynoms, deren jedes für ein bestimmtes Intervall der Werthe  $\xi$  das höchste Glied des Substitutionsresultates liefert, hingegen die zuletzt erwähnte Abtheilung von linearen Functionen entspricht allen jenen Gliedern des Gleichungspolynoms, welche für keinen, wie immer gewählten Werth von  $\xi$  die höchste Potenz von  $a$  im Substitutionsresultate abgeben; in der Mitte zwischen beiden, und an der Grenze derselben, stehen jene Glieder, deren lineare Functionen der zweiten Abtheilung zugezählt wurden. Diese liefern nur für einen speciellen Zahlwerth von  $\xi$  gleichzeitig mit anderen einen Bestandtheil zum höchsten Gliede des Substitutionsresultates. Substituirt man anstatt  $x$  in das Gleichungs-



polynom eine absteigend geordnete Reihe, deren Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  ist, und ertheilt man dem  $\xi_0$  alle denkbaren Werthe, indem man von dem grössten beginnt und zu immer kleineren, durch alle möglichen Zwischenstufen herabsteigt, so wird sich zeigen, dass anfangs das mit der höchsten Potenz von  $a$  versehene Anfangsglied des Substitutionsresultates aus demjenigen Gliede des Gleichungspolynoms hervorgeht, welches  $x$  in der höchsten Potenz, und falls mehrere solche sich vorfinden sollten, unter diesen wieder dasjenige, welches  $a$  in der höchsten Potenz enthält, dem also das grösste  $r$ , und unter diesen wieder das grösste  $a$  entspricht. Dies dauert so lange fort, als man sich oberhalb desjenigen Werthes von  $\xi$  befindet, der dem am meisten nach rechts gelegenen Eckpunkte in der gebrochenen Linie entspricht. Kommt man endlich auf diesen speciellen Werth von  $\xi$ , so liefert dieses nach  $x$  höchste Glied noch immer ein mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenes Glied zum Substitutionsresultate, allein es tauchen noch ein zweites, gelegentlich auch mehrere Glieder auf, welche gleichfalls einen solchen Bestandtheil mit derselben höchsten Potenz von  $a$  liefern. Diese Bestandtheile, in der Regel zwei, manchmal aber auch mehrere an der Zahl, setzen nun das höchste Glied des Substitutionsresultates zusammen, während es früher nur aus einem einzigen Gliede hervorging. Verringert man diesen speciellen Werth von  $\xi$  um eine beliebig kleine Grösse, so bleibt von all diesen Gliedern, welche die höchste Potenz lieferten, nur ein einziges übrig, und zwar unter ihnen gerade dasjenige, welches das kleinste  $r$  besitzt. Dieses Glied liefert nun wieder für ein endliches Intervall der Werthe  $\xi$  das höchste Glied des Substitutionsresultates ganz allein. Dieses Intervall erstreckt sich auf der Abscissenaxe von dem eben verlassenen Eckpunkte der gebrochenen Linie bis zum nächsten Eckpunkte. Erreicht man endlich, diesem zweiten Eckpunkte entsprechend, den an der unteren Grenze dieses Intervalles liegenden Werth von  $\xi$ , so tritt eine ähnliche Erscheinung auf wie früher. Für diesen speciellen Werth von  $\xi$  geht nämlich wieder das höchste Glied des Substitutionsresultates nicht aus einem einzigen, sondern aus zweien oder mehreren Gliedern des Gleichungspolynoms hervor. Auf solche Weise übergeht die Rolle, das höchste Glied des Substitutionsresultates zu liefern, von Glied zu Glied des Gleichungspolynoms sprunghaft. Der Sprung findet immer Statt, wenn  $\xi$  einen Eckpunkt der gebrochenen Linie erreicht, so zwar, dass dort diese Rolle von mehreren Gliedern des Gleichungspolynoms übernommen wird. Auf solche Weise wandert diese Rolle vom höchsten Gliede des Gleichungspolynoms sprunghaft zu stets niedrigeren, endlich bis zu dem niedrigsten. Von der Art dieser Wanderung, so wie über die Stelle, wo dieser sprunghafte Wechsel der Rollen stattfindet, gibt die gebrochene Linie Aufschluss.

Wie wir gezeigt haben, lassen sich alle auf das Anfangsglied der absteigenden Entwicklungsform von  $x$  bezüglichen Fragen aus dem verzeichneten Systeme von geraden Linien beantworten, indem man die Durchschnittspunkte der am höchsten liegenden Linien ins Auge fasst. Die durch diese Durchschnittspunkte gehende gebrochene Linie gibt über die Form des höchsten Gliedes im Substitutionsresultate  $P_0$  die nöthigen Aufschlüsse. Es gehört auch keineswegs zu den schwierigen Aufgaben, diese Durchschnittspunkte und die gebrochene Linie aus dem verzeichneten Systeme abzuleiten. Das hiezu einzuleitende Verfahren ist im Wesentlichen folgendes: Beginnen wir mit derjenigen Geraden, deren Gleichung  $\eta = a + r\xi$  das grösste  $r$  aufweist, also mit derjenigen, welche mit der Abscissenaxe den grössten Winkel einschliesst, und schreiten wir auf ihr in der Richtung der negativen  $\xi$  vor, bis wir einem Durchschnittspunkte begegnen. Bei diesem Durchschnittspunkte angelangt, bemerken wir den zugehörigen Werth von  $\xi$ ; derselbe ist ein brauchbarer Exponent für das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  und zwar unter

allen der grösste, und notiren zugleich alle Geraden, die sich dort schneiden, oder vielmehr die ihnen zugehörigen Glieder des Gleichungspolynoms; sie liefern die Bestimmungsgleichung für die zugehörigen Coëfficientenwerthe von  $h_0$ . Nun verlassen wir diese zuerst betretene Gerade und erwählen dafür die sie schneidende Gerade, oder, falls mehrere solche vorhanden wären, unter ihnen die mit dem kleinsten  $\chi$  versehene — diese nämlich bildet das anstossende Stück der gebrochenen Linie — und schreiten auf ihr in der angegebenen Richtung der negativen  $\xi$  wieder so lange fort, bis wir abermals einem Durchschnittspunkte begegnen, wo wir uns gerade so wie beim ersten benehmen. Auf solche Weise gelangen wir der Reihe nach zu allen Durchschnittspunkten, und das Verfahren schliesst sich endlich von selbst, weil wir zuletzt zu einer Linie kommen, die keinen Durchschnittspunkt in der angegebenen Richtung mehr aufweist. Bei diesem Verfahren ergeben sich die Werthe von  $\xi_0$  alle, und zwar in fallender Reihenfolge. Gleichzeitig werden auch die Bestimmungsgleichungen für die zugehörigen Coëfficienten erhalten, die meistens binomisch sind. Man könnte dieses Verfahren auch entsprechend modificiren, so dass man, am linken Ende der gebrochenen Linie beginnend, die Werthe von  $\xi_0$  in steigender Reihenfolge bekäme.

Es ist wohl von selbst einleuchtend, dass dies nicht die einzige Constructionsweise sei, welche zu dem verlangten Ziele führt, im Gegentheile lässt sich sehr leicht die Anzahl der möglichen Constructionsweisen angeben. In der That handelt es sich stets immer nur um eine graphische Darstellung der durch die Gleichungen  $\eta = a + \chi \xi$  festgestellten Abhängigkeit. Allein man könnte diese vier Grössen  $a$ ,  $\chi$ ,  $\xi$  und  $\eta$  unter einander die ihnen hier angewiesenen Bedeutungen vertauschen lassen, und würde dadurch zu anscheinend verschiedenen, vielleicht sogar in gewisser Hinsicht bequemeren Constructions gelangen. Wir wollen hier uns jedoch mit geometrischen Constructions nicht länger befassen, sondern im Gegentheile dieselben so bald als möglich verlassen und durch ein analytisches Verfahren ersetzen, welches jedenfalls alle geometrischen Constructions an Bequemlichkeit und Kürze übertrifft. Wir hatten überhaupt keine andere Absicht, als durch ein geometrisches Bild die Klarheit zu erhöhen, um das analytische Verfahren, welches wir nun auseinandersetzen werden, anschaulich zu machen.

## §. 3.

Um die analytische Verfahrungsweise abzuleiten, haben wir nur jeden einzelnen geometrischen Vorgang durch die entsprechende analytische Operation zu ersetzen. Wir beginnen also damit, aus den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynoms  $P$  auf die bekannte Weise die linearen Functionen  $a + \chi \xi$  abzuleiten, wobei wir gleich, wie in der Zeichnung die parallelen überflüssigen Linien beseitigt wurden, diejenigen linearen Functionen zu bilden unterlassen, welche einem Gliede entsprechen, welches mit einem anderen dieselbe Potenz von  $x$  gemeinschaftlich hat, aber eine niedrigere Potenz von  $a$  ausweist. Dies werden wir am schnellsten erreichen, wenn wir, wie im Beispiele (2) geschehen ist, die Potenzen von  $x$  als Factoren sondern, und als zweiten Factor, gewissermassen als Coëfficienten, das damit multiplicirte Polynom nach absteigenden Potenzen von  $a$  geordnet hinschreiben. Dadurch sind unmittelbar diejenigen Glieder ersichtlich gemacht, welche bei gleicher Potenz von  $x$  die höchste von  $a$  besitzen. Die so gebildeten linearen Functionen ordne man absteigend nach den Zahlwerthen von  $\chi$ , ja man wird sie schon in solcher Weise geordnet erhalten, wenn das Gleichungspolynom nach absteigen-

den Potenzen von  $x$  geordnet ist. Nun beginnt ein regelmässiges Untersuchungsverfahren, analog dem Fortschreiten auf der gebrochenen Linie in der Richtung der negativen  $\xi$  bis zum ersten sich darstellenden Durchschnittspunkte. Diese Untersuchung beginnt mit der ersten der auf die angegebene Weise geordneten linearen Functionen, und bezweckt die Ermittlung und Vergleichung der den Durchschnittspunkten dieser Linie mit den übrigen im Systeme entsprechenden Werthe von  $\xi$ . Von all diesen Werthen ist der grösste auszuwählen und als Exponent  $\xi_0$  zu notiren, gleichzeitig sind alle jene Glieder zu bezeichnen, deren lineare Functionen diesen Durchschnittspunkt bilden helfen, weil aus ihnen die Bestimmungsgleichung für  $h_0$  hervorgeht. Zu diesem Ende subtrahirt man diese erste lineare Function der Reihe nach von allen übrigen, setzt jeden dieser Unterschiede, welche alle  $\xi$  in sich enthalten, der Nulle gleich und sucht die Genüge leistenden Werthe von  $\xi$ . Von all diesen Genüge leistenden Werthen bestimmt man den grössten und bezeichnet ihn als brauchbaren Werth von  $\xi_0$ . Um die Bestimmungsgleichung für das zugehörige  $h_0$  zu bilden, notirt man jene Glieder des Gleichungspolynoms, welche der subtrahirten linearen Function und jener anderen entsprechen, aus welcher eben jener Rest hervorgegangen ist, der gleich Null gesetzt, das grösste  $\xi_0$  geliefert hat. Ist dieser grösste Werth  $\xi_0$  mehrmals erhalten worden, so sind alle diese entsprechenden Glieder zu notiren. Hiemit ist nun eine Untersuchung geschlossen und es kommt eine nächste Function an die Reihe, welche derselben Untersuchung unterworfen wird. Allein man geht nicht zur nächstfolgenden, hier zur zweiten linearen Function über, da es sich treffen kann, dass dieselbe gar nie den grössten Werth erlangt und somit auch an der gebrochenen Linie keinen Antheil nimmt. Die vorhergegangene Untersuchung der ersten linearen Function lehrt aber schon darüber das Nöthige, denn sie zeigt zugleich an, welche Function in dem angrenzenden Bereiche den grössten Werth besitzt und demnach zunächst der Untersuchung zu unterziehen ist. Diese Function findet sich nämlich unter den bereits notirten vor, welchen der gefundene Werth von  $\xi_0$  als Auflösung des der Nulle gleichgesetzten Unterschiedes entspricht. Sollten mehrere solche zugegen sein, so ist unter ihnen die mit dem kleinsten  $r$  versehene, also die späteste diejenige, welche nun an die Reihe kommt. Die bisherige Untersuchung hat auch gelehrt, dass alle hiebei vielleicht in der Reihenfolge übersprungenen Functionen niemals zum grössten Werthe gelangen, und sie können daher bei jeder weiteren Untersuchung unberücksichtigt bleiben. Man wird daher mit dieser für die unmittelbar nächstfolgende Untersuchung bezeichneten Function gerade so verfahren, wie mit der ersten, sie nur mit den darauffolgenden Functionen combinirend. Dieses Verfahren führt von selbst zu den verschiedenen zu untersuchenden Functionen, und schliesst sich, hinreichend oft wiederholt, gleichfalls von selbst, wenn sie zur letzten derselben geleitet hat. Auf solche Weise gelangt man durch ein einfaches combinatorisches Verfahren zu allen möglichen Werthen von  $\xi_0$  und zu den entsprechenden Gliedersummen, und hat nur noch die Substitution  $a = 1, x = h_0$  in dieselben auszuführen und diese Ausdrücke gleich Null zu setzen, um zugleich auch die zugehörigen Werthe von  $h_0$  durch Auflösung von Zahlengleichungen zu finden.

Wir wollen nun an der früher behandelten Gleichung dieses analytische Verfahren zeigen. Die Gleichung ist:

$$(a + 1) x^4 + x^3 + (a^2 - 1) x^2 - (a^2 - 2a) x + a^2 - a = 0,$$

die linearen Functionen sind daher folgende:

$$1 + 4\xi \quad , \quad 3\xi \quad , \quad 2 + 2\xi \quad , \quad 2 + \xi \quad , \quad 2$$

1. Untersuchung der Function  $1 + 4\xi$ . Die Differenzen, der Nulle gleichgesetzt, geben die Gleichungen:

$$-1 - \xi = 0, \quad 1 - 2\xi = 0, \quad 1 - 3\xi = 0, \quad 1 - 4\xi = 0,$$

welchen die Werthe  $\xi = -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  entsprechen. Unter ihnen ist  $\xi = \frac{1}{2}$  der grösste und somit zu notirende Werth von  $\xi_0$ . Ihm entsprechend besitzen die zwei linearen Functionen  $1 + 4\xi$  und  $2 + 2\xi$  gleiche, alle übrigen aber kleinere Werthe. Hieraus folgt daher die Bestimmungsgleichung für den zugehörigen Coëfficienten  $h_0$  aus den beiden Gliedern  $a x^4 + a^2 x^2$  und ist folgende:

$$h^4 + h^2 = 0.$$

Sie liefert zwei brauchbare Werthe  $h = +\sqrt{-1}$  und  $h = -\sqrt{-1}$ , ferner zwei Nullwurzeln, welche nur besagen, dass noch zwei Auflösungen bestehen, die jedoch mit einer niedrigen Potenz von  $a$  beginnen. Es ist hiermit zugleich die lineare Function  $2 + 2\xi$  für die nächstfolgende Untersuchung bezeichnet.

2. Untersuchung der Function  $2 + 2\xi$ . Die Differenzen sind gleich Null gesetzt folgende:

$$-\xi = 0, \quad -2\xi = 0,$$

beide liefern denselben Werth  $\xi = 0$ . Hieraus folgt, dass für  $\xi = 0$  die drei linearen Functionen:  $2 + 2\xi, 2 + \xi$  und  $2$  den grössten Werth gemeinschaftlich besitzen. Der Werth  $\xi_0 = 0$  ist zu notiren, so wie die Summe der drei Glieder  $a^2 x^2 - a^2 x + a^2$ . Die Bestimmungsgleichung für den zugehörigen Coëfficienten ist:

$$h^2 - h + 1 = 0.$$

Ihr entsprechen zwei Werthe, nämlich  $h_0 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$  und  $h_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$ . Wir gelangen also hier auf dem analytischen Wege zu denselben Anfangsgliedern, wie früher durch geometrische Constructionen. Sie sind folgende:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{-a} \\ x_0 &= -\sqrt{-a} \\ x_0 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) \\ x_0 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}). \end{aligned}$$

Es ist vielleicht nicht unersprießlich, hier an diesem Beispiele eine bequemere Art, diese Rechnungen zu Papier zu bringen, anzuführen.

Sie ist in diesem Schema dargestellt:

$$(a + 1)x^4 + x^3 + (a^2 - 1)x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a = 0.$$

Erste Reihe von Quotienten:

$$\frac{-1}{1} \quad \frac{+1}{2} \quad \frac{+1}{3} \quad \frac{+1}{4}$$

unter ihnen ist  $\frac{1}{2}$  am grössten und somit zu notiren.

Zweite Reihe von Quotienten:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{0}{2}$$

also 0 der zweite und letzte zu notirende Werth von  $\xi_0$ .

Die Bestimmungsgleichungen für  $h_0$  sind:

$$\begin{aligned} \text{für } \xi_0 = \frac{1}{2} & \quad h^4 + h^2 = 0 \\ \text{für } \xi_0 = 0 & \quad h^2 - h + 1 = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist die Rechnung auf den kleinsten Raum zusammengedrückt, und die Bildung der linearen Functionen umgangen. Die Bildung der Quotienten geschieht nach einem einfachen unmittelbar ersichtlichen Gesetze. Sie sind nämlich Brüche, deren Zähler die Differenz des Exponenten von  $a$  ist, erhalten durch Subtraction dieses Exponenten im untersuchten Gliede von dem im nachfolgenden. Der Nenner aber stellt die im entgegengesetzten Sinne erhaltene Differenz der Exponenten von  $x$  dar. In jeder solchen Reihe wird die grösste Zahl bezeichnet und hierauf die Bestimmungsgleichung aus den entsprechenden Gliedern, die hier gleichfalls in die Augen fallen, abgeleitet. Darunter befindet sich die zweite Reihe, entsprechend der zweiten bei dem Gliede  $a^2 x^2$  beginnenden Untersuchung.

§. 4.

Wir haben in dem Vorhergehenden eine Methode auseinandergesetzt, die Anfangsglieder für die absteigende Entwicklung von  $x$  in Reihenform zu bestimmen, und sind, durch geometrische Betrachtungsweisen geleitet, zu einer Construction und später zu einer analytischen Regel gelangt, welche die Gleichungen für den Exponenten  $\xi_0$  und für den Coefficienten  $h_0$  liefert. Diese Methode stimmt mit jenem Verfahren überein, welches die bekannten Regeln zur Division und zum Wurzelausziehen vorschreiben, und es erscheint somit, wie zu erwarten stand, die Auflösungsart der Gleichungen des ersten Grades und der binomischen höheren Grades als ein specieller Fall des hier behandelten Verfahrens. Es ist zugleich ersichtlich, dass dort diese eigenthümliche Untersuchung, wie sie hier auseinandergesetzt wurde, überflüssig erscheint, weil nur eine einzige Gleichung des ersten Grades zur Bestimmung von  $\xi_0$  vorliegt, und daher jene Unbestimmtheit nicht besteht, welche diese Untersuchungen notwendig machte.

Es bleibt uns nun noch übrig zu zeigen, in wie ferne unsere frühere Behauptung wahr sei, dass die Bestimmung des Werthes von  $\xi_0$  von der Auflösung eines Systemes linearer Ungleichungen abhängig sei und dass überhaupt zwischen der Auflösung von Buchstabengleichungen und der Theorie der Ungleichungen ein inniger Zusammenhang bestehe. Es wurde von uns anfänglich zur Bestimmung der Werthe von  $\xi_0$  eine geometrische Construction gebraucht, bestehend aus einem Systeme sich verschiedenartig schneidender Geraden. Das ganze Verfahren bestand darin dem Abscheiden einer gebrochenen Linie, welche aus den höchstgelegenen Linienstücken zusammengesetzt war. Diese gebrochene Linie begrenzt einen Theil der Ebene, welche sich oberhalb sämtlicher Linien des verzeichneten Systemes befindet, und die Gestalt eines Polygons besitzt, welches sich nach oben, und zu beiden Seiten ins Unendliche ausdehnt, nach unten zu aber eben diese gebrochene Linie als Begrenzungslinie besitzt. Die Punkte, welche in diesem Polynome liegen, weisen sämtlich grössere Ordinaten  $\eta$  auf, als alle

Punkte der verzeichneten Geraden die dasselbe  $\xi$  besitzen, so zwar, dass sie ein System von Ungleichungen erfüllen, deren jede die Form

$$\eta > a + r\xi$$

besitzt. Einer jeden Geraden des Systemes, also jedem einzelnen Gliede  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes entspricht eine solche Ungleichung. Es ist leicht einzusehen, dass dieses System von Ungleichungen, deren Anzahl gleichkommt der Anzahl der Glieder im Gleichungspolynome, und deren Ableitungsweise aus den Exponenten  $a$  und  $r$  der einzelnen Glieder ersichtlich ist, diesen abgegrenzten Theil der Ebene bestimmt; denn jeder in diesem Polygone liegende Punkt und nur diese erfüllen alle diese Ungleichungen.

Zu den Auflösungen dieser Ungleichungen sind die auf der gebrochenen Linie liegenden Punkte eigentlich nicht mehr zu zählen, weil sie anstatt einer Ungleichung die entsprechende Gleichung

$$\eta = a + r\xi$$

erfüllen. In Bezug dieser Eigenschaft nun können wir sie als Grenzwerte der Auflösungen betrachten, da sie in der Mitte stehen zwischen den Genüge leistenden und widersprechenden Punkten. Die Punkte der gebrochenen Linie zeigen aber ein doppeltes Verhalten. Die Punkte in der Mitte einer Polygonseite liegen nur auf einer einzigen Linie des Systemes, aber oberhalb aller übrigen; sie verwandeln daher eine einzige Ungleichung in eine Gleichung und erfüllen alle übrigen Ungleichungen. Hingegen die Eckpunkte der gebrochenen Linie liegen gleichzeitig auf zwei, gelegentlich auf mehreren Linien des verzeichneten Systemes, und oberhalb aller übrigen. Diese Eckpunkte verwandeln daher zwei, manchmal auch mehrere Ungleichungen in Gleichungen, während sie die übrigen erfüllen. Wir kommen hiedurch zu der Überzeugung, dass man bei einem Systeme von Ungleichungen nicht wie bei den Gleichungen bloß mit Genüge leistenden und mit widersprechenden Werthen zu thun hat. Nebst den Auflösungen und den widersprechenden Werthen bestehen hier noch die Grenzwerte, die zwischen beiden die Mitte halten. Als Grenzwerte bezeichnen wir nämlich alle jene Werthe der Unbekannten, welche eine oder mehrere Ungleichungen zwar nicht mehr, aber die entsprechenden Gleichungen erfüllen. Die Grenzwerte theilen sich wieder in mehrere Abtheilungen. Die Grenzwerte erfüllen nämlich ausser den Ungleichungen eine gewisse Anzahl von Gleichungen, in die sie die Ungleichungen verwandeln. Nach der Anzahl dieser Gleichungen (inso weit sie sämmtlich von einander verschieden sind) lassen sich die Grenzwerte in Ordnungen eintheilen. Es ist klar, dass die Anzahl dieser von einander verschiedenen Gleichungen nicht die Anzahl der im Systeme von Ungleichungen enthaltenen Unbekannten überschreiten kann, weil bekanntlich bei Gleichungen niemals die Anzahl derselben die der Unbekannten übersteigen darf. Hier, wo nur zwei Unbekannte ( $\xi$  und  $\eta$  nämlich) bestehen, werden daher gleichfalls nur Grenzwerte der ersten und der zweiten Ordnung vorkommen. Die Grenzwerte der ersten Ordnung sind durch die Polygonseiten, die der zweiten Ordnung durch die Ecken des Polygons dargestellt. Es ist nach diesen Erklärungen klar, dass nur die Grenzwerte der höchsten, hier zweiten Ordnung in endlicher Zahl, vorhanden sind, da jede Unbekannte einen bestimmten Zahlwerth bekommt, durch die gleiche Anzahl von Gleichungen. Alle anderen Grenzwerte sind in unendlich grosser Anzahl vorhanden, und ihre Aufzählung daher unmöglich. Sie bilden aber zusammenhängende und abgegrenzte Gebilde, mit einer bestimmten Anzahl von Dimensionen. In dem gegenwärtigen Falle stellt das Polygon die

Auflösung des Systemes linearer Ungleichungen mit zwei Unbekannten vor und ist ein Gebilde von zwei Dimensionen, entsprechend den zwei Unbekannten  $\xi$  und  $\eta$ . Dieses Polygon ist zunächst begrenzt von einer Anzahl von Seiten, nämlich abgegrenzten geraden Linien. Diese Linien sind die Grenzwerte der ersten Ordnung, und besitzen um eine Dimension weniger, weil eine Unbekannte durch die auftretende Gleichung schon bestimmt ist. Diese Polygonseiten sind wieder abgegrenzt durch die Eckpunkte oder die Grenzwerte der zweiten Ordnung, Gebilde von Null Dimensionen, da zwei Gleichungen keiner der zwei Unbekannten mehr einen Spielraum für ihre beliebige Wahl gestatten. Da nur die Grenzwerte der höchsten Ordnung aufzählbar sind, so ist es eigentlich immer nur ihre Bestimmung, um die es sich bei der Auflösung eines Systemes linearer Ungleichungen handelt. Wie dieselben durch ein einfaches combinato- risches Verfahren ermittelt werden, wurde eben früher gezeigt, nur gelangten wir zu diesem Verfahren auf einem anscheinend ganz verschiedenen Wege, nämlich durch geometrische Betrachtungen. Das Gesagte dürfte hinreichen, um zu zeigen, dass die Bestimmung des Exponenten  $\xi_0$  im Anfangsgliede eigentlich von der Auflösung eines Systemes von Ungleichungen zwischen zwei Unbekannten  $\xi$  und  $\eta$  und namentlich von der Bestimmung der Grenzwerte zweiter Ordnung abhängig sei.

Es ist hier gewiss nicht überflüssig, dem Leser einen kurzen Überblick zu geben über die Art, wie das so eben erledigte Problem von verschiedenen Mathematikern behandelt wurde.

Der erste glückliche Versuch, dieses Problem zu erledigen, findet sich in den Werken Newton's. Derselbe nahm zu einer geometrischen Construction seine Zuflucht und belegte dieselbe mit dem Namen: „analytisches Parallelogramm“. Das Verfahren ist dabei folgendes: Man denke sich auf der Ebene zwei orthogonale Coordinatenaxen angenommen, und nun einem jeden einzelnen Gliede  $Ha^a x^r$  des Gleichungspolynomes  $P$  einen Platz auf derselben angewiesen, indem man  $x$  als Abscisse und  $a$  als die zugehörige Ordinate eines Punktes ansieht. Hat man in solcher Weise für ein jedes einzelne Glied des Gleichungspolynoms den entsprechenden Punkt oder Platz construirt, so hat man zuletzt eine gewisse Anzahl von Punkten auf der Ebene zerstreut, und nun verbinde man die äussersten dieser Punkte durch gerade Linien, jedoch dermassen, dass ein geschlossenes Polygon mit lauter auswärts springenden Winkeln entsteht, ausserhalb dessen kein Punkt sich befindet. Die construirten Punkte liegen nun alle entweder im Innern dieses Polygons oder auf seiner Begrenzung und diese letzteren sind entweder Eckpunkte des Polygons oder liegen auf einer Polygonseite. Mit Hilfe dieses Polygons nun lassen sich alle Anfangsglieder der Wurzeln der Gleichung bilden und zwar sowohl in absteigender wie in aufsteigender Entwicklungsform. Will man  $x$  absteigend nach Potenzen von  $x$  entwickeln, so hat man nur jene Polygonseiten zu berücksichtigen, welche die obere Begrenzung des in Rede stehenden Polygons bilden. Jede solche Polygonseite bezeichnet gewisse Glieder des Gleichungspolynomes, diejenigen nämlich, deren Punkte auf dieser Polygonseite liegen oder ihre Eckpunkte bilden. Die Summe aller dieser Glieder  $Ha^a x^r$ , welche einer bestimmten Polygonseite angehören, gleich Null gesetzt, liefert eine partielle Gleichung, und die Auflösung derselben nach  $x$  eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern. Die Auflösung dieser partiellen Gleichungen, wiewohl sie Buchstabengleichungen sind, lässt sich ohne Schwierigkeit nach denselben Methoden bewerkstelligen, welche für numerische Gleichungen gelten. Jede obere Polygonseite liefert eine solche partielle Gleichung und diese wieder gewisse Anfangsglieder.

Diese von Newton angewendete Construction ist der Form nach wohl wesentlich verschieden von der hier auseinandergesetzten, unterscheidet sich von ihr aber nur darin, dass  $\rho$  und  $\alpha$  die Rolle von  $\xi$  und  $\gamma$  übernommen haben.

Später wurde die von Newton angewendete Methode: das analytische Parallelogramm von De Gua in einer höchst unwesentlichen Weise modificirt und mit einem neuen Namen: analytisches Dreieck belegt. Der Grund dieser Reform war das Unrichtige der Benennung Parallelogramm. Die Glieder eines Gleichungspolynomes werden nämlich, in der eben früher angegebenen Weise durch Punkte auf der Ebene bezeichnet, nur dann ein Parallelogramm formiren, wenn wirklich alle Potenzen,  $a^0, a^1, a^2, \dots, a^n$  mit  $x^0, x, x^2, x^3, \dots, x^m$  in allen möglichen Weisen combinirt erscheinen. Würden nicht alle diese Combinationen, sondern nur alle jene derselben erscheinen, welche die Gesamtgradzahl  $m$  nicht übersteigen, so würden die Punkte ein rechtwinkeliges Dreieck bilden. Dies war die Veranlassung zur neuen Benennung: analytisches Dreieck. Sie ist aber eben so unrichtig wie die frühere, weil die Punkte in der Ebene jedes beliebige Polygon formiren können.

Wichtiger waren die darauffolgenden Bestrebungen von Lagrange. Derselbe ersetzte die erwähnte Construction durch ein rein analytisches Verfahren, welches wir in §. 3 auseinandergesetzt und an einem Beispiele in Anwendung gebracht haben. Hiemit hätte dieses Problem überhaupt seinen vollkommener Abschluss gefunden, wenn man eben nur den sehr speciellen Fall einer einzelnen Buchstabengleichung mit nur zwei Buchstabengrößen zum Gegenstande gewählt hätte. Allein über diese Grenze hinaus verlieren alle bisher erwähnten Methoden ihre Wirksamkeit.

Fourier aber ging noch weiter und behandelte dieses Problem von dem allgemeinsten Gesichtspunkte ausgehend und verschaffte dadurch der von Newton und Lagrange für einen sehr speciellen Fall entwickelten Methode den Höhepunkt der grössten Allgemeinheit, so zwar dass sie in gleicher Weise sowohl auf einzelne Gleichungen wie auch auf Systeme von beliebig vielen Gleichungen mit einer oder mit einer beliebig grossen Anzahl von überschüssigen Buchstabengrößen ihre Anwendung verstattet. Aus den hinterlassenen Andeutungen dieses grossen Mathematikers geht hervor, dass derselbe zwei neue Wege zur Behandlung dieses Problemles gefunden hat. Erstlich nämlich eine geometrische Construction, welche von der von Newton angewendeten verschieden ist und auch über die Natur des Problemles ein neues Licht verbreitet. Sie wurde von uns im Vorhergehenden erörtert in ihrer Anwendung auf den hier behandelten speciellen Fall einer einzigen Gleichung mit nur zwei Buchstabengrößen  $a, x$ . Dieselbe verstattet aber eine Verallgemeinerung auch auf andere Gleichungen und Systeme von zwei solchen, so lange die Gesamtzahl der darin erscheinenden Buchstaben die Zahl drei nicht übersteigt. Sie verliert aber gleichfalls ihre Anwendbarkeit vollkommen, sobald mehr als drei Buchstaben erscheinen. Um nun auch diese complicirteren Fälle der Auflösung zugänglich zu machen, hat Fourier dieses Problem unabhängig gemacht von jeder geometrischen Betrachtung und ein rein analytisches Verfahren an seine Stelle gesetzt, welches auch selbst über die Anzahl drei hinaus ins Unbegrenzte Giltigkeit hat. Dieses analytische Verfahren ist wesentlich neu und, wie man mit Recht behaupten kann, selbst in seinen einfachsten Grundzügen der bestehenden Analysis fremd, und wurde von ihrem Erfinder mit der Bezeichnung: Analyse der linearen Ungleichungen belegt. Diese bietet den allgemeinen Schlüssel für alle Buchstabengleichungen und Systeme von solchen. Alle früheren Bestrebungen von Newton und Lagrange sind eigentlich nur eine sehr specielle Behandlung dieses allgemeinen Problemles.



Die zuerst erwähnte, von Fourier herrührende Construction hat auch keineswegs den Zweck, wirklich angewendet zu werden, indem die analytische Behandlung weit bequemer ist, allein sie bereitet den Leser durch die Betrachtung der speciellen Fälle vor zum besseren Verständnisse des complicirten Falles und seiner allgemeinen Behandlung mit Hilfe der Analyse der linearen Ungleichungen. Von diesem Gesichtspunkte soll auch der Leser die im Vorhergehenden gegebene Darstellung betrachten, um sich keinen irrigen Begriff von dem Werthe der von Fourier herrührenden Arbeiten zu bilden.

## §. 5.

Wir wollen nun die Bestimmungsgleichung für den Coëfficienten  $h_0$  noch einer genaueren Betrachtung unterziehen und daran einige für die Folge wichtige Bemerkungen knüpfen. Diese Bestimmungsgleichung leitet sich ab aus gewissen Gliedern des Gleichungspolynoms, denjenigen nämlich, welche für den bestimmten Werth von  $\xi_0$  zu dem höchsten Gliede des Substitutionsresultates einen Bestandtheil liefern. Diese Gleichung ist in der Regel einem höheren Grade angehörig, weil in ihren Gliedern die Unbekannte  $h_0$  zu denselben Potenzen erhoben erscheint, wie die Unbekannte  $x$  in den entsprechenden Gliedern des Gleichungspolynoms. Ist die ursprünglich gegebene Gleichung  $P = 0$  ganz und rational, so ist es auch diese Bestimmungsgleichung für  $h_0$  und liefert daher in der Regel so viele Werthe dieser Grösse, als ihre Gradzahl Einheiten enthält. Unter diesen Auflösungen können alle jene, welche von Null verschieden sind, als brauchbare Coëfficientenwerthe angenommen werden und es ergeben sich auf solche Weise eben so viele verschiedene Anfangsglieder, entsprechend der gefundenen Gradzahl  $\xi_0$ , als diese Bestimmungsgleichung von Null und von einander verschiedene Auflösungen zulässt. Sehr oft treten aber mehrere Nullwerthe für  $h_0$  auf, und zwar jedesmal dann, wenn noch ein kleinerer Werth von  $\xi_0$  besteht. Die Anzahl dieser Nullwerthe  $h_0$ , welche in einer gleichen Anzahl Factoren  $h$  ihren Grund hat, welche im ersten Theile der Bestimmungsgleichung erscheinen, kommt dann stets gleich der Anzahl der Auflösungen, welche mit einem niedrigeren significativen Gliede bei der Reihenentwicklung beginnen. Nur wenn  $\xi_0$  unter allen möglichen Werthen den kleinsten besitzt, weist die Bestimmungsgleichung in  $h$  keine Nullwurzeln auf. Von grösserer Wichtigkeit als die Nullwurzeln, ist für die wirkliche Auflösung die Berücksichtigung gleicher Wurzeln  $h_0$ . Zeigt die Gleichung in  $h$  solche gleiche Wurzeln, so schliessen wir hieraus auf ein Anfangsglied, welches zwei oder mehreren Auflösungen gemeinschaftlich zukommt, wie die späteren Untersuchungen darthun werden. Die Anzahl dieser im Anfangsgliede übereinstimmenden Auflösungen wird durch die Anzahl der gleichen Wurzeln angegeben. Dass das Auftreten solcher gleicher Wurzeln  $h_0$  wirklich zwei oder mehrere Auflösungen anzeige, welche dasselbe Anfangsglied gemeinschaftlich besitzen, werden wir erst später nachzuweisen im Stande sein, wo wir zeigen werden, dass man bei der Bestimmung der Folgeglieder entweder zu dem einen Anfangsgliede mehrere Systeme von Folgegliedern, oder zu dem einen Anfangsgliede nur eine einzige Reihe von Folgegliedern oder wenigstens eine geringere Anzahl solcher findet, die aber alle durch Gleichungen höheren Grades mit gleichen Wurzeln gegeben sind. Im ersten Falle bestehen also wirklich mehrere Auflösungen, die dasselbe Anfangsglied gemeinschaftlich besitzen, und die sich erst in den Folgegliedern von einander unterscheiden, im zweiten jedoch lässt sich erweisen, dass diese einzige Auflösung nicht nur der Gleichung  $P = 0$ , sondern auch einer oder mehreren der daraus

abgeleiteten, nämlich den  $\frac{dP}{dx} = 0$ ,  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  u. s. w. Genüge leistet, womit der Beweis hergestellt ist, dass  $P = 0$  gleiche Wurzeln besitze. Das Auftreten gleicher Wurzelwerthe für  $h_0$  hat auch, wie wir später zeigen werden, auf die Bestimmung der Folgeglieder Einfluss. Während sonst jedes derselben durch die Auflösung von Gleichungen des ersten Grades erhalten wird, ist hier die Auflösung einer Gleichung höheren Grades erforderlich, deren Gradzahl mit der Anzahl der gleichen Wurzeln,  $h_0$  übereinstimmt. Diese Gleichung höheren Grades liefert zu dem gemeinschaftlichen Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  die zugehörigen ersten Folgeglieder  $h_1 a^{\xi_1}$  und zwar entweder deren mehrere und von einander verschiedene, oder es ergeben sich unter ihnen wieder gleiche. Sobald nur von einander verschiedene Folgeglieder und keine gleichen mehr erhalten werden, ist jede einzelne Auflösung gesondert, nur geschieht dies nicht durch das Anfangsglied, sondern erst durch das zweite Glied der Entwicklung, und das weitere Verfahren zur Bestimmung der übrigen Glieder ist jetzt das gewöhnliche, beruhend auf der Auflösung von Gleichungen des ersten Grades. Sind jedoch unter den erhaltenen Folgegliedern gleiche, begründet in dem Auftreten gleicher Wurzeln  $h_1$ ; so sind die ihnen entsprechenden Auflösungen  $x$  noch nicht getrennt und die weitere Bestimmung der Folgeglieder hängt noch von einer Gleichung höheren Grades ab. Auf solche Art bewirkt das Auftreten gleicher Wurzeln  $h_0$  eine Veränderung des weiteren Approximations-Verfahrens, welches sich erst dann in das gewöhnliche verwandelt, wenn durch Bestimmung einer hinreichenden Anzahl von Anfangsgliedern der Reihe die Trennung der Wurzeln  $x$  erfolgt ist.

Da wir über die Beschaffenheit der Exponenten  $\alpha$  und  $\chi$  in den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynomes keinerlei Beschränkung getroffen haben, und daher unsere Untersuchungen auch für gebrochene und irrationale solche Gleichungspolynome gelten, so müssen wir auch bezüglich dieser, besonders der letzteren einige Bemerkungen folgen lassen. Erscheinen nämlich unter den Exponenten  $\chi$  auch gebrochene Zahlwerthe, so kann es sich treffen, dass die Bestimmungsgleichung in  $h$  irrational ist, und ihr gelegentlich gar keine Auflösung zukommt, weil man verhalten ist, die Wurzelgrösse in ihrer bestimmten Bedeutung zu nehmen, keineswegs aber die Berechtigung besitzt, ihr alle möglichen Bedeutungen zu ertheilen, oder mit andern Worten, die entsprechende rationale Gleichung in allen ihren Auflösungen zu benutzen. In einem solchen Falle lässt sich daher wohl ein den Bedingungen entsprechendes  $\xi_0$ , aber kein Werth von  $h_0$  auffinden, und es besteht demnach für diesen Werth von  $\xi_0$  keine Auflösung  $x$ . Wir gelangen auf solche Weise zu der Einsicht, dass irrationale Buchstabengleichungen mitunter keine Auflösung zulassen, genau so wie dies bei den irrationalen Zahlengleichungen der Fall ist.

## §. 6.

Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder für die absteigende Entwicklung ist sonach folgende: Man ordne das Gleichungspolynom  $P$  in erster Instanz absteigend nach Potenzen von  $x$ , d. h. man bringe dasselbe auf die Form:

$$A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + \dots + A_m x^{\alpha_m} = 0;$$

die Potenzen  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  aber ordne man gleichfalls nach Potenzen von  $\alpha$  absteigend. Nun bilde man aus einem jeden solchen Bestandtheile:

$$A_1 x^{\alpha_1}, A_2 x^{\alpha_2}, A_3 x^{\alpha_3}, \dots, A_m x^{\alpha_m}$$

des Gleichungspolynomes oder vielmehr nur aus den Exponenten  $a$  und  $r$  ihres mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Gliedes:

$$H_1 a^{a_1} x^{r_1} , H_2 a^{a_2} x^{r_2} , H_3 a^{a_3} x^{r_3} , \dots \dots H_m a^{a_m} x^{r_m}$$

eine lineare Ungleichung durch das hier von selbst einleuchtende Verfahren:

$$\eta > a_1 + r_1 \xi , \eta > a_2 + r_2 \xi , \eta > a_3 + r_3 \xi , \dots \dots \eta > a_m + r_m \xi$$

und suche nun die diesem Systeme von Ungleichungen entsprechenden Grenzwerte der zweiten Ordnung. Hat man dieselben alle gefunden, — wir wollen sie hier mit:  $\xi_0', \xi_0'', \xi_0''', \dots \dots \xi_0^{(n)}$ ,  $\eta_0', \eta_0'', \eta_0''', \dots \dots \eta_0^{(n)}$  bezeichnen — und gleichzeitig für jeden solchen Grenzwert diejenigen Ungleichungen, welche in Gleichungen übergehen, oder vielmehr die ihnen correspondirenden Glieder des Gleichungspolynomes  $P$  notirt, so hat man nur noch einem jeden einzelnen Grenzwerte entsprechend eine numerische Gleichung zu bilden und aufzulösen. Man substituirt nämlich in die entsprechenden und schon notirten Glieder  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes, welche dem eben hervorgehobenen Grenzwerte angehören,  $x = h$ ,  $a = 1$ , summirt sie dann und setzt diese Summe gleich Null, so hat man die gesuchte numerische Gleichung in  $h$  und löst nun dieselbe auf. Die von Null verschiedenen Wurzeln sind brauchbare, zu dem hervorgehobenen Grenzwerte  $\xi_0$  gehörige Werthe von  $h_0$ . Vollführt man diese Untersuchung der Reihe nach für alle früher ermittelten Grenzwerte, so erhält man eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der beiden Grössen  $\xi_0$  und  $h_0$ :

$$\xi_0', \xi_0'', \xi_0''', \dots \dots h_0^{(s)}$$

$$h_0', h_0'', h_0''', \dots \dots h_0^{(s)}$$

und dieselben liefern nun unmittelbar die Anfangsglieder:

$$h_0' a^{\xi_0'} , h_0'' a^{\xi_0''} , h_0''' a^{\xi_0'''} , \dots \dots h_0^{(s)} a^{\xi_0^{(s)}}$$

der verschiedenen Wurzeln  $x$  für die absteigende Entwicklungsform.

Die Auflösung der oberwähnten linearen Ungleichungen:

$$\eta > a_1 + r_1 \xi , \eta > a_2 + r_2 \xi , \eta > a_3 + r_3 \xi , \dots \dots \eta > a_m + r_m \xi$$

bewerkstelligt man nach einer allgemeinen Regel durch ein combinatorisches Verfahren, welches von einer Ungleichung zur nächstfolgenden weiterschreitet, gerade so, wie wenn man sie als combinatorische Elemente betrachtet und aus ihnen alle möglichen Amben bilden wollte. Man subtrahirt nämlich, mit der ersten von ihnen  $\eta > a_1 + r_1 \xi$  beginnend, die in ihr erscheinende lineare Function  $a_1 + r_1 \xi$  der Reihe nach von allen in den darauffolgenden Ungleichungen vorkommenden Functionen:

$$a_2 + r_2 \xi , a_3 + r_3 \xi , a_4 + r_4 \xi , \dots \dots a_m + r_m \xi$$

und erhält demgemäss eine Reihe von Differenzen:

$$a_2 - a_1 + (r_2 - r_1) \xi , a_3 - a_1 + (r_3 - r_1) \xi , a_4 - a_1 + (r_4 - r_1) \xi , \dots \dots a_m - a_1 + (r_m - r_1) \xi$$

und durch Nullsetzen derselben eine Reihe von Gleichungen, welche nach  $\xi$  aufgelöst die Werthe liefern:

$$\frac{a_2 - a_1}{r_2 - r_1} , \frac{a_3 - a_1}{r_3 - r_1} , \frac{a_4 - a_1}{r_4 - r_1} , \dots \dots \frac{a_m - a_1}{r_m - r_1}$$

Von diesen bestimmten Zahlen sucht man die grössten. Diese stellen den ersten Werth  $\xi'_0$  vor. Man kann entweder nur einen einzigen, bisweilen aber mehrere gleiche darunter finden. Gleichzeitig bezeichnet man jene Glieder des Gleichungspolynomes, welche diesem grössten Quotienten entsprechen. Ihre Summe  $\Sigma[H a^x x^r]$  führt auf die früher erwähnte Weise, nämlich durch die Substitution  $a=1, x=h$  zur Bestimmungsgleichung in  $h'_0$ .

