DIRECTE BESTIMMUNG

DER DURCHSCHNITTSPUNKTE DER BAHNEN

ZWEIER IN KEGELSCHNITTEN SICH UM DIE SONNE BEWEGENDER WELTKÖRPER.

VON

JOHANN AUGUST GRUNERT,

CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ERSTES CAPITEL.

Allgemeine Gleichungen eines Kegelschnittes im Raume.

§. 1.

Wenn in einer Ebene ein Punkt und eine Gerade gegeben sind, so heisst der geometrische Ort aller derjenigen Punkte in dieser Ebene, deren Entfernungen von dem gegebenen Punkte und von der gegebenen Geraden in einem gegebenen constanten Verhältnisse zu einander stehen, ein Kegelschnitt.

Der gegebene Punkt heisst der Brennpunkt des Kegelschnittes, und die gegebene Gerade wird dessen Directrix genannt. Die constante Zahl, mit welcher man die Entfernung eines jeden Punktes des Kegelschnittes von der Directrix multipliciren muss, um die Entfernung dieses Punktes des Kegelschnittes von dem Brennpunkte zu erhalten, heisst die Charakteristik des Kegelschnittes, und soll im Folgenden immer durch n bezeichnet werden. Die durch den Brennpunkt gehende, auf der Directrix senkrecht stehende Gerade heisst die Axe des Kegelschnittes.

§. 2.

Um die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in der Ebene, in welcher sie liegen, zu finden, nehmen wir die Axe und die Directrix respective als die Axe der x und die Axe der y eines rechtwinkeligen Coordinatensystems der xy an, und bezeichnen die Coordinaten des nach §. 1 natürlich in der Axe der x liegenden Brennpunktes, so dass also dessen zweite Coordinate verschwindet, durch f, 0. Ist dann (xy) ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes, so ist offenbar $(x-f)^2+y^2$ das Quadrat der Entfernung dieses Punktes von dem Brennpunkte, und x^2 ist das Quadrat seiner Entfernung von der Directrix; also ist nach §. 1

1) $$(x-f)^2 + y^2 = n^2 x^2$$

die Gleichung des Kegelschnittes in dem angenommenen Systeme.

§. 3.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte des Kegelschnittes mit der Axe der x im Allgemeinen durch u, v; so haben wir zu deren Bestimmung nach 1) offenbar die Gleichungen:

$$(u-f)^2 + v^2 = n^2 u^2,\ v = 0;$$

woraus sich zur Bestimmung von u die Gleichung

$$(u-f)^2 = n^2 u^2$$

ergibt, aus welcher man unmittelbar $u - f = \pm nu$ erhält; also ist:

2) $$u = \mp \frac{f}{n \mp 1},\ v = 0.$$

Wenn $n=1$ ist, liefern nur die unteren Zeichen für u einen endlichen völlig bestimmten Werth, nämlich den Werth $\frac{1}{2}f$. Wenn dagegen $n \gtrless 1$ ist, so liefern sowohl die oberen als auch die unteren Zeichen für u endliche völlig bestimmte Werthe. Wir sehen also hieraus, dass die Axe von dem Kegelschnitte nur in einem Punkte, oder in zwei Punkten geschnitten wird, je nachdem $n = 1$ oder $n \gtrless 1$ ist.

Die Punkte, in denen die Axe von dem Kegelschnitte geschnitten wird, heissen die Scheitel desselben, und es gibt also nach dem Vorhergehenden nur einen Scheitel oder zwei Scheitel, je nachdem $n = 1$ oder $n \gtrless 1$ ist.

Wenn $n = 1$ ist, so ist die Entfernung des einen Scheitels, den es in diesem Falle nur gibt, von der Directrix nach dem Vorhergehenden $\frac{1}{2}f$, hat also mit f gleiches Vorzeichen, und der absolute Werth dieser Entfernung ist kleiner als der absolute Werth von f; also liegt in diesem Falle der Scheitel zwischen der Directrix und dem Brennpunkte in dem Mittelpunkte der Entfernung des letzteren von der ersteren. Wenn $n \gtrless 1$ ist, so ist die Entfernung des Scheitels, welcher der Directrix am nächsten ist, von der Directrix $\frac{f}{n+1}$, hat also mit f gleiches Vorzeichen, und der absolute Werth dieser Entfernung ist kleiner als der absolute Werth von f; also liegt der Scheitel, welcher der Directrix am nächsten ist, zwischen der Directrix und dem Brennpunkte. Die Entfernung der Scheitel vom Brennpunkte ist offenbar

$$\mp \frac{f}{n \mp 1} - f = -\frac{nf}{n \mp 1},$$

woraus sich ergibt, dass man für den Scheitel, welcher dem Brennpunkte am nächsten ist, die unteren Zeichen nehmen muss, so dass also der Scheitel, welcher der Directrix am nächsten ist, immer auch zugleich am nächsten bei dem Brennpunkte liegt. Die Entfernung des anderen Scheitels von der Directrix ist $-\frac{f}{n-1}$, und hat also mit f gleiches oder ungleiches Vorzeichen, je nachdem $n < 1$ oder $n > 1$ ist. Für $n < 1$ ist der absolute Werth dieser Entfernung, welche mit f gleiches Vorzeichen hat, grösser als der absolute Werth von f, so dass also in diesem Falle offenbar der Brennpunkt zwischen der Directrix und dem anderen Scheitel liegt. Für $n > 1$, wo die in Rede stehende Entfernung mit f ungleiches Vorzeichen hat, liegt eben desshalb die Directrix offenbar zwischen dem Brennpunkte und dem anderen Scheitel.

Von dem Scheitel, welcher der Directrix oder dem Brennpunkte am nächsten liegt, kann man nach dem Obigen immer sagen, dass er zwischen der Directrix und dem Brennpunkte liegt, wenn man nur beachtet, dass es für $n = 1$ nur einen Scheitel gibt, welcher, wie wir oben gesehen haben, von der Directrix und von dem Brennpunkte gleich weit entfernt ist.

§. 4.

Wenn $n = 1$ ist, wollen wir den einen Scheitel, welchen es in diesem Falle nur gibt, als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme der xy parallelen Coordinatensystems der $x_1\, y_1$ annehmen. Dann ist nach §. 3 und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein:

$$x = \frac{1}{2} f + x_1\,,\; y = y_1\,;$$

also nach 1) die Gleichung des Kegelschnittes in dem Systeme der $x_1\, y_1$:

$$\left(x_1 - \frac{1}{2} f\right)^2 + y_1^2 = \left(x_1 + \frac{1}{2} f\right)^2,$$

woraus man nach leichter Rechnung die Gleichung

$$y_1^2 = 2 f x_1 \qquad 3)$$

erhält.

Wenn $n \gtrless 1$ ist, wollen wir einen der beiden Scheitel, die es in diesem Falle gibt, als Anfang eines neuen, dem primitiven Systeme der xy parallelen Coordinatensystems der $x_1\, y_1$ annehmen. Dann ist nach §. 3 und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein:

$$x = \mp \frac{f}{n \mp 1} + x_1\,,\; y = y_1\,;$$

also nach 1) die Gleichung des Kegelschnittes in dem Systeme der $x_1\, y_1$:

$$\left(x_1 \mp \frac{f}{n \mp 1} - f\right)^2 + y_1^2 = n^2 \left(x_1 \mp \frac{f}{n \mp 1}\right)^2$$

oder

$$\left(x_1 - \frac{nf}{n \mp 1}\right)^2 + y_1^2 = n^2 \left(x_1 \mp \frac{f}{n \mp 1}\right)^2,$$

woraus sich nach leichter Rechnung die Gleichung

$$y_1^2 = \mp\, 2 n f x_1 + (n^2 - 1)\, x_1^2 \qquad 4)$$

ergibt.

§. 5.

In dem Falle, wenn $n \gtrless 1$ ist, und es also zwei Scheitel des Kegelschnittes gibt, nennt man den Mittelpunkt der Entfernung der beiden Scheitel von einander, welcher natürlich in der Axe liegt, den **Mittelpunkt** des Kegelschnittes.