Nachdem nun dieses Rechnungsverfahren abgeschlossen ist, welchem die erste Ungleichung  $\eta > \alpha_1 + r_1 \xi$  als Ausgangspunkt gedient hat und das sich symbolisch auf die Bildung aller Amben aus diesem ersten combinatorischen Elemente mit allen nachfolgenden zurückführen lässt, erwählt man hierauf eines der späteren combinatorischen Elemente zum Ausgangspunkt eines ähnlichen Verfahrens, aber nicht das unmittelbar nächste zweite, sondern nach Umständen bald dieses, bald ein viel späteres. Den Fingerzeig hierzu gibt die frühere Untersuchung. Das letzte Glied  $H a^x x^r$  in der ersten dem  $\xi'_0$  entsprechenden bezeichneten Gliedersumme  $\Sigma[H a^x x^r]$  oder vielmehr die demselben entsprechende lineare Function  $\alpha + r \xi$  hat nun an die Stelle des ersten Gliedes  $H_1 a^{x_1} x^{r_1}$  und der ersten linearen Function  $\alpha_1 + r_1 \xi$  zu treten, und wird nun in gleicher Weise von allen darauffolgenden linearen Functionen subtrahirt und hieraus durch Nullsetzen der erhaltenen Differenzen die entsprechende Quotientenreihe abgeleitet, und unter diesen wieder die grössten gesucht. Diese stellen  $\xi''_0$  vor und bezeichnen nebst dem hier als Ausgangspunkt benützten Gliede noch ein oder mehrere spätere Glieder zum Zwecke der Bildung der Bestimmungsgleichung in  $h''_0$ . Das letzte dieser bezeichneten Glieder aber ist der Ausgangspunkt für die nächstfolgende Combination zu Amben. In solcher Weise wird das combinatorische Verfahren fortgesetzt, bis alle Elemente erschöpft sind, was dann eintritt, wenn das  $H_m a^{x_m} x^{r_m}$  unter den bezeichneten Gliedern auftritt, denn dieses wäre der Ausgangspunkt für ein ferneres Combiniren, wenn nicht eben die Elemente erschöpft wären.

Die zu verrichtenden Rechnungen hängen somit zusammen, ungefähr so wie die Glieder einer Kette. Sie beginnen bei der ersten Ungleichung und endigen bei der letzten. Die dabei gewonnenen Werthe von  $\xi_0$  sind in diesem Falle absteigend geordnet.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass das Aufschreiben der linearen Ungleichungen, so wie jenes der jedesmaligen Differenzen nicht nothwendig, sondern dass man alsogleich die Quotienten zu bilden im Stande sei, indem hier nur eine einzige Unbekannte  $\xi_0$  erscheint. In der That entsprechen den Gliedern:

$$H_1 a^{x_1} x^{r_1}, H_2 a^{x_2} x^{r_2}, H_3 a^{x_3} x^{r_3}, \dots H_m a^{x_m} x^{r_m}$$

die zwei Reihen von Exponenten:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & , & \alpha_2 & , & \alpha_3 & , & \dots & \alpha_m \\ r_1 & , & r_2 & , & r_3 & , & \dots & r_m \end{array}$$

und es ist wohl hinreichend, nur einen Blick auf die Quotienten:

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{r_2 - r_1}, \quad \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{r_3 - r_1}, \quad \dots \quad \frac{\alpha_m - \alpha_1}{r_m - r_1}$$

zu werfen, um alsogleich eine Regel zu finden, wie sie unmittelbar daraus abgeleitet werden können. Man subtrahirt nämlich das erste Glied  $\alpha_1$  von allen späteren Gliedern der ersten Reihe,  $r_1$  von jenen der zweiten, schreibt diese zwei Differenzen selbst wieder in Reihenform und beziehungsweise unter einander, so braucht man nur zwischen zwei solche unter einander stehende Differenzen den Bruchstrich zu ziehen und das Zeichen — vorzusetzen, um alsogleich die gesuchten Quotienten zu haben. Die grössten unter ihnen  $\xi'_0$  hat man zu suchen und irgend

wie zu bezeichnen, so wie die in derselben Verticalreihe befindlichen Glieder des Gleichungspolynoms nebst dem allerersten. Für die nächste Wiederholung dieses combinatorischen Verfahrens erwählt man nun die letzte dermassen bezeichnete Verticalreihe, und bildet aus den in dieser und allen später erscheinenden  $\alpha$  und  $x$  wieder eine Quotientenreihe, findet dermassen  $\xi''_0$ , eine andere Summe von bezeichneten Gliedern, und eine bestimmte Verticalreihe als Ausgangspunkt für das nächstfolgende combinatorische Verfahren u. s. w., bis sich die Rechnung von selbst schliesst.

Wir lassen nun hier eine Reihe von Beispielen folgen, an denen wir die Bestimmung der Anfangsglieder nach der eben auseinandergesetzten Methode vornehmen wollen:

Erstes Beispiel:

$$5x^4 - 3a^6x^3 + 4a^7x^2 - 3a^7x + [2a^4 - 3a^2 + 3] = 0$$

erste Quotientenreihe:  $\frac{6}{1}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{4}{4}$ , unter ihnen ist der erste  $\frac{6}{1} = 6$  der grösste und liefert  $\xi_0 = 6$ ;  
 zweite Quotientenreihe:  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{3}$ , unter ihnen ist der erste  $\frac{1}{1} = 1$  der grösste und liefert  $\xi_0 = 1$ ;  
 dritte Quotientenreihe:  $\frac{0}{1}, \frac{-3}{2}$ , unter ihnen ist der erste  $\frac{0}{1} = 0$  der grösste und liefert  $\xi_0 = 0$ ;  
 vierte Quotientenreihe:  $\frac{-3}{1}$ , liefert  $\xi_0 = -3$ .

Dem Werthe  $\xi_0 = 6$  entsprechen die bezeichneten Glieder:  $5x^4 - 3a^6x^3$

und die Bestimmungsgleichung:  $5h_0^4 - 3h_0^3 = 0$ ;

diese liefert den Werth:  $h_0 = \frac{3}{5}$

und das Anfangsglied:  $x_0' = \frac{3}{5}a^6$ ;

dem Werthe  $\xi_0 = 1$  entsprechen die bezeichneten Glieder:  $-3a^6x^3 + 4a^7x^2$

und die Bestimmungsgleichung:  $-3h_0^3 + 4h_0^2 = 0$ ;

diese liefert:  $h_0 = \frac{4}{3}$

und das Anfangsglied:  $x_0'' = \frac{4}{3}a$ ;

dem Werthe  $\xi_0 = 0$  entsprechen die bezeichneten Glieder:  $4a^7x^2 - 3a^7x$

und die Bestimmungsgleichung:  $4h_0^2 - 3h_0 = 0$ ;

diese liefert:  $h_0 = \frac{3}{4}$

und das Anfangsglied:  $x_0''' = \frac{3}{4}$ ;

dem Werthe  $\xi_0 = -3$  entsprechen die bezeichneten Glieder:  $-3a^7x + 2a^4$

und die Bestimmungsgleichung:  $-3h_0 + 2 = 0$ ;

diese liefert:  $h_0 = \frac{2}{3}$

und das Anfangsglied:  $x_0'''' = \frac{2}{3a^3}$ .

Zweites Beispiel:

$$a^2x^6 - 2ax^5 + (3a + 2)x^4 - (8a^3 + 4)x^3 - 10a^2x^2 + 9ax + 9 = 0$$

$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{+1}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-2}{6}$
		<hr style="width: 100%;"/>	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-3}{3}$
			<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>

$$\xi_0 = \frac{1}{3}, h_0^3 - 8h_0^3 = 0$$

$$h_0 = +2, -1 + \sqrt{-3}, -1 - \sqrt{-3}$$

$$x_0 = 2a^{\frac{1}{3}}, [-1 + \sqrt{-3}]a^{\frac{1}{3}}, [-1 - \sqrt{-3}]a^{\frac{1}{3}}$$

$$\xi_0 = -1, -8h_0^3 - 10h_0^2 + 9h_0 + 9 = 0$$

$$h_0 = +1, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}$$

$$x_0 = \frac{1}{a}, -\frac{3}{4a}, -\frac{3}{2a}$$

## Drittes Beispiel:

$$(4a + 1)x^3 + (3a^2 - 2a + 1)x^2 - 6ax + 3 = 0$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{2}$$

$$\xi_0 = 1, 4h_0^3 + 3h_0^2 = 0$$

$$h_0 = -\frac{3}{4}$$

$$x_0 = -\frac{3}{4}a$$

$$\xi_0 = -1, 3h_0^2 - 6h_0 + 3 = 0$$

$h_0 = 1$  eine doppelte Wurzel

$x_0 = \frac{1}{a}$  dieses Anfangsglied ist zweien Wurzeln  $x$  gemeinschaftlich.

## Viertes Beispiel:

$$x^5 + (-5a + 5)x^4 + (10a^2 - 20a + 5)x^3 + (-10a^3 + 30a^2 - 15a - 5)x^2 +$$

$$+ (5a^4 - 20a^3 + 15a^2 + 10a - 6)x + (-a^5 + 5a^4 - 5a^3 - 5a^2 + 6a) = 0$$

$$\xi_0 = 1, h_0^5 - 5h_0^4 + 10h_0^3 - 10h_0^2 + 5h_0 - 1 = 0$$

$h_0 = 1$  ist eine fünffahe Wurzel dieser Gleichung,

$x_0 = a$  ist daher allen fünf Auflösungen gemeinschaftlich.

## II. Bestimmung der Folgeglieder.

## §. 7.

Nachdem nun die Bestimmung der Anfangsglieder gezeigt wurde, bleibt noch der zweite Theil unseres Problemes, nämlich die Bestimmung der Folgeglieder übrig. Wir wollen uns zunächst damit beschäftigen. Bekanntlich führt das früher auseinandergesetzte Verfahren zu einer Reihe von Anfangsgliedern, und da in der Regel ein jedes einzelne derselben einer einzigen Auflösung  $x$  entsprechen wird, so ist zu einem jeden Anfangsgliede auch nur eine einzige Reihe von Folgegliedern gehörig, die daher alle nur durch Gleichungen des ersten Grades, also

durch Division erhalten werden. Dies wird der gewöhnlichste Fall sein. In speciellen Fällen jedoch kann es sich treffen, dass zwei oder mehrere Auflösungen ein und dasselbe Anfangsglied gemeinschaftlich besitzen. Wir haben schon früher erwähnt, dass diese Erscheinung jedesmal durch gleiche Wurzeln  $h_0$  angezeigt werde, und werden diese Behauptung im Folgenden zu erweisen Gelegenheit finden. Für jetzt wollen wir nur bemerken, dass einem solchen, mehreren Auflösungen gemeinschaftlich zukommenden Anfangsgliede mehrere Systeme von Folgegliedern zukommen werden, die übrigens in den ersten Gliedern mitunter übereinstimmen können, so dass die vollständige Trennung der Wurzeln erst bei einem späteren Gliede erfolgt; ja es kann sich treffen, dass die Gleichung  $P=0$  zwei oder mehrere gleiche Wurzeln  $x$  besitzt und daher, wie weit man auch die Entwicklung treiben wollte, niemals eine Trennung dieser Auflösungen eintritt. Man ersieht hieraus, dass die Bestimmung der Folgeglieder in gewissen Ausnahmefällen wohl eine complicirtere Untersuchung erheischen, in den gewöhnlichen Fällen jedoch eine sehr einfache Gestalt annehmen wird. Die Bestimmung eines Folgegliedes beruht gleichfalls auf der Bestimmung der Zahlwerthe zweier Grössen, nämlich des Exponenten  $\xi$  und des Coëfficienten  $h$ . Die Bestimmung dieser beiden Grössen wird von der Erfüllung gewisser Bedingungen abhängig sein, deren Aufstellung keinerlei Schwierigkeit unterliegt. Diese zwei Grössen sind nämlich offenbar dazu zu verwenden, um im Substitutionsresultate, nachdem vermöge der zweckmässigen Wahl des Anfangsgliedes  $h_0 a^{\xi_0}$  die höchste Potenz bereits eine Reduction auf Null erfahren hat, ein ähnliches Verschwinden auch bei dem Gliede mit der nächst niedrigeren Potenz von  $a$  herbeizuführen. Diesem Zwecke entsprechend wird sowohl für  $\xi_0$  als für  $h_0$  ein bestimmter Zahlwerth entfallen. Man kann die Erörterung und neue Ableitung dieser Bedingungen ersparen und dieses Problem gewissermassen auf das frühere, nämlich auf die Bestimmung des Anfangsgliedes zurückführen.

Dies wird durch folgende Transformation gelingen: Setzt man

$$(3) \quad x = x_0 + x',$$

wobei unter  $x_0$  das bereits bekannte Anfangsglied einer Auflösung  $x$ , unter  $x'$  jedoch die Summe aller Folgeglieder zu verstehen ist, und substituirt nun diesen Werth anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$ ; so geht hieraus eine neue Gleichung hervor, welche anstatt der Unbekannten  $x$  die neue Unbekannte  $x'$  enthält. Da nun  $x'$  offenbar die Summe aller auf  $x_0$  folgenden Glieder bedeutet, so wird das Anfangsglied von  $x'$  eben das gesuchte Glied  $h_1 a^{\xi_1}$  sein. Man wird also nach dem bereits bekannten Verfahren nur das Anfangsglied von  $x'$  aus dieser neuen Gleichung zu bestimmen haben, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen. Auf solche Weise nun wäre durch eine leicht ausführbare Transformation der Gleichung  $P=0$  in eine andere, und durch Anwendung der früher exponirten zur Bestimmung des Anfangsgliedes dienenden Regel unser vorliegendes Problem zur Lösung gebracht, denn genau so, wie die einmalige Transformation von  $x$  in  $x'$  zu dem zweiten Gliede  $h_1 a^{\xi_1}$  führt, wird eine nochmalige Wiederholung dieses Verfahrens, jetzt aber auf  $x'$  angewendet, das dritte Glied liefern u. s. w. Allein wir werden bald sehen, dass, wiewohl die angegebene Transformation allerdings zum Ziele führt, mit der Angabe derselben noch keineswegs das Problem vollkommen erledigt sei, und zwar aus folgenden zwei Gründen: Erstens zeigt sich, dass die transformirte Gleichung nach  $x'$  von demselben Grade sei, wie die gegebene nach  $x$ , und man wird demnach bei der Bestimmung des Anfangsgliedes von  $x'$  nicht ein einziges solches, sondern deren mehrere und in der Regel von einander verschiedene finden, während der Natur der Sache nach, doch nur ein

einziges derselben das gesuchte Folgeglied  $h_1 a^{\xi_1}$  vorstellen kann. Zweitens: Abgesehen von dieser Vieldeutigkeit, welche sich bei der Betrachtung der gefundenen Anfangsglieder von  $x'$  ohne alle Schwierigkeit von selbst beheben würde, so dass dann kein Zweifel mehr obwaltet, welches derselben eigentlich das gesuchte Glied  $h_1 a^{\xi_1}$  ist, so hängt dieser Verfahrungsweise eine Anzahl von unnützen Rechnungen an, ein Nachtheil, der hier viel fühlbarer ist, weil sie sich bei der Bestimmung eines jeden einzelnen Entwicklungsgliedes wiederholen. Wenn daher bei der früher gelehrtten Bestimmung der Anfangsglieder von  $x$  die mögliche Vereinfachung des Verfahrens vielleicht als eine ziemlich unerspriessliche Arbeit angesehen werden könnte, so gilt dieses keineswegs hier, wo sich die unnützen Rechnungsoperationen bei jedem einzelnen Gliede wiederholen, und daher bei Vermeidung derselben die Ersparniss bedeutender und, so zu sagen, für die praktische Ausführbarkeit unerlässlich ist. Wir können daher mit der Angabe dieser Transformation und der Hinweisung auf das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Anfangsglieder das Problem keineswegs als erledigt, sondern eben nur als in den allgemeinsten Grundzügen angedeutet betrachten.

Der zuerst erwähnte Punkt, der einer Aufklärung bedarf, betrifft die dem  $x'$  anhängende Mehrdeutigkeit. Diese Mehrdeutigkeit findet in der Substitutionsgleichung

$$x' = x_0 + x'$$

ihre Erklärung, denn diese Gleichung besagt keineswegs, dass  $x'$  eben jene Summe von Folgegliedern bedeute, die wir zunächst darunter zu verstehen geneigt wären, sondern überhaupt einen Ausdruck, der, zu  $x_0$  addirt, einen Genüge leistenden Werth  $x$  der Gleichung  $P = 0$  liefert. Da nun nicht ein einziger solcher Werth von  $x$ , sondern deren mehrere und meist von einander verschiedene bestehen, so werden auch eben so viele und gleichfalls von einander verschiedene  $x'$  vorhanden sein, und es darf daher nicht überraschen, dass die transformirte Gleichung nach  $x'$  dieselbe Gradzahl, wie die ursprünglich gegebene  $P = 0$  nach  $x$  ausweist. Da wir aber nicht beabsichtigen diese Zusätze  $x'$  zu suchen, sondern von ihnen eben nur jenes  $x'$  zu kennen wünschen, welches wir ursprünglich darunter meinten, und das die Summe der zu dem bereits gefundenen  $x_0$  gehörigen Folgeglieder darstellt, so sind wir verhalten, diese Erklärung auch in unsere Rechnung einzuführen und nur eben dieses specielle  $x'$  in seinem Anfangsgliede  $h_1 a^{\xi_1}$  zu bestimmen. Dies wird dadurch geschehen, dass wir zu der Substitutionsgleichung noch eine fernere Bedingung hinzufügen, durch welche dem  $x'$  jene Mehrdeutigkeit benommen und dasselbe auf eben jene specielle Bedeutung zurückgeführt wird, und zwar dadurch, dass wir erklären,  $x'$  sei ein Ausdruck von niedrigerem Grade nach  $a$ , als  $x_0$ . Wir werden daher die Ungleichung

$$\xi_0 > \xi_1$$

noch zur Substitutionsgleichung (3) hinzufügen.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass nur unter dieser Bedingung die Summe der Glieder:

$$x = x_0 + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$$

nach absteigenden Potenzen von  $a$  geordnet erscheinen wird, während alle übrigen  $x'$ , die mit einem grösseren  $\xi$  in ihrem Anfangsgliede versehen sind, sich dem  $x_0$  nicht rückwärts anfügen lassen, ohne der bei allen unseren Untersuchungen geltenden Ordnungsweise zu widersprechen. Diese hinzugefügte Bedingung bewirkt daher die beabsichtigte Abscheidung des eigentlich gemeinten Folgegliedes von den übrigen Zusätzen  $x'$ , die keine weitere Berücksichtigung



verdienen. Diese Bedingung besagt, dass man die mittelst der Substitution (3) abgeleitete transformirte Gleichung nicht in Bezug auf alle ihre Anfangsglieder zu untersuchen habe, sondern dass diese Untersuchung nur auf einen beschränkten Bereich der Werthe von  $\xi'$  auszudehnen sei. Wir werden daher bei der transformirten Gleichung die Construction der gebrochenen Linie, um die es sich bei der Bestimmung der Anfangsglieder bekanntlich handelt, nicht in der vollen Ausdehnung der Abscissenaxe  $\xi'$  vornehmen, wie dies früher der Fall war, sondern wir werden uns auf ein bestimmtes Gebiet beschränken, gegeben durch die Ungleichung:  $\xi_0 > \xi'$ .

Dieses Gebiet erstreckt sich von  $\xi' = -\infty$  bis  $\xi' = \xi_0$  und nur in dieser Ausdehnung werden wir die gebrochene Linie entwerfen, weil nur in dieser Ausdehnung brauchbare Werthe für  $\xi_1$  erhalten werden können. Nur in dieser Ausdehnung wird die Bestimmung der Anfangsglieder von  $x'$  etwas Neues lehren in Bezug der Auflösung  $x$ , während, wie wir gleich zeigen werden, in dem übrigen Bereiche der Werthe  $\xi'$  eine solche Untersuchung nur Bekanntes liefern könnte. In der That sind durch die vorhergegangene Untersuchung die verschiedenen Auflösungen  $x$ , welche der Gleichung  $P = 0$  entsprechen, in ihren Anfangsgliedern bekannt. Auf solche Weise sind alle jene Auflösungen, welchen das Anfangsglied  $x_0 = h_0 a^{\xi_0}$  gemeinschaftlich zukommt, geschieden von allen übrigen.

Fügen wir nun zu den verschiedenen Auflösungen  $x$  das Anfangsglied  $x_0$  mit entgegengesetztem Zeichen hinzu, so verwandeln sie sich sämmtlich in die entsprechenden  $x'$ . Bei dieser Verwandlung zeigen nun jene Auflösungen  $x$ , welche das Anfangsglied  $x_0$  besitzen, ein ganz verschiedenes Verhalten von den übrigen, welchen es nicht zukommt. Bei den mit dem Bestandtheile  $x_0$  versehenen Auflösungen  $x$  wird der subtractiv hinzugefügte Bestandtheil  $-x_0$  den gleichen positiven heben, und das Übrigbleibende ist die Summe der auf  $x_0$  folgenden Glieder, die sämmtlich noch unbekannt sind. Hingegen bei den anderen Auflösungen  $x$ , welche den Bestandtheil  $x_0$  gar nicht besitzen, wird ein solches Aufheben nicht stattfinden. Ist nämlich das Anfangsglied von  $x$  mit einer höheren Potenz von  $a$  versehen, als das Anfangsglied  $x_0$ , so wird dieses erstere zugleich auch dem  $x'$  angehören. Findet das Entgegengesetzte Statt, so beginnt  $x'$  mit dem Anfangsgliede  $x_0$ . Es kann sich aber auch treffen, dass das Anfangsglied von  $x$  und  $x_0$  mit derselben Potenz von  $a$  aber mit verschiedenen Coëfficienten versehen sind, dann beginnt  $x'$  mit der Differenz dieser beiden Anfangsglieder. Das auf solche Weise hervorgehende  $x'$  besitzt somit entweder dasselbe Anfangsglied, wie das in Rede stehende  $x$ , oder es beginnt mit  $-x_0$  oder endlich mit der Differenz beider. Wir ersehen hieraus, dass die Anfangsglieder von  $x'$  bei allen Auflösungen  $x$ , welchen der Bestandtheil  $x_0$  in ihrer absteigenden Entwickelungsform nicht zukommt, bereits bekannt sind, und dass demnach auch die über den Bereich  $\xi < \xi_0$  ausgedehnte Bestimmung der Anfangsglieder in der transformirten Gleichung nichts Neues lehren könne. Wir gelangen auf solche Weise zugleich zu einer Vereinfachung der Untersuchungsmethode, indem wir schon im Voraus gewisse Untersuchungen beseitigen, von denen wir wissen, dass sie nur Bekanntes liefern, und überhaupt eine strenge Grenze aufgefunden haben, wie weit sie auszudehnen sei. Mit dieser Begrenzung der Untersuchung ist noch ein weiterer Vortheil und eine nicht unbedeutende Vereinfachung der Rechnung verbunden, da es nun gestattet ist, nur einen Theil der transformirten Gleichung zu berücksichtigen, und die übrigen Glieder unberücksichtigt zu lassen. Es wird folglich auch gestattet sein, nur eben diesen Theil der transformirten Gleichung zu bilden; denn bekanntlich zerfällt man bei der Bestimmung der Anfangsglieder die Gleichung in Theile, und zieht aus einer solchen Partialgleichung das gesuchte Anfangsglied. Es wird daher überflüssig sein, zur

Bestimmung des Folgegliedes  $h_1 a^{\xi_1}$  die transformirte Gleichung in  $x'$  vollständig zu entwickeln, und vielmehr hinreichen, nur jene Partialgleichung zu bilden, aus der  $h_1 a^{\xi_1}$  gezogen werden kann. Wir sehen also, wie durch die Beseitigung der Mehrdeutigkeit von  $x'$  zugleich der zweite angeführte Punkt, nämlich die möglichste Vereinfachung des Rechnungsverfahrens, wenigstens bis zu einer gewissen Weite hin seine Erledigung findet.

## §. 8.

Wir haben bisher der Substitutionsformel (3) unsere Aufmerksamkeit zugewendet und aus ihr alle unsere Schlüsse gezogen, die Bezug hatten auf die Anfangsglieder von  $x'$ . Wir könnten nun auf dem Wege der directen Substitution von  $x_0 + x'$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$  die neue Gleichung in  $x'$  wirklich ableiten, und an ihr die Bestimmung der Anfangsglieder vornehmen. Es würden sich dabei die eben gemachten Bemerkungen bestätigen.

Wir ziehen es aber vor, von der angegebenen Substitution und den auf solche Weise abgeleiteten neuen Gleichungen in  $x'$  ganz und gar abzusehen, und die Bestimmung der Folgeglieder auf dem directen Wege, durch Substitution einer Reihe:

$$h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$$

anstatt  $x$  abzuleiten, indem wir die Bedingungen erörtern, unter welchen die zweckmässige Wahl der Werthe von  $\xi_1$  und  $h_1$  eine weitere Reduction auf Null in dem Substitutionsresultate herbeiführt. Wir geben dieser Ableitungsweise vor jener anderen, auf die Transformation der Gleichung gestützte den Vorzug, weil einerseits sie die allgemeinere ist und eine deutlichere Einsicht gewährt, andererseits aber, weil man in der That niemals zur Bildung der transformirten Gleichung in  $x'$  zu schreiten Ursache findet. Unsere früheren Untersuchungen bezüglich der Bestimmung der Anfangsglieder von  $x$  beziehen sich nämlich zunächst nur auf Gleichungen von der Form  $S[H a^{\alpha} x^{\rho}] = 0$ , wobei aber  $\alpha$  und  $\rho$  keineswegs ganze und positive Zahlen bedeuten müssen; substituirt man aber in eine solche Gleichung  $x = x_0 + x'$ , so wird, wenn negative oder gebrochene Werthe von  $\rho$  erscheinen, die neue Gleichung diese Form keineswegs mehr besitzen, so zwar, dass die früher gelehrt Bestimmungsweise der Anfangsglieder nicht mehr anwendbar erscheint. Man wäre dadurch bemüssigt, entweder solche mit negativen oder gebrochenen Werthen von  $\rho$  verschene Gleichungen ganz aus der Betrachtung streichen, oder die Bestimmung der Anfangsglieder früher auch auf andere Formen der algebraischen Gleichungen als die bisher betrachteten, auszudehnen. Wir finden uns veranlasst, weder das eine, noch das andere zu thun, sondern ziehen es vor, den Untersuchungen jenen Grad der Allgemeinheit zu lassen, den sie bereits besitzen.

Der Weg, den wir einzuschlagen gedenken, ist folgender:

Wir substituiren in das Gleichungspolynom  $P$  anstatt  $x$  eine Reihe, absteigend geordnet nach Potenzen von  $a$ , deren höchstes Glied  $h_0 a^{\xi_0}$  durch die früheren Untersuchungen angegeben ist, und deren zweites Glied  $h_1 a^{\xi_1}$  mit noch unbestimmten Werthen  $h_1$  und  $\xi_1$  versehen erscheint. Wir erhalten dadurch ein gewisses Substitutionsresultat, dessen höchstes Glied, zufolge der getroffenen Wahl des Anfangsgliedes  $h_0 a^{\xi_0}$ , sich auf Null reducirt und daher wegfällt. Aber es bleiben trotzdem noch von Null verschiedene Glieder übrig. Es soll nun angegeben werden, welche Werthe von  $h_1$  und  $\xi_1$  in dem nunmehr mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Gliede eine Reduction auf Null herbeiführen. Hier ist stillschweigend die Bedingung  $\xi_1 < \xi_0$  niedergelegt und wir werden daher auch nur das verlangte Folgeglied  $h_1 a^{\xi_1}$  erhalten,

keineswegs aber die Anfangsglieder der verschiedenen Zusätze  $x'$ , von denen früher Erwähnung geschah. Der erste Schritt dieser Substitution:

$$(4) \quad x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$$

besteht in der Entwicklung von  $x^r$ . Diese gelingt in den zwei ersten Gliedern ohne Schwierigkeit, und hat die Gestalt:

$$(5) \quad x^r = h_0^r a^{r\xi_0} + r h_0^{r-1} h_1 a^{(r-1)\xi_0 + \xi_1} + \dots$$

Jedes einzelne Glied  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes  $P$  liefert daher einen nach absteigenden Potenzen von  $a$  geordneten Bestandtheil, wie:

$$(6) \quad H a^a x^r = H h_0^r a^{a+r\xi_0} + r H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1} + \dots$$

dessen zwei erste Glieder bekannt sind. Die Summe aller dieser Bestandtheile liefert das dem substituirten Werthe (4) entsprechende Substitutionsresultat. Um dasselbe in absteigend geordneter Form zu erhalten, hat man diese verschiedenen Bestandtheile mit gehöriger Rücksicht auf die möglichen Reductionen zu summiren. Das höchste Glied davon ist bereits von einer früheren Untersuchung her bekannt. Wir gehen nun daran, das nächst niedrigere, zweite Glied zu bilden, und werden so zu jenen Bedingungen gelangen, welche die noch unbestimmt gelassenen Grössen  $\xi_1$  und  $h_1$  zu erfüllen haben, und die dazu verwendet werden sollen, den Coefficienten dieses nächst niedrigeren Gliedes auf Null zu bringen. Wir beginnen mit der Bemerkung, dass die zweiten Glieder der erwähnten Bestandtheile, welche die Form:

$$(7) \quad r H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1}$$

besitzen, beim Summiren derselben eine ähnliche Reduction erfahren werden, wie dies bei den ersten Gliedern  $H h_0^r a^{a+r\xi_0}$  der Fall war, und zwar für jeden beliebigen Werth von  $\xi_1$  und  $h_1$ . In der That ist  $\xi_0$  so gewählt, dass von den verschiedenen Gradzahlen  $a+r\xi_0$  zwei oder mehrere gleich und am grössten ausfallen. Diesen speciellen Werthen von  $a$  und  $r$  entspricht die Summe der bezeichneten Glieder  $\Sigma[H a^a x^r]$ . Jedes derselben liefert ein zweites Glied von der Form (7) und in all' diesen Gliedern erscheint dieselbe Potenz  $a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1}$ . Diese Glieder setzen sich daher zu einem einzigen zusammen, welches als Coefficienten die Summe der Coefficienten dieser einzelnen Glieder enthält. Dieser Coefficient erscheint als die Summe von Gliedern die alle die Grösse  $h_1$  als Factor aufweisen, und besitzt die Form:

$$h_1 \Sigma[r H h_0^{r-1}],$$

während der Coefficient der höchsten Potenz im Substitutionsresultate die Form:

$$\Sigma[H h_0^r] = 0$$

besass. Diese Summen sind auf dieselben Werthe von  $r$  und  $H$  auszudehnen, die durch die gebrochene Linie dafür angegeben werden. Man sieht hieraus, dass es in der Regel gelingen wird, unter den verschiedenen zweiten Gliedern (7) diejenigen, welche  $a$  in der höchsten Potenz besitzen, ohne Schwierigkeit anzugeben, denn die gebrochene Linie, die zu dem Werthe von  $\xi_0$  und  $h_0$  geführt hat, gibt die entsprechenden Glieder  $H a^a x^r$  an, aus welchen sie abzuleiten wären. Es ist andererseits ersichtlich, dass die Summe  $\Sigma[r H h_0^{r-1}]$  durch einmaliges Differenziren nach  $h_0$  aus  $\Sigma[H h_0^r]$  abgeleitet werden könne und man wird daher, um die Summe der höchsten Glieder aus der Gruppe der  $r H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1}$  zu erhalten, nur den für noch unbestimmt gelassene  $h_0$  bereits bekannten Coefficienten der allerhöchsten Potenz im Substitutionsresultate,

$\Sigma[IIh_0^x]$  nämlich, einmal nach  $h_0$  zu differentiiiren und der so erhaltenen Summe  $\Sigma[xIIh_0^{x-1}]$  noch den Factor  $h_1 a^{a+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}$  beizufügen haben. Wir haben oben gesagt, dass es in der Regel auf diese Weise gelingen werde, denn es gibt Ausnahmefälle, welche diesen Vorgang vereiteln. In der That wird meistens  $\Sigma[xIIh_0^{x-1}]$  von Null verschieden ausfallen, weil  $h_0$  der Gleichung  $\Sigma[IIh_0^x]=0$  entsprechend gewählt ist. Wenn aber diese Bestimmungsgleichung gleiche Wurzeln besitzt, und das erwähnte  $h_0$  eben einen solchen gleichen Wurzelwerth darstellt, so ist die ganze Reihe der früheren Schlussfolgerungen unzulässig, und sie erweisen nur, dass in einem solchen speciellen Falle nicht nur die höchsten Glieder von der Form  $IIh_0^x a^{a+x\xi_0}$  sondern auch die der zweiten Form  $xIIh_0^{x-1} h_1 a^{a+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}$  sich aufheben.

Diese Möglichkeit des Auftretens gleicher Wurzeln  $h_0$  ist es, die unsere folgenden Untersuchungen in einem nicht geringeren Masse compliciren und uns zur Unterscheidung sehr vieler Ausnahmefälle zwingen wird. Wir werden mit dem einfachsten Falle beginnen, nämlich wo  $h_0$  nur eine einfache Wurzel darstellt, und eine gewisse Regel für die Auffindung des Folgegliedes  $h_1 a^{\xi_1}$  ermitteln. Diese Regel verliert ihre Gültigkeit, wenn  $h_0$  eine doppelte Wurzel ist, und es tritt an ihre Stelle eine neue Regel, die gleichfalls unbrauchbar wird, wenn  $h_0$  eine dreifache Wurzel bedeutet u. s. w. Daraus, dass hier sehr viele einzelne Ausnahmefälle vorkommen, und jeder derselben eine eigene Verfahrensweise erheischt, möchte man wohl im Voraus mit einer gewissen Peinlichkeit dem nun Folgenden entgegen sehen. Allein der Leser wird sich überzeugen, dass diese verschiedenen Regeln nicht so heterogen seien, dass eine jede derselben einzeln dem Gedächtnisse eingepägt werden müsste; sie werden im Gegentheile eine grosse Ähnlichkeit besitzen, und sich in eine einzige, allgemein gültige Regel vereinigen lassen.

Beginnen wir also mit dem gewöhnlichen und einfachsten Falle, wo  $h_0$  eine einfache Wurzel der Gleichung

$$\Sigma[IIh^x]=0$$

bedeutet und daher  $\Sigma[xIIh_0^{x-1}]$  von Null verschieden ausfällt. In einem solchen Falle ist, wie wir gezeigt haben, das durch Summirung der verschiedenen zweiten Glieder (7) hervorgehende höchste Glied folgendes:

$$h_1 \Sigma[xIIh_0^{x-1} \cdot a^{a+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}]$$

wobei die Summirung auf dieselben Combinationen  $x$  und  $II$  auszudehnen ist, wie in der bereits für  $\xi_0$  bekannten Gleichung  $\Sigma[IIh^x]=0$ . Nun liegt uns noch eine zweite Untersuchung ob, nämlich zu entscheiden, welches von denjenigen ersten Gliedern  $IIh_0^x \cdot a^{a+x\xi_0}$  das höchste seiner Gradzahl nach sei, nachdem man die bei der Summirung sich tilgenden beseitigt hat. Man wird dazu ohne alle Schwierigkeit gelangen, indem man das bereits bekannte Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  in das Gleichungspolynom  $P$  anstatt  $x$  substituirt und alle dabei möglichen Reductionen ausführt. Auf solche Weise findet man das höchste Glied, welches wir mit  $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{H}_0}$  anzeihen wollen, und kann nun versichert sein, dass das höchste von Null verschiedene Glied des Substitutionsresultates nur aus den zwei Gliedern

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{H}_0} \text{ und } h_1 \Sigma[xIIh_0^{x-1} \cdot a^{a+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}]$$

hervorgehen könne, weil alle übrigen, wie immer aussehenden Glieder erwiesener Massen von niedrigerer Ordnung sind. Jetzt ist es nicht schwer, die Bedingungen anzugeben, welche die noch unbestimmt gelassenen, mit  $h_1$  und  $\xi_1$  bezeichneten Grössen zu erfüllen haben, um eine fernere

Reduction auf Null im Substitutionsresultate  $P_1$  herbeizuführen; es ist nämlich einerseits nothwendig, dass:

$$\mathfrak{A}_0 = a + r\xi_0 - \xi_0 + \xi_1$$

ausfällt, damit beide Glieder dieselbe Potenz von  $a$  aufweisen, und demnach eine Reduction zulassen. Diese Gleichung bestimmt den Zahlwerth von  $\xi_1$ , weil sowohl  $\mathfrak{A}_0$  als auch  $a + r\xi_0 - \xi_0$  hier bestimmte Zahlwerthe bedeuten.  $a + r\xi_0$  ist namentlich hier die dem Werthe  $\xi = \xi_0$  entsprechende Ordinate der gebrochenen Linie, sie mag  $\eta_0$  heissen; ferner mag  $\eta_0 - \xi_0$  durch  $a$  ausgedrückt sein. Dieser Zahlwerth von  $\xi_1$  ist demnach ein einziger und zwar folgender:

$$\xi_1 = \mathfrak{A}_0 - a.$$

Ist  $\xi_1$  dermassen gewählt, so erhält diese höchste Potenz von  $a$  den Coëfficienten:

$$\mathfrak{S}_0 + h_1 \Sigma [r H h_0^{r-1}]$$

welcher gleich Null werden soll, und daher für  $h_1$  den Werth:

$$h_1 = - \frac{\mathfrak{S}_0}{\Sigma [r H h_0^{r-1}]}$$

liefert. Auf solche Weise ist daher sowohl der Exponent  $\xi_1$  als der Coëfficient  $h_1$  seinem Werthe nach bekannt.

Das hier auseinander gesetzte Verfahren, um das erste Folgeglied  $h_1 a^{\xi_1}$  zu bestimmen, welches zu dem Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  gehört, kann in gleicher Weise zur Bestimmung des zweiten Folgegliedes  $h_2 a^{\xi_2}$  u. s. w. allgemein zur Bestimmung des  $r^{\text{ten}}$  Folgegliedes  $h_r a^{\xi_r}$  dienen. Setzt man nämlich:

$$x = x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + \dots$$

anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$ , wobei  $x_r$  die Summe der bereits bekannten Glieder der Entwicklung:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots + h_r a^{\xi_r}$$

bedeutet; so werden sich hier mit den geeigneten Abänderungen alle früheren Schlussfolgerungen wiederholen lassen, denn auch hier erscheint  $x^r$  als eine absteigend nach  $a$  geordnete Reihe, deren höchste Glieder mit bestimmten Zahlwerthen versehene Exponenten und Coëfficienten besitzen, und in einer gewissen Anzahl von Gliedern mit  $x_r^r$  übereinstimmen. Von einer gewissen Potenz an treten zu diesen Gliedern von  $x_r^r$  die Glieder von  $r x_r^{r-1} h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ .

Es lässt sich nun ohne alle Schwierigkeit zeigen, dass das höchste dieser letzterwähnten Glieder nicht ein einziges, sondern eine Summe von solchen sei, in der bereits bekannten Form:

$$h_{r+1} \Sigma [r H h_0^{r-1} \cdot a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_{r+1}}]$$

erscheine und von Null verschieden sei, so lange  $h_0$  nur eine einfache Wurzel der Gleichung  $\Sigma [H h_0^r] = 0$  ist. Das nunmehr höchste und von Null verschiedene Glied des Substitutionsresultates  $P_{r+1}$  wird daher aus der Gruppe der zu  $S[H a^r x_r^r]$  gehörigen Glieder und aus dem oben aufgestellten zu erwählen sein. Man wird daher den bereits bekannten Bestandtheil  $x_r$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$  substituiren, und durch Ausführen der möglichen Reductionen dieses Substitutionsresultat auf die Form eines absteigend nach  $a$  geordneten Polynomes bringen. Auf solche Weise ergibt sich das höchste von Null verschiedene Glied desselben  $\mathfrak{S}_r a^{\mathfrak{A}_r}$

ohne alle Schwierigkeit, mit bestimmtem  $\mathfrak{S}_r$  und  $\mathfrak{A}_r$ , und es werden nun die beiden Glieder:

$$\mathfrak{S}_r a^{\mathfrak{A}_r} \text{ und } h_{r+1} \Sigma[r H h_0^{r-1} \cdot a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_{r+1}}]$$

durch schiekliche Wahl der noch unbestimmt gelassenen Grössen  $\xi_{r+1}$  und  $h_{r+1}$  sich gegenseitig aufheben lassen. Dies erfolgt für

$$\mathfrak{A}_r = a + r\xi_0 - \xi_0 + \xi_{r+1} = a + \xi_{r+1}$$

und

$$\mathfrak{S}_r + h_{r+1} \Sigma[r H h_0^{r-1}] = 0,$$

woraus die Werthe:

$$\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - a, \quad h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{S}_r}{\Sigma[r H h_0^{r-1}]}$$

folgen.

Wir ersehen hieraus, dass das hier auseinandergesetzte Verfahren zu einer bekannten Summe  $x_r$  von Gliedern das unmittelbar nächstfolgende  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  liefert und demnach, beliebig oft wiederholt, der Reihe nach eine beliebige Anzahl von Folgegliedern zu geben und daher  $x$  in einer beliebigen Annäherung darzustellen geeignet sei. Dieses Verfahren ist zugleich höchst einfach und schreibt zunächst nur vor, den bereits gefundenen Bestandtheil  $x_r$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$  zu substituieren. Hat man das Substitutionsresultat gehörig entwickelt und in geordneter Weise hingestellt, so lässt sich das unmittelbar nachfolgende Glied aus dem ersten Gliede  $\mathfrak{S}_r a^{\mathfrak{A}_r}$  desselben mit Leichtigkeit ableiten. Man multiplicirt dasselbe nämlich mit dem Factor  $-\frac{1}{\Sigma[r H h_0^{r-1}]} a^{-a}$ , und erhält so unmittelbar das  $r+1$ ste Folgeglied:

$$h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} = -\frac{\mathfrak{S}_r}{\Sigma[r H h_0^{r-1}]} a^{\mathfrak{A}_r - a}.$$

Dieser Factor ist für eine bestimmte Auflösung stets derselbe. Seine Bildung unterliegt keiner Schwierigkeit. Man verfährt hiezu auf folgende Weise: Die Bestimmungsgleichung  $\Sigma[H h^r] = 0$ , die für das erwähnte  $\xi_0$  besteht, und bereits von der Bestimmung des Anfangsgliedes her bekannt ist, differentiirt man nach der Grösse  $h$  Ein Mal und substituirt nun den Werth  $h_0$  anstatt  $h$ . Von dem so gewonnenen Zahlwerthe  $\Sigma[r H h_0^{r-1}]$  bildet man den mit entgegengesetzten Zeichen versehenen reiproken Werth. Dieser so erhaltene Zahlwerth  $-\frac{1}{\Sigma[r H h_0^{r-1}]}$  ist der Coëfficient des fraglichen Factors. Der Exponent von  $a$ , nämlich  $-\mathfrak{A}_r$  folgt aus folgender Gleichung:

$$-\mathfrak{A}_r = \xi_0 - \eta_0$$

wo  $\eta_0$  dem  $\xi_0$  entsprechenden grössten Werth der linearen Functionen  $a + r\xi$ , also die dem  $\xi_0$  entsprechende Ordinate der gebrochenen Linie darstellt. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist  $\Sigma[r H h_0^{r-1}] \cdot a^a$  das höchste Glied des Substitutionsresultates, welches man für  $x = x_0$  oder  $x = x_r$  aus dem einmal nach  $x$  differentiirten Gleichungspolynome  $P$ , nämlich aus  $\frac{dP}{dx} = S[r H a^a x^{r-1}]$  erhält, so zwar, dass sich die Bestimmung des Folgegliedes auch auf eine Division von  $P$  durch  $\frac{dP}{dx}$  zurückführen lässt. Man entwickelt nur das erste Glied dieses Quotienten und ertheilt ihm dann das entgegengesetzte Zeichen.

Es zeigt sich also, dass in diesem gewöhnlichen Falle nur ein einziges Folgeglied erhalten wird. Wir sehen zugleich, dass die Bildung der transformirten Gleichung, so wie eine nähere Untersuchung derselben ganz überflüssig sei und durch ein viel einfacheres Verfahren ersetzt werden könne, welchem weder die Mehrdeutigkeit des  $x'$ , noch ein complicirtes Rechnungsverfahren als Nachtheil anhängt. Wir bemerken auch ferner noch die grösste Übereinstimmung dieser Regel mit der bekannten Regel der Division und des Wurzelausziehens, eine Übereinstimmung, die wohl im Voraus erwartet werden konnte, weil diese beiden Regeln nur eine specielle Anwendung auf binomische Gleichungen des ersten und höchsten Grades vorstellen. Das hier angegebene Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis endlich alle Glieder der Auflösung  $x$  gefunden sind. Sind dieselben wirklich in einer endlichen Anzahl vorhanden, so wird dieses Verfahren das Nullsein aller folgenden Glieder ohne Schwierigkeit erkennen lassen; es wird nämlich bei der Substitution der Summe derselben das Gleichungspolynom  $P$  sich in ein identisch auf Null zurückziehendes Polynom verwandeln, womit einerseits erwiesen ist, dass die Summe dieser Glieder ein Genüge leistender Werth  $x$  sei, und andererseits die fernere Wiederholung nur Null liefern könne. Dass aber ein solches Abbrechen der Reihe nur zu den speciellen Fällen gehört, unterliegt wohl keinem weiteren Zweifel, weil dann ausserdem noch alle Coëfficienten der nächst niedrigeren Potenzen von  $a$  den Werth Null erhalten müssen. Dieses Nullwerden derselben kann nicht durch Wahl der Coëfficienten  $h$  und der Exponenten  $\xi$  erzielt werden, weil über ihre Werthe schon verfügt ist, trifft aber bisweilen in Folge der zwischen den mit  $H$ ,  $a$ ,  $r$  bezeichneten Grössen zufällig bestehenden Relationen ein und in einem solchen Falle besteht dann ein solcher Genüge leistender Werth in geschlossener Form. In der Regel jedoch ist dies nicht der Fall und das Verfahren kann daher keine solche geschlossene Form, sondern nur eine unendliche Reihe liefern.

§. 9.

Wir übergehen nun zur Erörterung des zunächst liegenden Ausnahmefalles, für welchen das eben dargestellte Verfahren brauchbar zu sein aufhört. Die Brauchbarkeit desselben, so wie die Giltigkeit aller vorhergehenden Schlüsse ist an die Bedingung gebunden, dass das Substitutionsresultat  $\Sigma[r H h_0^{r-1}]$  einen von Null verschiedenen Werth besitzt, mit anderen Worten, dass  $h_0$  eine unwiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung  $\Sigma[H h_0^r] = 0$  ist. Stellt sich heraus, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist, sondern gleichzeitig beide Grössen  $\Sigma[H h_0^r]$  und  $\Sigma[r H h_0^{r-1}]$  verschwinden, folglich  $h_0$  als eine wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung  $\Sigma[H h_0^r] = 0$  erscheint, so verlieren alle früheren Schlüsse ihre Giltigkeit, und man würde beim Einschlagen des früheren Verfahrens lauter unendliche Werthe für die Coëfficienten  $h_1, h_2, \dots$  erhalten.

Hier sind aber wieder mehrere Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich  $h_0$  eine doppelte oder dreifache, oder endlich eine mehrfache Wurzel ist. Den einfachsten dieser verschiedenen Fälle wollen wir hier zunächst zum Gegenstande der Untersuchung machen, jenen nämlich, wo  $h_0$  eine doppelte Wurzel der Bestimmungsgleichung  $\Sigma[H h_0^r] = 0$  ist. Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass  $\Sigma[H h_0^r]$  und  $\Sigma[r H h_0^{r-1}]$  gleich Null, hingegen  $\Sigma[r(r-1) H h_0^{r-2}]$  von Null verschieden angenommen wird.

Der eigentliche Grund, wesshalb die früheren Schlussfolgerungen ihre Giltigkeit verlieren, ist in dem Umstande zu suchen, dass die Summe der zweiten Glieder des entwickelten Substitutionsresultates, welche aus den einzelnen Gliedern  $H a^a x^a$  des Gleichungspolynomes in der Form  $r H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0} \xi_0 + \xi_1$  hervorgehen, nicht mehr das höchste Glied:

$$h_1 \Sigma [x H h_0^{x-1} \cdot a^{a+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}]$$

besitzen, sondern dasselbe bei der wirklichen Summirung gänzlich wegfällt, indem der Coëfficient  $\Sigma [x H h_0^{x-1}]$  dieser höchsten Potenz von  $a$  der gemachten Annahme zufolge gleich Null wird. Man ist desshalb auch ausser Stande, über die Form des nun an seine Stelle tretenden höchsten Gliedes eine Angabe zu machen, so lange man nicht den Weg der directen Substitution einschlägt.

Es erweist sich zugleich als ungenügend,  $x^r$  nur in seinen zwei ersten Gliedern der Entwicklung zu betrachten, um zu dem höchsten Gliede des geordneten Substitutionsresultates zu gelangen, weil bei der Summe jener Glieder  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes, deren lineare Functionen den grössten Werth besitzen, und auf welche sich das Summenzeichen  $\Sigma$  erstreckt, ein vollständiges Tilgen der ersten und zweiten Glieder erfolgt. Man wird daher die Ausdrücke in ihren drei ersten Gliedern entwickeln müssen, und nur auf solche Weise die Gewissheit haben, dass die ausgelassenen Glieder sämmtlich von niedrigerer Ordnung und daher auch ohne allen Einfluss auf das allein zu berücksichtigende höchste Glied des Substitutionsresultates seien und dies eben wieder nur so lange, als bei diesen dritten Gliedern der Entwicklung kein gegenseitiges Aufheben stattfindet. Wir werden daher  $x^r$  in seinen drei ersten Gliedern entwickeln, hierauf die Substitution des dermassen entwickelten Ausdruckes in die einzelnen Glieder  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes ausführen und zuletzt aus der Summe aller dieser Glieder die höchsten auswählen.

Man erhält solchergestalt:

$$x^r = (h_0^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1})^r = h_0^r a^{r\xi_0} + r h_0^{r-1} h_1 a^{(r-1)\xi_0+\xi_1} + \binom{r}{2} h_0^{r-2} h_1^2 a^{(r-2)\xi_0+2\xi_1} + \dots$$

Jedes einzelne Glied  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes  $P$  erhält sonach den Werth:

$$H a^a x^r = H h_0^r a^{a+r\xi_0} + r H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1} + \binom{r}{2} H h_0^{r-2} h_1^2 a^{a+r\xi_0-2\xi_0+2\xi_1} + \dots$$

Nun ist noch die Summirung aller dieser Ausdrücke vorzunehmen und zwar auf alle jene Werthe von  $a, r$  auszudehnen, welche in den einzelnen Gliedern  $H a^a x^r$  des Gleichungspolynomes erscheinen. Der nöthigen Klarheit wegen wollen wir diese Summirung in zwei Abtheilungen trennen, indem wir das Gleichungspolynom

$$P = S [H a^a x^r]$$

in zwei Theile theilen:

$$P = \Sigma [H a^a x^r] + \ominus [H a^a x^r].$$

Das Summenzeichen  $\Sigma$  erstreckt sich auf alle jene Glieder des Gleichungspolynomes, deren lineare Functionen  $a + r\xi$  für den speciellen Werth  $\xi_0$  den grössten Werth  $\eta_0$  erlangen, während die zweite durch  $\ominus$  angezeigte Summirung auf alle übrigen Glieder auszudehnen ist, deren lineare Functionen kleinere Werthe als  $\eta_0$  erhalten haben. Diese Trennung des Gleichungspolynomes  $P$  wird sich allsogleich als vortheilhaft erweisen. Ersetzt man nun hier jedes Glied  $H a^a x^r$  durch seinen obigen, in den ersten drei Gliedern entwickelten Werth, so erhält man:

$$\begin{aligned} P = & \Sigma [H h_0^r a^{a+r\xi_0}] & + & \ominus [H h_0^r a^{a+r\xi_0}] + \\ & + \Sigma [r \cdot H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1}] & + & \ominus [r \cdot H h_0^{r-1} h_1 a^{a+r\xi_0-\xi_0+\xi_1}] + \\ & + \Sigma [\binom{r}{2} H h_0^{r-2} h_1^2 a^{a+r\xi_0-2\xi_0+2\xi_1}] & + & \ominus [\binom{r}{2} H h_0^{r-2} h_1^2 a^{a+r\xi_0-2\xi_0+2\xi_1}] + \dots \end{aligned}$$



Da die Summirung  $\Sigma$  auf alle jene Werthe  $a, r$  auszudehnen ist, deren lineare Functionen  $a + r\xi_0$  einerlei und grössten Werth erlangen, für welchen wir die Bezeichnung  $\eta_0$  angenommen haben, so ist ersichtlich, dass in den mit dem Symbole  $\Sigma$  angedeuteten Summen  $a^{a+r\xi_0} = a^{\eta_0}$  sei und als eine Constante bezüglich der Summirung eben so wie  $h_1$  und  $a^{-\xi_0+\xi_1}$  vor dem Summenzeichen gesetzt werden könne. Hierdurch verwandelt sich obige Formel mit Rücksicht auf die Annahmen:

$$\Sigma[Hh_0^r] = 0 \text{ und } \Sigma[rHh_0^{r-1}] = 0$$

in die folgende:

$$P = \mathfrak{S}[Hh_0^r a^{a+r\xi_0}] + h_1 a^{\xi_1} \cdot \mathfrak{S}[rHh_0^{r-1} a^{a+(r-1)\xi_0}] + \\ + \Sigma\left[\binom{r}{2} Hh_0^{r-2}\right] h_1^2 a^{\eta_0-2(\xi_0-\xi_1)} + h_1^2 a^{-2(\xi_0-\xi_1)} \cdot \mathfrak{S}\left[\binom{r}{2} Hh_0^{r-2} a^{a+r\xi_0}\right] + \dots$$

Eine einfache Überlegung reicht nun hin, um einzusehen, dass die allerletzte Summe:

$$\mathfrak{S}\left[\binom{r}{2} Hh_0^{r-2} a^{a+r\xi_0}\right]$$

nur niedrigere Potenzen von  $a$  als  $a^{\eta_0}$  enthalten könne, indem die Summe  $\mathfrak{S}$  nur auf jene Werthe von  $a, r$  auszudehnen, deren lineare Functionen  $a + r\xi_0$  kleiner als  $\eta_0$  ausfallen.

Es kann demnach in dem Ausdrucke:

$$h_1^2 a^{-2(\xi_0-\xi_1)} \mathfrak{S}\left[\binom{r}{2} Hh_0^{r-2} a^{a+r\xi_0}\right]$$

niemals die Potenz  $a^{\eta_0-2(\xi_0-\xi_1)}$  erscheinen, während dieselbe allen Gliedern der unmittelbar vorangehenden Summe:

$$+ \Sigma\left[\binom{r}{2} Hh_0^{r-2}\right] h_1^2 a^{\eta_0-2(\xi_0-\xi_1)}$$

eigen ist. Die vierte Summe in obiger Formel enthält demnach nur Glieder von niedrigerer Ordnung im Vergleiche zur dritten und es ist sonach keinem Zweifel unterworfen, dass das höchste Glied des Substitutionsresultates nur aus den folgenden drei Bestandtheilen hervorgehen könne:

$$\mathfrak{S}[Hh_0^r a^{a+r\xi_0}] + h_1 a^{\xi_1} \cdot \mathfrak{S}[rHh_0^{r-1} a^{a+(r-1)\xi_0}] + \frac{1}{2} h_1^2 \cdot \Sigma[r(r-1)Hh_0^{r-2}] a^{\eta_0-2\xi_0+2\xi_1}$$

so lange, wie hier vorausgesetzt ist,  $\xi_1 < \xi_0$  ausfällt.

Die erste der hier erscheinenden Summen, nämlich  $\mathfrak{S}[Hh_0^r a^{a+r\xi_0}]$  lässt sich aus der Summe jener Glieder des Gleichungspolynoms  $P$ , welche unter dem Summenzeichen  $\mathfrak{S}$  vereinigt sind und denen die kleineren linearen Functionen entsprechen, d. h. aus  $\mathfrak{S}[Ha^a x^r]$  ableiten, wenn man  $x$  durch das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  ersetzt. In ähnlicher Weise geht die zweite Summe  $\mathfrak{S}[rHh_0^{r-1} a^{a+(r-1)\xi_0}]$  aus derselben Gliedersumme  $\mathfrak{S}[Ha^a x^r]$  hervor, wenn man sie zuvörderst einer einmaligen Differentiation nach  $x$  unterwirft und hierauf in dem ersten Differentialquotienten  $\mathfrak{S}[rHa^a x^{r-1}]$  abermals  $x$  durch das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  ersetzt. Endlich die letzte Summe  $\Sigma[r(r-1)Hh_0^{r-2}] a^{\eta_0-2\xi_0+2\xi_1}$  lässt sich aus der Gliedersumme  $\Sigma[Ha^a x^r]$ , denen die grössten linearen Functionen entsprechen, ableiten durch zweimalige Differentiation derselben nach  $x$  und nachherige Substitution von  $x = h_0 a^{\xi_0}$ . Man kann sich diese Substitutionen wirklich ausgeführt denken und es wird dann alsogleich möglich werden, das mit der höchsten Potenz von  $a$  versehene Glied einer jeden dieser Summen anzugeben. Wir wollen beziehungsweise mit:

$$\mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{S}_0}, \mathfrak{S}'_0 a^{\mathfrak{S}'_0} \text{ und } \mathfrak{S}''_0 a^{\mathfrak{S}''_0}$$

die mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Glieder bezeichnen, die aus den Polynomen:

$$\mathfrak{S}[Ha^a x^r], \mathfrak{S}[rHa^a x^{r-1}], \Sigma[r(r-1)Ha^a x^{r-2}]$$

für  $x = h_0 a^{\xi_0}$  hervorgehen; so kann offenbar das mit der höchsten Potenz von  $a$  versehene Glied des obigen Ausdruckes nur aus den drei Gliedern:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + h_1 \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0 + \xi_1} + \frac{1}{2} h_1^2 \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1}$$

hervorgehen, so lange nämlich  $\xi_1 < \xi_0$  ist. Das höchste Glied des für  $x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$  aus dem Gleichungspolynome  $P$  hervorgehenden Substitutionsresultates wird demnach auch aus diesen drei Gliedern zu suchen sein. Nun sollen die Grössen  $\xi_1$  und  $h_1$  dermassen gewählt werden, dass dieses höchste Glied verschwindet. Zu diesem Ende hat man in der bekannten Weise mit der Bestimmung von  $\xi_1$  zu beginnen, indem man Sorge trägt, dass zwei der hier erscheinenden Exponenten:  $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0' + \xi_1, \mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1$  gleiche und grösste Werthe erlangen. Man hat demnach die drei Ungleichungen:

$$\eta_1 > \mathfrak{A}_0, \eta_1 > \mathfrak{A}_0' + \xi_1, \eta_1 > \mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1,$$

aufzulösen und namentlich ihre Grenzwerte der zweiten Ordnung aufzusuchen. Diese sind die passenden Werthe von  $\xi_1$ . Hat man  $\xi_1$  gefunden, so unterliegt die Bestimmung von  $h_1$  keiner Schwierigkeit mehr, denn es sind dann  $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0' + \xi_1, \mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1$  bestimmte Zahlen und man kann unmittelbar die grössten derselben hervorheben, und demgemäss auch den Coëfficienten bilden, mit dem die höchste Potenz von  $a$  multipliziert erscheint. Dieser Coëfficient ist ein binomischer oder trinomischer,  $h_1$  enthaltender Ausdruck; setzt man denselben gleich Null und löst die erhaltene Gleichung des ersten oder zweiten Grades nach  $h_1$  auf, so ist jede von Null verschiedene Wurzel derselben ein geeigneter Werth von  $h_1$ . Auf solche Weise ist demnach die Bestimmung des Folgegliedes abgeschlossen. Man benimmt sich dabei genau so, wie wenn man die quadratische Gleichung:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} x' + \frac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''} x'^2 = 0$$

vorliegen, und die Anfangsglieder von  $x'$  zu bestimmen hätte.

Wir wollen hier nur noch die Bemerkung folgen lassen, dass die drei Glieder:  $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}, \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}$  wären erhalten worden, wenn man die Substitution  $x = h_0 a^{\xi_0}$  in das vollständige Gleichungspolynom  $P$  und seine beiden Differentialquotienten  $\frac{dP}{dx}$  und  $\frac{d^2P}{dx^2}$  ausgeführt und die höchsten Glieder dieser drei Substitutionsresultate genommen hätte, wie man sich sehr leicht zu überzeugen im Stande ist. Das letzte dieser drei Glieder  $\mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}$  ist übrigens ein vollkommen bestimmtes, welches auch ohne alle Substitution direct aus der Bestimmungsgleichung  $\Sigma[IIh_0^x] = 0$ , der bereits bekannten grössten Ordinate  $\eta_0$  und der ihr zugehörigen Abscisse  $\eta_0$  abgeleitet werden kann. Es ist nämlich, wie eine einfache Ansicht der früheren Formeln lehrt:

$$\mathfrak{A}_0'' = \eta_0 - 2\xi_0, \mathfrak{H}_0'' = \Sigma[x(x-1)IIh_0^{x-2}].$$

Die früher erwähnte quadratische Gleichung in  $x'$ , welche die Folgeglieder  $h_1 a^{\xi_1}$  liefert, kann demnach auch in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} x' + \frac{1}{2} \Sigma[x(x-1)IIh_0^{x-2}] a^{\eta_0 - 2\xi_0} x'^2 = 0.$$

Die Regel, um sie zu bilden, ist demnach folgende: Man substituirt, wenn die Bestimmungsgleichung  $\Sigma[IIh_0^x] = 0$  eine doppelte Wurzel  $h_0$  besitzt, das gefundene Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$  und seinen ersten Differentialquotienten  $\frac{dP}{dx}$ , ordne diese beiden Substitutionsresultate absteigend nach Potenzen von  $a$  und bestimme das höchste Glied  $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$  und

$\mathfrak{S}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}$  derselben. Hierauf unterwerfe man die Summe der bezeichneten Glieder  $\Sigma[H a^x]$  einer zweimaligen Differentiation nach  $x$  und substituire auch hier in dem gewonnenen Ausdrücke  $\Sigma[x(x-1)H a^{x-2}]$  das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  anstatt  $x$  und erhält so  $\Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}] a^{\eta_0 - 2\xi_0}$ . Diese drei Glieder  $\mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$ ,  $\mathfrak{S}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}$ ,  $\Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}] a^{\eta_0 - 2\xi_0}$  multipliziere man nun beziehungsweise mit 1,  $x$  und  $\frac{x^2}{2}$ , bilde die Summe dieser drei Producte und setze dieselbe gleich Null; so hat man die gesuchte quadratische Gleichung und die Anfangsglieder der absteigenden Entwicklung von  $x'$  sind die gesuchten Werthe des Folgliedes  $h_1 a^{\xi_1}$ .

Die an dieser quadratischen Gleichung vorgenommene Untersuchung der Anfangsglieder der absteigenden Entwicklung von  $x'$  kann offenbar zu mehreren verschiedenen Fällen führen, die wir hier näher erörtern wollen. Man hat nämlich mit der Auflösung der drei Ungleichungen:

$$\eta_1 > \mathfrak{A}_0, \eta_1 > \mathfrak{A}_0' + \xi_1, \eta_1 > \eta_0 - 2\xi_0 + 2\xi_1$$

zu beginnen, und die Grenzwerte der zweiten Ordnung dafür zu bestimmen. Eine solche Untersuchung kann hier, wo drei Ungleichungen vorliegen, entweder zwei oder nur einen einzigen solchen Grenzwert liefern. Liefert sie zwei solche Grenzwerte, so sind sie folgende:

$$\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0', \mathfrak{A}_0' - \eta_0 + 2\xi_0.$$

Ist hingegen ein einziger gewonnen worden, so hat er den Werth:

$$\frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0$$

Die Bestimmungsgleichungen für die zugehörigen  $h_1$ , welche besagen, dass bei jeder solchen Reduction das Resultat derselben ein Coefficient Null sein soll, sind:

1. für  $\xi_1 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$ ,  $\mathfrak{S}_0 + h_1 \mathfrak{S}_0' = 0$ , also  $h_1 = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_0'}$
2. für  $\xi_1 = \mathfrak{A}_0' - \eta_0 + 2\xi_0$ ,  $h_1 \mathfrak{S}_0' + \frac{h_1^2}{2} \Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}] = 0$  also  $h_1 = -\frac{2\mathfrak{S}_0'}{\Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}]}$
3. für  $\xi_1 = \frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0 < \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$ ,  $\mathfrak{S}_0 + \frac{h_1^2}{2} \Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}] = 0$ , also  $h_1 = \pm \sqrt{\frac{-\mathfrak{S}_0}{\Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}]}}$
4. für  $\xi_1 = \frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$ ,  $\mathfrak{S}_0 + h_1 \mathfrak{S}_0' + \frac{h_1^2}{2} \Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}] = 0$ .

Diese Gleichung liefert zwei in der Regel von einander verschiedene Werthe für  $h_1$ .

Nur wenn zufällig die Bedingungen:

$$\mathfrak{S}_0'^2 = 2\mathfrak{S}_0 \Sigma[x(x-1)H h_0^{x-2}] \text{ und } \frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$$

erfüllt sein sollten, treten zwei gleiche Wurzeln  $h_1$  auf. Wir ersehen hieraus, dass man auf solche Weise in der Regel zu zwei verschiedenen Folgliedern gelangen wird, die sich manehmal schon in dem Exponenten  $\xi_1$  unterscheiden, oder dasselbe  $\xi_1$  zwar gemeinschaftlich besitzen, aber durch die Werthe der Coefficienten  $h_1$  von einander verschieden sind. Nur selten werden die zuletzt angeführten Bedingungen erfüllt sein, welche zur Folge hätten, dass nicht zwei verschiedene Folglieder, sondern nur ein einziges solches erhalten würde. Das hier

dargestellte Verfahren wird daher in der Regel die Trennung jener zwei Auflösungen bewerkstelligen, die das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  gemeinschaftlich besitzen, und nur ausnahmsweise dieselbe noch auf später verschieben, falls sich auch das zweite Glied  $h_1 a^{\xi_1}$  als ein beiden gemeinschaftlich zukommendes erweisen würde.

Der weitere Gang der Approximation ist je nach den hier sich darstellenden Ergebnissen verschieden: Hat die Bestimmung des Gliedes  $h_1 a^{\xi_1}$  eine Trennung der zwei Wurzeln, die noch vereinigt waren, dadurch bewirkt, dass zwei verschiedene Werthe entweder für  $\xi_1$  oder erst für  $h_1$  sich ergaben; so wird die weitere Approximation von einem ähnlichen Verfahren abhängig sein, wie bereits früher für solche Auflösungen exponirt wurde, deren Anfangsglied ein isolirendes war. Dort reducirte sich die ganze Untersuchung nur darauf, den bereits bekannten Bestandtheil von  $x$  in das Gleichungspolynom zu substituiren, das Substitutionsresultat gehörig zu ordnen und nun das Anfangsglied desselben  $\mathfrak{S}_1 a^{\eta_1}$  mit einem bestimmten Factor  $\frac{a^{-a}}{\Sigma x H h_0 x^{-1}}$  zu multipliciren. Jetzt wird das Verfahren zur Bestimmung der übrigen Folgeglieder ähnlich sein. Nur der Factor ist erst näher zu bestimmen, da offenbar die frühere Form desselben nicht gelten kann, weil sie einen Nenner Null answeist. Erinnern wir uns jedoch, dass dieser Factor eigentlich der mit entgegengesetztem Zeichen genommene reciproke Werth des höchsten Gliedes jenes Substitutionsresultates sei, welches durch Substitution des bereits bekannten Bestandtheiles von  $x$  in den ersten Differentialquotienten  $\frac{dP}{dx}$  hervorgeht, so wird über den Werth dieses Factors kein weiterer Zweifel obwalten. Am einfachsten verfährt man, wenn man sich denselben wirklich durch Substitution zu verschaffen sucht. Es unterliegt jedoch auch keiner Schwierigkeit, denselben in Voraus anzugeben, nur ist seine Form in verschiedenen Fällen gleichfalls verschieden.

Ist man jedoch zufälliger Weise nur auf einen einzigen Werth  $\xi_1$  und gleiche Wurzelwerthe  $h_1$  gestossen, so dient dies als Beweis, dass die Trennung der Wurzeln in den zwei ersten Gliedern der Entwicklung noch nicht stattfindet, sondern diese beiden Auflösungen gemeinschaftlich zukommen. Man wird daher bei der Bestimmung der Folgeglieder  $h_2 a^{\xi_2}$  in gleicher Weise verfahren, wie eben jetzt gezeigt wurde, d. h. man wird den erhaltenen Bestandtheil  $x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$  in das Gleichungspolynom  $P$  und seinen ersten Differentialquotienten  $\frac{dP}{dx}$  setzen, und gelangt so zu den diesen Substitutionsresultaten entsprechenden höchsten Gliedern, die wir mit  $\mathfrak{S}_1 a^{\eta_1}$  und  $\mathfrak{S}_1' a^{\eta_1'}$  bezeichnen wollen, während der zweite Differentialquotient  $\frac{d^2 P}{dx^2}$  erwiesenermassen ein mit dem Anfangsgliede  $\Sigma [x(x-1) H h_0 x^{-2}] a^{\gamma_0 - 2\xi_0}$  beginnendes Substitutionsresultat liefert. Nun stellt man die quadratische Partialgleichung:

$$\mathfrak{S}_1 a^{\eta_1} + x' \mathfrak{S}_1' a^{\eta_1'} + \frac{x'^2}{2} \Sigma [x(x-1) H h_0 x^{-2}] a^{\gamma_0 - 2\xi_0} = 0$$

auf und bestimmt die Anfangsglieder von  $x'$  nach der bekannten Methode. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen die eben früher angeführten 4 verschiedenen Fälle zu. Sollte dies zur Trennung der Wurzeln noch nicht hinreichen, so muss man auf diesem Wege so lange fortfahren, bis entweder die Trennung erfolgt, oder bis das Vorhandensein gleicher Wurzeln erwiesen ist. Von demjenigen Gliede angefangen, bei dem die Trennung der Wurzeln erfolgt ist, ändert die Approximation ihre Natur, indem nun jede Auflösung isolirt zur Berechnung gelangt und an die Stelle der quadratischen Gleichung, Gleichungen des ersten Grades treten.

§. 10.

Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Falle zu, demjenigen nämlich, wo  $m$  Auflösungen dasselbe Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  gemeinschaftlich besitzen, d. h. wo  $h_0$  eine  $m$ -fache Wurzel der Bestimmungsgleichung:  $\Sigma[Hh_0^r] = 0$  ist. Es bestehen dann die identischen Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} \Sigma[Hh_0^r] &= 0 \\ \Sigma[x Hh_0^{r-1}] &= 0 \\ \Sigma[x(x-1) Hh_0^{r-2}] &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \Sigma[x(x-1)\dots(x-m+2) Hh_0^{r-m+1}] &= 0. \end{aligned}$$

Der Werth von

$$\Sigma[x(x-1)\dots(x-m+1) Hh_0^{r-m}]$$

ist jedoch von Null verschieden. In einem solchen Falle sind die früher angeführten Approximationsmethoden unzulässig, weil die ihnen zu Grunde gelegte Annahme und somit alle darauf gestützten Folgerungen ungültig sind. Wir werden jedoch durch ein analoges Verfahren zu den Folgegliedern gelangen.

Wir substituiren nämlich wieder den Ausdruck:

$$x_0 + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$$

anstatt  $x$  in die einzelnen Glieder des Gleichungspolynomes  $P$  und erhalten, weil zufolge der Relation  $\xi_1 < \xi_0$  die folgende Reihe für  $x^r$  gesetzt werden muss:

$$x^r = x_0^r + r x_0^{r-1} x' + \binom{r}{2} x_0^{r-2} x'^2 + \dots + \binom{r}{m-1} x_0^{r-m+1} x'^{m-1} + \binom{r}{m} x_0^{r-m} x'^m + \dots$$

aus einem jeden einzelnen Gliede  $H a^a x^r$  einen Ausdruck, wie der folgende:

$$H a^a x^r = H a^a x_0^r + r H a^a x_0^{r-1} x' + \binom{r}{2} H a^a x_0^{r-2} x'^2 + \dots + \binom{r}{m-1} H a^a x_0^{r-m+1} x'^{m-1} + \binom{r}{m} H a^a x_0^{r-m} x'^m + \dots$$

Hier bedeutet  $x_0$  das bekannte Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$ ,  $x'$  aber die Summe der Folgeglieder. Der für  $x^r$  in der angeführten Form gefundene Werth ist eine reine Function von  $a$ , nur erscheint derselbe hier noch nicht geordnet, weil jeder einzelne Bestandtheil in dieser Summe eine unendliche Reihe bedeutet. Das höchste Glied einer jeden solchen Reihe ist mit Leichtigkeit anzugeben. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} x_0^r &= h_0^r \cdot a^{r\xi_0} \\ r x_0^{r-1} x' &= r h_0^{r-1} h_1 \cdot a^{r\xi_0 - \xi_0 + \xi_1} + \dots \\ \binom{r}{2} x_0^{r-2} x'^2 &= \binom{r}{2} h_0^{r-2} h_1^2 \cdot a^{r\xi_0 - 2\xi_0 + 2\xi_1} + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{r}{m-1} x_0^{r-m+1} x'^{m-1} &= \binom{r}{m-1} h_0^{r-m+1} h_1^{m-1} \cdot a^{r\xi_0 - (m-1)(\xi_0 - \xi_1)} + \dots \\ \binom{r}{m} x_0^{r-m} x'^m &= \binom{r}{m} h_0^{r-m} h_1^m \cdot a^{r\xi_0 - m(\xi_0 - \xi_1)} + \dots \end{aligned}$$

und folglich bedeutet auch jeder Bestandtheil der für  $H a^a x^r$  gefundenen Summe eine unendliche Reihe, die in entwickelter Form folgende höchste Glieder besitzen:

$$\begin{aligned} H a^a x^r &= H h_0^r \cdot a^{a+r\xi_0} + \dots \\ &+ r H h_0^{r-1} h_1 \cdot a^{a+r\xi_0 - \xi_0 + \xi_1} + \dots \\ &+ \binom{r}{2} H h_0^{r-2} h_1^2 \cdot a^{a+r\xi_0 - 2\xi_0 + 2\xi_1} + \dots \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} &+ \binom{x}{m-1} H h_0^{x-m+1} h_1^{m-1} \cdot a^{a+x\xi_0-(m-1)(\xi_0-\xi_1)} + \dots \\ &+ \binom{x}{m} H h_0^{x-m} h_1^m \cdot a^{a+x\xi_0-m(\xi_0-\xi_1)} + \dots \end{aligned}$$

Wir sollten nun für jedes einzelne Glied des Gleichungspolynomes  $P$ , d. h. für alle dort erscheinenden Combinationen von  $a, x, H$  diese Ausdrücke aus der Form (9) ableiten, indem wir anstatt  $a, x, H$  die entsprechenden Werthe setzen, und hierauf die Summe aller dieser Ausdrücke bilden, und zwar vor der Hand nur ihrer höchsten Glieder. Da die Zahlwerthe der mit  $\xi_1$  und  $h_1$  bezeichneten Grössen noch unbestimmt gelassen sind, so werden sich diese Rechnungsentwickelungen, namentlich die dabei vorkommenden Reductionen nur insoferne ausführen lassen, als sie sich auf Glieder beziehen, welche in der Anzahl der Factoren  $h_1 a^{\xi_1}$  übereinstimmen. Wir werden also das Substitutionsresultat nicht in der vollkommen entwickelten Gestalt, als ein nur  $a$  enthaltendes und absteigend geordnetes Polynom darzustellen vermögen, wenn gleich nur das höchste Glied desselben gefordert wird; sondern werden es als ein  $x'$  oder  $h_1 a^{\xi_1}$  in gewissen Potenzen enthaltendes Polynom erhalten, und nur die mit diesen Potenzen von  $x'$  oder  $h_1 a^{\xi_1}$  multiplicirten,  $a$  enthaltenden und absteigend nach dieser Grösse geordneten Reihen in ihrem höchsten Gliede bestimmen können. Auf solche Weise gelangen wir zu einem  $a$  und  $h_1 a^{\xi_1}$  enthaltenden Ausdrucke, gebildet aus der Summe dieser höchsten Glieder, und wenn wir dieselbe gleich Null setzen, so erhalten wir eine Partialgleichung, die zu dem verlangten Gliede  $h_1 a^{\xi_1}$  führt. Wir werden bei der Substitution von  $x = x_0 + x'$  in die einzelnen Glieder  $H a^a x^x$  des Gleichungspolynomes in einer analogen Weise verfahren, wie früher; wir werden nämlich diese Glieder in zwei Gruppen theilen, und die Substitution in zwei Momenten vollführen, indem wir zuerst in die Summe der Glieder der ersten, dann in die der zweiten Gruppe diesen Werth von  $x$  einführen. Diese Eintheilung der Glieder des Gleichungspolynomes  $P$  in zwei Gruppen bewerkstelligen wir nach den Werthen, welche die ihnen zugehörigen linearen Functionen  $a + x\xi$  für  $\xi_0$  erlangen. Wir zählen nämlich zur ersten Gruppe alle jene Glieder, deren lineare Functionen  $a + x\xi$  für  $\xi_0$  den grössten Werth  $\gamma_0$  erlangen, alle übrigen aber zur zweiten Gruppe. Diese Trennung in zwei Gruppen haben wir nicht erst einzuleiten, denn sie ist schon bei der vorhergegangenen Bestimmung von  $\xi_0$  erfolgt, und aus der Summe eben dieser Glieder der ersten Gruppe ist die bekannte Bestimmungsgleichung für  $h_0$ :  $\Sigma[Hh^x] = 0$  gebildet. Substituiren wir nun in die Summe dieser Glieder der ersten Gruppe  $\Sigma[H a^a x^x]$  anstatt  $x$  den Ausdruck  $x_0 + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$ ; so ergibt sich ein Substitutionsresultat von folgender Form:

$$(10) \quad \begin{aligned} \Sigma[H a^a x^x] &= \Sigma[H h_0^x] a^{\gamma_0} + x' a^{\gamma_0-\xi_0} \Sigma[x H h_0^{x-1}] + \frac{1}{2} x'^2 \cdot a^{\gamma_0-2\xi_0} \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] + \dots \\ &+ \frac{1}{1 \dots (m-1)} x'^{m-1} a^{\gamma_0-(m-1)\xi_0} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+2) H h_0^{x-m+1}] + \dots \\ &+ \frac{1}{1 \dots m} x'^m a^{\gamma_0-m\xi_0} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+1) H h_0^{x-m}] + \dots \\ &= \Sigma[H h_0^x] a^{\gamma_0} + \\ &+ h_1 \cdot a^{\gamma_0-\xi_0+\xi_1} \Sigma[x H h_0^{x-1}] + \dots \\ &+ \frac{h_1^2}{2} \cdot a^{\gamma_0-2\xi_0+2\xi_1} \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{h_1^{m-1}}{1 \dots (m-1)} a^{\gamma_0-(m-1)(\xi_0-\xi_1)} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+2) H h_0^{x-m+1}] + \dots \\ &+ \frac{h_1^m}{1 \dots m} a^{\gamma_0-m(\xi_0-\xi_1)} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+1) H h_0^{x-m}] + \dots \end{aligned}$$

Der gemachten Annahme zufolge,  $h_0$  sei eine  $m$ -fache Wurzel der Bestimmungsgleichung  $\Sigma[Hh^x] = 0$  fallen die in (8) aufgeführten Summen gleich Null aus und nur die letzte derselben besitzt einen von Null verschiedenen Werth. Wir sehen hieraus, dass in diesem Ausdrucke (10) die Bestandtheile:

$$a^{\xi_0} \Sigma[HH_0^x], x' a^{\xi_0 - \xi_1} \Sigma[x HH_0^{x-1}], \frac{1}{2} x'^2 a^{\xi_0 - 2\xi_1} \Sigma[x(x-1) HH_0^{x-2}], \dots$$

$$\frac{1}{1 \dots (m-1)} x'^{m-1} a^{\xi_0 - (m-1)\xi_1} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+2) HH_0^{x-m+1}]$$

verschwinden und nur der letzte der hier aufgeführten, nämlich:

$$\frac{1}{1 \dots m} x'^m a^{\xi_0 - m\xi_1} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+1) HH_0^{x-m}]$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so zwar, dass die in der Summe von Gliedern:  $\Sigma[Ha^x x^x]$  ausgeführte Substitution als höchstes Glied

$$(11) \quad \frac{h_0^m}{1 \dots m} a^{\xi_0 - m(\xi_0 - \xi_1)} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+1) HH_0^{x-m}]$$

liefert. Alle übrigen hier nicht aufgeführten Bestandtheile sind gegen dieses Glied von niedrigerer Ordnung nach  $a$ , denn die einen gehen aus Bestandtheilen:

$$\frac{1}{1 \dots p} x'^p a^{\xi_0 - p\xi_1} \Sigma[x(x-1) \dots (x-p+1) HH_0^{x-p}]$$

hervor, welche einen  $m$  übersteigenden Werth von  $p$  aufweisen, die anderen aber entspringen zwar aus

$$\frac{1}{1 \dots m} x'^m a^{\xi_0 - m\xi_1} \Sigma[x(x-1) \dots (x-m+1) HH_0^{x-m}]$$

enthalten aber anstatt des höchsten Gliedes von  $x'^m$  die späteren von niedriger Ordnung. Die ersteren erreichen höchstens die Gradzahl:

$$\eta_0 + p\xi_1 - p\xi_0 < \eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1)$$

die letzteren aber höchstens nur die Gradzahl:

$$\eta_0 - m\xi_0 + (m-1)\xi_1 + \xi_2 < \eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1).$$

Substituiren wir nun auch den Werth  $x = x_0 + x'$  in die übrigen Glieder des Gleichungspolynomes  $P$ , die in der Summe  $\Sigma[Ha^x x^x]$  nicht einbegriffen sind, nämlich in die Gliedersumme  $\mathfrak{S}[Ha^x x^x]$ . Über den Erfolg einer solchen Substitution lässt sich im Vorhinein nichts bestimmen; man muss daher diese Substitution und alle dabei möglichen Reductionen wirklich durchführen. Man gelangt auf solche Weise jedenfalls zu einem Ausdrucke von folgender Gestalt:

$$\mathfrak{S}_0 a^{\eta_0} + x' \mathfrak{S}'_0 a^{\eta'_0} + x'^2 \mathfrak{S}''_0 a^{\eta''_0} + \dots + x'^{m-1} \mathfrak{S}_0^{(m-1)} a^{\eta_0^{(m-1)}} + \dots$$

weil sich nur jene Glieder reduciren lassen, welche dieselbe Potenz von  $x'$  als Factor besitzen, da in  $x'$  die Grössen  $h$  und  $\xi$  noch unbestimmte Buchstabengrössen anzeigen. Hier bedeuten:

$$\mathfrak{S}_0 a^{\eta_0}, \mathfrak{S}'_0 a^{\eta'_0}, \mathfrak{S}''_0 a^{\eta''_0}, \dots, \mathfrak{S}_0^{(m-1)} a^{\eta_0^{(m-1)}} \dots$$

die mit der höchsten Potenz von  $a$  verknüpften und von Null verschiedenen Glieder der für  $x = x_0$  aus

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{1}{(m-1)!}, \frac{d^{m-1}P}{dx^{m-1}} \dots$$

hervorgehenden Substitutionsresultate.

Da nun die höchsten Glieder von  $x', x'^2, \dots, x'^m, \dots$  bezüglich:  $h_1 a^{\xi_1}, h_1^2 a^{2\xi_1}, \dots, h_1^m a^{m\xi_1}, \dots$  sind, so kann das höchste Glied des aus den Gliedern der zweiten Gruppe hervorgehenden Substitutionsresultates sich nur aus den folgenden zusammensetzen:

$$(12) \quad \mathfrak{S}_0 a^{\eta_0}, h_1 \mathfrak{S}_0' a^{\eta_0 + \xi_1}, h_1^2 \mathfrak{S}_0'' a^{\eta_0 + 2\xi_1}, \dots, h_1^{m-1} \mathfrak{S}_0^{(m-1)} a^{\eta_0 + (m-1)\xi_1}$$

Hier sind absichtlich nur  $m$  solche Glieder aufgeschrieben, hingegen alle übrigen, welche eine höhere Potenz von  $h_1 a^{\xi_1}$  als die  $(m-1)^{te}$  enthalten, weggelassen. Der Grund und die Berechtigung hiezu liegt in dem Umstande, dass erwiesenermassen alle diese weggelassenen Glieder von niederer Ordnung nach  $a$  sind. In der That wäre das nächste derselben  $h_1^m \mathfrak{S}_1^{(m)} a^{\eta_0 + m\xi_1}$ . Die erste Gruppe liefert aber, wie wir eben früher gezeigt haben, ein mit derselben  $m$ ten Potenz von  $h_1 a^{\xi_1}$  verknüpftes Glied (11). Vergleicht man die Exponenten von  $a$  in diesen beiden Gliedern, nämlich:

$$\mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1 \quad \text{und} \quad \eta_0 - m\xi_0 + m\xi_1,$$

so gelangt man mittelst der Relation:

$$(13) \quad \mathfrak{A}_0^{(m)} < \eta_0 - m\xi_0,$$

deren Gültigkeit wir sogleich erweisen werden, zu der anderen:

$$(14) \quad \mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1 < \eta_0 - m\xi_0 + m\xi_1$$

und gewinnt dadurch die Überzeugung, dass das aus der zweiten Gruppe gewonnene Glied:  $h_1^m \mathfrak{S}_0^{(m)} a^{\eta_0 + m\xi_1}$  gegen das aus der ersten Gruppe entspringende (11) von niedrigerer Ordnung sei. Die Richtigkeit der Relation (13) lässt sich auf folgende Weise darthun.  $\mathfrak{A}_0^{(m)}$  ist nämlich durch directe Substitution von  $x = h_0 a^{\xi_0}$  in die  $m$ mal nach  $x$  differentiierten Glieder der zweiten Gruppe hervorgegangen, und bedeutet eben den höchsten dabei erscheinenden Exponenten von  $a$ . Substituirt man  $x = h_0 a^{\xi_0}$  in diese Summe von Gliedern:

$$x(x-1) \dots (x-m+1) H a^a x^{x-m},$$

so besitzt  $\mathfrak{A}_0^{(m)}$  jedenfalls die Gestalt:

$$\mathfrak{A}_0^{(m)} = a + x\xi_0 - m\xi_0$$

und da alle diesen Gliedern entsprechenden Werthe von  $a + x\xi_0$  kleiner sind als  $\eta_0$ , so ist offenbar:

$$\mathfrak{A}_0^{(m)} < \eta_0 - m\xi_0;$$

was zu beweisen war.

Von den übrigen hier ausser Acht gelassenen Gliedern von der Form  $h_1^p \mathfrak{S}_0^{(p)} a^{\eta_0 + p\xi_1}$ , die eine höhere Potenz von  $h_1 a^{\xi_1}$  in sich schliessen, für die also  $p > m$  ist, lässt sich diese Eigenschaft gleichfalls erweisen, wenn man sich an die Relation  $\xi_1 < \xi_0$  erinnert, denn hier ist dann  $p(\xi_0 - \xi_1) > m(\xi_0 - \xi_1)$  und da für alle Glieder der zweiten Gruppe  $\eta_0 > a + x\xi_0$  besteht; so folgt hieraus unmittelbar:

$$(15) \quad \eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1) > a + x\xi_0 - p(\xi_0 - \xi_1).$$

Nun ist aber  $\mathfrak{A}_0^{(p)}$ , wie wir früher erwähnt haben, der Exponent von  $a$  im höchsten Gliede des Substitutionsresultates, welches aus der Summe der  $p$ mal nach  $x$  differentiierten Glieder



der zweiten Gruppe abgeleitet wird durch Substitution von  $x_0$  anstatt  $x$ , und demnach jedenfalls ein Ausdruck von folgender Form:

$$\mathfrak{A}_0^{(p)} = a + r \xi_0 - p \xi_1,$$

wo  $a$  und  $r$  eine Combination von Werthen darstellt, die einem Gliede der zweiten Gruppe angehören. Setzen wir diesen Werth in die (15), so ergibt sich die Relation:

$$\eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1) > \mathfrak{A}_0^{(p)} + p \xi_1,$$

welche besagt, dass der Exponent von  $a$  im Gliede  $h_1^p \mathfrak{S}_0^{(p)} a^{\mathfrak{A}_0^{(p)} + p \xi_1}$  kleiner sei, als in

$$\frac{h_1^m}{1 \dots m} a^{\eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1)} \Sigma [r(r-1) \dots (r-m+1) H h_0^{r-m}].$$

Es ist somit dargethan, dass diese Glieder alle nach  $a$  von niedrigerer Ordnung sind, und daher bei der Bildung des höchsten Gliedes unberücksichtigt bleiben können.

Fassen wir nun im Kurzen die Ergebnisse unserer Untersuchungen zusammen, so erschen wir, nachdem im Substitutionsresultate  $P$  das allerhöchste oder vielleicht auch eine Reihe der nächstfolgenden höchsten Glieder durch die zweckmässige Wahl von  $\xi_0$  und  $h_0$  sich auf Null reducirt hat, dass das nunmehr höchste Glied desselben nur aus folgenden  $m$  Gliedern entstehen könne:

$$\mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, h_1 \mathfrak{S}_0' a^{\mathfrak{A}_0' + \xi_1}, h_1^2 \mathfrak{S}_0'' a^{\mathfrak{A}_0'' + 2 \xi_1}, \dots, h_1^{m-1} \mathfrak{S}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1) \xi_1},$$

$$\frac{1}{1 \dots m} h_1^m \Sigma [r(r-1) \dots (r-m+1) H h_0^{r-m} a^{\eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1)}].$$

Die  $m$  zuerst aufgeführten Glieder werden durch directe Substitution von  $x = h_0 a^{\xi_0}$  erhalten und gehen aus den Gliedern der zweiten Gruppe  $\mathfrak{S}[H a^x x^r]$  und ihren successiven nach  $x$  genommenen Differentialquotienten:  $\mathfrak{S}[r H a^x x^{r-1}]$ ,  $\mathfrak{S}[r(r-1) H a^x x^{r-2}]$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{S}[r(r-1)(r-2) \dots (r-m+2) H a^x x^{r-m+1}]$  hervor; das zuletzt angeführte aber lässt sich ohne alle Substitution bloß nur aus der Bestimmungsgleichung für  $h_0$  ableiten auf eine unmittelbare ersichtliche Weise und gehört den Gliedern der ersten Gruppe  $\Sigma[H a^x x^r]$  an. Es handelt sich nun darum, für  $\xi_1$  und  $h_1$  die entsprechenden Zahlwerthe aufzusuchen. Diese Werthe haben den Zweck zu erfüllen, das höchste Glied mit einem Coëfficienten Null zu versehen. Zu diesen Werthen führt eine bekannte Untersuchungsweise, die darauf beruht, ein System linearer Ungleichungen aufzustellen und dann die Grenzwerte der zweiten Ordnung für die demselben entsprechenden Auflösungen aufzusuchen. Dieses System von  $m+1$  Ungleichungen ist folgendes:

$$\begin{aligned} \eta_1 &> \mathfrak{A}_0 \\ \eta_1 &> \mathfrak{A}_0' + \xi_1 \\ \eta_1 &> \mathfrak{A}_0'' + 2 \xi_1 \\ \eta_1 &> \mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1) \xi_1 \\ \eta_1 &> \eta_0 - m \xi_0 + m \xi_1. \end{aligned}$$

Das Resultat einer solchen Bestimmung der Grenzwerte zweiter Ordnung kann sehr verschiedene Eigenthümlichkeiten darbieten, die für die weitere Approximation von Einfluss sind. Die Anzahl der Grenzwerte kann nämlich von Eins anfangen alle möglichen ganzen Werthe bis  $m$

annehmen. Einem jeden einzelnen aufgefundenen Grenzwerthe  $\xi_1$  entspricht eine gewisse Bestimmungsgleichung, die die zugehörigen Werthe des Coëfficienten  $h_1$  liefert. Diese Bestimmungsgleichung lässt sich ohne alle Schwierigkeit ableiten aus denjenigen Gliedern der oberwähnten Reihe, welchen die grössten linearen Functionen entsprechen, und kann dem ersten oder auch einem höheren Grade angehören. Sie liefert daher zu dem einen Werthe  $\xi_1$  entweder nur einen oder mehrere zugehörige  $h_1$ . Diese Gleichung in  $h_1$  kann ausnahmsweise gleiche Wurzeln aufweisen, und dies wird immer als ein Beweis angesehen werden können, dass die Glieder  $h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$  zweien oder mehreren Auflösungen  $x$  gemeinschaftlich zukommen. Diese Auflösungen unterscheiden sich dann von einander in den zwei ersten Gliedern der Entwicklung nicht, und wenn ihre Trennung bewerkstelligt werden sollte, so bedarf es noch der Bestimmung der dritten, vielleicht auch noch mehrerer Glieder der Entwicklung; ja es kann sich treffen, dass diese Trennung niemals erfolgt, weil diese Auflösungen überhaupt ganz gleich sein können. Es ist wohl leicht einzusehen, dass die Anzahl der auf solche Weise gewonnenen Glieder  $h_1 a^{\xi_1}$  gleichkommt der Anzahl  $m$  der gleichen Wurzeln  $h_0$ , denn die Bestimmung derselben ist eigentlich abhängig von der Auffindung der Anfangsglieder einer Gleichung von folgender Form:

$$(16) \quad \mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{S}_0} + \mathfrak{S}_0' a^{\mathfrak{S}_0'} \cdot x' + \mathfrak{S}_0'' a^{\mathfrak{S}_0''} \cdot x'^2 + \dots + \mathfrak{S}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{S}_0^{(m-1)}} \cdot x'^{m-1} + \\ + \frac{1}{1 \dots m} \Sigma [x(x-1) \dots (x-m+1)] H h_0^{x-m} \cdot a^{\mathfrak{S}_0 - m \xi_0} \cdot x^m = 0$$

welche die neue Unbekannte  $x'$  enthält, und dem  $m^{\text{ten}}$  Grade angehört. Eine solche Gleichung liefert stets entweder  $m$  von einander verschiedene Anfangsglieder  $h_1 a^{\xi_1}$  für  $x'$  oder, wenn sie deren weniger liefert, so besitzen die Bestimmungsgleichungen für den Coëfficienten  $h_1$  gleiche Wurzeln, und zwar deren so viele, dass sie die Anzahl  $m$  wieder vervollständigen. Wir sehen also, dass wenn bei einem Anfangsgliede sich der Coëfficient  $h_0$  als eine  $m$ fache Wurzel der Bestimmungsgleichung herausstellt, die weitere Approximation entweder hierzu  $m$  verschiedene Folgeglieder liefert, oder deren weniger. Ersteres ist der gewöhnlichere, das zweite jedoch ein specieller Fall, begründet in dem Auftreten gleicher Wurzeln  $h_1$ . Die Summe der Gradzahlen aller Bestimmungsgleichungen für  $h_1$  ist aber stets  $m$ .