Die Coordinaten des Mittelpunktes im Systeme der x, y sind nach 2) offenbar:

$$\frac{1}{2}\left(- \frac{f}{n-1} + \frac{f}{n+1}\right),\; 0\,; \text{ also } - \frac{f}{n^2 - 1},\; 0.$$

Nimmt man den Mittelpunkt als Anfang eines den Systemen der xy und $x_1 y_1$ parallelen Coordinatensystems der $x_2 y_2$ an, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x = x_2 - \frac{f}{n^2-1}\,.\ y = y_2;$$

also nach 1) die Gleichung des Kegelschnittes im Systeme der $x_2 y_2$:

$$\left(x_2 - \frac{f}{n^2-1} - f\right)^2 + y_2^2 = n^2\left(x_2 - \frac{f}{n^2-1}\right)^2$$

oder

$$\left(x_2 - \frac{n^2 f}{n^2-1}\right)^2 + y_2^2 = n^2\left(x_2 - \frac{f}{n^2-1}\right)^2,$$

woraus man nach leichter Rechnung die Gleichung

5) $$y_2^2 = (n^2-1)\,x_2^2 - \frac{n^2}{n^2-1} f^2$$

erhält.

Wenn zuerst $n < 1$ ist, wollen wir diese Gleichung auf die Form

$$(1-n^2)\,x_2^2 + y_2^2 = \frac{n^2}{1-n^2} f^2,$$

oder auf die Form

$$\frac{(1-n^2)^2}{n^2} \cdot \left(\frac{x_2}{f}\right)^2 + \frac{1-n^2}{n^2} \cdot \left(\frac{y_2}{f}\right)^2 = 1,$$

oder auf die Form

6) $$\frac{x_2^2}{\left(\frac{nf}{1-n^2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{nf}{\sqrt{1-n^2}}\right)^2} = 1$$

bringen, wo $\sqrt{1-n^2}$ eine reelle Grösse ist. Setzen wir der Kürze wegen

7) $$a = val\,.\,abs\,.\,\frac{nf}{1-n^2},\quad b = val\,.\,abs\,.\,\frac{nf}{\sqrt{1-n^2}};$$

so wird die Gleichung 6):

8) $$\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1.$$

Wenn ferner $n > 1$ ist, wollen wir die Gleichung 5) auf die Form

$$(n^2-1)\,x_2^2 - y_2^2 = \frac{n^2}{n^2-1} f^2,$$

oder auf die Form

$$\frac{(n^2-1)^2}{n^2} \cdot \left(\frac{x_2}{f}\right)^2 - \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \left(\frac{y_2}{f}\right)^2 = 1,$$

oder auf die Form

9) $$\frac{x_2^2}{\left(\frac{nf}{n^2-1}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{nf}{\sqrt{n^2-1}}\right)^2} = 1$$

bringen, wo $\sqrt{n^2-1}$ eine reelle Grösse ist. Setzen wir der Kürze wegen

10) $$a = val\,.\,abs\,.\,\frac{nf}{n^2-1},\quad b = val\,.\,abs\,.\,\frac{nf}{\sqrt{n^2-1}};$$

so wird die Gleichung 9):

11) $$\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1.$$

§. 6.

Je nachdem

$$n = 1, \quad n < 1, \quad n > 1$$

ist, wird der Kegelschnitt beziehungsweise eine Parabel, Ellipse, Hyperbel genannt, so dass es also hiernach im Allgemeinen drei Arten der Kegelschnitte gibt.

Nach 3) und 4) ist in dem Systeme der $x_1\, y_1$, je nachdem $n = 1$ oder $n \gtrless 1$ ist, die Gleichung der Kegelschnitte:

$$y_1^2 = 2fx_1 \tag{12}$$

oder

$$y_1^2 = \mp\, 2nfx_1 + (n^2 - 1)\, x_1^2, \tag{13}$$

wo die Gleichung 12) aus der Gleichung 13) hervorgeht, wenn man in dieser letzteren Gleichung $n = 1$ setzt und das untere Zeichen nimmt.

Überhaupt nennt man den absoluten Werth der Grösse $2nf$ den Parameter des Kegelschnittes, so dass also, wenn der Parameter durch p bezeichnet wird,

$$p = val\,.\,abs\,.\,2nf = 2n\,.\,val\,.\,abs\,.\,f, \tag{14}$$

also

$$val\,.\,abs\,.\,f = \frac{p}{2n} \tag{15}$$

oder

$$n^2 = \frac{p^2}{4f^2} \tag{16}$$

ist.

§. 7.

Bei der Ellipse und Hyperbel sind die Coordinaten der beiden Scheitel im Systeme der $x_2\, y_2$ nach §. 3 und §. 5 offenbar:

$$\frac{f}{n^2-1} \mp \frac{f}{n \mp 1},\ 0;$$

also, wie man leicht findet:

$$\mp\, \frac{nf}{n^2-1},\ 0.$$

Folglich sind die beiden Scheitel augenscheinlich von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt, und ihre gemeinschaftliche Entfernung vom Mittelpunkte ist:

$$val\,.\,abs\,.\,\frac{nf}{n^2-1},$$

also nach 7) und 10) offenbar a. Daher ist $2a$ die Entfernung der beiden Scheitel von einander.

Die Coordinaten des Brennpunktes bei der Ellipse und Hyperbel im Systeme der $x_2\, y_2$ sind nach §. 2 und §. 5 offenbar:

$$\frac{f}{n^2-1} + f,\ 0;$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{n^2 f}{n^2-1},\ 0;$$

und bezeichnen wir folglich die Entfernung des Brennpunktes von dem Mittelpunkte, welche die Excentricität der Ellipse oder Hyperbel genannt wird, durch e, so ist:

$$e = val\,.\,abs\,.\,\frac{n^2 f}{n^2-1}. \tag{17}$$

Nach 7) ist bei der Ellipse:

$$a^2 = \frac{n^2 f^2}{(1-n^2)^2},\quad b^2 = \frac{n^2 f^2}{1-n^2};$$

also, wie man leicht findet:

$$a^2 - b^2 = \frac{n^4 f^2}{(1-n^2)^2};$$

folglich nach 17) offenbar:

18) $$a^2 - b^2 = e^2.$$

Nach 10) ist bei der Hyperbel:

$$a^2 = \frac{n^2 f^2}{(n^2-1)^2},\quad b^2 = \frac{n^2 f^2}{n^2-1};$$

also, wie man leicht findet:

$$a^2 + b^2 = \frac{n^4 f^2}{(n^2-1)^2};$$

folglich nach 17) offenbar:

19) $$a^2 + b^2 = e^2.$$

Für die Ellipse ist nach dem Vorhergehenden:

20) $$\frac{b^2}{a^2} = 1 - n^2,\quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - n^2},\quad n = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{e}{a}.$$

Für die Hyperbel ist nach dem Vorhergehenden:

21) $$\frac{b^2}{a^2} = n^2 - 1,\quad \frac{b}{a} = \sqrt{n^2 - 1},\quad n = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{e}{a}.$$

Nach 15) ist für beide Curven:

$$f^2 = \frac{p^2}{4n^2}.$$

Also ist für die Ellipse:

$$a^2 = \frac{n^2}{(1-n^2)^2} \cdot \frac{p^2}{4n^2} = \frac{p^2}{4(1-n^2)^2},$$

$$b^2 = \frac{n^2}{1-n^2} \cdot \frac{p^2}{4n^2} = \frac{p^2}{4(1-n^2)};$$

folglich:

22) $$a = \frac{p}{2(1-n^2)},\quad b = \frac{p}{2\sqrt{1-n^2}}.$$

Für die Hyperbel ist auf ähnliche Art:

$$a^2 = \frac{n^2}{(n^2-1)^2} \cdot \frac{p^2}{4n^2} = \frac{p^2}{4(n^2-1)^2},$$

$$b^2 = \frac{n^2}{n^2-1} \cdot \frac{p^2}{4n^2} = \frac{p^2}{4(n^2-1)};$$

folglich:

23) $$a = \frac{p}{2(n^2-1)},\quad b = \frac{p}{2\sqrt{n^2-1}}.$$

Nach 22) ist für die Ellipse:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{4(1-n^2)} : \frac{p}{2(1-n^2)} = \frac{1}{2}p;$$

und nach 23) ist für die Hyperbel:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{4(n^2-1)} : \frac{p}{2(n^2-1)} = \frac{1}{2}p;$$

also ist für beide Curven:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}p, \; p = \frac{2b^2}{a}. \tag{24}$$

§. 8.