## §. 11.

Die bisherigen Untersuchungen haben nur die Bestimmung des Folgegliedes  $h_1 a^{\xi_1}$  zum Gegenstande gehabt. Die gewonnenen Resultate haben jedoch eine allgemeine Giltigkeit, weil sie auch zur Bestimmung eines beliebigen Folgegliedes  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  dienen, wenn die Summe der vorhergehenden Entwicklungsglieder, nämlich:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots + h_r a^{\xi_r}$$

bekannt ist. Es ist daher nothwendig, diese Untersuchungen nun auch in ihrer vollen Allgemeinheit zu geben, nachdem sie bisher nur in einem speciellen Falle eingeleitet wurden.

Wenn die Gliedersumme  $x_r$  den Beginn der auf  $r+1$  Glieder ausgedehnten Entwicklung einer Wurzel  $x$  darstellt, so wird sie sich offenbar durch Hinzufügen der Reihe:

$$x' = h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \dots$$

in den wirklichen Wurzelwerth  $x = x_r + x'$  verwandeln lassen, wobei die Exponenten  $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \xi_{r+3}, \dots$  sämtlich kleiner sind als  $\xi_r$ . Die Gleichung  $P = 0$  wird daher für  $x = x_r + x'$  erfüllt werden. Nun ist:

$$x^x = x_r^x + x x_r^{x-1} x' + \binom{x}{2} x_r^{x-2} x'^2 + \dots + \binom{x}{p} x_r^{x-p} x'^p + \dots$$

und folglich:

$$(17) \quad 0 = P = S[H a^a x_r^x] + x' S[x H a^a x_r^{x-1}] + \frac{x'^2}{2} S[x(x-1) H a^a x_r^{x-2}] + \dots + \frac{x'^p}{p} S[x(x-1)\dots(x-p+1) H a^a x_r^{x-p}] + \dots$$

Die darin erscheinenden Summen:

$$S[H a^a x_r^x], S[x H a^a x_r^{x-1}], S[x(x-1) H a^a x_r^{x-2}], \dots, S[x(x-1)\dots(x-p+1) H a^a x_r^{x-p}] \dots$$

sind die für  $x = x_r$  aus den Polynomen:  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \frac{d^3P}{dx^3}, \dots$  hervorgehenden Substitutionsresultate. Setzen wir voraus, dass die nach Durchführung aller möglichen Reductionen übrig bleibenden und von Null verschiedenen höchsten Glieder derselben bezüglich mit  $\mathfrak{H}_r a^{2r}, \mathfrak{H}'_r a^{2r'}, \mathfrak{H}''_r a^{2r''}, \dots, \mathfrak{H}^{(p)}_r a^{2r^{(p)}} \dots$  bezeichnet werden; so sind die höchsten Glieder der einzelnen Bestandtheile in (17):

$$(18) \quad \mathfrak{H}_r a^{2r}, h_{r+1} \mathfrak{H}'_r a^{2r'+\xi_{r+1}}, \frac{1}{2} h_{r+1}^2 \mathfrak{H}''_r a^{2r''+2\xi_{r+1}}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} h_{r+1}^p \mathfrak{H}^{(p)}_r a^{2r^{(p)}+p\xi_{r+1}} \dots$$

Der Ausdruck (17) stellt das Substitutionsresultat eines Wurzelwerthes dar und muss sich demnach identisch auf Null reduciren. Dies wird nur dann möglich sein, wenn von den aufgeführten höchsten Gliedern (18) zwei oder mehrere mit derselben und höchsten Potenz von  $a$  versehen sind, so zwar, dass eine Reduction und in Folge der zweckmässigen Wahl des  $h_{r+1}$  ein gänzliches Verschwinden derselben erfolgt. Es wird demnach  $\xi_{r+1}$  und  $h_{r+1}$  gewisse Bedingungen zu erfüllen haben, ähnlich denjenigen, die wir bei der Bestimmung des Anfangsgliedes  $h_0 a^{\xi_0}$  weitläufig erörtert haben. Man hat nämlich das System von Ungleichungen:

$$(19) \quad \begin{aligned} \eta_{r+1} &> \mathfrak{H}_r \\ \eta_{r+1} &> \mathfrak{H}'_r + \xi_{r+1} \\ \eta_{r+1} &> \mathfrak{H}''_r + 2 \xi_{r+1} \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_{r+1} &> \mathfrak{H}^{(p)}_r + p \xi_{r+1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

aufzustellen und für  $\xi_{r+1}$  die Grenzwerte der zweiten Ordnung aufzusuchen.

Man hat aber nicht nötig, alle diese Grenzwerte zu suchen, weil von ihnen nur diejenigen brauchbar erscheinen, welche kleiner als  $\xi_r$  ausfallen und demnach einen Werth von  $\xi_{r+1}$  darstellen können. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, statt des Systems von Ungleichungen (19) nur eine Abtheilung derselben in Rechnung zu ziehen, diejenige nämlich, welche die unter  $\xi_r$  liegenden Grenzwerte liefert. Da die Ungleichungen in (19) aufsteigend nach den Coëfficienten von  $\xi_{r+1}$  geordnet erscheinen, so werden die Grenzwerte gleichfalls nur in aufsteigender Reihenfolge erhalten und es wird demnach die für uns wichtige Abtheilung von Ungleichungen, welche die unter  $\xi_r$  liegenden Werthe liefert, aus einer Gruppe der ersteren in (19) zusammengesetzt sein.

Wir wollen sie mit:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & \eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r \\
 & \eta_{r+1} > \mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r^{(p-1)} + (p-1)\xi_{r+1} \\
 & \eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1}
 \end{aligned}$$

andeuten. Diese Abtheilung von Ungleichungen wird sich beim Bestimmen der Grenzwerte der zweiten Ordnung von selbst abgrenzen, weil zufolge der Ordnungsweise der linearen Functionen die Grenzwerte in aufsteigender Reihenfolge erhalten werden. Man wird nämlich zuerst die unter  $\xi_r$  liegenden Grenzwerte finden, und endlich zum grössten unter ihnen gelangen. Auf diesen folgen die dem  $\xi_r$  gleichen oder grösseren Grenzwerte. Ist man zu einem solchen gelangt, so schliesst man die Untersuchung in der Überzeugung, alle unter  $\xi_r$  liegenden Grenzwerte erschöpft zu haben.

Denken wir uns nun unter  $\xi_{r+1}$  einen bestimmten jener unter  $\xi_r$  liegenden Grenzwerte der zweiten Ordnung für das System (19) oder (20), ferner unter:

$$(21) \quad \eta_{r+1} = \mathfrak{A}_r^{(q)} + q\xi_{r+1} \dots \dots \dots = \mathfrak{A}_r^{(q+s)} + (q+s)\xi_{r+1}$$

diejenigen linearen Functionen, welche die gleichen und grössten Werthe erlangen, wobei also der Natur der Sache nach  $q+s \leq p$  ausfällt, so ist hiemit die Reihe von Gliedern:

$$\frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots q} \cdot a^{\mathfrak{A}_r^{(q)} + q\xi_{r+1}} \dots \dots \dots \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s)} \cdot a^{\mathfrak{A}_r^{(q+s)} + (q+s)\xi_{r+1}}$$

bezeichnet, welche alle dieselbe höchste Potenz  $a^{\eta_{r+1}}$  enthalten und bei der Summirung sich in ein einziges

$$\left[ \frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots q} + \dots \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s)} \right] a^{\eta_{r+1}}$$

zusammenziehen lassen. Eine Reduction desselben auf Null, d. h. ein Nullwerden seines Coefficienten ist demnach an die Bedingungsgleichung:

$$(22) \quad \frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots q} + \dots \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s)} = 0$$

gebunden, aus welcher die Werthe von  $h_{r+1}$  hervorgehen. Diese Gleichung ist ganz und rational, weil  $q$  und  $s$ , wie in (18) ersichtlich ist, ganze und positive Zahlwerthe bedeuten. Sie lässt demnach, wenn man von dem Werthe  $h_{r+1} = 0$  absieht, in der Regel  $s$ , mindestens aber einen einzigen Werth von  $h_{r+1}$  zu.

Stellen wir uns nun unter  $h_{r+1}$  einen bestimmten dieser Werthe vor, der von Null verschieden und eine Auflösung der (22) ist und, um den allgemeinsten Fall zu berücksichtigen, eine  $t$ mal wiederholte Wurzel derselben darstellt, wobei, wie sich von selbst versteht,  $t < s$  ist; so ist dann für diesen bestimmten Zahlwerth von  $h_{r+1}$  identisch:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots q} + \dots \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s)} = 0 \\
 & \frac{h_{r+1}^{q-1} \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots (q-1)} + \dots \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-1} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s-1)} = 0 \\
 & \frac{h_{r+1}^{q-2} \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots (q-2)} + \dots \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-2} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s-2)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{h_{r+1}q^{-t+1}\mathfrak{S}_r(q)}{\dots(q-t+1)} + \dots + \frac{h_{r+1}q^{s-t+1}\mathfrak{S}_r(q+s)}{1\dots(q+s-t+1)} = 0$$

aber

$$\frac{h_{r+1}q^{-t}\mathfrak{S}_r(q)}{1\dots(q-t)} + \dots + \frac{h_{r+1}q^{s-t}\mathfrak{S}_r(q+s)}{1\dots(q+s-t)}$$

von Null verschieden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerken wir hier, dass eigentlich statt des Bruches  $\frac{1}{1\dots(q-t)}$  der andere  $\frac{q(q-1)\dots(q-t)}{1\dots q}$  zu setzen wäre, so zwar, dass die hier gebrauchte Schreibweise nur für  $q > t$  richtig ist, für  $q = t$  jedoch der Bruch  $\frac{1}{1\dots(q-t)}$  und jeder ihm ähnliche durch Eins, für  $q < t$  aber durch Null zu ersetzen kommt.

Substituiren wir also anstatt  $x$  den Werth  $x_r + h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$  in die Polynome:  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^tP}{dx^t}$ . Nun ist aber:

$$\begin{aligned} P &= S[H a^{\xi} x^r] \\ \frac{dP}{dx} &= S[r H a^{\xi} x^{r-1}] \\ \frac{d^2P}{dx^2} &= S[r(r-1) H a^{\xi} x^{r-2}] \\ &\dots \\ \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} &= S[r(r-1)\dots(r-t+2) H a^{\xi} x^{r-t+1}] \\ \frac{d^tP}{dx^t} &= S[r(r-1)\dots(r-t+1) H a^{\xi} x^{r-t}] \end{aligned}$$

und

$$x^n = x_r^n + n x_r^{n-1} h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + \binom{n}{2} x_r^{n-2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} + \dots$$

folglich:

$$(24) \quad P = S[H a^{\xi} x_r^r] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[r H a^{\xi} x_r^{r-1}] + \frac{1}{2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} S[r(r-1) H a^{\xi} x_r^{r-2}] + \dots + \frac{1}{1\dots p} h_{r+1}^p a^{p\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-p+1) H a^{\xi} x_r^{r-p}] + \dots$$

$$(25) \quad \frac{dP}{dx} = S[r H a^{\xi} x_r^{r-1}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[r(r-1) H a^{\xi} x_r^{r-2}] + \frac{1}{2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} S[r(r-1)(r-2) H a^{\xi} x_r^{r-3}] + \dots + \frac{1}{1\dots(p-1)} h_{r+1}^{p-1} a^{(p-1)\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-p+1) H a^{\xi} x_r^{r-p}] + \dots$$

$$(26) \quad \frac{d^2P}{dx^2} = S[r(r-1) H a^{\xi} x_r^{r-2}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[r(r-1)(r-2) H a^{\xi} x_r^{r-3}] + \frac{1}{2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} S[r(r-1)(r-2)(r-3) H a^{\xi} x_r^{r-4}] + \dots + \frac{1}{1\dots(p-2)} h_{r+1}^{p-2} a^{(p-2)\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-p+1) H a^{\xi} x_r^{r-p}] + \dots$$

$$(27) \quad \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} = S[r(r-1)\dots(r-t+2) H a^{\xi} x_r^{r-t+1}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-t+1) H a^{\xi} x_r^{r-t}] + \dots + \frac{1}{1\dots(p-t+1)} h_{r+1}^{p-t+1} a^{(p-t+1)\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-p+1) H a^{\xi} x_r^{r-p}] + \dots$$

$$(28) \quad \frac{d^tP}{dx^t} = S[r(r-1)\dots(r-t+1) H a^{\xi} x_r^{r-t}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-t) H a^{\xi} x_r^{r-t-1}] + \dots + \frac{1}{1\dots(p-t)} h_{r+1}^{p-t} a^{(p-t)\xi_{r+1}} S[r(r-1)\dots(r-p+1) H a^{\xi} x_r^{r-p}] + \dots$$

Da vorausgesetztmassen die höchsten Glieder der hier erscheinenden Ausdrücke:

$$S[H a^{\xi} x_r^r], S[r H a^{\xi} x_r^{r-1}], S[r(r-1) H a^{\xi} x_r^{r-2}], \dots, S[r(r-1)\dots(r-t+1) H a^{\xi} x_r^{r-t}]$$

mit:

$$\mathfrak{S}_r a^{\mathfrak{A}_r}, \mathfrak{S}_r' a^{\mathfrak{A}_r'}, \mathfrak{S}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''}, \dots, \mathfrak{S}_r^{(t)} a^{\mathfrak{A}_r^{(t)}},$$

bezeichnet wurden, so hat man als Ordnungszahlen der einzelnen Bestandtheile

$$(29) \quad \text{in (24): } \mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r'' + 2\xi_{r+1}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1}, \dots$$

$$(30) \quad \text{in (25): } \mathfrak{A}_r', \mathfrak{A}_r'' + \xi_{r+1}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-1)\xi_{r+1}, \dots$$

$$(31) \quad \text{in (26): } \mathfrak{A}_r'', \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-2)\xi_{r+1}, \dots$$

$$(32) \quad \text{in (27): } \mathfrak{A}_r^{(t-1)}, \mathfrak{A}_r^{(t)} + \xi_{r+1}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t+1)\xi_{r+1}, \dots$$

$$(33) \quad \text{in (28): } \mathfrak{A}_r', \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t)\xi_{r+1}, \dots$$

Unter ihnen sind die grössten Werthe, wie allsogleich erläutert werden soll:

$$(34) \quad \begin{aligned} &\text{für (24)} \dots \eta_{r+1} \\ &\text{für (25)} \dots \eta_{r+1} - \xi_{r+1} \\ &\text{für (26)} \dots \eta_{r+1} - 2\xi_{r+1} \\ &\text{für (27)} \dots \eta_{r+1} - (t-1)\xi_{r+1} \\ &\text{für (28)} \dots \eta_{r+1} - t\xi_{r+1} \end{aligned}$$

wo  $\eta_{r+1}$  den in (21) ersichtlichen Werth besitzt. Für die der (24) angehörigen Reihe (29) ist dies unmittelbar einleuchtend, weil sie gerade zu dieselben linearen Functionen enthält, die in dem Systeme von Ungleichungen (19) erscheinen. Die übrigen Reihen (30), (31), ... (32), (33) unterscheiden sich von der Reihe (29) nur durch einen bei allen gemeinschaftlich hinzugetretenen subtractiven Bestandtheil:  $-\xi_{r+1}, -2\xi_{r+1}, \dots$  und ferner noch durch das Fehlen gewisser Anfangsglieder. So z. B. sind die Glieder der Reihe (30) abgeleitet aus dem (29) durch Weglassen des ersten:  $\mathfrak{A}_r$ , und durch Verminderung aller übrigen um die Grösse  $\xi_{r+1}$ ; jene der (31) durch Weglassen der zwei ersten:  $\mathfrak{A}_r$  und  $\mathfrak{A}_r + \xi_{r+1}$  und Verminderung der übrigen um  $2\xi_{r+1}$  u. s. w. Eine Verminderung aller Glieder der Reihe (29) um eine und dieselbe Grösse kann offenbar an der relativen Grösse derselben keine Veränderung bewirken; und selbst das Wegfallen gewisser Anfangsglieder wird nur dann eine Ungiltigkeit in den Angaben (34) herbeiführen, wenn sich dasselbe auf alle mit den grössten Werthen versehenen Glieder der (29) erstrecken würde, d. h. wenn in der entsprechenden Reihe kein Glied mehr mit den in (21) erscheinenden  $\mathfrak{A}$  vorhanden wäre, also namentlich, wenn auch das Glied mit  $\mathfrak{A}^{(q+s)}$  weggefallen wäre. Allein dieser Verlust erstreckt sich selbst bei der Reihe (33) nur auf die  $t$  ersten Glieder, und da stets  $t \leq s$  also auch  $t \leq q + s$  ist, so werden in allen diesen Reihen noch immer Glieder mit  $\mathfrak{A}^{(q+s)}$  erscheinen und demnach die Angaben (34) vollkommen gültig sein. Hiedurch sind diejenigen Bestandtheile in (24), (25), (26), ... (27), (28) bezeichnet, welche zur Bildung des höchsten Gliedes dieser Substitutionsresultate beitragen; die in (21) erscheinenden  $\mathfrak{A}^{(q)}, \dots, \mathfrak{A}^{(q+s)}$  machen sie namhaft.

Die mit der höchsten Potenz von  $a$  versehenen Glieder in den für  $x = x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  aus  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}, \frac{d^tP}{dx^t}$  hervorgehenden Substitutionsresultaten besitzen demnach vor Ausführung der hier möglichen Reductionen die Form:

$$P = \left[ \frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots q} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s)} \right] a^{\eta_{r+1}} + \dots$$

$$\frac{dP}{dx} = \left[ \frac{h_{r+1}^{q-1} \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots (q-1)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-1} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s-1)} \right] a^{\eta_{r+1} - \xi_{r+1}} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dx^2} &= \left[ \frac{h_{r+1} q - 2 \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-2)} + \dots + \frac{h_{r+1} q + s - 2 \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-2)} \right] a^{\eta_{r+1} - 2 \xi_{r+1}} + \dots \\ \frac{d^{t-1} P}{dx^{t-1}} &= \left[ \frac{h_{r+1} q - t + 1 \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-t+1)} + \dots + \frac{h_{r+1} q + s - t + 1 \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-t+1)} \right] a^{\eta_{r+1} - (t-1) \xi_{r+1}} + \dots \\ \frac{d^t P}{dx^t} &= \left[ \frac{h_{r+1} q - t \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-t)} + \dots + \frac{h_{r+1} q + s - t \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-t)} \right] a^{\eta_{r+1} - t \xi_{r+1}} + \dots \end{aligned}$$

Da nun aber  $h_{r+1}$  den Bedingungsgleichungen (23) Genüge leistet, so verschwinden die hier aufgeführten Glieder alle mit Ausnahme des letzten, welches einen von Null verschiedenen Werth erlangt. Bezeichnet man daher mit

$$\mathfrak{S}_{r+1} a^{\mathfrak{A}_{r+1}}, \mathfrak{S}'_{r+1} a^{\mathfrak{A}'_{r+1}}, \mathfrak{S}''_{r+1} a^{\mathfrak{A}''_{r+1}}, \dots, \mathfrak{S}_{r+1}^{(t-1)} a^{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)}}, \mathfrak{S}_{r+1}^{(t)} a^{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}$$

die nach Vollführung aller möglichen Reductionen übrig bleibenden, von Null verschiedenen Anfangsglieder der aus  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2 P}{dx^2}, \dots, \frac{d^{t-1} P}{dx^{t-1}}, \frac{d^t P}{dx^t}$  für  $x = x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} = x_{r+1}$  hervorgehenden Substitutionsresultate, so bestehen die Relationen:

$$(35) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{r+1} &< \eta_{r+1} \\ \mathfrak{A}'_{r+1} &< \eta_{r+1} - \xi_{r+1} \\ \mathfrak{A}''_{r+1} &< \eta_{r+1} - 2 \xi_{r+1} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} &< \eta_{r+1} - (t-1) \xi_{r+1} \\ \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} &= \eta_{r+1} - t \xi_{r+1} \end{aligned}$$

$$(37) \quad \mathfrak{S}_{r+1}^{(t)} = \frac{h_{r+1} q - t \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-t)} + \dots + \frac{h_{r+1} q + s - t \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-t)}$$

Für die Substitutionsresultate, die aus den derivirten Functionen höherer Ordnung, z. B. aus  $\frac{d^v P}{dx^v}$  hervorgehen, — wo  $v > t$  angenommen wird — lässt sich weder für das entsprechende  $\mathfrak{S}_{r+1}^{(v)}$  noch für  $\mathfrak{A}_{r+1}^{(v)}$  eine diesen ähnliche und bestimmte Relation aufstellen, weil für  $t$  übersteigende Werthe von  $v$  weder die Angaben (34) noch die Relationen (23) Giltigkeit besitzen. Es lässt sich nur so viel bestimmen, dass auch für  $v > t$  eine der (28) analoge Form besteht und dass die Gradzahlen der darin erscheinenden Bestandtheile durch eine der (33) ähnliche Reihe angegeben werden, deren Glieder höchstens den Werth  $\eta_{r+1} - v \xi_{r+1}$  erreichen. Ob aber dieser höchste Werth sich wirklich darin vorfindet oder nicht, hängt davon ab, ob  $v$  kleiner, höchstens gleich oder grösser ist als  $q + s$ . Der Coefficient der höchsten Potenz von  $a$ , die also für  $q + s \geq v$  den Exponenten  $\eta_{r+1} - v \xi_{r+1}$  trägt, für  $q + s < v$  aber einen kleineren aufweist, kann mehr- oder eintheilig sein und gelegentlich auch Null werden. Daraus geht hervor, dass für  $t < v \leq q + s$  die doppeldeutige Relation:

$$(38) \quad \mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} \leq \eta_{r+1} - v \xi_{r+1}$$

für  $v > q + s$  aber die eindeutige:

$$(39) \quad \mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} < \eta_{r+1} - v \xi_{r+1}$$

besteht:

Nachdem wir nun die Relationen (35), (36), (37), (38), (39) kennen gelernt haben, wollen wir zur Bestimmung des Folgegliedes  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}$  schreiten. Wir verfahren dazu auf eine ähnliche Weise, wie bei der Bestimmung des Gliedes  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ ; wir substituiren nämlich anstatt  $x$  das Binom  $x_{r+1} + x'$ , wo

$$x_{r+1} = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots + h_r a^{\xi_r} + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$$

$$x' = h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \dots$$

ist und erörtern die Bedingungen, welche die Grössen  $\xi_{r+2}$  und  $h_{r+2}$  zu erfüllen haben. Es ist überflüssig diese Untersuchungen hier zu wiederholen, da für  $r + 1$  dasselbe gilt, wie für  $r$ . Das höchste Glied des Substitutionsresultates, das für  $x = x_{r+1} + x'$  aus  $P$  hervorgeht, ist demnach gleichfalls aus einer Reihe von Gliedern zusammzusetzen, die den in (18) aufgezählten ähnlich sind, aus ihnen durch Verwandeln von  $r$  in  $r + 1$  abgeleitet werden können. Sie sind folgende:

$$(40) \quad \mathfrak{G}_{r+1} a^{\mathfrak{A}_{r+1}}, h_{r+2} \mathfrak{G}'_{r+1} a^{\mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2}}, \frac{1}{2} h_{r+2}^2 \mathfrak{G}''_{r+1} a^{\mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2}} \dots \frac{1}{1 \dots p} h_{r+2}^p \mathfrak{G}_{r+1}^{(p)} a^{\mathfrak{A}_{r+1}^{(p)} + p\xi_{r+2}} \dots$$

$\xi_{r+2}$  wird so zu wählen sein, dass eine Reduction der höchsten Glieder,  $h_{r+2}$  aber so, dass das Nullwerden derselben eintritt, wobei noch überdies  $\xi_{r+2} < \xi_{r+1}$  ausfallen muss. Man hat demnach zur Bestimmung von  $\xi_{r+2}$  das System von Ungleichungen:

$$(41) \quad \begin{aligned} \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1} \\ \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\ \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2} \\ &\dots \\ \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1}^{(p)} + p\xi_{r+2} \\ &\dots \end{aligned}$$

und wird die Grenzwerte der zweiten Ordnung aufzusuchen haben. Die unter  $\xi_{r+1}$  liegenden Grenzwerte liefern brauchbare Werthe für  $\xi_{r+2}$ . Bei der früher eingeleiteten Bestimmung von  $\xi_{r+1}$  wurde die Annahme gemacht, dass solche kleine Grenzwerte wirklich bestehen. Hier aber können wir ihre Existenz erweisen. Bei der Auflösung dieses Systemes von Ungleichungen kommen nämlich die folgenden Reihen von Quotienten in Betrachtung:

$$(42) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}'_{r+1}, \quad \frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}''_{r+1}}{2}, \quad \dots, \quad \frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t} \dots \dots \dots \\ \mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}''_{r+1}, \quad \dots, \quad \frac{\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t-1} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} \dots \dots \end{aligned}$$

Man hat unter ihnen stets die kleinsten auszuwählen, und hierauf zur entsprechenden nachfolgenden Reihe überzugehen oder überzuspringen. Nun bestehen zufolge der aufgestellten Ungleichungen (35) und der Gleichung (36) die Relationen:

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t} &< \xi_{r+1} \\ \frac{\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t-1} &< \xi_{r+1} \\ \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} &< \xi_{r+1} \end{aligned}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass unter den Quotienten (42) solche vorkommen, die kleiner als  $\xi_{r+1}$  sind und brauchbare Werthe von  $\xi_{r+2}$  darstellen.

Betreff der Bestimmung von  $\xi_{r+1}$  wurde schon früher die Bemerkung gemacht, dass man nicht die Auflösung der Ungleichungen bis zu Ende führen müsse, sondern dass man nur so weit zu gehen habe, bis man alle unter  $\xi_r$  liegenden Grenzwerte erschöpft hat. Auch hier gilt diese Bemerkung und es genügt namentlich statt der Ungleichungen (41) nur eine Abtheilung derselben:



$$\begin{aligned}
 \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1} \\
 \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\
 \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} + (t-1)\xi_{r+2} \\
 \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\xi_{r+2}
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

zu berücksichtigen, weil die weiter geführte Untersuchung lauter dem  $\xi_{r+1}$  gleiche oder grössere Werthe liefert, die dem  $\xi_{r+2}$  nicht ertheilt werden können.

In der That gelangt man nach den Quotientenreihen (42) zu der folgenden:

$$\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t+1)}, \frac{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t+2)}}{2}, \frac{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t+3)}}{3} \dots$$

Diese Quotienten sind zufolge der Relationen (38) und (39), welche für  $v > t$  gelten und der Gleichung (36) sämmtlich mindestens gleich oder grösser als  $\xi_{r+1}$ , womit die Unbrauchbarkeit der durch weitergeführte Untersuchungen gewonnenen Grenzwerte erwiesen ist. Man wird mit dem Systeme von Ungleichungen (44) zur Bestimmung von  $\xi_{r+2}$  vollkommen ausreichen. Jedem daraus abgeleiteten Werthe von  $\xi_{r+2}$  entspricht mindestens ein Werth von  $h_{r+2}$ . Die Anzahl der von einander verschiedenen Folgeglieder  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}$ , die auf solche Weise gewonnen werden, kann aber niemals die Anzahl  $t$  übersteigen, und auch nie unter Eins fallen, weil die Bestimmungsgleichung für  $h_{r+2}$  der (22) ähnlich ist, und aus ihr durch Verwandeln von  $r$  in  $r+1$  hervorgeht.  $q$  und  $s$  sind ganze positive Zahlen und  $q+s \leq t$ .

In ganz gleicher Weise, wie zum Folgegliede  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}$ , gelangt man zum nächstfolgenden  $h_{r+3} a^{\xi_{r+3}}$  und zu den späteren. Es ergibt sich stets mindestens Eines, höchstens aber  $t$  an der Zahl. Wir schliessen hieraus, dass die hier auseinandergesetzte Methode allgemein giltig sei, um zu der bekannten Gliedersumme  $x_r$  das nächstfolgende Glied zu bestimmen, und wir wären auch überzeugt, stets mindestens ein einziges Folgeglied zu gewinnen, wenn nicht den hier geführten Untersuchungen eine stillschweigend gemachte Annahme zu Grunde läge. Es ist nämlich bisher nicht bewiesen worden, dass zu der Gliedersumme  $x_r$  mindestens ein einziger unter  $\xi_r$  liegender Grenzwert für das System von Ungleichungen (19) und (20) bestehe, es ist nur erwiesen, dass, wenn ein solcher sich wirklich vorfindet, auch jedesmal mindestens ein einziger Werth für  $h_{r+1}$  und  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}, h_{r+3} a^{\xi_{r+3}}, \dots$  aufgefunden werden könne. Diese Lücke im Beweise lässt sich aber durch die früheren Untersuchungen leicht ausfüllen. Es wurde nämlich bei der Bestimmung des Folgegliedes  $h_1 a^{\xi_1}$  bewiesen, dass zu einem jeden Anfangsgliede  $h_0 a^{\xi_0}$  immer mindestens ein einziges Folgeglied  $h_1 a^{\xi_1}$  aufgefunden werde. Die Existenz eines unter  $\xi_r$  liegenden Grenzwertes ist somit für  $r=0$  erwiesen und die eben jetzt beendigten Untersuchungen setzen seine Existenz auch für  $r=1, 2, \dots$  ausser allem Zweifel, und wir gelangen dadurch zur Überzeugung, dass einem jeden Anfangsgliede wirklich mindestens Eine Auflösung entsprechen müsse.

§. 12.

Aus all dem bisher Gesagten ergibt sich folgende allgemeine und für alle möglichen Fälle passende Regel, um zu der ermittelten Gliedersumme  $x_r$  das darauffolgende Glied  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  aufzufinden: Man bestimme zuvörderst, ob der Coëfficient  $h_r$  des zuletzt bestimmten

Gliedes  $h_r a^{\xi_r}$  nur eine einfache oder eine wiederholte Wurzel jener Bestimmungsgleichung sei, aus der er gewonnen worden. Diese Untersuchung, welche nicht erst anzustellen sein wird, da sie eben ein Theil der Auflösung der Bestimmungsgleichung ausmacht, führt nun zu einer bestimmten Zahl  $p$ , welche angibt, wie oft diese Wurzel  $h_r$  in der Gleichung erscheint. Nun setze man die bekannte Gliedersumme  $x_r$  an die Stelle der Unbekannten  $x$  im Gleichungspolynome  $P$  sowohl, als in seine  $p$  ersten nach  $x$  partiell genommenen Differentialquotienten, also in eine Reihe von Functionen:

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^p P}{dx^p}$$

$p+1$  an der Zahl und ordne diese Substitutionsresultate, in welchen nur noch  $a$  erscheint, absteigend nach Potenzen dieser Buchstabengrösse. Die höchsten von Null verschiedenen Glieder dieser absteigend geordneten Substitutionsresultate:

$$\mathfrak{H}_r a^{2r}, \mathfrak{H}'_r a^{2r}, \mathfrak{H}''_r a^{2r}, \dots, \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{2r(p)}$$

werden zu einer Gleichung:

$$\mathfrak{H}_r a^{2r} + x' \mathfrak{H}'_r a^{2r} + \frac{x'^2}{2} \mathfrak{H}''_r a^{2r} + \dots + \frac{x'^p}{1 \dots p} \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{2r(p)} = 0$$

verbunden, die  $x'$  als Unbekannte enthält und dem  $p^{\text{ten}}$  Grade angehört, und nun wendet man auf diese das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Anfangsglieder an. Die gewonnenen Anfangsglieder von  $x'$  sind die gesuchten Folgeglieder  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ . Jedes derselben bildet den Ausgangspunkt für eine eigene weitere Entwicklung von genau derselben Art.

Es ist nun leicht, sich ein klares Bild von dem Gange der absteigenden Entwicklung von  $x$  zu entwerfen. Man beginnt mit der Bestimmung des Anfangsgliedes. In der Regel findet man mehrere verschiedene Anfangsglieder, deren jedes einer einzigen Auflösung zukommt. Man erkennt dies daran, dass die zur Bestimmung von  $h_0$  dienenden Gleichungen gar keine gleichen Wurzeln besitzen. Findet dieser gewöhnlichste Fall wirklich Statt, so ist mit der Bestimmung der Anfangsglieder zugleich die Trennung aller Wurzeln erfolgt, und die weitere Entwicklung besteht nur in der Annäherung zu einer dieser Wurzeln. Jedes Anfangsglied kann als Ausgangspunkt einer solchen Approximation benützt werden, und man wird durch ein regelmässig wiederkehrendes Verfahren die zugehörigen Folgeglieder entwickeln. Diese gehen alle aus Gleichungen des ersten Grades, also durch Divisionen hervor.

Minder einfach ist die Entwicklung der Folgeglieder, wenn mit der Bestimmung der Anfangsglieder noch nicht alle Wurzeln isolirt erscheinen. Man erkennt dies daran, dass der Coefficient  $h_0$  eines Anfangsgliedes eine wiederholte Wurzel der zu seiner Bestimmung dienenden Gleichung darstellt. Ist  $h_0$  eine  $m$ fache Wurzel derselben, so besitzen  $m$  Auflösungen dieses Anfangsglied gemeinschaftlich, und  $h_0 a^{\xi_0}$  bildet den Ausgangspunkt einer complicirteren Entwicklung. Zur Bestimmung des Folgegliedes  $h_1 a^{\xi_1}$  hat man eine Gleichung des  $m^{\text{ten}}$  Grades, nämlich die:

$$\mathfrak{H}_0 a^{2_0} + x' \mathfrak{H}'_0 a^{2_0} + \frac{x'^2}{2} \mathfrak{H}''_0 a^{2_0} + \dots + \frac{x'^m}{1 \dots m} \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{2_0(m)} = 0$$

zu bilden und die Anfangsglieder von  $x'$  zu ermitteln. Findet man  $m$  von einander verschiedene Anfangsglieder  $h_1 a^{\xi_1}$ , so sind die Wurzeln vollkommen isolirt. Jedes derselben wird dann den Ausgangspunkt bilden einer eigenen Entwicklung, die nur zu einer einzigen Wurzel führt und in einer Reihe von Divisionen besteht. Es kann aber  $h_1$  auch als wiederholte Wurzel auf-

treten und dann stimmen mehrere Auflösungen  $x$  in den zwei ersten Entwicklungsgliedern  $h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$  überein. Die Anzahl  $p$  der gleichen Wurzeln  $h_1$  ist zugleich die Anzahl dieser übereinstimmenden Auflösungen  $x$ . Das dritte Entwicklungsglied  $h_2 a^{\xi_2}$  erhält man dann aus einer Gleichung des  $p^{\text{ten}}$  Grades:

$$\mathfrak{H}_1 a^{\mathfrak{H}_1} + x' \mathfrak{H}_1' a^{\mathfrak{H}_1'} + \frac{x^2}{2} \mathfrak{H}_1'' a^{\mathfrak{H}_1''} + \dots + \frac{x^p}{1 \dots p} \mathfrak{H}_1^{(p)} a^{\mathfrak{H}_1^{(p)}} = 0$$

durch Bestimmung der Anfangsglieder. Dieser Schritt kann eine vollständige oder theilweise Trennung der  $p$  noch nicht isolirten Wurzeln herbeiführen oder sie noch ungetrennt lassen. In dieser Weise schreitet die Entwicklung vorwärts. Besitzt die Gleichung  $P = 0$  keine gleichen Wurzeln, so erfolgt die Trennung derselben immer bei hinlänglich weit fortgesetzter Entwicklung und von da an vereinfacht sich die weitere Entwicklung, indem sie sich auf wiederholte Division zurückführen lässt. Nur dann, wenn  $P = 0$  zwei oder mehrere gleiche Wurzeln besitzt, wird die Trennung derselben niemals erfolgen.

Man sieht aus dieser Darstellung, dass die absteigende Entwicklung grosse Ähnlichkeit besitzt mit den bekannten Approximationsmethoden für Zahlengleichungen. Die eigentliche Schwierigkeit ist auch hier nur, die Trennung der Wurzeln zu bewerkstelligen. Hat man dieselbe erreicht, so ist die fernere Entwicklung mit keinen andern Schwierigkeiten mehr verknüpft. Die Wurzel ist nämlich dann so bestimmt, wie jene einer Gleichung des ersten Grades, mit dem einzigen Unterschiede, dass man zu ihrer Entwicklung eine in der Regel unendliche Anzahl von solchen Gleichungen des ersten Grades aufzulösen hat. Die Entwicklung lässt sich meistentheils ins Unendliche fortsetzen, und ein Abbrechen der Reihe bei einem gewissen Gliede gehört nur zu den Ausnahmen. So lange nämlich das der Gliedersumme  $x_r$  entsprechende Substitutionsresultat, welches aus dem Gleichungspolynome  $P$  hervorgeht, von Null verschieden ausfällt, ergibt sich, wie dargethan wurde, stets ein von Null verschiedenes Folgeglied  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  und nur dann, wenn irgend eines dieser Substitutionsresultate vollkommen verschwindet, ist der Beweis hergestellt, dass die entsprechende Gliedersumme  $x_r$  schon der complete Werth von  $x$  ist, und dass die nachfolgenden Entwicklungsglieder alle gleich Null ausfallen. Das gänzliche Verschwinden eines Substitutionsresultates gehört aber immer nur zu den selteneren Fällen und hängt von dem zufälligen Erfülltsein gewisser Relationen ab. Es ist dies im Grunde nur ein analoges Verhalten, wie bei den bekannten Vorgängen der Division und des Wurzelausziehens, wobei man auch meistentheils die Rechnung ins Unendliche fortsetzen kann, weil man gewöhnlich lauter von Null verschiedene Reste erhält, und ein Abbrechen der Entwicklung gehört nur zu den Ausnahmen. Diese Analogie war im Voraus zu erwarten, weil diese bekannten Vorgänge der Division und des Wurzelausziehens die specielle Anwendung der hier auseinander gesetzten allgemeinen Entwicklungsmethode auf Gleichungen des ersten und binomische höheren Grades vorstellen.

§. 13.

Nachdem nun die Auflösungsmethode, um die Wurzeln einer Buchstabengleichung absteigend zu entwickeln, festgestellt ist, haben wir noch den rein praktischen Theil der Rechnung einer Betrachtung zu unterwerfen. Die aufgestellte Regel schreibt nämlich vor, nach der Bestimmung eines Entwicklungsgliedes die ganze bereits gefundene Gliedersumme in das Gleichungspolynom und vielleicht auch in einige derivirte Functionen anstatt der Unbekannten

$x$  zu substituiren. Da sich diese Substitution demnach oftmals wiederholt und der damit verbundene Rechnungsaufwand mit der Anzahl der entwickelten Glieder fortwährend wächst, so würde selbst der geringste dabei begangene Umweg einen sehr merklichen ungünstigen Einfluss nehmen. Allein nicht nur der unnütze Zeit- und Müheaufwand ist hier vom Belange, sondern auch die Fehlerquellen werden hiedurch vervielfacht, denn wo gäbe es einen Rechner, der diesem fühlbaren Übelstande nicht unterliegen würde. Diese Gründe dürften zur Genüge die Nothwendigkeit erweisen, dieses rein praktische Bedürfniss in Erwägung zu ziehen, wenn die hier gelehrtete Auflösungsmethode in den nur einigermaßen complicirteren Fällen ihre Anwendbarkeit nicht verlieren soll. Hier kann es keineswegs unsere Absicht sein, alle hierher gehörigen praktischen Regeln aufzuführen, die den mit ihnen vollkommen und zwar durch wiederholte Übung vertrauten Rechner in die Lage versetzen, in verhältnissmässig kurzer Zeit die Rechnung zu beenden und auch begangene Fehler leicht aufzufinden, und den Ort des Fehlers ohne langem Nachsuchen anzugeben. Dies würde uns nicht nur hier zu weit vom eigentlichen Ziele ablenken, sondern auch dem Leser wenig nützen, da diese kleinen aber sehr wichtigen Kunstgriffe mit jenen Fertigkeiten verglichen werden müssen, die nur durch lange und fortgesetzte Übung zum Eigenthume des Rechners werden, für den Theoretiker aber ein nutzloses Werkzeug sind und bleiben. Durch einiges Nachdenken kann Jedermann beim wirklichen Rechnen ohne Schwierigkeit dazu gelangen. Wir haben hier aber einen andern Gegenstand uns zur Aufgabe gemacht, der nicht so nahe liegt, und deshalb auch verdient, hier berührt zu werden.

Die von der Regel vorgeschriebenen Substitutionen, welche bei jedem neuen Entwicklungsgliede vollführt werden müssen, braucht man nämlich nicht immer von Neuem auszuführen mit der ganzen bisher bekannten Gliedersumme, sondern die Rechnung lässt sich bedeutend vereinfachen, indem man die bereits früher entwickelten Substitutionsresultate benützt und nur gewisse Zusätze zu denselben hinzufügt. Hat man nämlich für die Gliedersumme  $x_r$  die entsprechenden Substitutionsresultate schon gebildet, so erhält man hieraus das der um ein Glied vergrösserten Gliedersumme  $x_{r+1}$  entsprechende Substitutionsresultat durch Hinzufügen gewisser Zusätze. Bei diesem Vorgange entgeht man einer unnötigen Wiederholung aller jener Rechnungsoperationen, welche die Substitution der Gliedersumme  $x_r$  zum Zwecke hat und die einen Theil der Substitution der vollständigen Gliedersumme  $x_{r+1}$  ausmachen würde. Diese Anordnung der Rechnung wurde von Fourier, wiewohl zunächst nur für numerische Gleichungen angegeben; sie gilt aber in völlig ungeänderter Form auch für Buchstabengleichungen und erweist sich hier bei dem viel complicirteren Probleme nur von desto grösserem Nutzen.

Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}'_r, \mathfrak{P}''_r, \dots, \mathfrak{P}_r^{(m)}$  die für  $x=x_r$  aus den Polynomen  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^m P}{dx^m}$  abgeleiteten Substitutionsresultate, so erhält man dem Taylor'schen Lehrsatz zufolge das für  $x=x_{r+1}$  hervorgehende Substitutionsresultat  $\mathfrak{P}_{r+1}$  in folgender Form:

$$\mathfrak{P}_{r+1} = \mathfrak{P}_r + \frac{1}{1!} \mathfrak{P}'_r h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + \frac{1}{2!} \mathfrak{P}''_r h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} + \dots + \frac{1}{m!} \mathfrak{P}_r^{(m)} h_{r+1}^m a^{m\xi_{r+1}}.$$

In dieser Gleichung ist selbstredend die Regel enthalten, wie man aus den bekannten Substitutionsresultaten  $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}'_r, \mathfrak{P}''_r, \dots, \mathfrak{P}_r^{(m)}$  und dem zuletzt gewonnenen Gliede  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  das Substitutionsresultat  $\mathfrak{P}_{r+1}$  ableiten könne. Bei dieser Bildungsweise der Substitutionsresultate ist es jedoch, wie von selbst ersichtlich, unerlässlich, auch in alle partiell nach  $x$  genommenen Differentialquotienten des Gleichungspolynomes  $P$  die Substitutionen auszuführen. Die

Regel, nach welcher dabei vorgegangen wird, ist von Fourier angegeben worden und hinlänglich bekannt. Man leitet nämlich aus den bekannten Substitutionsresultaten  $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}'_r, \mathfrak{P}''_r, \dots, \mathfrak{P}_r^{(m)}$  folgende Ausdrücke ab, wobei das Glied  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  kurz mit  $x$  bezeichnet wurde:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{P}_r^{(m)} & & \mathfrak{P}_r^{(m-1)}, & \dots & \mathfrak{P}_r'' & \mathfrak{P}_r' & \mathfrak{P}_r \\
 \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r^{(m)} & & \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r^{(m-1)}, & \dots & \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r'' & \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r' & \\
 \frac{x^2}{1.2} \mathfrak{P}_r^{(m)} & & \frac{x^2}{1.2} \mathfrak{P}_r^{(m-1)}, & \dots & \frac{x^2}{1.2} \mathfrak{P}_r'' & & \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \\
 \frac{x^{m-1}}{1 \dots (m-1)} \mathfrak{P}_r^{(m)} & & \frac{x^{m-1}}{1 \dots (m-1)} \mathfrak{P}_r^{(m-1)} & & & & \\
 \frac{x^m}{1 \dots m} \mathfrak{P}_r^{(m)} & & & & & & 
 \end{array}$$

Man multiplicirt zuerst die in der ersten Horizontalreihe stehenden Grössen mit Ausnahme der letzten mit  $x$ . Die dabei erhaltenen Producte sind die Grössen der zweiten Horizontalreihe. Diese werden abermals mit  $x$  multiplicirt und durch zwei dividirt, die letzte derselben ausgenommen, und führen so zu der dritten Horizontalreihe. Auf solche Weise fährt man fort, die Grössen einer eben erhaltenen Horizontalreihe mit  $x$  zu multipliciren und durch eine ganze Zahl zu dividiren, welche die Anzahl der bereits geübten Multiplicationen ist, und erhält so eine neue Horizontalreihe. Dabei lässt man aber stets die letzte Grösse unberührt, wodurch sich die Anzahl der Grössen stets um Eins verringert. Hat man dies genügend oft wiederholt, so zwar dass ein weiteres Fortsetzen unmöglich ist, so hat man nur noch alle in einer Diagonale liegenden Grössen zu summiren, um  $\mathfrak{P}_{r+1}, \mathfrak{P}'_{r+1}, \mathfrak{P}''_{r+1}, \mathfrak{P}'''_{r+1}, \dots, \mathfrak{P}_{r+1}^{(m)}$  zu erhalten. Nämlich:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{P}_{r+1}^{(m)} &= \mathfrak{P}_r^{(m)} \\
 \mathfrak{P}_{r+1}^{(m-1)} &= \mathfrak{P}_r^{(m-1)} + \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r^{(m)} \\
 \mathfrak{P}_{r+2}^{(m-2)} &= \mathfrak{P}_r^{(m-2)} + \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r^{(m-1)} + \frac{x^2}{1.2} \mathfrak{P}_r^{(m)} \\
 \mathfrak{P}_{r+1}' &= \mathfrak{P}_r' + \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r'' + \frac{x^2}{1.2} \mathfrak{P}_r''' + \dots + \frac{x^{m-1}}{1 \dots (m-1)} \mathfrak{P}_r^{(m)} \\
 \mathfrak{P}_{r+1} &= \mathfrak{P}_r + \frac{x}{1} \mathfrak{P}_r' + \frac{x^2}{1.2} \mathfrak{P}_r'' + \dots + \frac{x^{m-1}}{1 \dots (m-1)} \mathfrak{P}_r^{(m-1)} + \frac{x^m}{1 \dots m} \mathfrak{P}_r^{(m)}.
 \end{aligned}$$

Bei dieser Anordnung der Rechnung vermeidet man jede Wiederholung einer bereits früher geübten Operation und beschränkt sich geradezu auf das Minimum der unerlässlichen Rechnungen.

Das hier genannte Minimum bezieht sich aber gleichzeitig auf die Bildung einer bestimmten Anzahl von Entwicklungsgliedern und des zugehörigen Substitutionsresultates. Wollte man nur diese bestimmte Anzahl von Entwicklungsgliedern finden, ohne jedoch nach dem ihnen entsprechenden Substitutionsresultate Verlangen zu tragen, so könnte man allerdings in der Verringerung der Rechnungen noch weiter gehen. In der Mehrzahl der Fälle jedoch ist es nicht hinreichend, die Wurzel in einer bestimmten Anzahl von Gliedern zu entwickeln, sondern es soll nebstdem angegeben werden, ob dieselben den completeen Wurzelwerth darstellen oder nur einen Theil derselben, und wie gross der bei dem willkürlichen Abbrechen der Reihe begangene Fehler sei. Alle diese Fragen lassen sich nur aus dem entsprechenden Substitutionsresultate beantworten, und dies ist der Grund, wesshalb man wohl kaum je in der Lage sein wird, das Substitutionsresultat der entwickelten Gliedersumme entbehren zu können.

## §. 14.

Wir wollen nun einige Beispiele der Rechnung unterziehen, und auf solche Weise die im Vorhergehenden gegebenen Regeln zu erläutern suchen.

## Erstes Beispiel:

$$\begin{aligned}
 & (2a^5 - a^4 - 4a^3 + 4a^2 - a)x^5 + \\
 & + (-2a^8 + 7a^7 + a^6 - 9a^5 - 8a^4 - 16a^3 + 52a^2 - 31a + 5)x^4 + \\
 & + (a^8 + 4a^7 - 17a^6 - 31a^5 + 32a^4 + 27a^3 + 76a^2 - 118a + 35)x^3 + \\
 (45) & + (-2a^9 + 11a^8 - 15a^7 - 14a^6 + 32a^5 + 35a^4 + 74a^3 - 160a^2 - 6a + 50)x^2 + \\
 & + (a^9 + 2a^8 - 27a^7 + 12a^6 + 86a^5 - 53a^4 + 49a^3 - 278a^2 + 275a - 70)x + \\
 & + (-2a^8 + a^7 + 28a^6 - 9a^5 - 80a^4 - 5a^3 - 23a^2 + 206a - 120) = 0
 \end{aligned}$$

sei die gegebene Gleichung. Dieselbe ist schon zu den complicirteren zu rechnen, da die Coëfficienten derselben vielgliederige Polynome sind, und wurde absichtlich dermassen gewählt, um für die uns wichtig scheinenden Bemerkungen Gelegenheit zu finden. Die Rechnung selbst erhält bei einer solchen complicirten Gleichung eine nicht unbedeutende Ausdehnung, und erfordert einen verhältnissmässig grösseren Zeitaufwand; aber eben dadurch finden wir Gelegenheit, dem Leser klar zu machen, wie sehr ein geregeltes Verfahren unentbehrlich sei, so wie, dass die Auflösung einer Buchstabengleichung fast immer zu den mühsamen und zeitraubenden Problemen zu zählen sei. Dies ist aber keineswegs ein Übelstand unserer Auf Lösungsmethode, sondern in der Natur eines solchen Problem es selber begründet, indem durchaus kein unnützer und überflüssiger Schritt dabei gemacht wird. Wer diesen Aufwand an Zeit und Mühe scheut, und statt Schritt für Schritt dem Ziele näher zu kommen mit einem einzigen gewaltigen Streiche all dies auf Einmal erreichen will, verkennt die Natur eines solchen Problem es ganz und gar, und wird sich stets im Kreise herumdrehend immer wieder zur ursprünglichen Gleichung zurück kommen als demjenigen analytischen Gebilde, welches einzig und allein seinen Wünschen entspricht.

Die Bestimmung der Anfangsglieder, nach der im §. 6 aufgestellten Regel für die absteigende Entwicklungsform ausgeführt, liefert fünf von einander verschiedene solche, nämlich:

$$a^3, +\sqrt{-1}.a^{\frac{1}{2}}, -\sqrt{-1}.a^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, 2a^{-1}.$$

Ein jedes derselben entspricht nur einer einzigen Auflösung und es ist demnach mit der Bestimmung der Anfangsglieder die Trennung aller Wurzeln bewerkstelligt. Die weitere Entwicklung der Folgeglieder hat sonach die einfachste Gestalt und erfordert nur noch die Bildung und Auflösung von Gleichungen des ersten Grades, wie dies in §. 8 auseinandergesetzt wurde.

Wir wollen hier die mit dem Anfangsgliede  $a^3$  beginnende Auflösung weiter entwickeln. Die Regel schreibt vor, den gewonnenen Bestandtheil  $a^3$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom zu substituiren, das höchste Glied des so erhaltenen absteigend geordneten Substitutionsresultates durch das unveränderlich bleibende höchste Glied des aus  $\frac{dP}{dx}$  hervorgehenden Substitutionsresultates zu dividiren, und das Zeichen dieses Quotienten in das entgegengesetzte zu verwandeln. Die im vorhergehenden §. 13 gegebenen Vorschriften erfordern aber behufs der möglichsten Vereinfachung der Rechnung, dass diese Substitution auch in allen derivirten

Functionen vollführt werde. Wir haben also zunächst anstatt  $x$  das Glied  $a^3$  in den Polynomen  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^5P}{dx^5}$  zu substituieren.

Diese Substitution führt man am einfachsten aus, wenn man in diese Ausdrücke zuerst  $x=0$  substituirt, hierauf  $x$  um den Zusatz  $a^3$  vergrössert, wobei  $x$  in  $a^3$  übergeht, und nun die diesem Werthe  $x = a^3$  entsprechenden Substitutionsresultate auf die in §. 13 angegebene Weise ableitet. Die Substitutionsresultate für  $x=0$  erhält man unmittelbar aus den Coëfficienten des Gleichungspolynomes, indem man sie mit der Factorielle des Exponenten von  $x$  multiplicirt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} P_{(0)}^V &= + 240 \cdot a^5 - 120 a^4 - 480 a^3 + 480 a^2 - 120 \cdot a \\ P_{(0)}^{IV} &= - 48 \cdot a^8 + 168 \cdot a^7 + 24 \cdot a^6 - 216 \cdot a^5 - 192 \cdot a^4 - 384 \cdot a^3 + 1248 a^2 - 744 \cdot a + 120 \\ P_{(0)}''' &= + 6 a^8 + 24 a^7 - 102 \cdot a^6 - 186 \cdot a^5 + 192 \cdot a^4 + 162 \cdot a^3 + 420 \cdot a^2 - 708 \cdot a + 210 \\ P_{(0)}'' &= - 4 a^9 + 22 a^8 - 30 a^7 - 28 a^6 + 64 a^5 + 70 a^4 + 148 a^3 - 320 a^2 - 12 a + 100 \\ P_{(0)}' &= a^9 + 2 a^8 - 27 a^7 + 12 a^6 + 86 a^5 - 53 a^4 + 49 a^3 - 278 a^2 + 275 a - 70 \\ P_{(0)} &= - 2 a^8 + a^7 + 28 a^6 - 9 a^5 - 80 a^4 - 5 a^3 - 23 a^2 + 206 a - 120. \end{aligned}$$

Um nun aus diesen Ausdrücken  $P_{(0)}^V, P_{(0)}^{IV}, P_{(0)}''', P_{(0)}'', P_{(0)}', P_{(0)}$  die für  $x = a^3$  geltenden Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_0^V, \mathfrak{P}_0^{IV}, \mathfrak{P}_0''', \mathfrak{P}_0'', \mathfrak{P}_0', \mathfrak{P}_0$  abzuleiten, hat man jeden derselben zu wiederholten Malen zu multipliciren und zwar der Reihe nach mit  $\frac{a^3}{1}, \frac{a^3}{2}, \frac{a^3}{3}, \frac{a^3}{4}, \frac{a^3}{5}$ . Dabei wird  $P_{(0)}^V$  fünfmal dieser Multiplication unterworfen,  $P_{(0)}^{IV}$  viermal,  $P_{(0)}'''$  dreimal,  $P_{(0)}''$  zweimal,  $P_{(0)}'$  Einmal. Die dabei gewonnenen Ausdrücke werden dann in entsprechender Ordnung summirt. Die wirkliche Ausführung dieser Rechnung ist im Nachfolgenden ersichtlich:

$$\begin{aligned} P_{(0)}^V &= 240 \cdot a^5 - 120 a^4 - 480 a^3 + 480 a^2 - 120 a \\ \frac{a^3}{1} P_{(0)}^V &= 240 \cdot a^8 - 120 a^7 - 480 a^6 + 480 a^5 - 120 a^4 \\ \frac{a^6}{1 \cdot 2} P_{(0)}^V &= + 120 \cdot a^{11} - 60 a^{10} - 240 a^9 + 240 a^8 - 60 a^7 \\ \frac{a^9}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_{(0)}^V &= + 40 \cdot a^{14} - 20 a^{13} - 80 a^{12} + 80 a^{11} - 20 a^{10} \\ \frac{a^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P_{(0)}^V &= + 10 \cdot a^{17} - 5 a^{16} - 20 a^{15} + 20 a^{14} - 5 a^{13} \\ \frac{a^{15}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} P_{(0)}^V &= + 2 \cdot a^{20} - a^{19} - 4 a^{18} + 4 a^{17} - a^{16} \\ P_{(0)}^{IV} &= - 48 a^8 + 168 a^7 + 24 a^6 - 216 a^5 - 192 a^4 - 384 a^3 + 1248 a^2 - 744 a + 120 \\ \frac{a^3}{1} P_{(0)}^{IV} &= - 48 a^{11} + 168 a^{10} + 24 a^9 - 216 a^8 - 192 a^7 - 384 a^6 + 1248 a^5 - 744 a^4 + 120 a^3 \\ \frac{a^6}{1 \cdot 2} P_{(0)}^{IV} &= - 24 \cdot a^{14} + 84 a^{13} + 12 a^{12} - 108 a^{11} - 96 a^{10} - 192 a^9 + 624 a^8 - 372 a^7 + 60 a^6 \\ \frac{a^9}{1 \cdot 2 \cdot 3} P_{(0)}^{IV} &= - 8 a^{17} + 28 a^{16} + 4 a^{15} - 36 a^{14} - 32 a^{13} - 64 a^{12} + 208 a^{11} - 124 a^{10} + 20 a^9 \\ \frac{a^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P_{(0)}^{IV} &= - 2 a^{20} + 7 a^{19} + a^{18} - 9 a^{17} - 8 a^{16} - 16 a^{15} + 52 a^{14} - 31 a^{13} + 5 a^{12} \\ P_{(0)}''' &= + 6 a^8 + 24 a^7 - 102 a^6 - 186 a^5 + 192 a^4 + 162 a^3 + 420 a^2 - 708 a + 210 \\ \frac{a^3}{1} P_{(0)}''' &= + 6 a^{11} + 24 a^{10} - 102 a^9 - 186 a^8 + 192 a^7 + 162 a^6 + 420 a^5 - 708 a^4 + 210 a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^6}{1.2} P_{(0)}''' &= + 3 a^{14} + 12 a^{13} - 51 a^{12} - 93 a^{11} + 96 a^{10} + 81 a^9 + 210 a^8 - 354 a^7 + 105 a^6 \\ \frac{a^9}{1.2.3} P_{(0)}''' &= + a^{17} + 4 a^{16} - 17 a^{15} - 31 a^{14} + 32 a^{13} + 27 a^{12} + 70 a^{11} - 118 a^{10} + 35 a^9 \\ P_{(0)}'' &= - 4 a^9 + 22 a^8 - 30 a^7 - 28 a^6 + 64 a^5 + 70 a^4 + 148 a^3 - 320 a^2 - 12 a + 100 \\ \frac{a^3}{1} P_{(0)}'' &= - 4 a^{12} + 22 a^{11} - 30 a^{10} - 28 a^9 + 64 a^8 + 70 a^7 + 148 a^6 - 320 a^5 - 12 a^4 + 100 a^3 \\ \frac{a^6}{1.2} P_{(0)}'' &= - 2 a^{15} + 11 a^{14} - 15 a^{13} - 14 a^{12} + 32 a^{11} + 35 a^{10} + 74 a^9 - 160 a^8 - 6 a^7 + 50 a^6 \\ P_{(0)}' &= a^9 + 2 a^8 - 27 a^7 + 12 a^6 + 86 a^5 - 53 a^4 + 49 a^3 - 278 a^2 + 275 a - 70 \\ \frac{a^3}{1} P_{(0)}' &= a^{12} + 2 a^{11} - 27 a^{10} + 12 a^9 + 86 a^8 - 53 a^7 + 49 a^6 - 278 a^5 + 275 a^4 - 70 a^3 \\ P_{(0)} &= - 2 a^8 + a^7 + 28 a^6 - 9 a^5 - 80 a^4 - 5 a^3 - 23 a^2 + 206 a - 120. \end{aligned}$$

Die gesuchten Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_0^V, \mathfrak{P}_0^{IV}, \mathfrak{P}_0''', \mathfrak{P}_0'', \mathfrak{P}_0', \mathfrak{P}_0$ , welche dem Werthe  $x = a^3$  entsprechen, findet man aus diesen Ausdrücken durch Summirung einiger derselben, wie dies die nachfolgenden Formeln angeben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0^V &= P_{(0)}^V \\ \mathfrak{P}_0^{IV} &= P_{(0)}^{IV} + \frac{a^3}{1} P_{(0)}^V \\ \mathfrak{P}_0''' &= P_{(0)}''' + \frac{a^3}{1} P_{(0)}^{IV} + \frac{a^6}{1.2} P_{(0)}^V \\ \mathfrak{P}_0'' &= P_{(0)}'' + \frac{a^3}{1} P_{(0)}''' + \frac{a^6}{1.2} P_{(0)}^{IV} + \frac{a^9}{1.2.3} P_{(0)}^V \\ \mathfrak{P}_0' &= P_{(0)}' + \frac{a^3}{1} P_{(0)}'' + \frac{a^6}{1.2} P_{(0)}''' + \frac{a^9}{1.2.3} P_{(0)}^{IV} + \frac{a^{12}}{1.2.3.4} P_{(0)}^V \\ \mathfrak{P}_0 &= P_{(0)} + \frac{a^3}{1} P_{(0)}' + \frac{a^6}{1.2} P_{(0)}'' + \frac{a^9}{1.2.3} P_{(0)}''' + \frac{a^{12}}{1.2.3.4} P_{(0)}^{IV} + \frac{a^{15}}{1.2.3.4.5} P_{(0)}^V. \end{aligned}$$

Führt man diese Summirungen wirklich aus, so findet man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0^V &= + 240 a^5 - 120 a^4 - 480 a^3 + 480 a^2 - 120 a \\ \mathfrak{P}_0^{IV} &= + 192 a^8 + 48 a^7 - 456 a^6 + 264 a^5 - 312 a^4 - 384 a^3 + 1248 a^2 - 744 a + 120 \\ \mathfrak{P}_0''' &= + 72 a^{11} + 108 a^{10} - 216 a^9 + 30 a^8 - 228 a^7 - 486 a^6 + 1062 a^5 - 552 a^4 + \\ &\quad + 282 a^3 + 420 a^2 - 708 a + 210 \\ (46) \mathfrak{P}_0'' &= + 16 a^{14} + 64 a^{13} - 68 a^{12} - 22 a^{11} - 92 a^{10} - 298 a^9 + 460 a^8 - 210 a^7 + 194 a^6 + \\ &\quad + 484 a^5 - 638 a^4 + 358 a^3 - 320 a^2 - 12 a + 100 \\ \mathfrak{P}_0' &= + 2 a^{17} + 23 a^{16} - 16 a^{15} - 13 a^{14} - 25 a^{13} - 119 a^{12} + 137 a^{11} - 58 a^{10} + 74 a^9 + \\ &\quad + 276 a^8 - 311 a^7 + 265 a^6 - 234 a^5 - 65 a^4 + 149 a^3 - 278 a^2 + 275 a - 70 \\ \mathfrak{P}_0 &= + 6 a^{19} - 3 a^{18} - 4 a^{17} - 5 a^{16} - 35 a^{15} + 32 a^{14} - 14 a^{13} + 19 a^{12} + 104 a^{11} - 110 a^{10} + \\ &\quad + 121 a^9 - 76 a^8 - 58 a^7 + 127 a^6 - 287 a^5 + 195 a^4 - 75 a^3 - 23 a^2 + 206 a - 120 \end{aligned}$$

Nun kann man die Bestimmung des Folgliedes einleiten. Da das Anfangsglied  $a^3$  nur einer einzigen Auflösung angehört, so hat man nur eine Gleichung des ersten Grades aufzulösen, oder mit anderen Worten eine Division vorzunehmen. Man dividirt nämlich das höchste



Glied  $+ 6a^{19}$  von  $\mathfrak{P}_0$  durch das höchste Glied  $+ 2a^{17}$  von  $\mathfrak{P}'_0$  und nimmt den Quotienten mit entgegengesetztem Zeichen.

$$h_1 a^{\xi_1} = \frac{-6 \cdot a^{19}}{+ 2 \cdot a^{17}} = -3 a^2.$$

Die der Entwicklung unterworfenen Wurzel ist sonach in ihren beiden ersten Gliedern folgende:

$$x = a^3 - 3a^2 + \dots$$

Diesen Werth  $a^3 - 3a^2$  hat man nun abermals anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$  und seine partiell nach  $x$  genommenen Differentialquotienten zu substituiren. Die dabei hervorgehenden Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_1^V, \mathfrak{P}_1^{IV}, \mathfrak{P}_1''', \mathfrak{P}_1'', \mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_1$  gewinnt man aber viel leichter aus den schon gebildeten  $\mathfrak{P}_0^V, \mathfrak{P}_0^{IV}, \mathfrak{P}_0''', \mathfrak{P}_0'', \mathfrak{P}_0', \mathfrak{P}_0$  und zwar auf eine ähnliche Weise, wie diese Letzteren aus  $P_{(0)}^V, P_{(0)}^{IV}, P_{(0)}''', P_{(0)}'', P_{(0)}', P_{(0)}$  gewonnen wurden. Man unterwirft nämlich die Ausdrücke  $\mathfrak{P}_0^V, \mathfrak{P}_0^{IV}, \mathfrak{P}_0''', \mathfrak{P}_0'', \mathfrak{P}_0', \mathfrak{P}_0$  einer wiederholten Multiplication mit  $-\frac{3a^2}{1}, -\frac{3a^2}{2}, -\frac{3a^2}{3}, -\frac{3a^2}{4}, -\frac{3a^2}{5}$  und leitet aus jeder derselben so viele Ausdrücke ab, als die Anzahl der angehängten Accente angibt. Zuletzt summirt man die entsprechenden der so gewonnenen Ausdrücke, dabei von der bekannten Taylor'schen Formel Gebrauch machend, und erhält so mit verhältnissmässig geringer Mühe:  $\mathfrak{P}_1^V, \mathfrak{P}_1^{IV}, \mathfrak{P}_1''', \mathfrak{P}_1'', \mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_1$ . Wir übergangen hier die wirkliche Ausführung dieser höchst einfachen Rechnung, da sie im Vorhergehenden genügend erläutert worden, und lassen nur die Endresultate folgen. Sie sind:

$$(47) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_1^V &= +240 \cdot a^5 - 120 \cdot a^4 - 480 \cdot a^3 + 480 \cdot a^2 - 120 \cdot a \\ \mathfrak{P}_1^{IV} &= +192 \cdot a^8 - 672 \cdot a^7 - 96 \cdot a^6 + 1704 \cdot a^5 - 1752 \cdot a^4 - 24 \cdot a^3 + 1248 \cdot a^2 - \\ &\quad - 744 \cdot a + 120 \\ \mathfrak{P}_1''' &= +72 \cdot a^{11} - 468 \cdot a^{10} + 720 \cdot a^9 + 858 \cdot a^8 - 3180 \cdot a^7 + 2610 \cdot a^6 + 1674 \cdot a^5 - \\ &\quad - 4296 \cdot a^4 + 2514 \cdot a^3 + 60 \cdot a^2 - 708 \cdot a + 210 \\ \mathfrak{P}_1'' &= +16 \cdot a^{14} - 152 \cdot a^{13} + 472 \cdot a^{12} - 238 \cdot a^{11} - 1694 \cdot a^{10} + 3734 \cdot a^9 - 1646 \cdot a^8 - \\ &\quad - 4584 \cdot a^7 + 7466 \cdot a^6 - 3710 \cdot a^5 - 1358 \cdot a^4 + 2482 \cdot a^3 - 950 \cdot a^2 - 12 \cdot a + 100 \\ \mathfrak{P}_1' &= +2 \cdot a^{17} - 25 \cdot a^{16} + 116 \cdot a^{15} - 187 \cdot a^{14} - 337 \cdot a^{13} + 1939 \cdot a^{12} - 2803 \cdot a^{11} - \\ &\quad - 601 \cdot a^{10} + 6806 \cdot a^9 - 8406 \cdot a^8 + 2854 \cdot a^7 + 3529 \cdot a^6 - 4494 \cdot a^5 + 1840 \cdot a^4 + \\ &\quad + 185 \cdot a^3 - 578 \cdot a^2 + 275 \cdot a - 70 \\ \mathfrak{P}_1 &= +8 \cdot a^{17} - 110 \cdot a^{16} + 589 \cdot a^{15} - 1456 \cdot a^{14} + 1123 \cdot a^{13} + 2425 \cdot a^{12} - 6895 \cdot a^{11} + \\ &\quad + 6631 \cdot a^{10} - 548 \cdot a^9 - 5227 \cdot a^8 + 5441 \cdot a^7 - 2063 \cdot a^6 - 788 \cdot a^5 + 1479 \cdot a^4 - \\ &\quad - 900 \cdot a^3 + 187 \cdot a^2 + 206 \cdot a - 120. \end{aligned}$$

Das nächstfolgende Glied findet man durch Division des mit entgegengesetztem Zeichen genommenen höchsten Gliedes von  $\mathfrak{P}_1$  durch das unverändert gebliebene höchste Glied von  $\mathfrak{P}'_1$ .

$$h_2 a^{\xi_2} = \frac{-8 \cdot a^{17}}{+ 2 \cdot a^{17}} = -4$$

und der bisher gefundene Bestandtheil der Wurzel besteht aus folgenden drei Gliedern:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + \dots$$

Man hat nun die Substitution dieses Trinoms zu bewerkstelligen und verfährt dabei abermals auf die bereits geübte Weise, indem man die Ausdrücke  $\mathfrak{P}_1^V, \mathfrak{P}_1^{IV}, \mathfrak{P}_1''', \mathfrak{P}_1'', \mathfrak{P}_1$  mit den Multiplicatoren  $-\frac{4}{1}, -\frac{4}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{4}, -\frac{4}{5}$  zu wiederholten Malen multiplicirt

und die so gewonnenen Producte in geeigneter Ordnung addirt. Das Resultat dieser Rechnung ist Folgendes:

$$\mathfrak{P}_2^V = +240.a^5 - 120.a^4 - 480.a^3 + 480.a^2 - 120.a$$

$$\mathfrak{P}_2^{IV} = +192.a^8 - 672.a^7 - 96.a^6 + 744.a^5 - 1272.a^4 + 1896.a^3 - 672.a^2 - 264.a + 120$$

$$\mathfrak{P}_2^{III} = +72.a^{11} - 468.a^{10} + 720.a^9 + 90.a^8 - 492.a^7 + 2994.a^6 - 3222.a^5 + 1752.a^4 - 1230.a^3 - 1092.a^2 + 1308.a - 270$$

$$\mathfrak{P}_2^{II} = +16.a^{14} - 152.a^{13} + 472.a^{12} - 526.a^{11} + 178.a^{10} + 854.a^9 - 3542.a^8 + 2760.a^7 - 3742.a^6 + 666.a^5 + 3090.a^4 - 2646.a^3 + 3674.a^2 - 1852.a + 220$$

$$\mathfrak{P}_2^I = +2.a^{17} - 25.a^{16} + 116.a^{15} - 251.a^{14} + 271.a^{13} + 51.a^{12} - 1275.a^{11} + 2431.a^{10} - 2370.a^9 + 2994.a^8 + 2918.a^7 - 4431.a^6 + 8122.a^5 - 9688.a^4 + 5505.a^3 - 4490.a^2 + 1315.a - 70$$

$$\mathfrak{P}_2 = -10.a^{16} + 125.a^{15} - 580.a^{14} + 1255.a^{13} - 1555.a^{12} + 1645.a^{11} + 475.a^{10} - 5580.a^9 + 8125.a^8 - 15895.a^7 + 14685.a^6 - 14220.a^5 + 11415.a^4 - 4760.a^3 + 3475.a^2 - 350.a$$

Man erhält hier als nächstes Folgeglied:

$$h_3 a^{\xi_3} = \frac{+10.a^{16}}{+2.a^{17}} = +5a^{-1}$$

und hat somit für  $x$  den in vier Gliedern entwickelten Ausdruck:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + 5a^{-1} + \dots$$

Der nächste Schritt besteht nun in der Bildung der Substitutionsresultate. Führt man diese Rechnung in der bekannten Weise aus, so gelangt man zur Überzeugung, dass das Substitutionsresultat  $\mathfrak{P}_3$  identisch gleich Null wird, und es ist sonach:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + 5a^{-1}$$

der complete Wurzelwerth. Hier schliesst sich also die Entwicklung von selbst.

Dieser Fall gehört zu den günstigsten von allen, dem man begegnen kann, indem man dadurch aller Untersuchungen über die Convergenz der Reihe und über die Grösse des Ergänzungsgliedes überhoben wird. Aber derselbe ist jedenfalls zu den nicht häufigen Ausnahmen zu zählen. Meistentheils bricht die Entwicklung nicht ab, sondern lässt sich nach Belieben fortsetzen ins Unendliche. Dies gilt auch hier von allen übrigen Auflösungen der hier vorliegenden Gleichung. Wir wollen einige derselben gleichfalls in Betracht ziehen, so weit nämlich, als sie zu neuen Bemerkungen Veranlassung geben.

Nehmen wir zunächst die mit dem Anfangsgliede:  $\frac{1}{2}$  versehene Auflösung vor. Wir begegnen hier einer neuen Eigenthümlichkeit in Bezug auf das praktische Rechnen. Da nämlich hier ein Bruch erscheint, so würden auch sämtliche Coëfficienten oder doch mindestens einige in den Substitutionsresultaten gebrochene Werthe erlangen, was die Rechnung einigermaßen erschweren würde. Hier, wo dieser Nenner zufällig den Werth 2 besitzt, lässt sich wohl diesem Übelstande leicht abhelfen, indem man  $\frac{1}{2}$  durch den Decimalbruch 0.5 ersetzt und man könnte im Übrigen genau so wie früher verfahren. Wenn aber der Nenner eine andere Zahl wäre, die auch andere einfache Factoren als 2 und 5 in sich schliesst, so würde man wohl den Decimalbruch nicht mehr anwenden können, da derselbe ein unendlicher wäre. Man wird dann vielmehr alle Coëfficienten der Substitutionsresultate lieber in Bruchform belassen, aber auf einerlei Nenner bringen, der dann dem ganzen Substitutionsresultate vorgesetzt werden kann.

Innerhalb der Klammern erscheinen dann nur ganze Zahlen. Man kann sich diesen Vorgang noch in einer anderen Weise versinnlicht denken. Anstatt nämlich  $x = \frac{1}{2}$  zu substituieren, verändert man die Unbekannte  $x$  in eine neue  $y$  mittelst der Substitution  $x = \frac{y}{N}$  und hat nun nur noch  $y = 1$  zu setzen. Diese Veränderung der Unbekannten  $x$  lässt sich, wie bekannt, fast ohne alle Rechnung an dem Gleichungspolynome vornehmen. Ist nämlich:

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

die gegebene Gleichung, und will man  $x = \frac{y}{N}$  setzen, so erhält man:

$$A_m y^m + N \cdot A_{m-1} \cdot y^{m-1} + N^2 \cdot A_{m-2} y^{m-2} + \dots + N^{m-2} A_2 y^2 + N^{m-1} A_1 y + N^m A_0 = 0$$

und hier ist zugleich die Regel ersichtlich, wie diese Transformation der Gleichung am einfachsten bewerkstelligt werden kann. Man multiplicirt nämlich die Coëfficienten derselben beziehungsweise mit

$$1, N, N^2, N^3, \dots, N^{m-2}, N^{m-1}, N^m.$$

Diesen Weg wird man also in allen jenen Fällen einschlagen, wo gebrochene Coëfficienten  $h$  in der Entwicklung vorkommen. Im gegenwärtigen Falle nimmt die Rechnung folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} P_{(0)}^V &= +240 \cdot a^5 - 120 \cdot a^4 - 480 \cdot a^3 + 480 \cdot a^2 - 120 \cdot a \\ 2 \cdot P_{(0)}^{IV} &= -96 \cdot a^8 + 336 \cdot a^7 + 48 \cdot a^6 - 432 \cdot a^5 - 384 \cdot a^4 - 768 \cdot a^3 + 2496 \cdot a^2 - 1488 \cdot a + 240 \\ 2^2 \cdot P_{(0)}^{III} &= +24 \cdot a^8 + 96 \cdot a^7 - 408 \cdot a^6 - 744 \cdot a^5 + 768 \cdot a^4 + 648 \cdot a^3 + 1680 \cdot a^2 - 2832 \cdot a + 840 \\ 2^3 \cdot P_{(0)}^{II} &= -32 \cdot a^9 + 176 \cdot a^8 - 240 \cdot a^7 - 224 \cdot a^6 + 512 \cdot a^5 + 560 \cdot a^4 + 1184 \cdot a^3 - 2560 \cdot a^2 - \\ &\quad - 96 \cdot a + 800 \\ 2^4 \cdot P_{(0)}^I &= +16 \cdot a^9 + 32 \cdot a^8 - 432 \cdot a^7 + 192 \cdot a^6 + 1376 \cdot a^5 - 848 \cdot a^4 + 784 \cdot a^3 - 4448 \cdot a^2 + \\ &\quad + 4400 \cdot a - 1120 \\ 2^5 \cdot P_{(0)} &= -64 \cdot a^8 + 32 \cdot a^7 + 896 \cdot a^6 - 288 \cdot a^5 - 2560 \cdot a^4 - 160 \cdot a^3 - 736 \cdot a^2 + 6592 \cdot a - 3840 \\ \mathfrak{P}_0^V &= +240 \cdot a^5 - 120 \cdot a^4 - 480 \cdot a^3 + 480 \cdot a^2 - 120 \cdot a \\ 2 \cdot \mathfrak{P}_0^{IV} &= -96 \cdot a^8 + 336 \cdot a^7 + 48 \cdot a^6 - 192 \cdot a^5 - 504 \cdot a^4 - 1248 \cdot a^3 + 2976 \cdot a^2 - 1608 \cdot a + 240 \\ 2^2 \cdot \mathfrak{P}_0^{III} &= -72 \cdot a^8 + 432 \cdot a^7 - 360 \cdot a^6 - 1056 \cdot a^5 + 324 \cdot a^4 - 360 \cdot a^3 + 4416 \cdot a^2 - 4380 \cdot a + 1080 \\ 2^3 \cdot \mathfrak{P}_0^{II} &= -32 \cdot a^9 + 152 \cdot a^8 + 24 \cdot a^7 - 608 \cdot a^6 - 408 \cdot a^5 + 1116 \cdot a^4 + 1368 \cdot a^3 + 448 \cdot a^2 - \\ &\quad - 3692 \cdot a + 1760 \\ 2^4 \cdot \mathfrak{P}_0^I &= -16 \cdot a^9 + 204 \cdot a^8 - 568 \cdot a^7 - 228 \cdot a^6 + 1454 \cdot a^5 + 27 \cdot a^4 + 2144 \cdot a^3 - 5732 \cdot a^2 + \\ &\quad + 2635 \cdot a + 140 \\ 2^5 \cdot \mathfrak{P}_0 &= +56 \cdot a^8 - 490 \cdot a^7 + 916 \cdot a^6 + 1204 \cdot a^5 - 3017 \cdot a^4 + 1288 \cdot a^3 - 6076 \cdot a^2 + 10409 \cdot a - 4410. \end{aligned}$$

Das nächste Folglied ist:

$$h_1 a^{\xi_1} = \frac{-56 \cdot a^8}{-2 \cdot 16 \cdot a^9} = + \frac{7}{4} a^{-1}$$

und der bisher entwickelte Werth von  $x$ :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} a^{-1} + \dots \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{7}{2} a^{-1} + \dots \right].$$

Bei den nun zu bildenden Substitutionsresultaten  $\mathfrak{P}_1^V, \mathfrak{P}_1^{IV}, \mathfrak{P}_1^{III}, \mathfrak{P}_1^{II}, \mathfrak{P}_1^I, \mathfrak{P}_1$  wird man daher abermals  $\frac{1}{2}$  in verschiedenen Potenzen neuerdings als Factor zu sondern haben, weil

der Coëfficient  $h_1$  abermals einen neuen Nenner 2 besitzt. Demgemäss erhalten diese Substitutionsresultate  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}, \frac{1}{4^5}$  als Factor gesondert. Der Gang der Rechnung bedarf weiter keiner Erläuterung. Das nächste Folgeglied ist:

$$h_2 a^{\frac{7}{2}} = + \frac{7}{8} a^{-2}$$

und macht abermals eine Sonderung eines neuen Factors  $\frac{1}{2}$  nöthwendig, so dass  $\mathfrak{P}_2^V, \mathfrak{P}_2^{IV}, \mathfrak{P}_2^{III}, \mathfrak{P}_2^{II}, \mathfrak{P}_2^I, \mathfrak{P}_2$  ausserhalb der Klammern beziehungsweise mit  $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{8^3}, \frac{1}{8^4}, \frac{1}{8^5}$  multiplicirt erscheinen. In solcher Weise schreitet die Entwicklung vorwärts, und liefert stets ein neues Glied von  $x$ , welches in einer unendlichen Reihe erscheint, und zwar in nachfolgender Gestalt:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} a^{-1} + \frac{7}{8} a^{-2} + \frac{7}{16} a^{-3} + \dots$$

Nun wollen wir noch zuletzt eine der beiden Auflösungen in Betrachtung ziehen, welchen die Anfangsglieder  $+ \sqrt{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}}, - \sqrt{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}}$  entsprechen, weil sie eine bisher nicht berührte Eigenthümlichkeit vorführen. Die in denselben erscheinende Wurzelgrösse  $\sqrt{-1}$  kommt in beiden vor, und der einzige Unterschied dieser beiden Anfangsglieder liegt nur im Zeichen  $+, -$  welcher dieser doppeldeutigen Grösse  $\sqrt{-1}$  ertheilt wurde. Dieser Eigenthümlichkeit begegnet man bei der Auflösung von Buchstabengleichungen sehr häufig und ist dadurch in den Stand gesetzt, zwei oder mehrere Auflösungen auf einmal zu entwickeln. Führt man nämlich die Rechnungen für eines dieser Anfangsglieder, z. B. für  $+ \sqrt{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}}$  durch, so braucht man in dem erhaltenen Ausdrucke:

$$x = + \sqrt{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} - \sqrt{-1} \cdot a^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot a^{-\frac{3}{2}} + \dots$$

nur  $\sqrt{-1}$  in der zweiten Bedeutung  $-\sqrt{-1}$  zu nehmen, um auch allsogleich die andere Auflösung:

$$x = - \sqrt{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1} \cdot a^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot a^{-\frac{3}{2}} - \dots$$

zu erhalten, ohne die Rechnung neuerdings durchführen zu müssen. Dieser Erscheinung begegnet man öfters, namentlich dann, wenn die Bestimmungsgleichung in  $h_0$  eine binomische Gleichung höheren Grades ist, aber auch in anderen Fällen, wo die höhere Bestimmungsgleichung in  $h_0$  zwar nicht binomisch ist, aber durch Wurzelausziehungen in geschlossener Form aufgelöst werden kann. In all' diesen Fällen kann man sich mit der Entwicklung eines einzigen dieser Werthe von  $x$  begnügen, da in ihm auch alle übrigen enthalten sind. Zuletzt wären noch jene Fälle zu erwähnen, in welchen die Bestimmungsgleichung in  $h_0$  vom höheren Grade ist, und nicht in geschlossener Form aufgelöst werden kann. Dieser Fall ereignet sich aber doch nur verhältnissmässig sehr selten, aber wenn man demselben wirklich begegnet, so kann man eben nur angenäherte Werthe für  $h_0, h_1, h_2, \dots$  finden. Im Übrigen bleibt der Gang der Rechnung unverändert.

### Zweites Beispiel.

Um auch den zweiten Fall durch ein Beispiel zu erläutern, in welchem die vollständige Trennung der Wurzeln mittelst der Bestimmung der Anfangsglieder nicht erfolgt, wählen wir die Gleichung:

$$x^5 + (-10.a + 1).x^4 + (+40.a^2 - 8.a)x^3 + (-80.a^3 + 23.a^2 + 1)x^2 + (80.a^4 - 28.a^3 - a^2 - 4a + 1)x + (-32.a^5 + 12.a^4 + 2.a^3 + 4.a^2 - 2.a) = 0.$$

Die Bestimmung der Anfangsglieder für die absteigende Entwickelungsform liefert den einzigen Werth

$$\xi_0 = 1$$

mit der Bestimmungsgleichung:

$$h_0^5 - 10h_0^4 + 40h_0^3 - 80h_0^2 + 80h_0 - 32 = 0$$

welche einen einzigen Werth:

$$h_0 = 2$$

aber als fünffaache Wurzel liefert. Das Anfangsglied ist somit ein einziges:  $+2a$  und ist allen fünf Wurzeln  $x$  gemeinschaftlich. Man hat hier zur Bestimmung der Folgeglieder nach der allgemeinen Regel von §. 12 vorzugehen, d. h. man muss  $x=2a$  in das Gleichungspolynom  $P$  und seine fünf nach  $x$  genommenen Differentialquotienten  $\frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \frac{d^3P}{dx^3}, \frac{d^4P}{dx^4}, \frac{d^5P}{dx^5}$  substituiren, aus den dabei gewonnenen Substitutionsresultaten  $\mathfrak{P}_0^V, \mathfrak{P}_0^{IV}, \mathfrak{P}_0^{III}, \mathfrak{P}_0^{II}, \mathfrak{P}_0^I, \mathfrak{P}_0$  die Gleichung des fünften Grades in  $x'$  bilden:

$$\frac{1}{5'} \mathfrak{P}_0^V \cdot x'^5 + \frac{1}{4'} \mathfrak{P}_0^{IV} x'^4 + \frac{1}{3'} \mathfrak{P}_0^{III} x'^3 + \frac{1}{2'} \mathfrak{P}_0^{II} x'^2 + \frac{1}{1'} \mathfrak{P}_0^I x' + \mathfrak{P}_0 = 0$$

und die Anfangsglieder von  $x'$  nach der bekannten Regel bestimmen. Man gelangt zu den Substitutionsresultaten auf die bekannte Weise und findet namentlich:

$$\mathfrak{P}_0^V = +120, \quad \mathfrak{P}_0^{IV} = +24, \quad \mathfrak{P}_0^{III} = 0, \quad \mathfrak{P}_0^{II} = -2a^2 + 2, \quad \mathfrak{P}_0^I = -a^2 + 1, \quad \mathfrak{P}_0 = 0.$$

Da hier  $\mathfrak{P}_0$  verschwindet, so folgt hieraus, dass  $x = 2a$  der complete Werth einer Wurzel sei, allein nur einer einzigen, weil  $\mathfrak{P}_0$  von Null verschieden ist. Die übrigen vier Wurzeln müssen erst weiter entwickelt werden. Zur Bestimmung der nächsten Folgeglieder dient die Gleichung:

$$x'^5 + x'^4 - a^2 x'^2 - a^2 x' = 0.$$

Sie liefert vier von einander und von Null verschiedene Anfangsglieder:

$$+ a^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) a^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) a^{\frac{2}{3}}, \quad -1$$

und somit ist die vollständige Trennung aller Wurzeln erfolgt. Die weitere Entwickelung erfordert nur die Auflösung von Gleichungen des ersten Grades und wird in bekannter Weise weitergeführt.

### §. 15.

Die absteigende Entwickelung von  $x$  wurde bisher in ihrer einfachsten Gestalt gezeigt, und immer ein Glied nach dem anderen, jedes durch ein eigenes und regelmässig wiederkehrendes Verfahren aufgefunden. Dieses regelmässige Wiederholen der Substitution nach einem jeden einzelnen Folgegliede ist aber nur beim Beginne der Entwickelung unumgänglich nothwendig; hat man eine grössere Anzahl von Gliedern bereits entwickelt, so kann man aus einem einzigen Substitutionsresultate nicht blos das nächstfolgende Glied, sondern eine grössere Anzahl derselben auf einmal finden. Die Anzahl der durch einen einzigen Schritt zu gewinnenden Glieder

nimmt in einem raschen Verhältnisse zu, wenn schon genügend viele Entwicklungsglieder bekannt sind. Das Verfahren, welches statt eines einzigen Folgegliedes deren mehrere auf Einmal liefert, ist nicht sehr different von dem früheren. Bekanntlich hat man zur Bestimmung des Folgegliedes  $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$  im gewöhnlichen Falle, wo die Trennung der Wurzel bewerkstelligt ist, die gewonnene Gliedersumme  $x_r$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P$  zu substituiren und das höchste Glied des dabei erhaltenen Substitutionsresultates  $\mathfrak{P}$  durch das höchste Glied des aus  $\frac{dP}{dx}$  hervorgehenden Substitutionsresultates  $\mathfrak{P}'$  zu dividiren, und das Zeichen des erhaltenen Quotienten in das entgegengesetzte zu verwandeln. Es beruht demnach die Bestimmung des Folgegliedes  $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$  eigentlich in der Entwicklung des ersten Gliedes des Quotienten:  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$ . Hat man schon eine genügende Anzahl von Gliedern entwickelt, mit andern Worten, ist  $r$  hinlänglich gross, so kann man die Entwicklung dieses Quotienten über das erste Glied fortsetzen und nach Umständen eine mehr oder minder grosse Anzahl von Gliedern aus diesem einzigen Substitutionsresultate gewinnen, die alle der Wurzel  $x$  zukommen. Auf solche Weise ist man im Stande, zur bekannten Gliedersumme  $x_r$  eine andere  $x'$  hinzuzufügen, die aus  $s$  Gliedern besteht, und erhält so durch eine einzige Substitution und genügend weit fortgesetzte Division die Wurzel  $x$  in  $r+s$  Gliedern, wozu sonst  $s$  aufeinanderfolgende Substitutionen erforderlich gewesen wären. Die Anzahl  $s$  der durch einen einzigen solchen Schritt zu gewinnenden Glieder steht mit der Anzahl  $r$  der früher bekannten im Zusammenhange und wächst mit  $r$  in einem raschen Verhältnisse. Es ist dies ein ähnliches Verhalten, wie bei dem Approximationsverfahren für numerische Gleichungen: Ist man mit dem Grenzwerte der Wurzel hinlänglich nahe gerückt, so kann man durch eine einzige Division nicht bloß eine einzige, sondern eine mehr oder minder bedeutende Anzahl von verlässlichen Stellen gewinnen. Die dabei stattfindende Gesetzmässigkeit wurde zuerst von Fourier gründlich untersucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind im zweiten Buche seines unvollständig erschienenen Werkes: „Analyse des équations déterminées“ niedergelegt. Die darauf abzielenden Regeln sind dort zunächst nur für numerische Gleichungen entwickelt, allein sie besitzen eine allgemeine Geltung, auch für Buchstabengleichungen. Wir wollen nun das Stattfinden der aufgestellten Behauptungen erweisen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit  $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}'_r, \mathfrak{P}''_r \dots$  die Substitutionsresultate, welche für  $x = x_r$  aus den Polynomen  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots$  hervorgehen und mit  $\mathfrak{H}_r a^{\xi_r}, \mathfrak{H}'_r a^{\xi_r}, \mathfrak{H}''_r a^{\xi_r}, \dots$  ihre höchsten von Null verschiedenen Glieder. Fügt man nun zur Gliedersumme  $x_r$  ein nächstes Entwicklungsglied  $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$  oder eine Summe von mehreren solchen:

$$x' = h_{r+1}a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}a^{\xi_{r+2}} + \dots + h_{r+s}a^{\xi_{r+s}}$$

hinzu, so erhält man  $x_{r+1}$  und  $x_{r+s}$  und die diesen Gliedersummen entsprechenden Substitutionsresultate und höchsten Glieder derselben tragen als Unterscheidungszeichen den Index  $r+1$  und  $r+s$  statt  $r$ .