Wenn man bei der Ellipse $a = b$ oder $a^2 = b^2$ setzt, so wird nach 7):

$$\frac{n^2 f^2}{(1-n^2)^2} = \frac{n^2 f^2}{1-n^2},$$

woraus $1 - n^2 = 1$, also $n = 0$, und daher $a = b = 0$ folgen würde. Man hat aber diesen Fall auf folgende Art aufzufassen. Man lasse n sich der Null nähern und gleichzeitig den absoluten Werth von f so in's Unendliche wachsen, dass, wenn r eine gewisse endliche völlig bestimmte reelle positive Grösse bezeichnet, immer

$$val \,.\, abs \,.\, nf = r$$

ist. Dann nähern sich, weil

$$a = val \,.\, abs \,.\, \frac{nf}{1-n^2}, \quad b = val \,.\, abs \,.\, \frac{nf}{\sqrt{1-n^2}}$$

ist, die Grössen a und b offenbar beide der Grösse r immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade; die Gleichung

$$\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2 = 1$$

der Ellipse nähert sich also der Gleichung

$$\left(\frac{x_2}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{r}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

eines mit dem Halbmesser r aus dem Mittelpunkte der Ellipse beschriebenen Kreises. Nach §. 5 ist die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von der Directrix

$$\frac{f}{1-n^2};$$

die Entfernung des Brennpunktes von der Directrix ist bekanntlich f; und da nun

$$f - \frac{f}{1-n^2} = -\frac{n^2 f}{1-n^2} = -\frac{n.(nf)}{1-n^2}$$

ist, so sieht man, dass diese Differenz, weil n sich der Null, der absolute Werth von nf sich der endlichen Grösse r nähert, sich unter den gemachten Voraussetzungen der Null nähert, so dass also der Mittelpunkt des durch die Gleichung

$$x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

charakterisirten Kreises immer genauer und genauer mit dem Brennpunkte zusammenfällt.

Wenn man bei der Hyperbel $a = b$ oder $a^2 = b^2$ setzt, so wird nach 10)

$$\frac{n^2 f^2}{(n^2-1)^2} = \frac{n^2 f^2}{n^2-1},$$

woraus $n^2 - 1 = 1$, also $n = \sqrt{2}$ folgt. Daher ist nach 10) in diesem Falle:

$$a = \begin{cases} val \,.\, abs \,.\, f\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \,.\, val \,.\, abs \,.\, f; \end{cases} \quad b = \begin{cases} val \,.\, abs \,.\, f\sqrt{2}; \\ \sqrt{2} \,.\, val \,.\, abs \,.\, f; \end{cases} \tag{25}$$

folglich die Gleichung der Hyperbel nach dem Obigen:

$$26)\qquad \left(\frac{x_2}{f\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{f\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_2^2 - y_2^2 = 2f^2.$$

Die Hyperbel wird in diesem Falle eine gleichseitige Hyperbel genannt.

Für diese Hyperbel ist nach 14):

$$27)\qquad p = 2\sqrt{2}\,.\,val\,.\,abs\,.\,f,$$

also nach 25) offenbar $p = 2a = 2b$; und nach 17) ist

$$28)\qquad e = 2\,.\,val\,.\,abs\,.\,f,$$

wie auch aus 25) mittelst der Formel 19) folgt[1]).

§. 9.

Wir wollen uns jetzt einen ganz beliebig im Raume liegenden Kegelschnitt denken, und in Bezug auf ein beliebiges dreiaxiges rechtwinkeliges Coordinatensystem der xyz die Coordinaten seines Brennpunktes durch f_0, g_0, h_0 bezeichnen. Die Gleichungen seiner Directrix seien

$$29)\qquad \frac{x-a_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y-b_0}{\cos\beta_0} = \frac{z-c_0}{\cos\gamma_0},$$

wo also a_0, b_0, c_0 die Coordinaten eines beliebigen, in der Directrix liegenden Punktes sind, und α_0, β_0, γ_0 die 180^0 nicht übersteigenden Winkel bezeichnen, welche der eine der beiden von dem Punkte (a_0, b_0, c_0) nach entgegengesetzten Seiten hin ausgehenden Theile der Directrix mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst.

Da nun der Kegelschnitt ganz in der durch den Brennpunkt und die Directrix der Lage nach bestimmten Ebene liegt, so müssen wir zuerst die Gleichung dieser Ebene suchen, welche

$$30)\qquad A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0$$

sein mag. Weil in dieser Ebene die Punkte (a_0, b_0, c_0) und (f_0, g_0, h_0) liegen, so haben wir die Gleichungen:

$$31)\qquad \begin{cases} A_0a_0 + B_0b_0 + C_0c_0 + D_0 = 0, \\ A_0f_0 + B_0g_0 + C_0h_0 + D_0 = 0; \end{cases}$$

aus denen durch Subtraction die Gleichung

$$32)\qquad A_0(f_0 - a_0) + B_0(g_0 - b_0) + C_0(h_0 - c_0) = 0$$

folgt; und die Gleichung der in Rede stehenden Ebene lässt sich nach 30) und 31) unter einer der beiden folgenden Formen darstellen:

$$33)\qquad \begin{cases} A_0(x - a_0) + B_0(y - b_0) + C_0(z - c_0) = 0, \\ A_0(x - f_0) + B_0(y - g_0) + C_0(z - h_0) = 0. \end{cases}$$

[1]) Es konnte hier nicht unsere Absicht sein, die ganze Theorie der Kegelschnitte aus der in §. 1 gegebenen allgemeinen Definition dieser Curven und die sämmtlichen Eigenschaften derselben, dass es z. B. für die Ellipse und die Hyperbel zwei Brennpunkte, zwei Directrixen u. s. w. gibt, zu entwickeln, indem es vielmehr blos darauf ankam, zu denjenigen Gleichungen der Kegelschnitte im Raume zu gelangen, welche für den vorliegenden vorzugsweise astronomischen Zweck unentbehrlich sind. M. s. mit Mehrerem Archiv der Mathematik und Physik. Theil XXXI. Nr. XIII, S. 67.

Weil die Directrix ganz in dieser Ebene liegt, so folgt aus den Gleichungen 29) und der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen die Gleichung:

$$A_0 \cos\alpha_0 + B_0 \cos\beta_0 + C_0 \cos\gamma_0 = 0. \qquad 34)$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 32) folgt, wenn G_0 einen beliebigen Factor bezeichnet:

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= G_0 \{(h_0 - c_0)\cos\beta_0 - (g_0 - b_0)\cos\gamma_0\},\\ B_0 &= G_0 \{(f_0 - a_0)\cos\gamma_0 - (h_0 - c_0)\cos\alpha_0\},\\ C_0 &= G_0 \{(g_0 - b_0)\cos\alpha_0 - (f_0 - a_0)\cos\beta_0\};\end{aligned}\right. \qquad 35)$$

so dass also nach 33) die Gleichung unserer Ebene entweder unter der Form

$$\left.\begin{aligned} &\{(h_0 - c_0)\cos\beta_0 - (g_0 - b_0)\cos\gamma_0\}(x - a_0)\\ +&\{(f_0 - a_0)\cos\gamma_0 - (h_0 - c_0)\cos\alpha_0\}(y - b_0)\\ +&\{(g_0 - b_0)\cos\alpha_0 - (f_0 - a_0)\cos\beta_0\}(z - c_0)\end{aligned}\right\} = 0 \qquad 36)$$

oder unter der Form

$$\left.\begin{aligned} &\{(h_0 - c_0)\cos\beta_0 - (g_0 - b_0)\cos\gamma_0\}(x - f_0)\\ +&\{(f_0 - a_0)\cos\gamma_0 - (h_0 - c_0)\cos\alpha_0\}(y - g_0)\\ +&\{(g_0 - b_0)\cos\alpha_0 - (f_0 - a_0)\cos\beta_0\}(z - h_0)\end{aligned}\right\} = 0 \qquad 37)$$

dargestellt werden kann.