In der Regel kann man annehmen, dass die Wurzeln  $x$  der Gleichung  $P=0$  verschieden sind, sowohl von jenen der  $\frac{dP}{dx}=0$ , als auch der  $\frac{d^2P}{dx^2}=0$ . Findet diese Annahme wirklich Statt, so wird eine Wurzel  $x$  der Gleichung  $P=0$  entweder schon im Anfangsgliede der absteigenden Entwicklungsform von jener der  $\frac{dP}{dx}=0$  und der  $\frac{d^2P}{dx^2}=0$  verschieden ausfallen, oder wenigstens in einem späteren Entwicklungsgliede. Es geht daher aus dieser Annahme hervor, dass bei fortgesetzter Entwicklung von  $x$ , also beim Wachsen der Gliederzahl  $r+1$ , die

Reduction auf Null, welche im Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}$  anfangs nur die höchsten Glieder, später aber der Reihe nach die nächst niedrigeren befällt und in der angegebenen Richtung unaufhaltsam fortschreitet, je mehr Entwicklungsglieder zusammengefasst werden. Bei den beiden anderen Substitutionsresultaten  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$  nicht ins Unbegrenzte fortschreiten könne. Eine Reduction der höchsten Glieder auf Null kann in  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$  nur dann erfolgen, wenn das Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  zufälligerweise auch einer Wurzel der  $\frac{dP}{dx} = 0$  oder  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  zukommt. Wenn daher gleichwohl dieser seltene Fall stattfinden sollte, so wird dennoch bei fortgesetzter Entwicklung von  $x$ , sobald man zum unterscheidenden Entwicklungsgliede gelangt, dieses Verschwinden der höchsten Glieder in  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$  ihr Ende erreichen. Ein unbegrenztes Fortschreiten dieser Reductionen auf Null in den höchsten Gliedern von  $\mathfrak{P}'$  oder  $\mathfrak{P}''$  würde aber darauf hinweisen, dass die der Entwicklung unterworfenen Wurzel  $x$  nicht nur der  $P=0$  sondern auch der  $P'=0$  oder der  $P''=0$  Genüge leistet. Ein solcher seltener Fall würde aber stets zu einer bedeutenden Vereinfachung führen, denn man kann durch Sonderung des gemeinschaftlichen Factors, der in zweien dieser drei Polynome erscheint, und durch Nullsetzen desselben die in Entwicklung begriffene Wurzel aus einer viel einfacher gebauten Gleichung gewinnen, bei der dieser Ausnahmefall nicht mehr stattfindet. Hat aber bei irgend einem Entwicklungsgliede die Reduction auf Null in den höchsten Gliedern von  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$  ihr Ende erreicht, so wird bei dem Hinzufügen neuer Entwicklungsglieder in den Anfangsgliedern  $\mathfrak{S}' a^{2r}$  und  $\mathfrak{S}'' a^{2r}$  keine Änderung mehr vor sich gehen, weil die neu hinzugefügten Glieder sämtlich von niederer Ordnung sind. Wenn also die in Entwicklung stehende Wurzel  $x$  weder der  $\frac{dP}{dx} = 0$  noch der  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  Genüge leistet, so nimmt zwar  $\mathfrak{U}_r$  mit dem Wachsen von  $r$  in's Unbegrenzte ab, aber  $\mathfrak{U}'_r$  und  $\mathfrak{U}''_r$  erreichen früher oder später einen constanten Werth. Wir wollen dieselben beziehungsweise mit  $\mathfrak{U}'_p$  und  $\mathfrak{U}''_q$  andeuten, womit zugleich gesagt sein soll, dass mit dem Entwicklungsgliede  $h_p a^{\xi_p}$  die Reduction in  $\mathfrak{P}'_p$  und mit dem anderen  $h_q a^{\xi_q}$  jene in  $\mathfrak{P}''_q$  ihr Ende erreicht hat. Alle jene  $\mathfrak{U}'_p$  und  $\mathfrak{U}''_q$ , deren Index  $r$  sowohl  $p$  als  $q$  übersteigt, besitzen die Werthe  $\mathfrak{U}'_p$  und  $\mathfrak{U}''_q$ .

Ist man zu einem constanten Werthe von  $\mathfrak{U}'_p$  gelangt, so dient dies bekanntermassen als Kennzeichen, dass die vollständige Isolirung der in Entwicklung stehenden Wurzel  $x$  von allen anderen, welche noch ausser dem der Gleichung  $P=0$  zukommen, erfolgt sei, und man erhält die übrigen Folgeglieder durch wiederholte Divisionen. Ist nämlich  $r > p$ , so findet man das auf  $x_p$  folgende Glied  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  durch Entwicklung des höchsten Gliedes vom Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$ . Wir wollen nun aber voraussetzen,  $r$  sei noch überdies grösser oder mindestens gleich  $q$ . Ist man in der Entwicklung so weit gelangt, so braucht man sich nicht mehr mit einem einzigen weiteren Entwicklungsgliede zu begnügen, sondern kann die Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  auf mehrere Glieder fortsetzen; sie sind alle brauchbare Entwicklungsglieder.

Um die Wahrheit des Gesagten darzuthun, werden wir zeigen, dass dann die einzelnen Anfangsglieder des entwickelten Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  der Reihe nach identisch sind mit den ersten Gliedern der Quotienten:

$$-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r} \cdot -\frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}} \cdot -\frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}'_{r+2}} \cdot \dots \cdot -\frac{\mathfrak{P}_{r+s-1}}{\mathfrak{P}'_{r+s-1}}$$

so zwar, dass es dem Erfolge nach einerlei ist, ob man die Summe von Folgegliedern:

$$x' = h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \dots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}$$

auf einmal durch hinlänglich weit fortgesetzte Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$  oder einzuweise auf die bekannte Art ableitet. Wir werden daher  $\mathfrak{P}_{r+s}$  und  $\mathfrak{P}'_{r+s}$  für einen allgemeinen Werth von  $s$  construiren und das erste Glied des Quotienten  $\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  mit dem  $(s+1)$ sten Entwicklungsgliede von  $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$  zusammenhalten und untersuchen, für welche Werthe von  $s$  eine vollkommene Identität derselben besteht und für welche nicht.

Unserer Bezeichnungsweise gemäss bedeutet  $x_r$  die bekannte Gliedersumme,  $x'$  die Summe der nächstfolgenden  $s$  Glieder von  $x$ , und  $\mathfrak{P}_{r+s}, \mathfrak{P}'_{r+s}, \mathfrak{P}''_{r+s}, \dots$  die für  $x_{r+s} = x_r + x'$  aus den Polynomen  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots$  hervorgehenden Substitutionsresultate. Sie sind, aufsteigend nach Potenzen von  $x'$  geordnet, folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{r+s} &= \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r' x' + \frac{1}{2} \mathfrak{P}_r'' x'^2 + \frac{1}{2.3} \mathfrak{P}_r''' x'^3 + \frac{1}{2.3.4} \mathfrak{P}_r^{IV} x'^4 + \dots \\ \mathfrak{P}'_{r+s} &= \mathfrak{P}_r' + \mathfrak{P}_r'' x' + \frac{1}{2} \mathfrak{P}_r''' x'^2 + \frac{1}{2.3} \mathfrak{P}_r^{IV} x'^3 + \dots \\ \mathfrak{P}''_{r+s} &= \mathfrak{P}_r'' + \mathfrak{P}_r''' x' + \frac{1}{2} \mathfrak{P}_r^{IV} x'^2 + \dots \end{aligned}$$

Da vorausgesetztermassen die höchsten von Null verschiedenen Glieder der Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_r', \mathfrak{P}_r'', \mathfrak{P}_r''' \dots$  die Exponenten  $\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_q, \mathfrak{A}_r'' \dots$  tragen, während  $x'$  vom Grade  $\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_p$  ist; so sind die einzelnen Bestandtheile der Summen in den zweiten Theilen dieser Gleichungen Ausdrücke vom Grade:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_p' + \xi_{r+1}, \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r''' + 3\xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r^{IV} + 4\xi_{r+1}, \dots \\ \mathfrak{A}_p', \mathfrak{A}_q'' + \xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r''' + 2\xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r^{IV} + 3\xi_{r+1}, \dots \\ \mathfrak{A}_r'', \mathfrak{A}_r''' + \xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r^{IV} + 2\xi_{r+1}, \dots \end{aligned}$$

und weil  $\mathfrak{A}_p$  und  $\mathfrak{A}_q''$  für alle über  $p$  und  $q$  liegenden Werthe von  $r$  die Exponenten  $\mathfrak{A}_r$  und  $\mathfrak{A}_r''$  vorstellen sollen, so muss offenbar in der zweiten horizontalen Reihe dieser Gradzahlen  $\mathfrak{A}_p$ , in der dritten aber  $\mathfrak{A}_q''$  den grössten Werth besitzen. Da nun die Gradzahlen der ersten Reihe sich nur durch das Hinzufreten von  $\xi_{r+1}$  und  $2\xi_{r+1}$  von den darunter stehenden der zweiten und dritten Reihe unterscheiden, wodurch das gegenseitige Grössenverhältniss offenbar nicht geändert wird und ferner

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_p + \xi_{r+1}$$

ist; so sind in der ersten Reihe die beiden ersten Gradzahlen gleich und grösser als alle nachfolgenden; nach ihnen ist die dritte  $\mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}$  die nächst niedrigere; alle übrigen aber besitzen noch viel kleinere Werthe. Es besteht also die Relation:

$$(48) \quad \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_p + \xi_{r+1} > \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1} > \mathfrak{A}_r''' + 3\xi_{r+1} \text{ und die übrigen.}$$

Nach dieser Relation wird also das höchste Glied von  $\mathfrak{P}_{r+s}$  nothwendig aus den beiden Bestandtheilen  $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r' x'$  hervorgehen, während die Summe aller übrigen, nämlich:

$$(49) \quad \frac{1}{2} \mathfrak{P}_r'' x'^2 + \frac{1}{2.3} \mathfrak{P}_r''' x'^3 + \frac{1}{2.3.4} \mathfrak{P}_r^{IV} x'^4 + \dots$$

Nichts dazu beizutragen vermag. Allein zufolge der Wahl von  $x'$  erfolgt in einer gewissen Anzahl von Anfangsgliedern eine Reduction auf Null, so zwar, dass  $\mathfrak{A}_{r+s}$  einen unter  $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_p + \xi_{r+1}$  liegenden Werth erlangen wird. Es kann daher im Allgemeinen nicht behauptet



werden, dass auch  $\mathfrak{A}_{r+s} > \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}$  ausfallen werde, sondern der Werth dieses Exponenten kann auch gelegentlich mit  $\mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}$  zusammenfallen oder darunter liegen. Man wird hier zwei Fälle zu unterscheiden haben: jenen, wo der Exponent des höchsten von Null verschiedenen Gliedes

$$(50) \quad \mathfrak{A}_{r+s} > \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}$$

ist, und den anderen, wo die entgegengesetzte Relation:

$$(51) \quad \mathfrak{A}_{r+s} < \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}$$

stattfindet. Gilt das Erstere, so ist auch unmittelbar ersichtlich, dass das höchste Glied von  $\mathfrak{P}_{r+s}$ , nämlich  $\mathfrak{S}_{r+s} a^{\mathfrak{A}_{r+s}}$  nur aus den zwei Bestandtheilen  $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$  hervorgehen könne und dass alle übrigen Bestandtheile (49) nichts dazu beizutragen vermögen. Findet aber die entgegengesetzte Relation Statt, so wird  $\mathfrak{S}_{r+s} a^{\mathfrak{A}_{r+s}}$  seine constituirenden Elemente auch aus  $\frac{1}{2} \mathfrak{P}_r'' x'^2$  und vielleicht auch aus den übrigen nachfolgenden Bestandtheilen ziehen. Die Unterscheidung dieser beiden Fälle ist von Wichtigkeit, weil es davon abhängen wird, ob das  $(s+1)$ ste Entwicklungsglied von  $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  noch mit dem Anfangsgliede  $\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  übereinstimmt oder nicht. So lange nämlich die Relation (50) erfüllt ist, wird es bei der Bestimmung des Anfangsgliedes von  $\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  einerlei sein, ob man das erste von Null verschiedene Glied von  $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$  oder von  $\mathfrak{P}_{r+s}$  der Division durch das erste Glied von  $\mathfrak{P}'_{r+s}$  oder, was dasselbe ist, durch  $\mathfrak{S}_p a^{\mathfrak{A}_p}$  unterwirft, während beim Stattfinden der entgegengesetzten Relation (51) dies nicht mehr im Allgemeinen behauptet werden darf, weil auch Glieder von  $\frac{1}{2} \mathfrak{P}_r'' x'^2$  in die Rechnung eingehen. Bedenkt man noch überdies, dass  $(\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x')$  nach gehöriger Reduction der sich tilgenden Glieder eigentlich der  $s$ te Partialrest ist, der sich bei der Division  $(-\mathfrak{P}_r) : \mathfrak{P}'_r$  ergibt, und aus dem das nächstfolgende  $s+1$ ste Glied gezogen wird, so sieht man allsogleich, dass so lange die Relation (50) besteht, die vollkommene Übereinstimmung zwischen den einzelnen Entwicklungsgliedern von  $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  und den Anfangsgliedern der Quotienten:

$$\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}, \frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}}, \frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}'_{r+2}}, \frac{\mathfrak{P}_{r+3}}{\mathfrak{P}'_{r+3}}, \dots, \frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$$

stattfindet, während bei dem Auftreten der entgegengesetzten Relation (51) eine Verschiedenheit in den auf diesen zwei Wegen entstommenen Entwicklungsgliedern auftaucht. Die beiden Relationen (50) und (51) werden daher die Grenze angeben, bis zu der die Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  fortgesetzt werden darf.

Wir wollen denselben eine andere für die praktische Anwendung geeignetere Form ertheilen, indem wir beiderseits die Grösse  $\mathfrak{A}_p$  abziehen. Sie verwandeln sich dadurch, wenn man noch überdies dem letzten verlässlichen Gliede den Index  $r+s$ , dem darauffolgenden unverlässlichen aber den Index  $r+s+1$  ertheilt, in:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{r+s-1} - \mathfrak{A}_p &> \mathfrak{A}_q'' - \mathfrak{A}_p' + 2\xi_{r+1} \\ \mathfrak{A}_{r+s} - \mathfrak{A}_p &< \mathfrak{A}_q'' - \mathfrak{A}_p' + 2\xi_{r+1} \end{aligned}$$

oder, da die Differenzen  $\mathfrak{A}_{r+s} - \mathfrak{A}_p$  und  $\mathfrak{A}_{r+s+1} - \mathfrak{A}_p$  eben die Exponenten  $\xi_{r+s-1}$  und  $\xi_{r+1}$  angeben in:

$$(52) \quad \xi_{r+s} > \mathfrak{A}_q'' - \mathfrak{A}_p' + 2\xi_{r+1}$$

$$(53) \quad \xi_{r+s+1} < \mathfrak{A}_q'' - \mathfrak{A}_p' + 2\xi_{r+1}$$

Es ergibt sich daraus folgende einfache Regel: Ist man bei der absteigenden Entwicklung einer Wurzel  $x$  zu einer Gliedersumme  $x_r$  gelangt, für welche sowohl im Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}$ , als auch im  $\mathfrak{P}'$  eine Reduction der höchsten Glieder auf Null nicht mehr erfolgt, und die Gradzahlen  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N}'$  daher constante Werthe  $\mathfrak{N}_p$  und  $\mathfrak{N}_q$  erlangt haben, so kann man mehrere Entwicklungsglieder von  $x$  auf Einmal erhalten, indem man die Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  auf mehrere Glieder fortsetzt. Zur genauen Angabe der Grenze, wie weit diese Division fortgesetzt werden darf, dient der Zahlwerth von:

$$\mathfrak{N}_q'' - \mathfrak{N}_p' + 2\xi_{r+1} = 2\mathfrak{N}_r - 3\mathfrak{N}_p' + \mathfrak{N}_q''$$

und alle Entwicklungsglieder des Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$ , deren Exponenten  $\xi$  über diesem Grenzwerthe liegen, sind verlässlich. Man hat daher die Entwicklung des Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  fortzusetzen ausschliesslich bis zu jenem Gliede, dessen  $\xi$  unter  $2\mathfrak{N}_r - 3\mathfrak{N}_p' + \mathfrak{N}_q''$  fällt.

Wir wollen nun noch versuchen, ein klares Bild davon zu entwerfen, in welchem raschen Verhältnisse die Anzahl  $s$  der verlässlichen Glieder mit dem Wachsen von  $r$  zunimmt. Aus den Relationen (48) lässt sich unmittelbar die folgende andere ableiten:

$$\mathfrak{N}_p' - \mathfrak{N}_q'' > \xi_{r+1}$$

und aus dieser folgt:

$$\mathfrak{N}_q'' - \mathfrak{N}_p' + 2\xi_{r+1} < \xi_{r+1}$$

Da die Relationen (48) für jedes  $r$  gelten, das der grösseren der beiden Zahlen  $p$  und  $q$  gleichkommt oder dieselbe übersteigt, so wird auch diese Relation für solche  $r$  gelten. Man sieht hieraus unmittelbar, wie schon von früher her bekannt ist, dass man immer mindestens Ein Glied entwickeln dürfe. Ist man aber in der Entwicklung weiter fortgerückt, so wird nicht nur  $\xi_{r+1}$ , sondern auch eine Reihe darauffolgender Exponenten  $\xi_{r+2}, \xi_{r+3}, \dots, \xi_{r+s}$  grösser ausfallen, als  $\mathfrak{N}_q'' - \mathfrak{N}_p' + 2\xi_{r+1}$ . Wir wollen es an einem Beispiele zeigen: Gesetzt  $\xi_{r+1} = 0$  und  $\mathfrak{N}_p' - \mathfrak{N}_q'' = 1$ , so folgt:  $\mathfrak{N}_q'' - \mathfrak{N}_p' + 2\xi_{r+1} = -1$ . Man darf also die Entwicklung von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  fortsetzen bis exclusive zu einem Gliede mit dem Exponenten  $-1$  oder einem kleineren. Wären die  $\xi$  sämtlich ganze Zahlen, so könnte man nur ein einziges Glied, nämlich das  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} = h_{r+1}$  erhalten. Der nächste Schritt besteht in der Entwicklung des Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}}$ . Für diesen Fall ist also der Grenzwerth  $\mathfrak{N}_q'' - \mathfrak{N}_p' + 2\xi_{r+2} = -3$ ; man wird also schon zwei Glieder:  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} = h_{r+2} a^{-1} + h_{r+3} a^{-2}$  gewinnen. Der nächste Schritt liefert schon deren vier auf einmal; der Grenzwerth  $\mathfrak{N}_q'' - \mathfrak{N}_p' + 2\xi_{r+4} = -7$  zeigt nämlich an, dass man die Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_{r+4}}{\mathfrak{P}'_{r+4}}$  bis zur Potenz  $a^{-6}$  inclusive fortsetzen dürfe: u. s. w. Im folgenden Schema sind die bei jedem Schritte gewinnbaren Gliedern ersichtlich:

- 0)  $x_r$
- 1)  $\dots\dots h_{r+1} a^0$
- 2)  $\dots\dots h_{r+2} a^{-1} + h_{r+3} a^{-2}$
- 3)  $\dots\dots h_{r+4} a^{-3} + h_{r+5} a^{-4} + h_{r+6} a^{-5} + h_{r+7} a^{-6}$
- 4)  $\dots\dots h_{r+8} a^{-7} + h_{r+9} a^{-8} + h_{r+10} a^{-9} + h_{r+11} a^{-10} + h_{r+12} a^{-11} + h_{r+13} a^{-12} + h_{r+14} a^{-13} + h_{r+15} a^{-14}$

Man sieht an diesem Beispiele, dass bei fortgesetzter Entwicklung mit jedem Schritte die Anzahl der auf einmal gewinnbaren Glieder in einem raschen Verhältnisse steigt. Die hier erwiesene Gesetzmässigkeit ist genau dieselbe, wie jene für die Zunahme der verlässlichen Decimalstellen bei numerischen Gleichungen. Wir werden auch in einer nachfolgenden Abhandlung Gelegenheit finden, diese Gesetzmässigkeit aus den von Fourier erörterten Eigenschaften der linearen Approximation abzuleiten.

Eine ähnliche Eigenthümlichkeit lässt sich auch für jene Fälle nachweisen, wo zur Bestimmung der Folgeglieder die Auflösung von Gleichungen des zweiten oder noch höherer Grade erfordert werden; auch in diesen Fällen kann man aus einer Partialgleichung höheren Grades bisweilen mehrere Glieder auf Einmal gewinnen, und es gelten hier die von Fourier für die Approximationsmethoden der zweiten, dritten und höheren Ordnung aufgestellten Sätze. Wir übergangen aber ihre Auseinandersetzung, weil sie uns von unserem Ziele zu weit abziehen würde und weil man immer im Stande ist, auf die lineare Approximationsmethode überzugehen, die, wenn sie auch einen geringeren Grad von Convergenz besitzt, als die übrigen, denn doch unter allen bei weitem die einfachsten Rechnungen mit sich führt.

Wir wollen noch schliesslich die Anwendung der eben entwickelten Regel an einem Beispiele zeigen. Hiezu eignet sich ganz gut die bereits früher im §. 14 sub (45) aufgestellte Gleichung, deren Wurzeln Glied für Glied entwickelt werden. Fassen wir also dieselbe und zwar die mit dem Anfangsgliede  $x_0 = a^3$  beginnende Wurzel in's Auge. Die diesem Anfangsgliede entsprechenden Substitutionsresultate sind sub (46) aufgeführt und zugleich zeigt der Gang der Rechnung, dass weder in  $\mathfrak{P}'_0$  noch  $\mathfrak{P}''_0$  eine Reduction der höchsten Glieder auf Null erfolgt sei, dass demnach das Anfangsglied  $a^3$  weder einer Wurzel der Gleichung  $\frac{dP}{dx} = 0$  noch der  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  entspreche. Die Grundbedingung für die Anwendbarkeit der eben früher auseinandergesetzten Regel ist demnach hier erfüllt. Man hat namentlich  $\mathfrak{N}_0 = 19$ ,  $\mathfrak{N}'_p = 17$ ,  $\mathfrak{N}''_q = 14$ , und demnach:  $2\mathfrak{N}_p - 3\mathfrak{N}'_p + \mathfrak{N}''_q = +1$ . Der Quotient:  $-\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}'_0}$  kann sonach bis exclusive dem mit der ersten Potenz von  $a$  versehenen Gliede fortgesetzt werden. Dies liefert ein einzelnes Folgeglied:  $-3a^2$  und sonach die Wurzel in ihren zwei ersten Entwicklungsgliedern:  $x = a^3 - 3a^2 + \dots$  genau so, wie in §. 14. Bisher ist keine Verschiedenheit von dem früheren Verfahren bemerkbar. Allein bei dem nächsten Schritte tritt sie bereits auf. Die dem Wurzelbestandtheile  $x_1 = a^3 - 3a^2$  entsprechenden Substitutionsresultate sind sub (47) ersichtlich. Es ist hier  $\mathfrak{N}_1 = 17$ , während  $\mathfrak{N}'_p$  und  $\mathfrak{N}''_q$  ihre früheren Werthe behalten, und sonach  $2\mathfrak{N}_1 - 3\mathfrak{N}'_p + \mathfrak{N}''_q = -3$  die Grenze bis zu welcher die Division:  $-\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}'_1}$  fortgesetzt werden darf. Man wird daher  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}'_1$  in ihren drei ersten Gliedern nehmen:

$$\mathfrak{P}_1 = 8a^{17} - 110a^{16} + 589a^{15} + \dots \quad \mathfrak{P}'_1 = 2a^{17} - 25a^{16} + 116a^{15}$$

und nun den Quotienten:

$$-\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}'_1} = \frac{-8a^{17} + 110a^{16} - 589a^{15}}{2a^{17} - 25a^{16} + 116a^{15}}$$

in so vielen Anfangsgliedern entwickeln, bis man zu dem mit  $a^{-3}$  oder mit einer noch niedrigeren Potenz von  $a$  versehenen Gliede gelangen würde; dort bricht man die Division ab. Man findet solchergestalt:

$$-\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}'_1} = -4 + 5a^{-1}$$

und folglich:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + 5a^{-1}.$$

Dieser Werth stimmt mit dem in §. 14 gefundenen vollkommen überein, und ist hier zufällig die vollständige Wurzel. Diese letzte Operation lieferte also schon mehr als ein einziges Glied und zwar deren zwei oder, wenn man will, deren drei.

Dieses Beispiel dürfte vollkommen hinreichen, um von dem Nutzen der erwähnten Regel ein deutliches Bild zu geben. Auffälliger noch wird dies aber bei den späteren Entwicklungsgliedern.

Entwicklung der Wurzeln einer Gleichung in eine nach aufsteigenden Potenzen von  $a - a$  geordnete Reihe.

### §. 16.

Hier findet sich das Problem behandelt, die Wurzeln  $x$  einer Gleichung:  $P = 0$ , welche zwei Buchstabengrössen  $x$  und  $a$  enthält, nach aufsteigenden Potenzen von  $a - a$  in eine Reihe zu entwickeln. Wir setzen hier gleichfalls  $P$  als ein Polynom, und die Glieder dieses Polynoms von der Form  $H a^r x^r$  voraus.  $x$  bedeutet die unbekannte und abhängige,  $a$  die unabhängige Buchstabengrösse,  $a$  aber einen beliebigen aber bestimmten Zahlwerth. Die Functionsform, die wir hier wählen, ist gleichfalls eine sehr gebräuchliche, da eine jede Function sich in dieser Form geben lässt. In dieser Gestalt sucht man vermittelst der bekannten Operationen des Dividirens und des Wurzelausziehens die Auflösungen der Gleichungen des ersten und der binomischen höheren Grades und es wäre demnach schon durch diesen Umstand dieses Problem gerechtfertigt, wenn man gleichwohl keinen anderen Grund hiezu auffinden könnte als den, dass es wünschenswerth sei, für beliebig gestaltete höhere Gleichungen ein zu diesem Zwecke dienendes Verfahren zu besitzen, gleichsam als eine Verallgemeinerung der zum Dividiren und Wurzelziehen dienenden Regeln. Allein so wie die absteigende Entwicklung der Wurzeln einen höheren Zweck erreicht, nämlich den, das Verhalten für sehr grosse Werthe von  $a$  anzugeben, und mit der Asymptotenbestimmung für ebene Curven, die im Bereiche  $a = \pm \infty$  liegen, in enger Verbindung steht; eben so werden wir von dieser Entwicklungsform mancherlei Nutzen ziehen: Wir werden durch sie nämlich alle Nenner, alle Factoren und endlich alle Wurzelgrössen erfahren, die in der Genüge leistenden Function  $x$  erscheinen; in die Sprache der Geometrie übersetzt: wir werden die Asymptoten im Bereiche der endlichen Werthe der Abscisse, so wie auch andere eigenthümliche Punkte der ebenen Curve kennen lernen.

Wir suchen also  $x$  in folgender Form:

$$(54) \quad x = h_0(a-a)^{\xi_0} + h_1(a-a)^{\xi_1} + h_2(a-a)^{\xi_2} + \dots + h_r(a-a)^{\xi_r}$$

wobei  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  dann  $h_0, h_1, h_2, \dots, h_r$  bestimmte, bisher noch unbekannte Zahlwerthe bedeuten,  $r$  aber eine in der Regel unendlich grosse Zahl vorstellt, und nur selten einen endlichen Werth besitzt. Diese Reihe muss nämlich in der Regel als eine unendliche Reihe vorausgesetzt werden, denn nur in Form einer unendlichen Reihe sind die Functionen allgemein darstellbar, und nur durch eine unendlich grosse Anzahl von Gliedern wird man das Gleichungs-

polynom auf Null bringen, oder besser gesagt diesem Nullwerthe beliebig weit nähern können. Zwischen den hier erscheinenden Exponenten wird folgende Relation vorausgesetzt:

$$(55) \quad \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r.$$

Nur durch diese Relation unterscheidet sich unser gegenwärtiges Problem von dem vorhergehenden; in allem übrigen herrscht die grösste Ähnlichkeit. In der That verwandeln wir auch hier, so wie dort, die Natur der Aufgabe; denn es handelt sich jetzt nicht mehr um die Angabe einer Function von  $a$ , die, anstatt  $x$  gesetzt,  $P$  identisch in Null verwandelt, sondern nur um die Bestimmung der Zahlwerthe der mit  $\xi_0, \xi_1, \dots$  und  $h_0, h_1, \dots$  bezeichneten Grössen. An die Stelle der Buchstabengleichung ist somit ein System von Zahlgleichungen getreten. Der Gang der Untersuchungen wird die grösste Übereinstimmung mit den früher eingeleiteten beobachten und wir werden uns desshalb kürzer fassen können, weil wir nur jene Verschiedenheiten und Abweichungen von dem früher Gesagten umständlicher zu besprechen brauchen, welche durch die nun entgegengesetzt angenommene Relation zwischen den Exponenten  $\xi$  herbeigeführt werden. Wir werden auch die nach aufsteigenden Potenzen geordnete Entwicklung von  $x$  nicht für  $a - a$ , sondern nur für  $a$  zeigen, ohne deshalb unsere Untersuchungen nur auf den speciellen Fall  $a = 0$  zu beschränken; es ist vielmehr leicht ersichtlich, wie diese für  $a$  geltende Entwicklungsmethode auch auf beliebige andere Grössen  $a - a$  ausgedehnt werden könne, weil durch die einfache Substitution:  $a = a - a$ , also  $a = a + a$  das Polynom  $P$  in ein anderes verwandelt werden kann, welches statt der Buchstabengrössen  $x$  und  $a$ , die anderen  $x$  und  $a$  enthält. Entwickelt man nun  $x$  aufsteigend nach  $a$ , so hat man offenbar die verlangte Entwicklungsweise von  $x$  aufsteigend nach  $a - a$ . Bei einer solchen Substitution ändert wohl allerdings das Gleichungspolynom  $P$  seine Gestalt, weil es jetzt, statt eine Summe von Gliedern  $Ha^a x^r$  darzustellen, vielmehr Glieder von der folgenden anderen Form:  $H(a + a)^a x^r$  besitzt, und nur, wenn alle Exponenten  $a$  in den verschiedenen Gliedern ganze und positive Zahlwerthe besitzen, wird  $(a + a)^a$  entwickelt ein geschlossenes Polynom sein, und demnach das neue Gleichungspolynom in seiner entwickelten Gestalt gleichfalls eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern von der früheren Form  $Ha^a x^r$  darstellen; für alle jene Fälle aber, wo ein einziges im Polynome  $P$  erscheinendes  $a$  negativ oder gebrochen ausfällt, lässt sich diese entwickelte Form  $(a + a)^a$  nicht anwenden, sondern man muss es bei dieser unentwickelten Form bewenden lassen. Dies soll jedoch keineswegs ein Hinderniss abgeben, weil auch für solche Gleichungen diese Methode mit Erfolg angewendet werden kann; ja sie besitzt auch dann noch ihre Wirksamkeit, wenn im Gleichungspolynome Wurzelgrössen erscheinen, welche unter den Wurzelzeichen eine Summe von Gliedern  $Ha^a x^r$  besitzen. Wir erwähnen diese verschiedenen Fälle, auf welche sich die Wirksamkeit der folgenden Methode ausdehnt, keineswegs in der Absicht, sie in dieser verallgemeinerten Gestalt zu geben; sondern im Gegentheile, um sie jetzt nur für den einfachsten Fall vorführen zu können, ohne dadurch bei dem Leser die Meinung hervorzurufen, diese Beschränkung sei eine nothwendige, in der Natur der Methode begründete. Wir werden also zunächst eine Gleichung  $P = 0$  mit Gliedern von der Form  $Ha^a x^r$  vornehmen, und uns die Aufgabe stellen,  $x$  nach aufsteigenden Potenzen von  $a$  zu entwickeln. Wenn wir das hiezu dienliche Verfahren werden abgeleitet haben, wird es leicht sein, zu zeigen, wie sie sich auch zur Entwicklung der Wurzeln  $x$  in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen einer anderen Grösse von der Form  $a - a$  modificiren lasse; ja wir würden dann auch jene Gleichungen in das Gebiet unserer Betrachtungen ziehen können, die kein

Gleichungspolynom mit Gliedern  $Ha^a x^r$  mehr enthalten, sondern wo Wurzelgrößen erscheinen, die unter den Wurzelzeichen eine Summe von solchen Gliedern  $Ha^a x^r$  besitzen.

Das Problem, welches wir uns stellen, ist folgendes: Es ist eine Gleichung  $P = 0$  gegeben, deren erster Theil eine Summe von Gliedern von der Form  $Ha^a x^r$  ist: man soll die Genügende leistenden Functionen  $x$  in eine Reihe entwickeln, geordnet nach aufsteigenden Potenzen von  $a$ . Wir setzen hier  $x$  in der Form voraus:

$$(56) \quad x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots$$

und es sollen nun die Werthe von  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  dann von  $h_0, h_1, h_2, \dots$  angegeben werden. Zwischen dem Exponenten  $\xi$  wird die Relation:

$$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$$

vorausgesetzt. Die Werthe  $\xi_0, \xi_1, \dots, h_0, h_1, \dots$  sind gewissen Bedingungen entsprechend zu wählen.

Diese Bedingungen werden wir durch die unmittelbare Substitution der für  $x$  angenommenen Reihe (56) in das Gleichungspolynom  $P$  ableiten. Bei dieser Substitution verwandelt sich das Gleichungspolynom  $P$  in einen gleichfalls aufsteigend nach  $a$  geordneten Ausdruck, der dem Ausspruche der Gleichung  $P = 0$  zufolge identisch Null sein soll. Man hat demnach diese mit  $\xi$  und  $h$  bezeichneten Größen so zu wählen, dass jede einzelne Potenz von  $a$  in dem Substitutionsresultate mit dem Coefficienten Null versehen erscheint, und wird auf solche Weise eine genügende Anzahl von Bedingungen erhalten, um diese noch unbestimmt gelassenen Größen  $\xi$  und  $h$  der einzelnen Glieder der Entwicklung ihren Zahlwerthen nach zweckentsprechend zu bestimmen. Wir wissen andererseits, dass alle bekannten Functionen von  $a$  sich nach aufsteigenden Potenzen von  $a$  mittelst der Taylor'schen Reihe entwickeln lassen, wenn dieselben und alle ihre Differentialquotienten für  $a$  stetig und endlich bleiben, und werden daher unter diesen Bedingungen gleichfalls die Wurzel  $x$  in Form einer solchen Reihe:

$$(57) \quad x = h_0 + h_1 a + h_2 a^2 + \dots$$

erhalten. Eine Ausnahme hiervon findet Statt, wenn die Wurzel  $x$  oder einer ihrer Differentialquotienten  $\frac{dx}{da}, \frac{dx^2}{da^2}, \dots$  für  $a$  unendlich oder unstetig wird, wenn z. B.  $x$  den Nenner  $a$  besitzt, oder aber in sich die Wurzelgröße  $\sqrt[p]{a}$  schliesst, denn dann würde an die Stelle dieser Reihe mit den ganzen und positiven Werthen  $\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 2, \dots$  eine andere zu treten haben, die negative oder gebrochene  $\xi$  aufweist. Wir sehen also in dieser aufsteigenden Entwicklungsweise von  $x$  zugleich ein Mittel, die in  $x$  erscheinenden Factoren, Divisoren und Wurzelgrößen  $a$  zu erkennen. Wir legen hier aber keineswegs die Form (57) unseren Rechnungen zu Grunde, da sie gelegentlich, für die erwähnten Ausnahmefälle nicht geeignet ist,  $x$  darzustellen, sondern benützen die allgemeinere, stets gültige Form (56) mit noch unbestimmt gelassenen Exponenten  $\xi$ . Die nun folgenden Untersuchungen, welche, wie schon erwähnt wurde, mit den bei der absteigenden Entwicklungsweise von  $x$  eingeleiteten die grösste Übereinstimmung zeigen, zerfallen gleichfalls in zwei Abtheilungen: Die erste hat die Bestimmung des Anfangsgliedes  $h_0 a^{\xi_0}$ , die zweite die der Folgeglieder zum Gegenstande. Auch hier erweist sich eine Abtheilung der Untersuchungen in zwei Theile als eine natürliche, denn die Bestimmung des Anfangsgliedes  $h_0 a^{\xi_0}$  bewirkt hier gleichfalls in der Regel die Trennung der Wurzeln, so zwar dass durch dasselbe jede einzelne Wurzel vollkommen genau bezeichnet, und von allen übrigen völlig isolirt erscheint. Die Bestimmung der Folgeglieder bezieht sich daher in der

Regel auch nur auf eine einzige solche isolirte Wurzel, und stellt die weitere Approximation vor.

I. Bestimmung der Anfangsglieder.

§. 17.

Wir substituiren in das Gleichungspolynom  $P$  anstatt  $x$  eine aufsteigend geordnete Reihe (56), deren Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  ist. Der Gang einer solchen Substitution wurde bereits genau beleuchtet. Hier wo statt  $x$  eine aufsteigend geordnete Reihe gesetzt wird, tritt die einzige Verschiedenheit gegen früher auf, dass die Substitutionsresultate gleichfalls aufsteigend nach  $a$  geordnet erscheinen werden. Diese Substitution lässt sich hier bei noch unbestimmt gelassenen Werthen des Exponenten  $\xi_0$  nur in den einzelnen Gliedern  $H a^{\alpha} x^{\alpha}$  ausführen, wenn man sich mit dem Anfangsgliede begnügt. Jedes einzelne Glied  $H a^{\alpha} x^{\alpha}$  liefert nämlich einen Ausdruck, der nach aufsteigenden Potenzen von  $a$  geordnet ist und dessen erstes, mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehenes Glied die Form:  $II h_0^{\alpha} a^{\alpha+r\xi_0}$  besitzt. Summirt man alle diese verschiedenen, für die einzelnen Glieder des Gleichungspolynoms abgeleiteten Ausdrücke, so entsteht das vollständige Substitutionsresultat  $\mathfrak{P}$ . Das Anfangsglied desselben kann nur aus einer Gruppe von Gliedern entstehen, die die Form  $III h_0^{\alpha} a^{\alpha+r\xi_0}$  besitzen und deren jedes einem gewissen Gliede des Gleichungspolynoms  $P$  entspricht. Man hat nämlich die Gradzahlen, welche die Form  $\alpha+r\xi_0$  besitzen, in Vergleichung zu bringen, und unter ihnen die kleinste zu erwählen. Das mit dieser kleinsten Gradzahl  $\alpha+r\xi_0$  versehene Glied  $III h_0^{\alpha} a^{\alpha+r\xi_0}$  ist zugleich das Anfangsglied des Substitutionsresultates  $\mathfrak{P}$ . Dieses Aufsuchen der kleinsten Gradzahl  $\alpha+r\xi_0$  kann nur geschehen, wenn  $\xi_0$  einen bestimmten Zahlwerth besitzt. Allein hier handelt es sich um eine andere Untersuchung. Der Erfolg einer solchen Vergleichung der Gradzahlen  $\alpha+r\xi_0$ , kann verschieden ausfallen, je nach dem dem  $\xi_0$  ertheilten Zahlwerthe; es sind namentlich zwei Fälle möglich: entweder findet sich unter der Gruppe dieser Gradzahlen  $\alpha+r\xi_0$  eine einzige mit dem kleinsten Werthe versehene, während alle übrigen grössere Werthe besitzen; oder der kleinste Werth kommt zweien oder mehreren derselben gemeinschaftlich zu. Diejenigen Werthe von  $\xi_0$ , welche den zuerst erwähnten Fall herbeiführen, bewirken, dass ein einziges Glied  $H a^{\alpha} x^{\alpha}$  des Gleichungspolynoms einen mit der niedrigsten Potenz von  $a$  beginnenden Ausdruck liefert, während die aus allen übrigen Gliedern hervorgehenden Ausdrücke nur höhere Potenzen von  $a$  enthalten. Bei der Summirung dieser Ausdrücke wird dieses mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied daher vereinzelt stehen, sich mit keinem anderen verbinden lassen und zugleich das erste Glied des Substitutionsresultates  $\mathfrak{P}$  darstellen. Für solche Werthe von  $\xi_0$  ist folglich das erste Glied des Substitutionsresultates von der Form:

(58) 
$$III h_0^{\alpha} a^{\alpha+r\xi_0},$$

sein Coëfficient  $III h_0^{\alpha}$  ein eintheiliger Ausdruck, weil es aus einem einzigen Gliede des Gleichungspolynoms hervorgeht, und stets von Null verschieden, so lange dem  $h_0$  ein von Null verschiedener Werth ertheilt wird. Diese sind daher keine geeigneten Zahlwerthe für  $\xi_0$ , weil sie ein Nullwerden des Coëfficienten im ersten Gliede des Substitutionsresultates unmöglich

machen. Jenen Werthen von  $\xi_0$  hingegen, welche zwei oder mehrere gleiche und kleinste Gradzahlen  $a + r\xi_0$  aufweisen, entsprechen eben so viele Glieder des Gleichungspolynomes, welche einen mit dieser niedrigsten Potenz von  $a$  beginnenden Ausdruck und daher auch zu dem ersten Gliede des Substitutionsresultates einen Bestandtheil liefern. Alle diese Bestandtheile besitzen die Form (58) und reduciren sich bei der Summation der Ausdrücke auf ein Glied, welches  $a$  in der niedrigsten Potenz und einen Coefficienten in Gestalt einer Summe von Gliedern  $Hh^r$  besitzt und in folgender Form erscheint:

$$\Sigma [Hh^r] \cdot a^{\gamma_0}.$$

$\gamma_0$  bezeichnet hier diesen kleinsten Werth, der zweien oder mehreren Gradzahlen  $a + r\xi_0$  eigen ist, und das Summenzeichen  $\Sigma$  bezieht sich auf gewisse Combinationen, der Werthe  $H, r, a$ , welche jenen kleinsten Gradzahlen  $\gamma_0 = a + r\xi_0$  zugehören. Hiemit sind also alle zur Bestimmung von  $\xi_0$  und  $h_0$  dienenden Bedingungen bekannt;  $\xi_0$  ist nämlich so zu wählen, dass zwei oder mehrere Gradzahlen  $a + r\xi_0$  gleich und am kleinsten ausfallen. Ist  $\xi_0$  bekannt und sind hiemit auch jene Glieder  $Ha^r x^r$  des Gleichungspolynoms  $P$  bezeichnet, welchen diese kleinsten Werthe von  $a + r\xi_0$  entsprechen; so lässt sich aus ihrer Summe  $\Sigma[Ha^r x^r]$  die andere  $\Sigma[Hh^r]$  durch  $a = 1, x = h$  Setzen ableiten, und  $\Sigma[Hh^r] = 0$  ist die Bestimmungsgleichung für  $h_0$ .

Wir sehen hieraus, dass das gegenwärtige Problem eine grosse Übereinstimmung mit dem früher behandelten ausweise. Hier kommt es gleichfalls auf die Ableitung und Vergleichung der linearen Functionen  $a + r\xi_0$  an, derselben, die für die absteigende Entwicklung von  $x$  in Betrachtung kamen. Ist  $\xi_0$  bestimmt, so ist die Bestimmungsgleichung für  $h_0$  nämlich:

$$\Sigma[Hh^r] = 0$$

von einer ähnlichen Gestalt, wie die bei der absteigenden Entwicklung aufgestellte. Der einzige Unterschied besteht darin, dass  $\xi_0$  so zu wählen ist, dass zwei oder mehrere dieser linearen Functionen jetzt gleich und am kleinsten ausfallen, während früher jene  $\xi_0$  in Betrachtung kamen, die zweien oder mehreren Functionen gleiche und grösste Werthe ertheilen. Man hat also auch hier die einem einzelnen Gliede  $Ha^r x^r$  des Gleichungspolynomes  $P$  entsprechende lineare Function  $a + r\xi_0$  zu bilden, und dieselben einer eigenen Untersuchung zu unterwerfen. Der Gang dieser Untersuchung wird sich, obwohl von dem für die absteigende Entwicklung gelehrten verschieden, ohne bedeutende Schwierigkeit angeben lassen.