Denken wir uns jetzt von einem ganz beliebigen Punkte (xyz) im Raume auf die Directrix ein Perpendikel gefällt, und bezeichnen dessen Durchschnittspunkt mit der Directrix durch (uvw); so werden zwischen den Coordinaten x, y, z und u, v, w offenbar Gleichungen von der Form

$$\frac{x-u}{\cos\theta} = \frac{y-v}{\cos\omega} = \frac{z-w}{\cos\varpi}, \qquad 38)$$

und zwischen den Winkeln $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und θ, ω, ϖ wird die Gleichung

$$\cos\alpha_0 \cos\theta + \cos\beta_0 \cos\omega + \cos\gamma_0 \cos\varpi = 0 \qquad 39)$$

stattfinden. Ferner hat man nach 29), weil der Punkt (u, v, w) in der Directrix liegt, die Gleichungen:

$$\frac{u-a_0}{\cos\alpha_0} = \frac{v-b_0}{\cos\beta_0} = \frac{w-c_0}{\cos\gamma_0}. \qquad 40)$$

Aus den Gleichungen 38) und 39) folgt:

$$(x-u)\cos\alpha_0 + (y-v)\cos\beta_0 + (z-w)\cos\gamma_0 = 0, \qquad 41)$$

also:

$$\begin{aligned} &(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\\ =&(u - a_0)\cos\alpha_0 + (v - b_0)\cos\beta_0 + (w - c_0)\cos\gamma_0,\end{aligned}$$

und folglich nach 40), weil bekanntlich

$$\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 + \cos\gamma_0^2 = 1$$

ist:

$$\left\{\begin{aligned} u - a_0 &= \{(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\}\cos\alpha_0,\\ v - b_0 &= \{(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\}\cos\beta_0,\\ w - c_0 &= \{(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\}\cos\gamma_0;\end{aligned}\right. \qquad 42)$$

also:

$$43)\quad \begin{cases} x - u = (x - a_0) - \{(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\}\cos\alpha_0. \\ y - v = (y - b_0) - \{(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\}\cos\beta_0. \\ z - w = (z - c_0) - \{(x - a_0)\cos\alpha_0 + (y - b_0)\cos\beta_0 + (z - c_0)\cos\gamma_0\}\cos\gamma_0. \end{cases}$$

Bezeichnet nun P_0 die Entfernung des Punktes (xyz) von der Directrix, also nach dem Obigen offenbar die Entfernung der beiden Punkte (xyz) und (uvw) von einander, so ist:

$$P_0^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2,$$

folglich nach 43) offenbar:

$$44)\quad P_0^2 = (x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + (z-c_0)^2 - \{(x-a_0)\cos\alpha_0 + (y-b_0)\cos\beta_0 + (z-c_0)\cos\gamma_0\}^2$$

oder

$$\begin{aligned} 45)\quad P_0^2 = (x-a_0)^2\sin\alpha_0^2 + (y-b_0)^2\sin\beta_0^2 + (z-c_0)^2\sin\gamma_0^2 &- 2\,(x-a_0)(y-b_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0 \\ &- 2\,(y-b_0)(z-c_0)\cos\beta_0\cos\gamma_0 \\ &- 2\,(z-c_0)(x-a_0)\cos\gamma_0\cos\alpha_0, \end{aligned}$$

oder auch, wie sogleich erhellet, wenn man die Quadrate der Sinus auf bekannte Weise mittelst der Gleichung

$$\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 + \cos\gamma_0^2 = 1$$

durch Quadrate der Cosinus ersetzt:

$$\begin{aligned} 46)\qquad P_0^2 = &\{(x - a_0)\cos\beta_0 - (y - b_0)\cos\alpha_0\}^2 \\ &+ \{(y - b_0)\cos\gamma_0 - (z - c_0)\cos\beta_0\}^2 \\ &+ \{(z - c_0)\cos\alpha_0 - (x - a_0)\cos\gamma_0\}^2. \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt an, dass (xyz) ein beliebiger Punkt des ganz in der durch den Brennpunkt und die Directrix der Lage nach bestimmten Ebene liegenden Kegelschnittes sei, so müssen die Coordinaten x, y, z der Gleichung 36) oder 37) genügen, und ausserdem muss nach der aus §. 1 bekannten allgemeinen Erklärung der Kegelschnitte, wenn n_0 die Charakteristik unsers Kegelschnittes bezeichnet:

$$(x - f_0)^2 + (y - g_0)^2 + (z - h_0)^2 = n_0^2\, P_0^2$$

sein. Daher erhalten wir die beiden, unsern Kegelschnitt vollständig charakterisirenden Gleichungen, wenn wir mit einer der beiden Gleichungen

$$47)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\{(h_0 - c_0)\cos\beta_0 - (g_0 - b_0)\cos\gamma_0\}(x - a_0) \\ &+ \{(f_0 - a_0)\cos\gamma_0 - (h_0 - c_0)\cos\alpha_0\}(y - b_0) \\ &+ \{(g_0 - b_0)\cos\alpha_0 - (f_0 - a_0)\cos\beta_0\}(z - c_0) \end{aligned}\right\} = 0, \\ \left.\begin{aligned} &\{(h_0 - c_0)\cos\beta_0 - (g_0 - b_0)\cos\gamma_0\}(x - f_0) \\ &+ \{(f_0 - a_0)\cos\gamma_0 - (h_0 - c_0)\cos\alpha_0\}(y - g_0) \\ &+ \{(g_0 - b_0)\cos\alpha_0 - (f_0 - a_0)\cos\beta_0\}(z - h_0) \end{aligned}\right\} = 0 \end{cases}$$

eine der drei folgenden Gleichungen verbinden:

$$\begin{aligned} 48)\qquad &(x - f_0)^2 + (y - g_0)^2 + (z - h_0)^2 \\ &= n_0^2\{(x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + (z-c_0)^2 - [(x-a_0)\cos\alpha_0 + (y-b_0)\cos\beta_0 + (z-c_0)\cos\gamma_0]^2\}, \end{aligned}$$

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2$$
$$=n_0^2\left\{\begin{array}{r}(x-a_0)^2\sin\alpha_0^2+(y-b_0)^2\sin\beta_0^2+(z-c_0)^2\sin\gamma_0^2-2\,(x-a_0)\,(y-b_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0\\ -2\,(y-b_0)\,(z-c_0)\cos\beta_0\cos\gamma_0\\ -2\,(z-c_0)\,(x-a_0)\cos\gamma_0\cos\alpha_0\end{array}\right\},$$

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2$$
$$=n_0^2\left\{\begin{array}{l}[(x-a_0)\cos\beta_0-(y-b_0)\cos\alpha_0]^2\\ +[(y-b_0)\cos\gamma_0-(z-c_0)\cos\beta_0]^2\\ +[(z-c_0)\cos\alpha_0-(x-a_0)\cos\gamma_0]^2\end{array}\right\}.$$

Je nachdem unser Kegelschnitt eine Parabel, Ellipse, Hyperbel ist, ist nach §. 6 respective

$$n_0=1,\quad n_0<1,\quad n_0>1.$$

§. 10.