Wenden wir uns zuerst zu der geometrischen Construction, so ergibt sich den einzelnen linearen Functionen  $a + r\xi_0$  entsprechend das bekannte System von geraden Linien. Dieses System ist genau das frühere, nur handelt es sich jetzt um andere Durchschnittspunkte als damals. Gleichwie früher für dieses System ein unendliches Polynom aufgefunden wurde, welches in sich alle oberhalb der Linien des Systems liegenden Punkte vereinigt, eben so besteht hier ein solches unendliche Polygon, welches unterhalb aller verzeichneten Geraden liegt, und in sich alle jene Punkte einschliesst, deren Ordinaten  $\eta$  kleiner sind als sämtliche correspondirende  $\eta$  der Geraden. Dieses nach unten gelegene Polygon ist nur nach oben zu begrenzt, nach allen anderen Richtungen unbegrenzt. Die Begrenzung desselben bilden gewisse Stücke der geraden Linien im Systeme, und diese setzen sich zu einer gebrochenen Linie zusammen. Die Eckpunkte dieses Polygons oder dieser gebrochenen Linie sind es, welche die Werthe von  $\xi_0$  liefern und um deren Bestimmung es sich eigentlich handelt. Dieses Polygon



besitzt gleichfalls nur auswärts springende Ecken, und die gebrochene Begrenzungslinie desselben ist daher in demselben Sinne nach aufwärts zu convex, wie die bei der absteigenden Entwicklung von  $x$  betrachtete concav war. Die einzelnen Stücke dieser gebrochenen Linie folgen daher in der Richtung von  $\xi_0 = +\infty$  nach  $\xi_0 = -\infty$  in aufsteigender Reihenfolge nach der Grösse von  $x$ , also auch nach der Grösse des mit der positiven Halbxaxe des  $\xi_0$  eingeschlossenen Winkels geordnet, so zwar, dass das am meisten rechts gelegene Anfangsstück derjenigen Geraden angehört, welche mit der Abscissenaxe den kleinsten Winkel einschliesst, dem also die mit dem kleinsten  $x$  versehene lineare Function  $a + r\xi_0$  entspricht. Auf dieses Anfangsstück folgen die übrigen Stücke in derjenigen Weise geordnet, wie es der Werth von  $x$  vorschreibt, der in den entsprechenden linearen Functionen  $a + r\xi_0$  erscheint. Das nach links zu befindliche Endstück ist der mit dem grössten  $x$  versehenen linearen Function  $a + r\xi_0$  angehörig. Von dieser Anordnungsweise kann man sich in dem schon einmal benutzten Beispiele:

$$(59) \quad (a + 1)x^4 + x^3 + (a^2 - 1)x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a = 0$$

dessen System von Linien in Fig. 1 dargestellt ist, überzeugen. Der von diesem Systeme von Linien begrenzte, unterhalb gelegene Theil der Ebene besitzt die gebrochene Linie  $iDCb$  als Begrenzungslinie.  $iD$  ist das am meisten nach rechts gelegene Stück desselben, an dieses reiht sich das Stück  $DC$ , und hieran wieder das Stück  $Cb$ ; die ihnen entsprechenden  $x$  besitzen die Werthe: 0, 2, 4 und erweisen sich daher, wie früher bemerkt wurde, aufsteigend nach ihrer Grösse geordnet. Hier sind die Eckpunkte  $C$  und  $D$  von Belang, sie liefern die zwei Werthe  $\xi_0 = 0$  und  $\xi_0 = \frac{1}{2}$ , woraus wir schliessen, dass die Genüge leistenden Werthe  $x$ , nach aufsteigenden Potenzen von  $a$  entwickelt, mit einem Gliede beginnen, welches entweder die Form  $h_0$  oder die andere  $h_0 a^{\frac{1}{2}}$  besitzt. Für jeden dieser Werthe von  $\xi_0$  besteht eine eigene Bestimmungsgleichung, welche die zugehörigen Werthe des Coefficienten  $h_0$  liefert. Diese leitet sich für  $\xi_0 = 0$  ab aus denjenigen Gliedern des Gleichungspolynomes, welche durch die im Punkte  $C$  sich schneidenden Linien bezeichnet werden. Sie sind:

$$x^4 \quad x^3 \quad , \quad -x^2$$

und liefern die Gleichung:

$$(60) \quad h^4 + h^3 - h^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zuerst  $h = 0$  entsprechend dem darin erscheinenden Factor  $h^2$  und dann noch die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$h^2 + h - 1 = 0$$

die die Werthe:

$$h_0 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

liefert. Wir gelangen so zu dem Resultate, dass zwei Auflösungen  $x$  aufsteigend nach  $a$  entwickelt die Anfangsglieder:

$$x_0 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$$

besitzen, während noch zwei andere bestehen, die mit einer höheren Potenz von  $a$  als  $a^0$  beginnen. Diese zwei anderen Auflösungen sind durch den in der Bestimmungsgleichung (60)

erscheinenden Factor  $h^2$  angedeutet, dem zwei gleiche Nullwurzeln entsprechen. Ihre Anfangsglieder sind mit  $a^{\frac{1}{2}}$  versehen. Nehmen wir das ihnen entsprechende  $\xi_0 = \frac{1}{2}$  vor, so finden wir durch den zugehörigen Punkt  $D$  in der Zeichnung nur die Glieder:

$$-x^2, \quad -a$$

bezeichnet, und erhalten hieraus die Bestimmungsgleichung:

$$-h^2 - 1 = 0$$

welche zwei Werthe für  $h$  liefert, nämlich:

$$h_0 = \sqrt{-1}, \quad h_0 = -\sqrt{-1}$$

und so sind auch die Anfangsglieder dieser zwei Auflösungen, nämlich:

$$x_0 = \sqrt{-a}, \quad x_0 = -\sqrt{-a}$$

ermittelt. Wir ersehen hieraus, dass die Gleichung (59) vier Auflösungen besitzt, welchen, nach aufsteigenden Potenzen von  $a$  entwickelt, die Anfangsglieder:

$$x_0 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad x_0 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \quad x_0 = \sqrt{-a}, \quad x_0 = -\sqrt{-a}$$

zukommen.

Wir haben bei der absteigenden Entwicklung von  $x$  uns von der geometrischen Construction befreit, und an ihre Stelle eine einfache analytische Regel treten lassen. Ein Gleiches wird auch hier möglich und zweckdienlich sein. Dort haben wir nämlich die Gleichung nach Potenzen von  $x$  absteigend geordnet und die mit denselben Potenzen verknüpften Glieder zusammengefasst,  $x^2$  als Factor gesondert und die damit multiplicirten  $Ha^a$  in ein Polynom zusammengefasst, in Klammern eingeschlossen und absteigend nach  $a$  geordnet, so dass das Gleichungspolynom  $P$  die Gestalt erlangte, wie sie in diesem Beispiele (59) ersichtlich ist. Auf gleiche Weise kann man auch hier vorgehen, nur mit dem Unterschiede, dass es dann zweckdienlich erscheint, die mit den Potenzen von  $x$  multiplicirten Polynome, bestehend aus einer Summe von Gliedern  $Ha^a$ , aufsteigend zu ordnen, also der Gleichung die Gestalt:

$$(61) \quad (1-a)x^4 + x^3 + (-1+a^2)x^2 + (2a-a^2)x - a + a^2 = 0$$

zu ertheilen. Nun leitet man, wie dort, eine Reihe von Untersuchungen ein, die mit dem ersten Gliede  $x^4$  beginnen, und dann, durch den Gang der Untersuchungen von selbst geleitet, zu den späteren Gliedern überspringen. Man bilde daher die Quotienten:  $\frac{0}{1} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$

Die Zähler dieser Brüche sind aus den Exponenten: 0 0 0 1 1, welche der niedrigsten Potenz von  $a$  in den verschiedenen mit  $x$  multiplicirten Ausdrücken angehören, durch Subtraction des ersten von allen folgenden abgeleitet, die Nenner aber stellen die im entgegengesetzten Sinne genommenen Differenzen der Exponenten von  $x$ , nämlich von: 4 3 2 1 0 vor. Diese Quotienten geben die  $\xi$  der Durchschnittspunkte, welche die Linien  $\eta_0 = 0 + 4\xi$  mit den übrigen:  $\eta_1 = 0 + 3\xi$ ,  $\eta_2 = 0 + 2\xi$ ,  $\eta_3 = 1 + \xi$ ,  $\eta_4 = 1$  bildet. Von allen diesen Werthen ist der kleinste zu bestimmen (hier  $\xi = 0$ ) und als brauchbar zu notiren. Zugleich sind die drei Glieder, nämlich:  $x^4$  als das untersuchte, dann die zwei dem Quotienten Null

entsprechenden:  $x^3$  und  $-x^2$  behufs der Bildung der Bestimmungsgleichung für den Coefficienten  $h_0$  zu bezeichnen. Nun ist  $-x^2$  das zunächst zu untersuchende Glied, ihm entsprechen die Quotienten:  $\frac{1}{1} \frac{1}{2}$ , die auf gleiche Weise aus  $-x^2$  und den folgenden Gliedern:  $2ax$  und  $-a$  gebildet werden. Von ihnen ist  $\frac{1}{2}$  der kleinste und daher der zweite brauchbare Werth  $\xi_0$ ; ihm entsprechen die zwei Glieder  $-x^2$  und  $-a$  für die Bestimmungsgleichung für  $h_0$ . Der Sinn dieser analytischen Regel findet sich in dem Systeme von verzeichneten Geraden in einer populären Weise beleuchtet, denn gerade so müsste man verfahren, um die gebrochene Linie  $bCDi$  abzuschneiden, indem man zuerst die Durchschnittspunkte der  $b$  mit allen übrigen Linien bestimmt, und unter ihnen den am meisten links gelegenen  $C$  erwählt, auf der so ermittelten Geraden  $e$  in gleicher Weise den am weitesten nach links gelegenen Durchschnittspunkt  $D$  aufsucht und so zur  $i$  gelangt, von der man schon im Voraus überzeugt ist, dass sie das rechte Endstück der gebrochenen Linie sei.

Auch diese Untersuchung gehört dem Gebiete der Ungleichungen an, namentlich ist das nach unten gelegene Polygon, um dessen Bestimmung es sich hier handelt, die geometrische Darstellung der Auflösungen eines Systems von Ungleichungen, welche die Gestalt:

$$\gamma_0 < a + r \xi_0$$

besitzen, also eines Systems von Ungleichungen, welche geradezu die entgegengesetzten Bedingungen aussprechen als jene, die bei der absteigenden Entwicklung in Betracht kommen. Die gebrochene Linie, welche die Begrenzung dieses Polygons bildet, enthält alle jene Punkte, deren  $\xi$  und  $\gamma$  diesen Ungleichungen genügen, bis auf eine einzige, die sie zwar nicht, aber dafür die entsprechende Gleichung  $\gamma = a + r \xi$  erfüllen, und stellt somit die Grenzwerte der ersten Ordnung vor. Die Eckpunkte des Polygons aber erfüllen zwei Gleichungen von der Form  $\gamma = a + r \xi$  und alle übrigen Ungleichungen, und stellen die Grenzwerte der zweiten Ordnung vor. Auf solche Weise also fällt die Bestimmung der Werthe von  $\xi_0$  zusammen mit der Aufsuchung der Grenzwerte der zweiten Ordnung zu einem Systeme von Ungleichungen mit zwei Unbekannten, welche aus den einzelnen Gliedern  $II a^a x^r$  des Gleichungspolynoms abgeleitet werden, und die Form:  $\gamma_0 < a + r \xi_0$  besitzen. Wir glauben uns weitere Erläuterungen dieses Verfahrens ersparen zu können, weil die grösste Übereinstimmung mit dem früher und weitläufiger behandelten Probleme besteht und lassen jetzt die allgemeine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder der aufsteigenden Entwicklung folgen; wollen aber an einem Beispiele ihre Anwendung zeigen, um dasjenige in's klare Licht zu setzen, was bei der hier beobachteten Kürze vielleicht manchen Leser noch zweifelhaft erscheinen dürfte.

§. 18.

Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder für die aufsteigende Entwicklung der Wurzeln ist folgende: Man ordne das Gleichungspolynom in erster Instanz absteigend nach Potenzen von  $x$ , d. h. man bringe dasselbe auf die Form:

$$A_1 x^{r_1} + A_2 x^{r_2} + A_3 x^{r_3} + \dots + A_m x^{r_m} = 0$$

wo die Exponenten in der Relation:  $r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_m$  zu einander stehen, die Polynome  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  aber nach Potenzen von  $a$  aufsteigend. Nun bilde man, einem jeden Bestandtheile:  $A_1 x^{r_1}, A_2 x^{r_2}, A_3 x^{r_3}, \dots, A_m x^{r_m}$  des Gleichungspolynomes entsprechend, aus dem Exponenten  $a$ , im Anfangsgliede von  $A$  und dem Exponenten  $r$  von  $x$  durch ein hier von selbst ersichtliches Verfahren eine lineare Ungleichung:

$$\eta < a_1 + r_1 \xi, \quad \eta < a_2 + r_2 \xi, \quad \eta < a_3 + r_3 \xi, \quad \dots, \quad \eta < a_m + r_m \xi$$

und suche die Grenzwerte zweiter Ordnung, welche diesem Systeme von linearen Ungleichungen mit den zwei Unbekannten  $\xi$  und  $\eta$  entsprechen, d. h. jene zusammengehörigen Werthe von  $\xi$  und  $\eta$ , welche diese Ungleichungen streng genommen nicht mehr erfüllen, indem sie zwei oder mehrere derselben in identische Gleichungen, alle übrigen aber in identische Ungleichungen verwandeln. Diese seien folgende:

$$\xi'_0, \quad \xi''_0, \quad \xi'''_0, \quad \dots, \quad \xi_0^{(r)}$$

$$\eta'_0, \quad \eta''_0, \quad \eta'''_0, \quad \dots, \quad \eta_0^{(r)}$$

Gleichzeitig bezeichnet man für einen jeden solchen Grenzwert der zweiten Ordnung jene Ungleichungen, die in Gleichungen übergehen, oder vielmehr die ihnen correspondirenden Glieder des Gleichungspolynoms, und erhält demmassen, einem jeden einzelnen Grenzwert der zweiten Ordnung entsprechend, eine Summe von Gliedern, die wir hier mit:

$$\Sigma[H a^a x^r]', \quad \Sigma[H a^a x^r]'', \quad \Sigma[H a^a x^r]''', \quad \dots, \quad \Sigma[H a^a x^r]^{(r)}$$

symbolisch bezeichnen wollen. Nun substituirt man in eine jede dieser Gliedersummen  $a = 1$  und  $x = h$ , setzt sie alsdann der Null gleich, und erhält so für jeden Grenzwert eine Gleichung mit der Unbekannten  $h$ :

$$\Sigma[H h^r]' = 0, \quad \Sigma[H h^r]'' = 0, \quad \Sigma[H h^r]''' = 0, \quad \dots, \quad \Sigma[H h^r]^{(r)} = 0.$$

Diese Gleichungen, der Reihe nach einzeln vorgenommen und aufgelöst, liefern jede eine gewisse Anzahl von Werthen für  $h$ , die zu demjenigen Werthe von  $\xi$  passen, welcher in dem correspondirenden Grenzwert zweiter Ordnung erscheint. Combinirt man nun jeden der Werthe  $\xi$  mit den ihm entsprechenden Werthen von  $h$ , so erhält man eine gewisse Anzahl von Systemen zusammengehöriger Werthe  $\xi_0$  und  $h_0$ :

$$\xi'_0, \quad \xi''_0, \quad \xi'''_0, \quad \dots, \quad \xi_0^{(s)}$$

$$h'_0, \quad h''_0, \quad h'''_0, \quad \dots, \quad h_0^{(s)}$$

und diese liefern unmittelbar die Anfangsglieder der Wurzeln  $x$  für ihre aufsteigende Entwicklung:

$$h'_0 a^{\xi'_0}, \quad h''_0 a^{\xi''_0}, \quad h'''_0 a^{\xi'''_0}, \quad \dots, \quad h_0^{(s)} a^{\xi_0^{(s)}}.$$

Ihre Anzahl  $s$  ist meistens grösser, als jene  $r$  der Grenzwerte zweiter Ordnung und bei ganzen und rationalen Gleichungen in der Regel gleich der Gradzahl derselben.

Es ist jetzt noch übrig, anzugeben, in welcher Weise die Auflösung des Systems von Ungleichungen:

$$\eta < a_1 + r_1 \xi, \eta < a_2 + r_2 \xi, \eta < a_3 + r_3 \xi, \dots, \eta < a_m + r_m \xi$$

einzuleiten sei.

Man könnte hier in den Ungleichungen die Zeichen beider Theile in die entgegengesetzten und das Ungleichheitszeichen  $<$  in  $>$  verwandeln und würde so ein äquivalentes System von Ungleichungen erhalten, dessen Behandlungsweise schon im ersten Abschnitte §. 6 durch eine Regel festgestellt ist; allein ebenso leicht ist es, die Regel dem vorliegenden Systeme von Ungleichungen unmittelbar anzupassen. Man hat nämlich abermals ein combinatorisches Verfahren einzuleiten, das mit der ersten der so geordneten Ungleichungen beginnt, und zu den nächstfolgenden fortschreitet. Man subtrahirt zuvörderst die lineare Function  $a_1 + r_1 \xi$  der ersten Ungleichung der Reihe nach von allen übrigen:  $a_2 + r_2 \xi, a_3 + r_3 \xi, \dots, a_m + r_m \xi$ , setzt jede der hervorgehenden Differenzen:

$$a_2 - a_1 + (r_2 - r_1) \xi, a_3 - a_1 + (r_3 - r_1) \xi, a_4 - a_1 + (r_4 - r_1) \xi, \dots, a_m - a_1 + (r_m - r_1) \xi$$

für sich gleich Null, löst jede solche Gleichung nach  $\xi$  auf, und sucht nun unter allen so gewonnenen Auflösungen:

$$\frac{a_2 - a_1}{r_2 - r_1}, \frac{a_3 - a_1}{r_3 - r_1}, \frac{a_4 - a_1}{r_4 - r_1}, \dots, \frac{a_m - a_1}{r_m - r_1}$$

die kleinste Zahl (mit Rücksicht auf das Zeichen); diese ist der kleinste zulässige Werth von  $\xi_0$ . Wir wollen ihn mit  $\xi'_0$  bezeichnen. Gleichzeitig notirt man nebst der ersten Ungleichung alle jene folgenden, welche diesen kleinsten Werth  $\xi'_0$  geliefert haben, und für  $\xi = \xi'_0$ ,  $\eta = a_1 + r_1 \xi'_0$  in identische Gleichungen übergehen. Die letzte derselben, die wir mit  $\eta < a_x + r_x \xi$  bezeichnen wollen, bildet nun den Ausgangspunkt einer zweiten, der eben auseinandergesetzten vollkommen ähnlichen Untersuchung und wird mit allen ihr folgenden Ungleichungen combinirt den zweiten brauchbaren Werth von  $\xi_0$ , nämlich  $\xi''_0$  liefern, und zugleich jene Ungleichungen bezeichnen, die für  $\xi = \xi''_0$ ,  $\eta = a_x + r_x \xi''_0$  sich in identische Gleichungen verwandeln. Die letzte der so bezeichneten Ungleichungen ist der Ausgangspunkt der dritten Untersuchung, welche  $\xi'''_0$  liefert, an der aber nur die ihr nachfolgenden Ungleichungen Theil nehmen. Solchergestalt schreitet die Untersuchung entweder stätig oder sprungweise von der ersten Gleichung zu den nachfolgenden über. Die Anzahl der in Betracht kommenden Ungleichungen nimmt mit jedem Schritte ab. Ist man endlich dahin gelangt, dass die letzte Ungleichung  $\eta < a_m + r_m \xi$  als eine solche bezeichnet ist, welche sich in eine identische Gleichung verwandelt, so schließt sich die Untersuchung von selbst, indem alle Gleichungen erschöpft sind.

Bezüglich der zweckmässigsten Art, diese Rechnung zu Papier zu bringen, gelten dieselben Vorschriften, wie für die absteigende Entwicklung. Sie finden sich in §. 6 auseinandergesetzt. Hier tritt, wie sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergibt, nur der einzige Unterschied auf, dass von jeder Quotientenreihe die kleinsten statt der grössten Zahlen zu nehmen sind.

Hier folgt ein Beispiel zur Erläuterung der gegebenen Regel:

$$(a^4 + a^5) x^5 + (3a + 4a^2 + a^3) x^4 + 2ax + (3 + 4a) = 0$$

erste Quotientenreihe:  $-\frac{3}{1}, -\frac{8}{4}, -\frac{4}{5}$  unter ihnen ist  $-\frac{3}{1} = -3$  der kleinste, und liefert:  $\xi_0 = -3$ ;

zweite Quotientenreihe:  $-\frac{0}{3}, -\frac{1}{4}$  unter diesen ist  $-\frac{1}{4}$  der kleinste, und liefert:  $\xi_0 = -\frac{1}{4}$ .

Dem Werthe:  $\xi_0 = -3$  entsprechen die Glieder:

und die Bestimmungsgleichung:

diese liefert:

und das Anfangsglied:

$$a^4 x^5 + 3 a x^4$$

$$h^5 + 3 h^4 = 0;$$

$$h_0 = -3$$

$$x_0' = -\frac{3}{a^3};$$

dem Werthe:  $\xi_0 = -\frac{1}{4}$  entsprechen die Glieder:

und die Bestimmungsgleichung:

diese liefert:

und das Anfangsglied in vier verschiedenen Formen:  $x_0 = \sqrt[4]{-\frac{1}{a}}$ .

$$3 a x^4 + 3$$

$$3 h^4 + 3 = 0;$$

$$h_0 = \sqrt[4]{-1}$$

## II. Bestimmung der Folgeglieder.

### §. 19.

Wenn schon die Bestimmung der Anfangsglieder von  $x$  für die aufsteigende Entwicklungsform eine grosse Ähnlichkeit besitzt mit dem bei der absteigenden Entwicklung zum gleichen Zwecke einzuleitenden Verfahren; so geht diese Ähnlichkeit bei der Bestimmung der Folgeglieder in eine vollkommene Übereinstimmung über. Man hat genau dieselben Schritte, wie bei der absteigenden Entwicklungsform zu machen; und ist man gar bei der vollständigen Isolirung der Wurzel angelangt, so besteht der einzige Unterschied nur noch darin, dass die vorliegenden Substitutionsresultate, welche bei Entwicklung der Folgeglieder in die Rechnung eingehen, aufsteigend geordnet sind; im Rechnungsverfahren selbst herrscht nicht der geringste Unterschied.

Beginnen wir mit dem gewöhnlichsten Falle, demjenigen nämlich, wo das gewonnene Anfangsglied  $x_0 = h_0 a^{\xi_0}$  nur einer einzigen Wurzel zukommt, d. h. setzen wir voraus, dass

$$\Sigma [H h_0^r] = 0$$

und  $\Sigma [H h_0^{r-1}]$  von Null verschieden, also  $h_0$  eine einfache Wurzel der Bestimmungsgleichung  $\Sigma [H h^r] = 0$  gewesen sei, und versuchen wir jetzt, das Folgeglied  $h_1 a^{\xi_1}$  dermassen zu bestimmen, dass bei der Substitution von  $x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$  die Reduction auf Null im Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}$  auch bei der nächstfolgenden Potenz von  $a$  erfolge, so zwar, dass nicht nur die Glieder mit der niedrigsten, sondern auch jene mit der nächst höheren Potenz sich tilgen. Man hat:

$$x^r = h_0^x a^{x\xi_0} + x h_0^{x-1} h_1 \cdot a^{(x-1)\xi_0 + \xi_1} + \dots$$

Hier besitzen die aufgeschriebenen beiden Glieder wegen des Stattfindens der Relation  $\xi_0 < \xi_1$  die beiden niedrigsten Potenzen von  $a$ , alle übrigen, hier nicht aufgeführten aber sämtlich höhere Potenzen. Jedes einzelne Glied  $H a^x x^r$  des Gleichungspolynomes  $P$  liefert demnach einen aufsteigend geordneten Ausdruck, der, in seinen beiden ersten Gliedern entwickelt, die Form besitzt:

$$(62) \quad H a^x x^r = H h_0^x a^{x\xi_0} + x H h_0^{x-1} h_1 a^{x\xi_0 - \xi_0 + \xi_1} + \dots$$

und durch Summirung aller dieser verschiedenen Ausdrücke, ausgedehnt auf alle Glieder des Gleichungspolynomes, gelangt man zum Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}$ . Das erste, mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied des geordneten Substitutionsresultates ist einer früheren Untersuchung und Bezeichnungsweise zufolge:

$$(63) \quad \Sigma [H h_0^x a^{x\xi_0}] = 0.$$

Wir gehen nun daran, das nächst niedrigere, zweite Glied zu bilden. Vor allem ist einleuchtend, dass, dem zweiten aufgeführten Gliede

$$(64) \quad x H h_0^{x-1} h_1 a^{x\xi_0 - \xi_0 + \xi_1}$$

entsprechend, sich beim Summiren eine Gruppe

$$(65) \quad \Sigma [x H h_0^{x-1} h_1 a^{x\xi_0 - \xi_0 + \xi_1}]$$

ergeben wird, correspondirend allen jenen Gliedern des Gleichungspolynomes, welche bei der Bestimmung des Exponenten  $\xi_0$  notirt wurden und auf welche sich das Summenzeichen  $\Sigma$ , einer schon öfter gebrauchten Bezeichnungsweise zufolge, erstreckt. Man bemerkt mit leichter Mühe, dass der Factor  $h_1 a^{-\xi_0 + \xi_1}$  allen diesen Gliedern gemeinschaftlich anhängt, und dass sie noch überdies alle mit derselben Potenz von  $a$  versehen sind, weil  $a + x \xi_0$  in allen Gliedern, auf die sich die Summirung erstreckt, einerlei und kleinsten Zahlwerth  $\eta_0$  hat. Es geht daraus hervor, dass sich alle Glieder dieser Gruppe durch Reduction auf ein einziges zusammenziehen lassen, von der Form:

$$(66) \quad \mathfrak{S}'_0 h_1 \cdot a^{\eta_0 + \xi_1}$$

wo  $\mathfrak{S}'_0$  und  $\mathfrak{A}'_0$  die Bedeutungen haben:

$$(67) \quad \mathfrak{S}'_0 = \Sigma [x H h_0^{x-1}]$$

$$(68) \quad \mathfrak{A}'_0 = \eta_0 - \xi_0.$$

unter  $\eta_0$  den kleinsten Werth von  $a + x \xi_0$  verstanden. Diese Gruppe (65) liefert also ein von Null verschiedenes Glied, so lange  $h_0$  eine einfache Wurzel der Bestimmungsgleichung (63) ist. Ausser den hier betrachteten Gliedern, welche durch die Summirung  $\Sigma$  erhalten wurden, wären noch jene übrigen zusammenzufassen, welche denjenigen Gliedern des Gleichungspolynomes entsprechen, die ausser dem Bereiche des Summenzeichens  $\Sigma$  liegen, d. h. die grössere,  $\eta_0$  übersteigende Werthe von  $a + x \xi_0$  liefern, und die wir, um uns kürzer ausdrücken zu können, unter dem Summenzeichen  $\mathfrak{S}$  vereinigt denken wollen. Es ist aber klar vor Augen, dass alle

solchen Glieder durchaus höhere Potenzen von  $a$  aufweisen werden im Vergleiche zu dem Gliede (66), weil offenbar  $a + r \xi_0 - \xi_0 + \xi_1$  die Grösse  $\mathfrak{A}_0 + \xi_1 = \mathfrak{A}_0 - \xi_0 + \xi_1$ , bei allen übersteigt. Eben so ist auch klar, dass die übrigen, hier nicht aufgeführten Bestandglieder des Ausdruckes (62) nur Glieder mit höheren Potenzen von  $a$  zu liefern im Stande seien. Wir haben uns daher nur noch zum ersten Gliede des Ausdruckes (62), d. h. zu dem  $H h_0^r a^{a+r\xi_0}$  zu wenden, und nachdem schon die Summirung  $\mathfrak{Z}$  daran vorgenommen wurde, noch auf jene übrigen Glieder des Gleichungspolynomes  $P$  überzugehen, die ausser dem Bereiche dieser Summe  $\mathfrak{Z}$ , hingegen im Bereiche der Summirung  $\mathfrak{S}$  liegen und unter ihnen das mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene, oder falls mehrere solche sich ergeben sollten, ihre Summe zu bestimmen.  $\mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$  sei dieses verlangte Glied; so ist nunmehr kein Zweifel, dass das mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied des Substitutionsresultates nur aus den zwei Gliedern:

$$\mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{A}_0} \text{ und } \mathfrak{S}'_0 h_1 a^{\mathfrak{A}_0 + \xi_1}$$

entstehen könne und zwar je nach der Wahl des Zahlwerthes von  $\xi_1$  aus einem oder aus beiden. Hier liegen nun die Bedingungen für  $\xi_1$  und  $h_1$  klar vor Augen, um auch diese Potenz von  $a$  verschwinden zu lassen. Man erreicht dies nämlich durch Erfüllen der Gleichung:

$$(69) \quad \mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{S}'_0 h_1 a^{\mathfrak{A}_0 + \xi_1} = 0$$

also durch:

$$(70) \quad \xi_1 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}'_0, \quad h_1 = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}'_0}$$

$\mathfrak{S}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$  und  $\mathfrak{S}'_0 a^{\mathfrak{A}'_0}$  sind die ersten Glieder der aufsteigend geordneten Substitutionsresultate, die für  $x = x_0$  aus  $P$  und  $\frac{dP}{dx}$  hervorgehen.

Man sieht hieraus, dass das einzuleitende Rechnungsverfahren vollkommen übereinstimmt mit jenem, welches bei dem absteigenden Entwicklungsgange angegeben wurde. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Substitutionsresultate aufsteigend geordnet werden.

Wie man das erste Folgeglied  $h_1 a^{\xi_1}$  gefunden hat, eben so findet man die übrigen.

Hat man nämlich schon eine Summe von Entwicklungsgliedern:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots + h_r a^{\xi_r}$$

erhalten, so kann man noch eines hinzufügen:  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ , mit noch unbestimmt gelassenen  $h_{r+1}$  und  $\xi_{r+1}$ , nun anstatt  $x$  den Ausdruck  $x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  in das Gleichungspolynom substituiren, das Substitutionsresultat ordnen und hierauf die Bedingungen für  $h_{r+1}$  und  $\xi_{r+1}$  ableiten, damit eine weitere Reduction auf Null erfolge. Bei dieser Substitution verwandelt sich das Gleichungspolynom  $P$  in einen  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  und  $a$  enthaltenden Ausdruck von der Form:

$$(71) \quad P = S[H a^a x_r^r] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[x H a^a x_r^{r-1}] + \dots$$

Hier bedeuten  $S[H a^a x_r^r]$  und  $S[x H a^a x_r^{r-1}]$  die für  $x = x_r$  aus  $P$  und  $\frac{dP}{dx}$  hervorgehenden Substitutionsresultate und sind daher  $a$  enthaltende Ausdrücke, die aufsteigend nach Potenzen dieser Grösse geordnet sind. In  $S[H a^a x_r^r]$  findet eine Reduction auf Null in einer



Reihe der niedrigsten Potenzen Statt und das erste von Null verschiedene Glied desselben, welches wir mit  $\mathfrak{S}_r a^{2r}$  bezeichnen wollen, wird daher durch wirkliche Substitution ermittelt werden müssen. Im zweiten Bestandtheile erscheint  $S[x H a^3 x^{r-1}]$  als Factor von  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ . Das mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied derselben ist offenbar

$$\Sigma[x H h_0^{r-1}] a^{\xi_0 - \xi_0} = \mathfrak{S}_0' a^{2r_0}'.$$

Die übrigen mit höheren Potenzen von  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  versehenen Bestandtheile, die in (71) nicht ausdrücklich aufgeführt sind, können hier aus jeder weiteren Berücksichtigung gelassen werden, so lange, wie hier vorausgesetzt wurde,  $\Sigma[x H h_0^{r-1}]$  einen von Null verschiedenen Werth besitzt, weil sie sämmtlich nur Glieder mit höheren Potenzen von  $a$  beherbergen. Es geht daraus hervor, dass für jede Wahl von  $h_{r+1}$  und  $\xi_{r+1}$ , so lange nur  $\xi_{r+1} > \xi_r$  erfüllt bleibt, das erste, mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied des Substitutionsresultates  $P$  nur aus den beiden Gliedern:

$$\mathfrak{S}_r a^{2r} \text{ und } \mathfrak{S}_0' h_{r+1} a^{2r_0' + \xi_{r+1}}$$

hervorgehen könne. Hier sind gleichfalls die für  $h_{r+1}$  und  $\xi_{r+1}$  zu Recht bestehenden Bedingungen unmittelbar ersichtlich: Man hat nämlich die Gleichung:

$$(72) \quad \mathfrak{S}_r a^{2r} + \mathfrak{S}_0' h_{r+1} a^{2r_0' + \xi_{r+1}} = 0$$

zu erfüllen, d. h.

$$(73) \quad \xi_{r+1} = 2r - 2r_0' \text{ und } h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{S}_r}{\mathfrak{S}_0'}$$

zu wählen. Es findet sich die früher gemachte Behauptung bestätigt, dass das hier geltende Verfahren in nichts von jenem verschieden sei, das bei der absteigenden Reihenentwicklung in analogen Fällen zur Bestimmung der Folgeglieder diente, als eben nur in der verkehrten Ordnungsweise der Substitutionsresultate.

§. 20.

Wenden wir nun noch unsere Aufmerksamkeit jenen anderen, seltener zutreffenden Fällen zu, wo die gewonnenen Anfangsglieder der Entwicklung als wiederholte Wurzeln höherer Gleichungen erscheinen, und überzeugen wir uns auch in diesen Ausnahmefällen von der vollkommenen Übereinstimmung des Rechnungsverfahrens bei der auf- und absteigenden Entwicklung. Setzen wir also voraus, die Bestimmung der Anfangsglieder von  $x$  hätte zu einem bestimmten solchen  $x_0 = h_0 a^{\xi_0}$  geführt, und der Coëfficient  $h_0$  in demselben sei eine  $m$ -mal wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung:

$$(74) \quad \Sigma[H h_0^r] = 0.$$

Es bestehen dann die identischen Gleichungen:

$$(75) \quad \begin{aligned} \Sigma[H h_0^r] &= 0 \\ \Sigma[x H h_0^{r-1}] &= 0 \\ \Sigma[x(x-1) H h_0^{r-2}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma[x(x-1) \dots (x-m+2) H h_0^{x-m+1}] = 0;$$

hingegen ist

$$\Sigma[x(x-1) \dots (x-m+1) H h_0^{x-m}]$$

von Null verschieden.

Substituiren wir anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom  $P = S[H a^x x^r]$  den Ausdruck:

$$(76) \quad x = x_0 + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$$

wobei  $h_0$  und  $\xi_0$  eben jene speciellen Werthe besitzen, die bei der Bestimmung des Anfangsgliedes dafür aufgefunden worden,  $x'$  aber eine aufsteigend geordnete Reihe bedeutet, beginnend mit dem Gliede  $h_1 a^{\xi_1}$ , in welchem  $h_1$  und  $\xi_1$  noch unbestimmt gelassen sind; so erhält man:

$$(77) \quad x^r = x_0^r + r x_0^{r-1} x' + \binom{r}{2} x_0^{r-2} x'^2 + \dots + \binom{r}{m} x_0^{r-m+1} x'^{m-1} + \binom{r}{m} x_0^{r-m} x'^m + \dots$$

weil zufolge der Relation  $\xi_0 < \xi_1$  nur bei dieser Entwicklungsweise ein aufsteigend geordneter Ausdruck gewonnen wird. Man findet ferner:

$$(78) \quad P = S[H a^x x^r] = S[H a^x x_0^r] + S[r H a^x x_0^{r-1}] x' + \frac{1}{2} S[r(r-1) H a^x x_0^{r-2}] x'^2 + \dots \\ + \frac{1}{1 \dots (m-1)} S[r(r-1) \dots (r-m+2) H a^x x_0^{r-m+1}] x'^{m-1} + \\ + \frac{1}{1 \dots m} S[r(r-1) \dots (r-m+1) H a^x x_0^{r-m}] x'^m + \dots$$

und hat jetzt bei unbestimmt gelassenen  $x_1$  und  $\xi_1$  die Reductionen so weit wie möglich durchzuführen und die mit den niedrigsten Potenzen von  $a$  versehenen Glieder zu bestimmen. Vorerst lassen sich die Summen  $S$  in zwei Theile zerlegen:  $\Sigma$  und  $\Theta$ , wo in  $\Sigma$  die mit dem kleinsten Werthe von  $a + r \xi_0$  versehenen Glieder, in  $\Theta$  aber alle übrigen zusammengefasst erscheinen; ferner ist das erste Glied  $h_1 a^{\xi_1}$  von  $x'$  jedenfalls mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehen, so zwar, dass man,  $x'$  durch  $h_1 a^{\xi_1}$  ersetzend, wohl eine grosse Anzahl von Gliedern wird weggelassen haben, aber durchaus nur solche, die die niedrigste Potenz von  $a$  sicherlich nicht besitzen. Man erhält demnach verfahren:

$$P = \Sigma[H h_0^r \cdot a^{a+r\xi_0}] + h_1 a^{\xi_1} \cdot \Sigma[r H h_0^{r-1} \cdot a^{a+r\xi_0-\xi_0}] + \frac{1}{2} h_1^2 a^{2\xi_1} \cdot \Sigma[r(r-1) H h_0^{r-2} \cdot a^{a+r\xi_0-2\xi_0}] + \dots \\ + \frac{h_1^{m-1} a^{(m-1)\xi_1}}{1 \dots (m-1)} \Sigma[r(r-1) \dots (r-m+2) H h_0^{r-m+1} \cdot a^{a+r\xi_0-(m-1)\xi_0}] + \\ + \frac{h_1^m a^{m\xi_1}}{1 \dots m} \Sigma[r(r-1) \dots (r-m+1) H h_0^{r-m} \cdot a^{a+r\xi_0-m\xi_0}] + \dots \\ + \Theta[H h_0^r \cdot a^{a+r\xi_0}] + h_1 a^{\xi_1} \cdot \Theta[r \cdot H h_0^{r-1} \cdot a^{a+r\xi_0-\xi_0}] + \frac{1}{2} h_1^2 a^{2\xi_1} \cdot \Theta[r(r-1) H h_0^{r-2} \cdot a^{a+r\xi_0-2\xi_0}] + \dots \\ + \frac{h_1^{m-1} a^{(m-1)\xi_1}}{1 \dots (m-1)} \Theta[r(r-1) \dots (r-m+2) H h_0^{r-m+1} \cdot a^{a+r\xi_0-(m-1)\xi_0}] + \\ + \frac{h_1^m a^{m\xi_1}}{1 \dots m} \Theta[r(r-1) \dots (r-m+1) H h_0^{r-m} \cdot a^{a+r\xi_0-m\xi_0}] + \dots$$

In Folge der Gleichungen (74), (75) verschwinden alle mit  $\Sigma$  bezeichneten Summen unter den hier aufgeführten, mit Ausnahme der letzten, die jedenfalls einen von Null verschiedenen Werth erlangt, den wir einer früheren Bezeichnungsweise gemäss mit  $\mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{H}_0^{(m)}}$  andeuten wollen, wobei  $\mathfrak{H}_0^{(m)} = \eta_0 - m \xi_0$  ist. Die mit  $\Theta$  bezeichneten Summen hingegen sind im

Allgemeinen von Null verschieden und zwar selbst wieder Polynome, in welchen  $a$  erscheint. Die ersten, mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehenen Glieder derselben lassen sich directer Substitution finden; wir wollen sie für die  $m$  ersten mit:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, \mathfrak{H}'_0 a^{\mathfrak{A}'_0}, \mathfrak{H}''_0 a^{\mathfrak{A}''_0}, \dots, \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}} \dots$$

bezeichnen; die letzte fällt von selbst aus dem Bereiche jeder ferneren Betrachtung, wie allso gleich gezeigt werden soll.

Es ist nämlich hier:

$$\mathfrak{A}_0 > \eta_0, \mathfrak{A}'_0 > \eta_0 - \xi_0, \mathfrak{A}''_0 > \eta_0 - \xi_0, \dots, \mathfrak{A}_0^{(m-1)} > \eta_0 - (m-1)\xi_0 \dots$$

weil in den Summen  $\mathfrak{S}$  die mit dem kleinsten Werthe von  $a + r \xi_0$  versehenen Glieder nicht erscheinen. Die letzte der aufgeschriebenen Summen  $\mathfrak{S}$  ist demnach jedenfalls mit einer höheren Potenz von  $a$  versehen, als die letzte Summe  $\mathfrak{Z}$ . Alle übrigen hier nicht aufgeführten Bestandglieder fallen, wie eine leichte Überlegung lehrt, von selbst weg, so lange

$$\mathfrak{Z}[x(x-1) \dots (x-m+1) H h_0^{x-m}] a^{\eta_0 - m \xi_0} = \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)}}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Wir schliessen hieraus, dass für alle möglichen Werthe von  $\xi_1$ , wenn sie nur die Relation  $\xi_1 > \xi_0$  erfüllen, das erste, mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied des Substitutionsresultates  $P$  sich nur aus einem oder aus mehreren der folgenden zusammensetzen könne:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, h_1 H'_0 a^{\mathfrak{A}'_0 + \xi_1}, \frac{1}{2} h_1^2 \mathfrak{H}''_0 a^{\mathfrak{A}''_0 + 2\xi_1}, \dots, \frac{1}{1 \dots (m-1)} h_1^{m-1} \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1)\xi_1},$$

$$\frac{1}{1 \dots m} h_1^m \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1}.$$

Hier liegen nun die für  $\xi_1$  und  $h_1$  bestehenden Bedingungen klar vor Augen:  $\xi_1$  ist nämlich dermassen zu wählen, dass unter diesen Gliedern mindestens zwei oder mehrere die niedrigste Potenz von  $a$  aufweisen, also ist ihm ein Grenzwert zweiter Ordnung für das System von Ungleichungen:

$$\eta < \mathfrak{A}_0$$

$$\eta < \mathfrak{A}'_0 + \xi_1$$

$$\eta < \mathfrak{A}''_0 + 2\xi_1$$

$$\dots$$

$$\eta < \mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1)\xi_1$$

$$\eta < \mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1$$

zu ertheilen. Man kann solcher brauchbaren Werthe für  $\xi_1$  höchstens  $m$  und muss mindestens Einen finden. Die Bestimmung der zugehörigen  $h_1$  erfolgt durch Auflösen der entsprechenden Gleichungen. Im Ganzen ergeben sich in der Regel auf diesem Wege  $m$  verschiedene Folgeglieder  $h_1 a^{\xi_1}$ , deren jedes einer einzigen und bestimmten Auflösung  $x$  zukommt; bisweilen finden sich aber wiederholte Wurzelwerthe  $h_1$  vor und die Anzahl der von einander verschiedenen Folgeglieder  $h_1 a^{\xi_1}$  ist dann kleiner als  $m$ .

Das Verfahren, welches zu den Folgegliedern  $h_1 a^{\xi_1}$  führt, wenn  $h_0$  eine wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung war, ist daher im Wesentlichen folgendes: Man substi-

tuire das gefundene Anfangsglied  $h_0 a^{\xi_0}$  anstatt  $x$  in das Gleichungspolynom und in seine  $m$  ersten derivirten Functionen, ordne diese Substitutionsresultate aufsteigend nach Potenzen von  $a$  und bilde nun aus den ersten von Null verschiedenen Gliedern derselben, die wir mit:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{H}_0}, \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{H}_0'}, \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{H}_0''}, \dots, \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{H}_0^{(m-1)}}, \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{H}_0^{(m)}}$$

bezeichnet haben, die folgende Gleichung nach  $x'$  des  $m$ -ten Grades:

$$(79) \quad \mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{H}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{H}_0'} x' + \frac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{H}_0''} x'^2 + \dots + \\ + \frac{1}{1 \dots (m-1)} \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{H}_0^{(m-1)}} x'^{m-1} + \frac{1}{1 \dots m} \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{H}_0^{(m)}} x'^m = 0$$

und wende darauf das bekannte Verfahren an, welches die Anfangsglieder von  $x'$  in der aufsteigenden Entwickelungsform liefert; dieselben sind die gesuchten Werthe von  $h_1 a^{\xi_1}$ .

Man bemerkt hier allsogleich die vollkommene Übereinstimmung dieses Verfahrens mit jenem, welches bei der absteigenden Entwickelung von  $x$  angegeben wurde.

### §. 21.

Es bleibt uns jetzt nur noch ein einziger Fall zu erörtern, nämlich die Bestimmung eines späteren Folgegliedes  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ , wenn die Summe aller vorhergehenden Entwickelungsglieder, nämlich:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots + h_r a^{\xi_r}$$

bekannt ist, und die in denselben erscheinenden Coëfficienten  $h_0, h_1, h_2, \dots, h_r$  wiederholte Wurzeln ihrer Bestimmungsgleichungen darstellen. Es ist dies der allgemeinste Fall von allen und wir werden auch in diesem die vollkommenste Übereinstimmung zwischen dem auf- und absteigenden Entwickelungsvorgange nachweisen.