Aus der ersten der drei Gleichungen 48) ergibt sich auf der Stelle, dass man diese drei Gleichungen auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2 \tag{49}$$
$$=n_0^2\left\{\begin{array}{l}a_0^2+b_0^2+c_0^2-(a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0)^2\\ -2\,[a_0x+b_0y+c_0z-(a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0)\,(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)]\\ +x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2\end{array}\right\}.$$

Wenn wir die Entfernung des Anfangs der Coordinaten von der Directrix durch Π_0 bezeichnen, so ist nach 44) offenbar:

$$\Pi_0^2=a_0^2+b_0^2+c_0^2-(a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0)^2, \tag{50}$$

und wenn wir die Entfernung des Brennpunktes von der Directrix durch E_0 bezeichnen, so ist nach 44):

$$E_0^2=(f_0-a_0)^2+(g_0-b_0)^2+(h_0-c_0)^2-\{(f_0-a_0)\cos\alpha_0+(g_0-b_0)\cos\beta_0+(h_0-c_0)\cos\gamma_0\}^2. \tag{51}$$

Bezeichnen wir den Parameter des Kegelschnittes durch p_0, so ist nach 14) allgemein:

$$p_0=2n_0E_0,$$

folglich nach 51):

$$p_0=2n_0\sqrt{(f_0-a_0)^2+(g_0-b_0)^2+(h_0-c_0)^2-\{(f_0-a_0)\cos\alpha_0+(g_0-b_0)\cos\beta_0+(h_0-c_0)\cos\gamma_0\}^2}. \tag{52}$$

Wenn man den an sich willkürlichen Punkt (a_0, b_0, c_0) der Directrix mit dem Punkte zusammenfallen lässt, in welchem die Directrix von dem auf sie von dem Anfange der Coordinaten gefällten Perpendikel geschnitten wird, so ist

$$\Pi_0^2=a_0^2+b_0^2+c_0^2, \tag{53}$$

und folglich nach 50):

$$a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0=0. \tag{54}$$

Daher verwandelt sich unter dieser Voraussetzung die Gleichung 49) in die folgende:

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2 \tag{55}$$
$$=n_0^2\left\{\begin{array}{l}a_0^2+b_0^2+c_0^2-2\,(a_0x+b_0y+c_0z)\\ +x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2\end{array}\right\};$$

und der Ausdruck 52) des Parameters geht in den folgenden über:

56) $$p_0 = 2n_0\sqrt{(f_0-a_0)^2+(g_0-b_0)^2+(h_0-c_0)^2-(f_0\cos\alpha_0+g_0\cos\beta_0+h_0\cos\gamma_0)^2},$$

den man natürlich noch auf verschiedene Arten weiter umformen könnte.

Nimmt man nun noch den Brennpunkt als Anfang der Coordinaten an, so dass also (a_0, b_0, c_0) der Durchschnittspunkt des von dem Brennpunkte auf die Directrix gefällten Perpendikels mit der Directrix ist, und setzt also $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $h_0 = 0$; so geht der Ausdruck 56) in den folgenden über:

57) $$p_0 = 2n_0\sqrt{a_0^2+b_0^2+c_0^2},$$

und die Gleichung 55) lässt sich unter der Form

58) $$x^2+y^2+z^2$$
$$= n_0^2\left\{\left(\frac{p_0}{2n_0}\right)^2 - 2(a_0x+b_0y+c_0z)+x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2\right\}$$

darstellen, oder unter der Form:

59) $$\frac{1}{4}p_0^2 = (1-n_0^2)(x^2+y^2+z^2)+n_0^2(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2+2n_0^2(a_0x+b_0y+c_0z),$$

oder auch unter der Form:

60) $$n_0^2 = \frac{x^2+y^2+z^2-\frac{1}{4}p_0^2}{x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2-2(a_0x+b_0y+c_0z)}.$$

Für die Parabel, wo $n_0 = 1$ ist, nimmt die Gleichung 59) die folgende sehr einfache Gestalt an:

61) $$\frac{1}{4}p_0^2 = (x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2+2(a_0x+b_0y+c_0z).$$

§. 11.

Die allgemeinen Gleichungen 47) und 49) kann man noch auf einen anderen bemerkenswerthen Ausdruck bringen. Von dem Brennpunkte (f_0, g_0, h_0) aus denke man sich nämlich in der Ebene des Kegelschnittes eine Gerade gezogen, welche mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z respective die 180° nicht übersteigenden Winkel λ_0, μ_0, ν_0 einschliesst, und lasse dann (a_0, b_0, c_0) den Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Directrix sein. Bezeichnet nun $\mathfrak{E}_0$ die Entfernung des Punktes (a_0, b_0, c_0) von dem Brennpunkte (f_0, g_0, h_0), so ist:

62) $$a_0 = f_0+\mathfrak{E}_0\cos\lambda_0,\quad b_0 = g_0+\mathfrak{E}_0\cos\mu_0,\quad c_0 = h_0+\mathfrak{E}_0\cos\nu_0.$$

Wenn wir aber einen der beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die in Rede stehende Gerade mit der Directrix einschliesst, durch Θ_0 bezeichnen, so ist offenbar:

63) $$E_0 = \mathfrak{E}_0\sin\Theta_0,\quad \mathfrak{E}_0 = E_0\operatorname{cosec}\Theta_0;$$

folglich:

64) $$\begin{cases} a_0 = f_0+E_0\cos\lambda_0\operatorname{cosec}\Theta_0, \\ b_0 = g_0+E_0\cos\mu_0\operatorname{cosec}\Theta_0, \\ c_0 = h_0+E_0\cos\nu_0\operatorname{cosec}\Theta_0. \end{cases}$$

Führt man diese Ausdrücke von a_0, b_0, c_0 in die zweite der Gleichungen 47) ein, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\beta_0\cos\nu_0-\cos\gamma_0\cos\mu_0)(x-f_0)\\+&(\cos\gamma_0\cos\lambda_0-\cos\alpha_0\cos\nu_0)(y-g_0)\\+&(\cos\alpha_0\cos\mu_0-\cos\beta_0\cos\lambda_0)(z-h_0)\end{aligned}\right\}=0. \tag{65}$$

Nehmen wir jetzt für einen Augenblick den Brennpunkt als Anfang der Coordinaten an, und setzen also $f_0=0$, $g_0=0$, $h_0=0$: so ist nach 49), 51) und 64) offenbar:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2\\=n_0^2&\left\{\begin{aligned}&E_0^2-2E_0\frac{x\cos\lambda_0+y\cos\mu_0+z\cos\nu_0-\cos\Theta_0(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)}{\sin\Theta_0}\\&+x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha_0+y\cos\beta_0+z\cos\gamma_0)^2\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

wobei jetzt

$$\cos\Theta_0=\cos\alpha_0\cos\lambda_0+\cos\beta_0\cos\mu_0+\cos\gamma_0\cos\nu_0 \tag{66}$$

gesetzt ist, was augenscheinlich verstattet ist. Gehen wir nun aber wieder zu dem ursprünglichen Coordinatensysteme zurück, so müssen wir in der obigen Gleichung für x, y, z offenbar respective $x-f_0$, $y-g_0$, $z-h_0$ setzen, wodurch dieselbe, wenn der Kürze wegen

$$\left\{\begin{aligned}U_0&=(x-f_0)\cos\lambda_0+(y-g_0)\cos\mu_0+(z-h_0)\cos\nu_0\\&\quad-\cos\Theta_0\{(x-f_0)\cos\alpha_0+(y-g_0)\cos\beta_0+(z-h_0)\cos\gamma_0\},\\V_0&=(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2\\&\quad-\{(x-f_0)\cos\alpha_0+(y-g_0)\cos\beta_0+(z-h_0)\cos\gamma_0\}^2\end{aligned}\right. \tag{67}$$

gesetzt wird, die Form

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2=n_0^2\left\{E_0^2-2E_0\frac{U_0}{\sin\Theta_0}+V_0\right\}; \tag{68}$$

oder

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2=(n_0E_0)^2\left\{1-\frac{2U_0}{E_0\sin\Theta_0}+\frac{V_0}{E_0^2}\right\}, \tag{69}$$

oder nach dem Obigen die Form

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2=\frac{1}{4}p_0^2\left\{1-\frac{2U_0}{E_0\sin\Theta_0}+\frac{V_0}{E_0^2}\right\} \tag{70}$$

erhält.

Wenn die Curve ein in der gegebenen Ebene aus dem Mittelpunkte (f_0, g_0, h_0) mit dem Halbmesser r_0 beschriebener Kreis ist, so sind dessen Gleichungen die Gleichung 65) und die Gleichung

$$(x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2=r_0^2. \tag{71}$$

Lässt man aber in dem allgemeinen Falle des Kegelschnittes die Directrix sich in der Ebene des Kegelschnittes parallel mit sich selbst in's Unendliche bewegen, so können die Winkel α_0, β_0, γ_0 und λ_0, μ_0, ν_0 offenbar als constant betrachtet werden, und E_0 wächst in's Unendliche. Wenn man nun zugleich n_0 so in's Unendliche abnehmen oder sich der Null nähern lässt, dass immer $n_0 E_0 = r_0$ ist; so nähert sich die Gleichung 69) offenbar der Gleichung 71) als ihrer Grenzgleichung immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen

Grade, oder, kürzer gesagt, die Gleichung 69) geht in die Gleichung 71) über, wenn man $n_0 = 0$, $E_0 = \infty$, $n_0 E_0 = r_0$ oder r_0 für $\frac{1}{2} p_0$ setzt.