Wir wollen annehmen, dass die Coëfficienten  $h_0, h_1, h_2, \dots, h_r$  als wiederholte Wurzeln nicht nur ihren Bestimmungsgleichungen, sondern auch den daraus durch Differentiationen abgeleiteten Gleichungen Genüge leisten, und namentlich der letzte derselben  $h_r$  eine  $p$ -fache Wurzel darstelle. Wir werden nun anstatt  $x$  den Ausdruck:

$$(80) \quad x_r + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \dots + h_r a^{\xi_r} + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + \dots$$

in das Gleichungspolynom  $P$  substituiren, wobei wir die Werthe von  $h_{r+1}$  und  $\xi_{r+1}$  noch ganz unbestimmt lassen. Das auf diesem Wege hervorgehende Substitutionsresultat wird daher die Grössen  $a$  und  $x'$  in sich schliessen, und, so lange die in  $x'$  erscheinenden Grössen  $h$  und  $\xi$  unbestimmt bleiben, nur jene Reductionen zulassen, die zufolge der zweckmässigen Wahl von  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, h_0, h_1, h_2, \dots, h_r$  eintreten. Schreitet man nun zur Bestimmung des mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehenen Gliedes derselben, so bleibt seine Form so lange unbestimmt, als über  $\xi_{r+1}$  nicht in einer bestimmten Weise verfügt wird.

Beschränkt man die Werthe von  $\xi_{r+1}$  durch die Relation:  $\xi_{r+1} > \xi_r$ , eine Beschränkung die unerlässlich ist, wenn  $x$  ein wohlgeordneter Ausdruck sein soll, so ergibt sich nur eine

beschränkte Anzahl von Gliedern,  $p + 1$  an der Zahl, die möglicherweise einzeln oder zu mehreren, je nach dem speciellen Werthe von  $\xi_{r+1}$  das erste mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied zusammensetzen können.

Dieselben besitzen  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  in verschiedenen Potenzen von der 0<sup>ten</sup> bis  $p^{\text{ten}}$  und sind namentlich folgende:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}, h_{r+1} \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1}}, \frac{h^2_{r+1}}{1 \cdot 2} \mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r + 2\xi_{r+1}}, \dots, \frac{h_{r+1}^{p-1}}{1 \dots (p-1)} \mathfrak{H}_r^{(p-1)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p-1)} + (p-1)\xi_{r+1}},$$

$$\frac{h_{r+1}^p}{1 \dots p} \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1}},$$

wo die gebrauchten Bezeichnungen die bekannten Bedeutungen haben. Zur Bestimmung von  $\xi_{r+1}$  wendet man sich nun zum Systeme von Ungleichungen

$$\begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_r \\ \eta &< \mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}''_r + 2\xi_{r+1} \\ &\dots \\ \eta &< \mathfrak{A}_r^{(p-1)} + (p-1)\xi_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1} \end{aligned}$$

und findet als Grenzwerte zweiter Ordnung lauter brauchbare Werte für diese Grösse. Für jeden solchen Werth von  $\xi_{r+1}$  besteht eine entsprechende Gleichung in  $h_{r+1}$  meist höheren Grades, deren von Null verschiedene Wurzeln die verlangten Werte darstellen.

Dies ist im Wesentlichen der Gang und das Ergebniss der nachfolgenden Untersuchungen.

Substituiren wir in das Gleichungspolynom  $P$  anstatt  $x$  den Ausdruck  $x_r + x'$  der in entwickelter Form in (80) ersichtlich ist, so erhält man:

$$(82) \quad P = S[H a^x x_r^x] + x' \cdot S[x H a^x x_r^{x-1}] + \frac{x'^2}{2} S[x(x-1) H a^x x_r^{x-2}] + \dots$$

$$+ \frac{x'^p}{1 \dots p} S[x(x-1) \dots (x-p+1) H a^x x_r^{x-p}] + \dots$$

Setzen wir voraus, dass in den hier erscheinenden Summen, welche die für  $x = x_r$  aus den Polynomen:

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^pP}{dx^p}, \dots$$

hervorgehenden Substitutionsresultate, also nach Potenzen von  $a$  aufsteigend geordnete Polynome darstellen, die von Null verschiedenen ersten, also mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehenen Glieder bezüglich mit:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}, \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r}, \mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r}, \dots, \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)}}, \dots$$

bezeichnet werden, und bedenkt man noch überdies, dass  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  das erste Glied von  $x'$  ist, so findet man als erste und niedrigste Glieder der einzelnen Bestandtheile in (82):

$$(83) \quad \mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}, h_{r+1} \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1}}, \frac{1}{2} h^2_{r+1} \mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r + 2\xi_{r+1}}, \dots, \frac{1}{1 \dots p} h^p_{r+1} \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1}}, \dots$$

Eine weitere Reduction im niedrigsten Gliede durch entsprechende Wahl von  $\xi_{r+1}$  wird erfolgen, wenn unter den Exponenten dieser Glieder:

$$(84) \quad \mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1}, \mathfrak{A}''_r + 2\xi_{r+1} \dots \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1} \dots$$

zwei oder mehrere gleich und am kleinsten ausfallen, oder mit anderen Worten, wenn  $\xi_{r+1}$  gleich einem Grenzwerte der zweiten Ordnung für das System von Ungleichungen:

$$(85) \quad \begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_r \\ \eta &< \mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}''_r + 2\xi_{r+1} \\ &\dots \\ \eta &< \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1} \\ &\dots \end{aligned}$$

und noch überdies der Bedingung  $\xi_{r+1} > \xi_r$  entsprechend gewählt wird.

Wir können zwar jetzt noch nicht beweisen, dass wenn  $h_r$  eine  $p$ -mal wiederholte Wurzel seiner Bestimmungsgleichung war, die Gruppe der  $p + 1$  ersten dieser Ungleichungen wirklich solche über  $\xi_r$  liegende Grenzwerte für  $\xi_{r+1}$  liefern werde, wollen aber indess dies als wahr annehmen, den Beweis aber später folgen lassen.

Wir nehmen also an, dass das System von Ungleichungen  $p + 1$  an der Zahl:

$$(86) \quad \begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_r \\ \eta &< \mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}''_r + 2\xi_{r+1} \\ &\dots \\ \eta &< \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1} \end{aligned}$$

lauter Grenzwerte liefere, die über  $\xi_r$  fallen. Das System (85) ist aufsteigend nach den Coefficienten von  $\xi_{r+1}$  geordnet. Geht man bei der Bestimmung der Grenzwerte in dieser Reihenfolge vor, indem man mit der ersten Ungleichung beginnt und auf die späteren übergeht, so erhält man zuerst den allergrössten Grenzwert und hierauf die nächst niedrigeren. Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn es überhaupt solche über  $\xi_r$  liegende Grenzwerte gibt, sie nur aus einer Gruppe der ersten Ungleichungen hervorgehen können. Ob aber solche über  $\xi_r$  liegende Grenzwerte bestehen, d. h. ob zu den Gliedersummen  $x_r$  wirklich jedesmal ein Folglied  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  gefunden werden könne und dass namentlich die Gruppe (86) der ersten Ungleichungen  $p + 1$  an der Zahl nur lauter solche liefere, muss vor der Hand noch als zweifelhaft angenommen werden; den Beweis, dass dies wirklich stattfindet, werden wir, wie bereits erwähnt, später folgen lassen.

Denken wir uns nun unter  $\xi_{r+1}$  einen bestimmten jener über  $\xi_r$  liegenden Grenzwerte der zweiten Ordnung für das System (85) oder (86), ferner unter

$$(87) \quad \eta_{r+1} = \mathfrak{A}_r^{(q)} + q\xi_{r+1} = \dots = \mathfrak{A}_r^{(q+s)} + (q+s)\xi_{r+1}$$

diejenigen Gleichungen, in welche sich die entsprechenden Ungleichungen verwandeln, wobei also der Natur der Sache nach  $q + s \leq p$  ausfällt, so ist hiermit eine Reihe von Gliedern der in (83) aufgeführten bezeichnet:

$$(88) \quad \frac{h_{r+1}^q}{1 \dots q} \mathfrak{S}_r^{(q)} a^{\mathfrak{A}_r^{(q)} + q\xi_{r+1}} \dots \frac{h_{r+1}^{q+s}}{1 \dots (q+s)} \mathfrak{S}_r^{(q+s)} a^{\mathfrak{A}_r^{(q+s)} + (q+s)\xi_{r+1}}$$

welche alle dieselbe und niedrigste Potenz  $a^{\eta_{r+1}}$  enthalten und bei der Summirung sich in ein einziges zusammenziehen lassen:

$$(89) \quad \left[ \frac{h_{r+1}^q}{1 \dots q} \mathfrak{S}_r^{(q)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s}}{1 \dots (q+s)} \mathfrak{S}_r^{(q+s)} \right] a^{r+1}.$$

Eine Reduction desselben auf Null lässt sich demnach durch eine zweckmässige Wahl des bisher noch unbestimmt gelassenen Coëfficienten  $h_{r+1}$  herbeiführen, gebunden an das Erfülltsein der Bedingungsgleichung:

$$(90) \quad \frac{h_{r+1}^q}{1 \dots q} \mathfrak{S}_r^{(q)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s}}{1 \dots (q+s)} \mathfrak{S}_r^{(q+s)} = 0.$$

Diese Gleichung ist ganz und rational und lässt demnach ausser den Nullwerthen noch mindestens einen einzigen, in der Regel aber  $s$  verschiedene Werthe von  $h_{r+1}$  zu.

Zu einem jeden Grenzwerte  $\xi_{r+1}$  ergibt sich eine entsprechende Gleichung, die nach Wegschaffen der Nullwurzeln von einem gewissen Grade  $s$  ist, entsprechend dem Unterschiede  $(q + s) - q$  der Coëfficienten von  $\xi_{r+1}$  in den zugehörigen beiden äussersten linearen Functionen. Die Summe aller verschiedenen  $s$ , welche den einzelnen Grenzwerten angehören, ist demnach, wie leicht ersichtlich, gleich  $p$ .

Die Gesamtzahl der auf solche Weise hervorgehenden Folgeglieder  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  ist folglich in der Regel  $p$ , und eine Verminderung ihrer Anzahl kann nur durch das Auftreten gleicher Wurzeln erfolgen, welche dann wieder den Keim für mehrere Folgeglieder  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}$  in sich schliessen.

Wir haben also im Grunde nur noch zu beweisen, dass das System (86) wirklich nur lauter über  $\xi_r$  liegende Grenzwerte liefern könne. Dies ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen.

Wir werden nämlich nun das nächstfolgende Glied  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}$  auf dieselbe Weise bestimmen, und finden, dass wenn  $h_{r+1}$  eine  $t$ -fache Wurzel der Gleichung (90) ist, zu der Glieder-summe  $x_{r+1}$  das nächstfolgende wirklich durch eine Gleichung vom Grade  $t$  gegeben sei. Man wird also in der Regel  $t$  verschiedene Folgeglieder  $h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}$  oder wieder gleiche Wurzelwerthe für  $h_{r+2}$  erhalten, die aus demselben Grunde zu mehreren verschiedenen oder gleichen  $h_{r+3} a^{\xi_{r+3}}$  Veranlassung geben u. s. w., so dass eine  $t$ -mal wiederholte Wurzel  $h_{r+1}$  jedenfalls bei fortgesetzter Entwicklung entweder zu  $t$  verschiedenen Auflösungen führt, oder die Bestimmungsgleichungen für die Coëfficienten fortan bei höherem Grade erhält, was dann als ein Beweis anzusehen ist, dass die entwickelten Glieder nicht nur die  $P = 0$ , sondern auch eine oder mehrere der derivirten Gleichungen erfüllen, mit anderen Worten, dass die betreffende Auflösung als doppelte, drei- oder mehrfache Wurzel der  $P = 0$  zu gelten habe.

Stellen wir uns unter  $h_{r+1}$  jetzt einen bestimmten Zahlwerth vor, gezogen aus der Gleichung (90) und, um den allgemeinsten Fall zu berücksichtigen, wollen wir annehmen, derselbe sei eine  $t$ -mal wiederholte Wurzel, so dass die Gleichungen bestehen:

$$(91) \quad \begin{aligned} & \frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots q} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s)} = 0 \\ & \frac{h_{r+1}^{q-1} \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots (q-1)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-1} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s-1)} = 0 \\ & \frac{h_{r+1}^{q-2} \mathfrak{S}_r^{(q)}}{1 \dots (q-2)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-2} \mathfrak{S}_r^{(q+s)}}{1 \dots (q+s-2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{h_{r+1}g^{-t+1}\mathfrak{H}_r(q)}{1 \dots (g-t+1)} + \dots + \frac{h_{r+1}g^{s-t+1}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \dots (g+s-t+1)} = 0$$

aber der Ausdruck:

$$\frac{h_{r+1}g^{-t}\mathfrak{H}_r(q)}{1 \dots (g-t)} + \dots + \frac{h_{r+1}g^{s-t}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \dots (g+s-t)}$$

von Null verschieden bleibt. Substituiren wir nun anstatt  $x$  den Werth  $x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  in die Polynome:

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^tP}{dx^t},$$

welche die Form besitzen:

$$(92) \quad \begin{aligned} P &= S[H a^a x^x] \\ \frac{dP}{dx} &= S[x H a^a x^{x-1}] \\ \frac{d^2P}{dx^2} &= S[x(x-1) H a^a x^{x-2}] \\ &\dots \\ \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} &= S[x(x-1) \dots (x-t+2) H a^a x^{x-t+1}] \\ \frac{d^tP}{dx^t} &= S[x(x-1) \dots (x-t+1) H a^a x^{x-t}] \end{aligned}$$

so erhält man:

$$(93) \quad P = S[H a^a x_r^x] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[x H a^a x_r^{x-1}] + \frac{1}{2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} S[x(x-1) H a^a x_r^{x-2}] + \dots$$

$$(94) \quad \frac{dP}{dx} = S[x H a^a x_r^{x-1}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[x(x-1) H a^a x_r^{x-2}] + \frac{1}{2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} S[x(x-1)(x-2) H a^a x_r^{x-3}] + \dots$$

$$(95) \quad \frac{d^2P}{dx^2} = S[x(x-1) H a^a x_r^{x-2}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[x(x-1)(x-2) H a^a x_r^{x-3}] + \frac{1}{2} h_{r+1}^2 a^{2\xi_{r+1}} S[x(x-1)(x-2)(x-3) H a^a x_r^{x-4}] + \dots$$

$$(96) \quad \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} = S[x(x-1) \dots (x-t+2) H a^a x_r^{x-t+1}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[x(x-1) \dots (x-t+1) H a^a x_r^{x-t}] + \dots$$

$$(97) \quad \frac{d^tP}{dx^t} = S[x(x-1) \dots (x-t+1) H a^a x_r^{x-t}] + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} S[x(x-1) \dots (x-t) H a^a x_r^{x-t-1}] + \dots$$

Da vorausgesetzttermassen die ersten mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehenen Glieder von

$$S[H a^a x_r^x], S[x H a^a x_r^{x-1}], S[x(x-1) H a^a x_r^{x-2}], \dots, S[x(x-1) \dots (x-t+1) H a^a x_r^{x-t}]$$

mit:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}, \mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r'}, \mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''}, \dots, \mathfrak{H}_r^{(t)} a^{\mathfrak{A}_r^{(t)}}$$

bezeichnet wurden, so sind die Exponenten von  $a$  in den ersten Gliedern der einzelnen Bestandtheile

$$(98) \quad \text{in (93): } \mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1}, \mathfrak{A}_r'' + 2\xi_{r+1}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1}, \dots$$

$$(99) \quad \text{in (94): } \mathfrak{A}_r', \mathfrak{A}_r'' + \xi_{r+1}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-1)\xi_{r+1}, \dots$$

$$(100) \quad \text{in (95): } \mathfrak{A}_r'', \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-2)\xi_{r+1}, \dots$$

$$(101) \quad \text{in (96): } \mathfrak{A}_r^{(t-1)}, \mathfrak{A}_r^{(t)} + \xi_{r+1}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t+1)\xi_{r+1}, \dots$$

$$(102) \quad \text{in (97): } \mathfrak{A}_r^{(t)}, \dots, \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t)\xi_{r+1}, \dots$$



Man soll nun unter ihnen die kleinsten Werthe ermitteln. Wir haben  $\eta_{r+1}$  den kleinsten Zahlwerth genannt, der für den speciellen Werth von  $\xi_{r+1}$  unter den linearen Functionen des Systemes (85) erscheinen, wobei  $\eta_{r+1}$  den in (87) ersichtlichen Werth besitzt. Da nun  $\eta + s$  einen jedenfalls  $t$  übersteigenden oder mindestens ihm gleichkommenden Werth hat, so sind

- für (98) . . . .  $\eta_{r+1}$
- für (99) . . . .  $\eta_{r+1} - \xi_{r+1}$
- für (100) . . . .  $\eta_{r+1} - 2\xi_{r+1}$
- . . . . .
- für (101) . . . .  $\eta_{r+1} - (t-1)\xi_{r+1}$
- für (102) . . . .  $\eta_{r+1} - t\xi_{r+1}$

die kleinsten dort erscheinenden Zahlwerthe. Das mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied in den für  $x = x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  aus

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}, \frac{d^tP}{dx^t}$$

hervorgehenden Substitutionsresultaten besitzt demnach, vor der Ausführung der durch eine specielle Wahl von  $h_{r+1}$  möglichen Reductionen, die Form:

$$\begin{aligned}
 P &= \left[ \frac{h_{r+1}^q \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots q} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s)} \right] a^{\eta_{r+1}} + \dots \\
 \frac{dP}{dx} &= \left[ \frac{h_{r+1}^{q-1} \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-1)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-1} \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-1)} \right] a^{\eta_{r+1} - \xi_{r+1}} + \dots \\
 \frac{d^2P}{dx^2} &= \left[ \frac{h_{r+1}^{q-2} \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-2)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-2} \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-2)} \right] a^{\eta_{r+1} - 2\xi_{r+1}} + \dots \\
 &\dots \\
 \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} &= \left[ \frac{h_{r+1}^{q-t+1} \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-t+1)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-t+1} \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-t+1)} \right] a^{\eta_{r+1} - (t-1)\xi_{r+1}} + \dots \\
 \frac{d^tP}{dx^t} &= \left[ \frac{h_{r+1}^{q-t} \mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-t)} + \dots + \frac{h_{r+1}^{q+s-t} \mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-t)} \right] a^{\eta_{r+1} - t\xi_{r+1}} + \dots
 \end{aligned}$$

Zufolge der Gleichungen (91) verschwinden aber alle diese Glieder mit Ausnahme des letzten, und die Substitutionsresultate

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^tP}{dx^t}$$

beginnen daher mit einer anderen, höheren Potenz von  $a$ . Bezeichnet man einer öfter gebrauchten Bezeichnungsweise gemäss die ersten von Null verschiedenen Glieder der für  $x = x_{r+1}$  aus  $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \dots, \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}, \frac{d^tP}{dx^t}$  hervorgehenden und vollkommen geordneten Substitutionsresultate mit:

$$\mathfrak{S}_{r+1} a^{\mathfrak{A}_{r+1}}, \mathfrak{S}'_{r+1} a^{\mathfrak{A}'_{r+1}}, \mathfrak{S}''_{r+1} a^{\mathfrak{A}''_{r+1}}, \dots, \mathfrak{S}_{r+1}^{(t-1)} a^{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)}}, \mathfrak{S}_{r+1}^{(t)} a^{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}$$

so bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}_{r+1} &> \eta_{r+1} \\
 \mathfrak{A}'_{r+1} &> \eta_{r+1} - \xi_{r+1} \\
 \mathfrak{A}''_{r+1} &> \eta_{r+1} - 2\xi_{r+1}
 \end{aligned}
 \tag{103}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} &> \eta_{r+1} - (t-1)\xi_{r+1} \\ \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} &= \eta_{r+1} - t\xi_{r+1} \\ \mathfrak{S}_{r+1}^{(t)} &= \frac{h_{r+1}q - t\mathfrak{S}_r(q)}{1 \dots (q-t)} + \dots + \frac{h_{r+1}q + s - t\mathfrak{S}_r(q+s)}{1 \dots (q+s-t)} \end{aligned}$$

Die derivirten Polynome höherer Ordnung, wie z. B.  $\frac{d^{t+1}P}{dx^{t+1}}$  besitzen aber Anfangsglieder, deren  $\mathfrak{A}_{r+1}^{(v)}$  mindestens den Werth  $\eta_{r+1} - v\xi_{r+1}$  erreicht oder aber darüber liegt, wie eine analoge Betrachtung lehrt, so zwar dass für alle über  $\xi$  liegenden Werthe von  $v$  die doppeldeutige Relation:

$$(104) \quad \mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} \geq \eta_{r+1} - v\xi_{r+1}$$

besteht.

Diese Relationen (103) und (104) erlauben uns nun unmittelbar den Schluss, dass zur Bestimmung des nächstfolgenden Gliedes  $h_{r+2}a\xi_{r+2}$  ein System von  $t+1$  Ungleichungen aufzulösen sei, welches lauter Grenzwerte liefert, die über  $\xi_{r+1}$  liegen und demnach brauchbare Werthe von  $\xi_{r+2}$  darstellen. In der That, denkt man sich im Systeme von Ungleichungen (85), welches zur Bestimmung von  $\xi_{r+1}$  dienlich war,  $r$  in  $r+1$  und  $r+1$  in  $r+2$  verwandelt, so erhält man daraus unmittelbar das zur Bestimmung von  $\xi_{r+2}$  dienliche System:

$$(105) \quad \begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\ \eta &< \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2} \\ &\dots \\ \eta &< \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} + (t-1)\xi_{r+2} \\ \eta &< \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\xi_{r+2} \\ &\dots \\ \eta &< \mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} + v\xi_{r+2}. \end{aligned}$$

Nun folgt aus den Ungleichungen und der Gleichung in (103):

$$(106) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} &> \xi_{r+1} \\ \frac{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t-2)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{2} &> \xi_{r+1} \\ &\dots \\ \frac{\mathfrak{A}''_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t-2} &> \xi_{r+1} \\ \frac{\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t-1} &> \xi_{r+1} \\ \frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{t} &> \xi_{r+1}. \end{aligned}$$

Die im ersten Theile dieser Ungleichungen stehenden Quotienten sind aber geradezu jene Werthe von  $\xi_{r+2}$ , welche die lineare Function  $\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\xi_{r+2}$  der Reihe nach gleichmachen den übrigen:

$$(107) \quad \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} + (t-1)\xi_{r+2} \cdot \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-2)} + (t-2)\xi_{r+2}^2 \cdot \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-3)} + \dots + \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\xi_{r+2} : \mathfrak{A}_{r+1}$$

und da sie, wie hier ersichtlich ist, alle grösser sind als  $\xi_{r+1}$ , so werden alle der Gruppe von Ungleichungen:

$$(108) \quad \begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\ \eta &< \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2} \\ &\dots \\ \eta &< \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\xi_{r+2} \end{aligned}$$

zukommenden Grenzwerte grösser ausfallen als  $\xi_{r+1}$  und daher brauchbare Werte für  $\xi_{r+2}$  liefern.

Die Gleichung (103) und die Ungleichung (104) liefern für  $v > t$  die Relation:

$$\mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} \geq (t-v)\xi_{r+1}$$

oder die gleichbedeutende:

$$\frac{\mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)}}{v-t} \leq \xi_{r+1}$$

Der im ersten Theile dieser Relation stehende Quotient ist geradezu der Werth von  $\xi_{r+2}$  für den die beiden linearen Functionen:  $\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\xi_{r+2}$  und  $\mathfrak{A}_{r+1}^{(v)} + v\xi_{r+2}$  gleiche Werthe erlangen, und da derselbe, wie hier ersichtlich, für alle über  $t$  liegenden  $v$  kleiner oder gleich  $\xi_{r+1}$  ausfällt, so entnimmt man unmittelbar, dass alle übrigen Ungleichungen des Systems (105), welche auf die Gruppe (108) folgen sollten, lauter unbrauchbare Grenzwerte liefern werden.

Es ist also hiemit erwiesen, dass wenn bei der Bestimmung des Folgliedes  $h_r a^{\xi_r}$  der Coefficient  $h_r$  als eine  $t$ -mal wiederholte Wurzel der entsprechenden Bestimmungsgleichung erhalten worden, die Ermittlung des nächstfolgenden Entwicklungsgliedes  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  durch ein System von  $t+1$  Ungleichungen, oder wenn man will, durch eine höhere Buchstabengleichung vom Grade  $t$  gegeben sei, welche lauter brauchbare Werthe dafür liefert, und hiemit wäre die früher erwähnte Lücke des Beweises ausgefüllt, wenn man sich daran erinnert, dass dasselbe Verhalten auch schon bei  $h_0 a^{\xi_0}$  gelte.

Fassen wir nun alles bisher über die Bestimmung der Folgeglieder Gesagte zusammen, so stellt sich die vollkommenste Übereinstimmung zwischen der ab- und aufsteigenden Entwicklungsweise heraus: Um zu einem ermittelten Bestandtheile  $x_r$  der Wurzel das unmittelbar darauffolgende Glied  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  aufzufinden, hat man vor allem anderen zu untersuchen, ob der letzte Coefficient  $h_r$  eine einfache oder eine wiederholte Wurzel seiner Bestimmungsgleichung war. Ist  $h_r$  eine  $p$ -mal wiederholte Wurzel (wo übrigens auch  $p=1$  sein kann), so hat man  $x_r$  anstatt  $x$  in die Polynome:

$$P, \quad \frac{dP}{dx}, \quad \frac{d^2P}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^p P}{dx^p}$$

zu substituieren, diese Substitutionsresultate aufsteigend zu ordnen, ihre ersten Glieder:

$$\mathfrak{S}_r a^{2r}, \mathfrak{S}'_r a^{2r}, \mathfrak{S}''_r a^{2r}, \dots, \mathfrak{S}_r^{(p)} a^{2r(p)}$$

zu bestimmen und nun aus ihnen die Gleichung:

$$(109) \quad \mathfrak{S}_r a^{2r} + x' \mathfrak{S}'_r a^{2r} + \frac{x'^2}{2} \mathfrak{S}''_r a^{2r} + \dots + \frac{x'^p}{1 \dots p} \mathfrak{S}_r^{(p)} a^{2r(p)} = 0$$

zu bilden, welche  $x'$  als Unbekannte enthält, und das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Anfangsglieder von  $x'$  für die aufsteigend nach Potenzen von  $a$  geordnete Entwicklungsform anzuwenden. Alle auf solche Weise gefundenen Anfangsglieder stellen brauchbare Werthe von  $h_{r+1} a^{2r+1}$  dar. Findet man mehrere von einander verschiedene solche Glieder, so bildet ein jedes den Ausgangspunkt einer eigenen ferneren Entwicklung und man wird endlich in der Regel dahin gelangen, dass zu jeder entwickelten Gliedersumme nur ein einziges Folglied gehört, zu dessen Bestimmung eine Gleichung des ersten Grades führt. Ist man dahin gekommen, so sind die Wurzeln der Gleichung vollkommen isolirt und die weiter fortgesetzte Rechnung erfüllt nur den Zweck, eine grössere Anzahl von Entwicklungsgliedern zu liefern. Hier können wieder zweierlei Fälle eintreten. Gewöhnlich lässt sich nämlich die Entwicklung ins Unendliche fortsetzen, weil das aus dem Gleichungspolynome  $P$  hervorgehende Substitutionsresultat von Null verschieden bleibt, wie viele Glieder man auch bilden mag; bisweilen jedoch schliesst sich die Entwicklung von selbst, indem bei einem gewissen Gliede das Substitutionsresultat vollständig verschwindet. Dieser Fall gehört, wie leicht einzusehen, nicht zur Regel sondern zu den Ausnahmen. Unter solchen günstigen Umständen führt also die Entwicklung zu einer geschlossenen Form von  $x'$ . Dies Abbrechen der Entwicklung liegt hier sogar mitunter in der Gewalt des Rechners; bisweilen nämlich lässt sich eine Grösse  $a = a - a$  finden, nach welcher eine Wurzel aufsteigend entwickelt in geschlossener Form erhalten werden kann, und es hängt nur dann von der zweckmässigen Wahl von  $a$  ab. Wir werden in einer nächstfolgenden Abhandlung diesen Gegenstand ausführlicher behandeln.

Wir halten es für überflüssig, die hier auseinandergesetzte Methode noch durch Beispiele weiter zu beleuchten, da das dabei einzuschlagende Rechnungsverfahren keinen neuen Weg verfolgt, der nicht schon dem Leser von der absteigenden Entwicklung her bekannt wäre und daher alles dort Gesagte auch hier vollkommen passt.

## §. 22.

Wir haben schon zu wiederholten Malen Gelegenheit gefunden, auf die Übereinstimmung hinzuweisen, welche zwischen der aufsteigenden und der absteigenden Reihenentwicklung stattfindet. Hier wollen wir noch eine solche zur Sprache bringen. Im §. 16 wurde dargethan, dass man bei der absteigenden Reihenentwicklung von  $x$ , wenn dieselbe bis zu einer gewissen Weite vorgeschritten ist, mit einer einzigen Theiloperation nicht immer nur ein einziges Folglied, sondern deren mehrere auf Einmal erhalten könne. Genau dieselbe Eigenthümlichkeit kommt auch der aufsteigenden Entwicklungsweise zu. Ist man nämlich in der Rechnung so weit vorgeschritten, dass die Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_r$  und  $\mathfrak{P}''_r$ , welche für  $x = x_r$  aus den derivirten Polynomen  $\frac{dP}{dx}$  und  $\frac{d^2P}{dx^2}$  abgeleitet werden, beim fortwährenden Zunehmen der Gliederanzahl  $r$  fortan dieselben Anfangsglieder  $\mathfrak{S}'_r a^{2r}$  und

$\mathfrak{S}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''}$  aufweisen; so ist man bei dem Punkte angelangt, wo durch eine schickliche Abänderung des Rechnungsverfahrens mit einem einzigen Schritte immer mehrere Glieder auf Einmal erhalten werden können. Anstatt nämlich, wie die frühere Regel zur Bestimmung der Folgeglieder vorschreibt, nur das erste Glied des Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$  zu suchen, welches oben der Werth des nächsten Folgegliedes  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$  ist, führt man die Division weiter aus, und erhält so mehrere Glieder auf Einmal:

$$(110) \quad h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \dots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}.$$

Die Grenze, bis zu welcher die Division fortgesetzt werden darf, wird durch eine sehr einfache Relation:

$$(111) \quad \xi_{r+s} < \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}''_p + 2 \xi_{r+1}$$

festgesetzt. Alle auf solche Weise entwickelten Glieder, deren Exponenten  $\xi$  diese Relation erfüllen, sind verlässlich, d. h. sind von denjenigen nicht verschieden, welche zufolge des gewöhnlichen Verfahrens einzeln aus der Quotientenreihe:

$$(112) \quad -\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}, -\frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}_{r+1}'}, -\frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}_{r+2}'}, \dots, -\frac{\mathfrak{P}_{r+s-1}}{\mathfrak{P}_{r+s-1}'}$$

hervorgehen. Die Anzahl  $s$  dieser verlässlichen Glieder ist beim Fortschreiten der Entwicklung im raschen Wachsen begriffen. Diese Eigenthümlichkeit tritt aber, wie gesagt, erst dann auf, wenn die Anfangsglieder von  $\mathfrak{P}_r$  und  $\mathfrak{P}_r''$  unverändert bleiben beim fortwährenden Wachsen der Gliederanzahl  $r$ . Dieses Unverändertbleiben der Anfangsglieder ist ein Beweis, dass die entwickelte Gliedersumme gar keiner Auflösung der derivirten Gleichungen  $\frac{dP}{dx} = 0$  oder  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  eigen sei und dass somit durch dieselbe das der Entwicklung unterworfenen  $x$  vollkommen isolirt sei von allen Wurzeln dieser beiden derivirten Gleichungen. Es ist leicht einzusehen, dass man bei den meisten Gleichungen, wenn nicht schon beim Anfange der Rechnung, so doch im weiteren Verlaufe derselben zu diesem Punkte gelangen müsse, und nur dann, wenn die der Entwicklung unterworfenen Wurzel gleichzeitig mit der  $P=0$  noch eine der beiden derivirten Gleichungen  $\frac{dP}{dx} = 0$  und  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  erfüllt, dieses Constantwerden der Anfangsglieder  $\mathfrak{S}_r' a^{\mathfrak{A}_r'}$  und  $\mathfrak{S}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''}$  niemals eintreten werde, weil in einem solchen Falle die entwickelten Glieder bei einer der beiden derivirten Gleichungen genau dieselbe Wirkung, wie bei der  $P=0$  ausüben. In dem Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_r'$  oder  $\mathfrak{P}_r''$  wird nämlich die Reduction auf Null genau so, wie bei dem Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_r$  durch Hinzufügen neuer Folgeglieder, d. h. beim Zunehmen der Gliederanzahl  $r$  von den niedrigsten Potenzen von  $a$  aus zu den nächst höheren übergehend unaufhaltsam fortschreiten, so zwar dass der Exponent  $\mathfrak{A}_r'$  oder der andere  $\mathfrak{A}_r''$  ebenso wie der  $\mathfrak{A}_r$  bei dem Wachsen von  $r$  sich fortwährend ändert und ins Unbegrenzte wächst. Allein in einem solchen Falle besteht ein gemeinschaftlicher Factor in  $P$  und einem der beiden derivirten Polynome  $\frac{dP}{dx}$  und  $\frac{d^2P}{dx^2}$ . Denselben kann man auf die bekannte Weise finden. Setzt man ihn der Nulle gleich, so erhält man eine neue und einfachere Gleichung, welcher genau dasselbe  $x$  entspricht und bei der dieser Übelstand meist nicht mehr stattfindet. Ein solcher Ausnahmefall ist demnach immer als ein günstiger zu betrachten.

Nachdem wir nun bemerkt haben, dass die hier besprochene Bedingung entweder durch hinreichend weit fortgesetzte Entwicklung von  $x$  bei der Gleichung  $P=0$  erfüllt oder mittelst der Bestimmung des sonst in  $P$  und  $\frac{dP}{dx}$  oder in  $P$  und  $\frac{d^2P}{dx^2}$  enthaltenen gemein-

schaftlichen Factors eine neue Gleichung abgeleitet werden könne, welche die verlangte Isolirung verstatet; so wollen wir nun zum Beweise des früher Behaupteten schreiten.

Wir setzen voraus, eine Auflösung der Gleichung  $P=0$  sei, in ihren  $r+1$  ersten Gliedern aufsteigend entwickelt, durch die Gliedersumme  $x_r$  dargestellt und von allen Auflösungen der derivirten Gleichungen  $\frac{dP}{dx} = 0$  und  $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$  isolirt, oder mit anderen Worten, die Anfangsglieder derjenigen Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$ , deren Index gleich oder grösser als  $r$  ist, seien stets dieselben; und wollen jetzt die Bedingungen entwickeln, unter welchen das  $s+1$ te Entwicklungsglied des Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  mit dem ersten Gliede von  $-\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  übereinstimmt oder davon differirt. Das erste Glied von  $-\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  ist nämlich hier der gewöhnlichen Regel zufolge das  $(r+s+2)$ te Entwicklungsglied der Wurzel  $x$ , während das  $(s+1)$ te Glied des Quotienten  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$  gleichfalls das  $(r+s+2)$ te in der Reihe wird, wenn man den Entwicklungsgliedern dieses Quotienten die  $r+1$  Glieder der Gliedersumme  $x_r$  vorsetzt. Wenn wir daher die Bedingungen kennen, unter welchen eine völlige Gleichheit zwischen ihnen besteht oder das Gegentheil stattfindet, so haben wir unseren Zweck erreicht.

Bezeichnen wir mit  $x'$  die Summe der auf  $x_r$  unmittelbar folgenden  $s$  Entwicklungsglieder von  $x$ :

$$(113) \quad x' = h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + \dots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}$$

so hat man:

$$(114) \quad x_{r+s} = x_r + x'$$

und folglich:

$$(115) \quad \mathfrak{P}_{r+s} = \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x' + \frac{1}{2} \mathfrak{P}''_r x'^2 + \frac{1}{2.3} \mathfrak{P}'''_r x'^3 + \dots$$

$$(116) \quad \mathfrak{P}'_{r+s} = \mathfrak{P}'_r + \mathfrak{P}''_r x' + \frac{1}{2} \mathfrak{P}'''_r x'^2 + \dots$$

$$(117) \quad \mathfrak{P}''_{r+s} = \mathfrak{P}''_r + \mathfrak{P}'''_r x' + \dots$$

Die ersten Glieder von  $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}'_r, \mathfrak{P}''_r, \mathfrak{P}'''_r, \dots$  sind der gewöhnlichen Bezeichnungsweise zufolge:

$$\mathfrak{H}_r a^{2r}, \mathfrak{H}'_r a^{2r'}, \mathfrak{H}''_r a^{2r''}, \mathfrak{H}'''_r a^{2r'''}, \dots$$

wobei, den früher gemachten Voraussetzungen entsprechend,  $\mathfrak{H}_r a^{2r}$  und  $\mathfrak{H}''_r a^{2r''}$  die unveränderlichen Werthe besitzen, die auch für  $r+1, r+2, \dots$  gelten. Wir wollen sie daher durch  $\mathfrak{H}'_p a^{2p}$  und  $\mathfrak{H}''_q a^{2q''}$  ersetzen, weil das Constantwerden dieser Anfangsglieder möglicherweise schon bei einem früheren Entwicklungsgliede von  $x$ , denen die Indices  $p$  und  $q$  entsprechen, erfolgt sein kam. Das erste Glied von  $x'$  aber ist, wie in (113) ersichtlich:  $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ . Es geht daraus hervor, dass das erste mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied von  $\mathfrak{P}_{r+s}, \mathfrak{P}'_{r+s}$  und  $\mathfrak{P}''_{r+s}$  nur aus folgenden Gliedern entstehen könne:

$$(118) \quad \mathfrak{P}_{r+s} = \mathfrak{H}_r a^{2r} + h_{r+1} \mathfrak{H}'_p a^{2p'} + \xi_{r+1} + \frac{h^2_{r+1}}{2} \mathfrak{H}''_q a^{2q''} + 2\xi_{r+1} + \frac{h^3_{r+1}}{2.3} \mathfrak{H}'''_r a^{2r'''} + 3\xi_{r+1} + \dots$$

$$(119) \quad \mathfrak{P}'_{r+s} = \mathfrak{H}'_p a^{2p'} + h_{r+1} \mathfrak{H}''_q a^{2q''} + \xi_{r+1} + \frac{h^2_{r+1}}{2} \mathfrak{H}'''_r a^{2r'''} + 2\xi_{r+1} + \dots$$

$$(120) \quad \mathfrak{P}''_{r+s} = \mathfrak{H}''_q a^{2q''} + h_{r+1} \mathfrak{H}'''_r a^{2r'''} + \xi_{r+1} + \dots$$

Da nun vorausgesetztermassen  $\mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{P}''$  für alle Indices, die gleich oder grösser sind als  $r$ , dieselben Anfangsglieder  $\mathfrak{S}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$  und  $\mathfrak{S}''_q a^{\mathfrak{A}''_q}$  besitzen sollen, so gilt dies auch von  $\mathfrak{P}'_{r+s}$  und  $\mathfrak{P}''_{r+s}$ . Dies ist aber nur dann möglich, wenn  $\mathfrak{A}''_q$  unter allen in den Gliedern (120) erscheinenden Exponenten den kleinsten Werth besitzt und  $\mathfrak{A}'_p$  unter allen in den Gliedern (119) vorkommenden Exponenten am kleinsten ausfällt, also wenn die folgenden Relationen bestehen:

$$(121) \quad \mathfrak{A}'_p < \mathfrak{A}''_q + \xi_{r+1} < \mathfrak{A}'''_r + 2\xi_{r+1} \text{ und alle übrigen.}$$

Beim Ausdrucke  $\mathfrak{P}_{r+s}$  aber herrscht ein anderes Verhalten. Zufolge der zweckmässigen Wahl von  $x'$ , namentlich in Folge der Werthe:

$$(122) \quad \xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}'_p$$

$$(123) \quad h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{S}_r}{\mathfrak{S}'_p}$$

tilgen sich die beiden ersten Glieder der (118), und das erste von Null verschiedene Glied wird nur durch wirkliche Substitution und Ausführung aller Reductionen bestimmt werden können. So viel ist aber gewiss, dass dasselbe entweder nur aus den zwei Bestandtheilen:

$$(124) \quad \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$$

oder gleichzeitig auch aus den übrigen:

$$(125) \quad \frac{1}{2} \mathfrak{P}''_r x'^2 + \frac{1}{1.2} \mathfrak{P}'''_r x'^3 + \dots$$

seine constituirenden Elemente zieht. Den Relationen (121) und (122) zufolge gilt aber auch die andere:

$$(126) \quad \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}'_p + \xi_{r+1} < \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1} < \mathfrak{A}'''_r + 3\xi_{r+1} \text{ und alle übrigen,}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass das erste mit der niedrigsten Potenz von  $a$  versehene Glied der Summe (125)

$$\frac{1}{2} \mathfrak{S}''_q h_{r+1}^2 a^{\mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}}$$

sei. Es folgt hieraus, dass wenn im vollkommen geordneten Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}_{r+s}$  der Exponent  $\mathfrak{A}_{r+s}$  des ersten von Null verschiedenen Gliedes kleiner ist, als  $\mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$ , dasselbe nur aus den beiden Bestandtheilen (124) entstanden sein könne, während für den anderen Fall:

$$(127) \quad \mathfrak{A}_{r+s} \geq \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$$

auch die übrigen Bestandtheile (125) zu seiner Bildung beitragen werden. Besteht also die Relation:

$$(128) \quad \mathfrak{A}_{r+s} < \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$$

so ist das Anfangsglied von  $\mathfrak{P}_{r+s}$  identisch mit jenem von  $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$ ; hat aber die entgegengesetzte (126) Statt, so differiren die Anfangsglieder von  $\mathfrak{P}_{r+s}$  und  $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$ .

Bei der aufsteigenden Entwicklung beginnt im Substitutionsresultate die Reduction auf Null bei der niedrigsten Potenz von  $a$  und geht beim Hinzufügen neuer Folgeglieder auf die nächst höheren Potenzen über. Sonach werden die Substitutionsresultate  $\mathfrak{P}$ , wie sie nach einem jeden einzelnen Folgegliede hervorgehen, mit stets höheren Potenzen von  $a$  beginnen, und daher die Exponenten  $\mathfrak{A}$  in folgender Relation zu einander stehen:

$$\mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}_{r+1} < \mathfrak{A}_{r+2} < \mathfrak{A}_{r+3} < \dots < \mathfrak{A}_{r+s-1} < \mathfrak{A}_{r+s} \dots$$

Da nun  $\mathfrak{A}'_q + 2\xi_{r+1}$  einen vollkommen bestimmten Zahlwerth hat, während die Exponenten  $\mathfrak{A}$  mit ihrem Index fortwährend wachsen, so wird man, weil gemäss den Relationen (126)

$$(129) \quad \mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$$

ist, beim Übergange von  $\mathfrak{A}_r$  zu  $\mathfrak{A}_{r+1}$ ,  $\mathfrak{A}_{r+2}$ , ..... endlich zu zwei Exponenten  $\mathfrak{A}_{r+s-1}$  und  $\mathfrak{A}_{r+s}$  gelangen, die in folgender Relation zu  $\mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$  stehen:

$$(130) \quad \mathfrak{A}_{r+s-1} < \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1} \leq \mathfrak{A}_{r+s}$$

Es ist dann auch:

$$(131) \quad \mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}_{r+1} < \mathfrak{A}_{r+2} < \dots < \mathfrak{A}_{r+s-1} < \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1} \leq \mathfrak{A}_{r+s}$$

Aus dieser Relation in Verbindung mit dem eben früher Bewiesenen folgt, dass die ersten Glieder von

$$(132) \quad \mathfrak{P}_r \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_r$$

$$(133) \quad \mathfrak{P}_{r+1} \quad \text{..} \quad \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r \cdot h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$$

$$(134) \quad \mathfrak{P}_{r+2} \quad \text{..} \quad \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r [h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}]$$

$$(135) \quad \mathfrak{P}_{r+3} \quad \text{..} \quad \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r [h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + \dots + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}}]$$

$$(136) \quad \mathfrak{P}_{r+s-1} \quad \text{..} \quad \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r [h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + \dots + h_{r+s-1} a^{\xi_{r+s-1}}]$$

dieselben sind, während die ersten Glieder von

$$(137) \quad \mathfrak{P}_{r+s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r [h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + \dots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}]$$

differiren. Dividirt man diese Ausdrücke oder vielmehr nur ihre ersten Glieder durch das mit entgegengesetzten Zeichen genommene unveränderliche Anfangsglied von  $\mathfrak{P}$  nämlich durch  $-\mathfrak{P}'_r a^{\mathfrak{A}_r}$ , so ist wieder das Ergebniss dieser Division einerlei bei den links und den rechts stehenden Ausdrücken in (132), (133), (134), (135), ..... (136), different aber bei den beiden Ausdrücken (137). Die links stehenden Ausdrücke liefern aber bei dieser Division der Reihe nach die Entwicklungsglieder von  $x$ :

$$h_{r+2} a^{\xi_{r+2}}, h_{r+3} a^{\xi_{r+3}}, \dots, h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}$$

und folglich thun dies auch die rechts stehenden Ausdrücke mit Ausnahme des letzten (137). Man überzeugt sich aber sehr leicht, dass die rechts stehenden Ausdrücke geradezu die Theilreste vorstellen, wie sie sich bei der Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  ergeben und hiemit ist also der Beweis geführt, dass die bis inclusive zum Gliede  $h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}$  fortgesetzte Division von  $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$  lauter verlässliche Glieder von  $x$  liefert, während schon das nächste Glied unrichtig wäre. Es ist auch durch die Relation (130) die Grenze, bis zu der die Division fortgesetzt werden darf, genau bezeichnet. Man kann dieselbe auf eine andere Gestalt bringen, indem man allerseits  $\mathfrak{A}'_p$  abzieht und sich erinnert, dass  $\mathfrak{A}_{r+s-1} - \mathfrak{A}'_p = \xi_{r+s}$  und  $\mathfrak{A}_{r+s} - \mathfrak{A}'_p = \xi_{r+s+1}$  ist, wodurch sie sich in die:

$$\xi_{r+s} < \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\xi_{r+1} \leq \xi_{r+s+1}$$

verwandelt, die mit der anfangs aufgeführten (111) identisch ist.