Man sieht hieraus, wie man sich im Allgemeinen in dem Falle eines Kreises zu verhalten hat; weil jedoch die vorliegende Abhandlung zunächst einen astronomischen Zweck hat und der in Rede stehende Fall für die Astronomie nur von sehr untergeordneter Bedeutung ist, so werden wir grösserer Bestimmtheit wegen von diesem Falle für's Erste ganz absehen, also auch stets n_0 als nicht verschwindend betrachten.

ZWEITES CAPITEL.

Allgemeine Bestimmung der Durchschnittspunkte zweier nicht in einer und derselben Ebene liegender Kegelschnitte im Raume, mit besonderer Rücksicht auf den Fall, wenn die beiden Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, und Entwickelung der Bedingungen, von denen die Existenz der Durchschnittspunkte abhängt.

§. 12.

Bevor wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieses Capitels übergehen, müssen wir die folgenden Betrachtungen über die Auflösung zweier linearen Gleichungen zwischen drei unbekannten Grössen von der Form

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z = k_0, \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$$

vorausschicken, weil auf dieser auch an sich bemerkenswerthen Auflösung unsere in diesem Capitel anzustellenden Untersuchungen hauptsächlich beruhen.

Wenn wir

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\{a_0 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - a_1 (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\}\, k_0 + \{a_1 (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - a_0 (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\}\, k_1}{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)^2}, \\ \mathfrak{B} &= \frac{\{b_0 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - b_1 (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\}\, k_0 + \{b_1 (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - b_0 (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\}\, k_1}{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)^2}. \\ \mathfrak{C} &= \frac{\{c_0 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - c_1 (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\}\, k_0 + \{c_1 (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) - c_0 (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)\}\, k_1}{(a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1)^2} \end{aligned} \right.$$

setzen, so liefern, wie man sich auf der Stelle durch die leichteste Rechnung überzeugt, die drei Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen eine Auflösung der beiden Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z = k_0, \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1;$$

und weil also

$$a_0 \mathfrak{A} + b_0 \mathfrak{B} + c_0 \mathfrak{C} = k_0, \quad a_1 \mathfrak{A} + b_1 \mathfrak{B} + c_1 \mathfrak{C} = k_1;$$

folglich

$$a_0 (x - \mathfrak{A}) + b_0 (y - \mathfrak{B}) + c_0 (z - \mathfrak{C}) = 0,$$
$$a_1 (x - \mathfrak{A}) + b_1 (y - \mathfrak{B}) + c_1 (z - \mathfrak{C}) = 0$$

ist, so ist, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, und der Kürze wegen

$$2) \qquad \mathrm{A} = b_0 c_1 - c_0 b_1, \quad \mathrm{B} = c_0 a_1 - a_0 c_1, \quad \mathrm{C} = a_0 b_1 - b_0 a_1$$

gesetzt wird, die allgemeine Auflösung unserer beiden linearen Gleichungen in den Formeln

$$x - \mathfrak{A} = GA,\ y - \mathfrak{B} = GB,\ z - \mathfrak{C} = GC$$

oder

$$x = \mathfrak{A} + GA,\ y = \mathfrak{B} + GB,\ z = \mathfrak{C} + GC \tag{3}$$

enthalten.

Der Factor G bleibt so lange unbestimmt, so lange zu den beiden gegebenen linearen Gleichungen zwischen x, y, z nicht noch irgend eine dritte Gleichung zwischen diesen drei unbekannten Grössen hinzutritt. Wenn dies der Fall ist, wird man in diese dritte Gleichung die Ausdrücke 3) von x, y, z einführen, und mittelst der dadurch hervorgehenden Gleichung den Factor G bestimmen, wodurch dann jederzeit auch die, den drei gegebenen Gleichungen genügenden Werthe von x, y, z mittelst der Formeln 3) gefunden sein werden.

Die obige Form der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist zwar nicht die einfachste, dessen ungeachtet aber für viele Untersuchungen, hauptsächlich für solche, welche die Anwendung der Kreisfunctionen in Anspruch nehmen, besonders bequem und geeignet. Übrigens lassen sich durch bekannte analytische Transformationen die drei in Rede stehenden Grössen noch auf verschiedene andere Arten ausdrücken, von denen wir hier nur die beiden folgenden bemerken wollen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{\{(a_0b_1 - b_0a_1)\,b_1 - (c_0a_1 - a_0c_1)\,c_1\}\,k_0 - \{(a_0b_1 - b_0a_1)\,b_0 - (c_0a_1 - a_0c_1)\,c_0\}\,k_1}{(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2},\\
\mathfrak{B} &= \frac{\{(b_0c_1 - c_0b_1)\,c_1 - (a_0b_1 - b_0a_1)\,a_1\}\,k_0 - \{(b_0c_1 - c_0b_1)\,c_0 - (a_0b_1 - b_0a_1)\,a_0\}\,k_1}{(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2},\\
\mathfrak{C} &= \frac{\{(c_0a_1 - a_0c_1)\,a_1 - (b_0c_1 - c_0b_1)\,b_1\}\,k_0 - \{(c_0a_1 - a_0c_1)\,a_0 - (b_0c_1 - c_0b_1)\,b_0\}\,k_1}{(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{(a_0b_1 - b_0a_1)(b_1k_0 - b_0k_1) - (c_0a_1 - a_0c_1)(c_1k_0 - c_0k_1)}{(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2},\\
\mathfrak{B} &= \frac{(b_0c_1 - c_0b_1)(c_1k_0 - c_0k_1) - (a_0b_1 - b_0a_1)(a_1k_0 - a_0k_1)}{(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2},\\
\mathfrak{C} &= \frac{(c_0a_1 - a_0c_1)(a_1k_0 - a_0k_1) - (b_0c_1 - c_0b_1)(b_1k_0 - b_0k_1)}{(a_0b_1 - b_0a_1)^2 + (b_0c_1 - c_0b_1)^2 + (c_0a_1 - a_0c_1)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wenn $k_0 = 0$ und $k_1 = 0$ ist, die beiden gegebenen linearen Gleichungen zwischen x, y, z also die Form

$$a_0x + b_0y + c_0z = 0,\ a_1x + b_1y + c_1z = 0 \tag{6}$$

haben, so verschwinden die drei Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und zur Bestimmung von x, y, z hat man nach 3), wenn immer G einen gewissen, vorläufig noch unbestimmten Factor bezeichnet, die drei einfachen Formeln:

$$x = GA,\ y = GB,\ z = GC; \tag{7}$$

wo wie früher

$$A = b_0c_1 - c_0b_1,\ B = c_0a_1 - a_0c_1,\ C = a_0b_1 - b_0a_1 \tag{8}$$

ist.

§. 13.

Wir betrachten jetzt zwei beliebige Kegelschnitte im Raume, von denen aber, was wohl zu beachten und im Folgenden stets festzuhalten ist, angenommen wird, dass dieselben nicht beide in einer und derselben Ebene liegen, eine Bedingung, deren Nothwendigkeit, wenn die Bestimmung der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte im Raume die Einfachheit, welche wir derselben im Folgenden zu geben beabsichtigen, nicht verlieren soll, schon daraus auf der Stelle ganz von selbst einleuchtet, dass zwei in derselben Ebene liegende Kegelschnitte sich bekanntlich im Allgemeinen in vier Punkten schneiden, für zwei nicht in derselben Ebene liegende Kegelschnitte es aber offenbar im Allgemeinen nur zwei Durchschnittspunkte geben kann, woher es kommt, dass die Bestimmung der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte im ersten Falle nothwendig auf eine Gleichung des vierten Grades, im zweiten Falle dagegen nur auf eine Gleichung des zweiten Grades führen muss, in welchem Umstande hauptsächlich der Grund der Einfachheit der Auflösung unserer Aufgabe liegt, wenn man dieselbe gleich von vorn herein aus dem Gesichtspunkte auffasst, dass man die beiden Kegelschnitte der Bedingung unterwirft, dass sie nicht beide in derselben Ebene liegen sollen.

Nach I, 33) und I, 48) haben die Gleichungen des einen der beiden gegebenen Kegelschnitte im Allgemeinen die Form

$$A_0\,(x-a_0)+B_0\,(y-b_0)+C_0\,(z-c_0)=0,$$

$$9)\qquad (x-f_0)^2+(y-g_0)^2+(z-h_0)^2$$

$$=n_0^2\,\{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2+(z-c_0)^2-[(x-a_0)\cos\alpha_0+(y-b_0)\cos\beta_0+(z-c_0)\cos\gamma_0]^2\},$$

und eben so haben die Gleichungen des anderen der beiden gegebenen Kegelschnitte die Form:

$$A_1\,(x-a_1)+B_1\,(y-b_1)+C_1\,(z-c_1)=0,$$

$$10)\qquad (x-f_1)^2+(y-g_1)^2+(z-h_1)^2$$

$$=n_1^2\,\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-[(x-a_1)\cos\alpha_1+(y-b_1)\cos\beta_1+(z-c_1)\cos\gamma_1]^2\}.$$

Indem es sich nun um die Bestimmung der Durchschnittspunkte dieser beiden Kegelschnitte und die Entwickelung der Bedingungen, unter denen es überhaupt nur Durchschnittspunkte gibt, handelt, wollen wir zunächst im folgenden Paragraphen die Durchschnittspunkte eines jeden der beiden Kegelschnitte mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der beiden Ebenen, in denen sie liegen, zu bestimmen suchen, woran sich dann die weiteren Betrachtungen über die Durchschnittspunkte der beiden Kegelschnitte selbst leicht anknüpfen lassen werden.

§. 14.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte des ersten der beiden gegebenen Kegelschnitte, welcher durch die Gleichungen 9) charakterisirt wird, mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der beiden Ebenen, in welchen die Kegelschnitte liegen, durch x_0, y_0, z_0; so haben wir nach 9) und 10) zur Bestimmung dieser Coordinaten die drei folgenden Gleichungen:

$$A_0\,(x_0-a_0)+B_0\,(y_0-b_0)+C_0\,(z_0-c_0)=0,$$

$$11)\qquad A_1\,(x_0-a_1)+B_1\,(y_0-b_1)+C_1\,(z_0-c_1)=0,$$

$$(x_0-f_0)^2+(y_0-g_0)^2+(z_0-h_0)^2$$

$$=n_0^2\,\{(x_0-a_0)^2+(y_0-b_0)^2+(z_0-c_0)^2-[(x_0-a_0)\cos\alpha_0+(y_0-b_0)\cos\beta_0+(z_0-c_0)\cos\gamma_0]^2\}.$$

Die beiden ersten Gleichungen dieses Systems kann man unter der Form

$$A_0 x_0 + B_0 y_0 + C_0 z_0 = A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0,$$
$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1$$

darstellen; und aus den Grössen

$$A_0,\ B_0,\ C_0,\ A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0;$$
$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1$$

lassen sich nun die in §. 12 mit Rücksicht auf die dort zu Grunde gelegten Gleichungen im Allgemeinen durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und A, B, C bezeichneten Grössen, und dann weiter auch die Coordinaten x_0, y_0, z_0, ganz nach den in dem genannten Paragraphen gegebenen allgemeinen Regeln bestimmen. Die grössere oder geringere Einfachheit dieser Auflösung wird aber sehr wesentlich dadurch bedingt, ob die Grössen

$$A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0,\ A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1$$

beide verschwinden oder nicht, indem man im ersten Falle blos die Grössen A, B, C nach den einfachen Ausdrücken in 8) und die einfachen Formeln 7), im zweiten Falle dagegen die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach den in §. 12 gegebenen ziemlich complicirten Ausdrücken für diese Grössen und die Grössen A, B, C, so wie die gleichfalls eine grössere Complication als die sehr einfachen Formeln 7) darbietenden Formeln 3) in Anwendung zu bringen hat. Zu dem astronomischen Zwecke, welchen diese Abhandlung vorzugsweise im Auge hat, ist aber für uns, wie wir nachher sehen werden, nur der erste der beiden genannten Fälle, wenn nämlich die Grössen

$$A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0,\ A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1$$

beide verschwinden, von Interesse, wesshalb wir hier von jetzt an auch nur diesen Fall in's Auge fassen wollen[1]). In diesem Falle können wir aber nach 7), wenn G_0 einen gewissen Factor bezeichnet,

$$x_0 = G_0 \mathrm{A},\ y_0 = G_0 \mathrm{B},\ z_0 = G_0 \mathrm{C} \tag{12}$$

setzen, und haben dann nach der dritten der Gleichungen 11) zur Bestimmung dieses Factors die Gleichung:

$$\begin{aligned}(f_0 - G_0\mathrm{A})^2 + (g_0 - G_0\mathrm{B})^2 + (h_0 - G_0\mathrm{C})^2 \\ = n_0^{\,2} \left\{ \begin{aligned} &(a_0 - G_0\mathrm{A})^2 + (b_0 - G_0\mathrm{B})^2 + (c_0 - G_0\mathrm{C})^2 \\ &- [(a_0 - G_0\mathrm{A}) \cos\alpha_0 + (b_0 - G_0\mathrm{B}) \cos\beta_0 + (c_0 - G_0\mathrm{C}) \cos\gamma_0]^2 \end{aligned} \right\},\end{aligned} \tag{13}$$

welche in Bezug auf die unbekannte Grösse G_0 vom zweiten Grade ist.

Denken wir uns diese Gleichung entwickelt und auf die Form

$$L_0 - 2 M_0 G_0 + N_0 G_0^{\,2} = 0 \tag{14}$$

gebracht, so ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 - n_0^2 \{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 - (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0)^2\}, \\ M_0 &= \mathrm{A} f_0 + \mathrm{B} g_0 + \mathrm{C} h_0 \\ &\quad - n_0^2 \{\mathrm{A} a_0 + \mathrm{B} b_0 + \mathrm{C} c_0 - (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0)(\mathrm{A} \cos\alpha_0 + \mathrm{B} \cos\beta_0 + \mathrm{C} \cos\gamma_0)\}, \\ N_0 &= \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - n_0^2 \{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - (\mathrm{A} \cos\alpha_0 + \mathrm{B} \cos\beta_0 + \mathrm{C} \cos\gamma_0)^2\}; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

[1]) Eine Durchführung ganz im Allgemeinen würde wesentliche Schwierigkeiten übrigens gar nicht darbieten, liegt aber, wie gesagt, jetzt nicht im Zweck dieser astronomischen Untersuchung.

und zur Bestimmung von G_0 haben wir die Formel

16)
$$G_0 = \frac{M_0 \pm \sqrt{M_0^2 - L_0 N_0}}{N_0},$$

worauf sich dann die gesuchten Coordinaten x_0, y_0, z_0 mittelst der Formeln 12) ergeben.

Die obigen Ausdrücke von L_0, M_0, N_0 sind die einfachsten, welche sich geben lassen; wir bemerken jedoch, dass diese Grössen sich auch auf folgende Art darstellen lassen:

17)
$$\begin{aligned}
L_0 &= f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 \\
&\quad - n_0^2 \left\{ \begin{aligned} &a_0^2 \sin\alpha_0^2 + b_0^2 \sin\beta_0^2 + c_0^2 \sin\gamma_0^2 \\ &- 2 a_0 b_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0 - 2 b_0 c_0 \cos\beta_0 \cos\gamma_0 - 2 c_0 a_0 \cos\gamma_0 \cos\alpha_0 \end{aligned} \right\}, \\
M_0 &= \mathrm{A} f_0 + \mathrm{B} g_0 + \mathrm{C} h_0 \\
&\quad - n_0^2 \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A} a_0 \sin\alpha_0^2 + \mathrm{B} b_0 \sin\beta_0^2 + \mathrm{C} c_0 \sin\gamma_0^2 \\ &- (\mathrm{A} b_0 + \mathrm{B} a_0) \cos\alpha_0 \cos\beta_0 - (\mathrm{B} c_0 + \mathrm{C} b_0) \cos\beta_0 \cos\gamma_0 - (\mathrm{C} a_0 + \mathrm{A} c_0) \cos\gamma_0 \cos\alpha_0 \end{aligned} \right\}, \\
N_0 &= \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 \\
&\quad - n_0^2 \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}^2 \sin\alpha_0^2 + \mathrm{B}^2 \sin\beta_0^2 + \mathrm{C}^2 \sin\gamma_0^2 \\ &- 2\mathrm{AB} \cos\alpha_0 \cos\beta_0 - 2\mathrm{BC} \cos\beta_0 \cos\gamma_0 - 2\mathrm{CA} \cos\gamma_0 \cos\alpha_0 \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}$$

Wenn wir, wie es verstattet ist, den Punkt (a_0, b_0, c_0) mit dem Punkte zusammenfallen lassen, in welchem die Directrix des Kegelschnittes von dem auf sie von dem Anfange der Coordinaten gefällten Perpendikel getroffen wird; so ist nach I, 54)

18)
$$a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0 = 0,$$

und unter dieser Voraussetzung nehmen also die Ausdrücke 15) von L_0, M_0, N_0 die folgende theilweise einfachere Gestalt an:

19)
$$\begin{aligned}
L_0 &= f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 - n_0^2 (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2), \\
M_0 &= \mathrm{A} f_0 + \mathrm{B} g_0 + \mathrm{C} h_0 - n_0^2 (\mathrm{A} a_0 + \mathrm{B} b_0 + \mathrm{C} c_0). \\
N_0 &= \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - n_0^2 \{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - (\mathrm{A}\cos\alpha_0 + \mathrm{B}\cos\beta_0 + \mathrm{C}\cos\gamma_0)^2\}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir jetzt ferner die Coordinaten der Durchschnittspunkte des zweiten der beiden gegebenen Kegelschnitte, welcher durch die Gleichungen 10) charakterisirt wird, mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Ebenen beider Kegelschnitte durch x_1, y_1, z_1: so wird man auf ganz ähnliche Art wie vorher diese Coordinaten mittelst der Formeln

20)
$$x_1 = G_1 \mathrm{A}, \quad y_1 = G_1 \mathrm{B}, \quad z_1 = G_1 \mathrm{C}$$

bestimmen, wo die Grösse G_1, wenn

21)
$$\begin{aligned}
L_1 &= f_1^2 + g_1^2 + h_1^2 - n_1^2 \{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - (a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1)^2\}, \\
M_1 &= \mathrm{A} f_1 + \mathrm{B} g_1 + \mathrm{C} h_1 \\
&\quad - n_1^2 \{\mathrm{A} a_1 + \mathrm{B} b_1 + \mathrm{C} c_1 - (a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1)(\mathrm{A}\cos\alpha_1 + \mathrm{B}\cos\beta_1 + \mathrm{C}\cos\gamma_1)\}, \\
N_1 &= \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - n_1^2 \{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - (\mathrm{A}\cos\alpha_1 + \mathrm{B}\cos\beta_1 + \mathrm{C}\cos\gamma_1)^2\}
\end{aligned}$$

oder

22)
$$\begin{aligned}
L_1 &= f_1^2 + g_1^2 + h_1^2 \\
&\quad - n_1^2 \left\{ \begin{aligned} &a_1^2 \sin\alpha_1^2 + b_1^2 \sin\beta_1^2 + c_1^2 \sin\gamma_1^2 \\ &- 2 a_1 b_1 \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - 2 b_1 c_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1 - 2 c_1 a_1 \cos\gamma_1 \cos\alpha_1 \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}$$

$$M_1 = Af_1 + Bg_1 + Ch_1$$
$$-n_1^2 \begin{Bmatrix} Aa_1 \sin \alpha_1^2 + Bb_1 \sin \beta_1^2 + Cc_1 \sin \gamma_1^2 \\ -(Ab_1+Ba_1)\cos\alpha_1\cos\beta_1 - (Bc_1+Cb_1)\cos\beta_1\cos\gamma_1 - (Ca_1+Ac_1)\cos\gamma_1\cos\alpha_1 \end{Bmatrix},$$
$$N_1 = A^2 + B^2 + C^2$$
$$-n_1^2 \begin{Bmatrix} A^2 \sin \alpha_1^2 + B^2 \sin \beta_1^2 + C^2 \sin \gamma_1^2 \\ -2AB\cos\alpha_1\cos\beta_1 - 2BC\cos\beta_1\cos\gamma_1 - 2CA\cos\gamma_1\cos\alpha_1 \end{Bmatrix}$$

gesetzt wird, sich durch Auflösung der Gleichung

$$L_1 - 2M_1G_1 + N_1G_1^2 = 0 \tag{23)}$$

oder mittelst der Formel

$$G_1 = \frac{M_1 \pm \sqrt{M_1^2 - L_1N_1}}{N_1} \tag{24)}$$

ergibt.

Lässt man auch hier den Punkt (a_1, b_1, c_1) mit dem Punkte zusammenfallen, in welchem die Directrix des Kegelschnittes von dem auf sie von dem Anfange der Coordinaten gefällten Perpendikel getroffen wird; so ist wie vorher:

$$a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 + c_1 \cos \gamma_1 = 0, \tag{25)}$$

und folglich nach 21):

$$\begin{aligned} L_1 &= f_1^2 + g_1^2 + h_1^2 - n_1^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2), \\ M_1 &= Af_1 + Bg_1 + Ch_1 - n_1^2(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1), \\ N_1 &= A^2 + B^2 + C^2 - n_1^2\{A^2 + B^2 + C^2 - (A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1)^2\}. \end{aligned} \tag{26)}$$

Wenn von den Grössen N_0, N_1 die eine oder die andere verschwände, so würde man zur Bestimmung der entsprechenden Grössen G_0, G_1 nach 14) und 23) die Gleichungen

$$L_0 - 2M_0G_0 = 0, \quad L_1 - 2M_1G_1 = 0; \tag{27)}$$

also die Formeln

$$G_0 = \frac{L_0}{2M_0}, \quad G_1 = \frac{L_1}{2M_1} \tag{28)}$$

haben.

Aus allem Bisherigen erhellet nun ganz von selbst, dass, wenn die beiden Kegelschnitte sich schneiden sollen, nothwendig G_0 und G_1 endliche völlig bestimmte reelle Grössen sein müssen, die einander gleich sind, so dass also

$$G_0 = G_1 \tag{29)}$$

ist, weil dann nach 12) und 20) offenbar

$$x_0 = x_1, \; y_0 = y_1, \; z_0 = z_1$$

ist, unter welchen Bedingungen sich nur die beiden Kegelschnitte schneiden können. Man hat aber zu beachten, dass, weil, wenigstens im Allgemeinen, sowohl G_0, als auch G_1, zwei Werthe hat, die Gleichung 29) nur so viel aussagen kann und soll, dass der eine oder andere der beiden Werthe von G_0 dem einen oder dem anderen der beiden Werthe von G_1 gleich sein muss, wenn die beiden Kegelschnitte sich schneiden sollen, zugleich natürlich immer vorausgesetzt, dass die betreffenden Werthe endliche völlig bestimmte reelle Grössen sind.

Wie aber, wenn die Kegelschnitte wirklich sich schneiden, die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte zu bestimmen sind, erhellet aus dem Obigen gleichfalls ganz von selbst, und auch die dazu erforderlichen Formeln sind im Obigen vollständig enthalten.

§. 15.

Die im Vorhergehenden gemachte Voraussetzung, unter welcher die obigen Entwickelungen nur gültig sind, dass nämlich die Grössen

$$A_0a_0 + B_0b_0 + C_0c_0,\quad A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1$$

beide verschwinden, lässt sich jederzeit als erfüllt betrachten, wenn die beiden gegebenen Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, wie dies bei den Bahnen der nach den Gesetzen der allgemeinen Schwere um die Sonne sich bewegenden Weltkörper bekanntlich immer der Fall ist.

In diesem Falle können wir nämlich den gemeinschaftlichen Brennpunkt der beiden Kegelschnitte als Anfang der Coordinaten annehmen, wo dann also

$$f_0 = 0,\ g_0 = 0,\ h_0 = 0;\quad f_1 = 0,\ g_1 = 0,\ h_1 = 0$$

ist, und folglich nach I, 47) offenbar

$$30)\quad \begin{cases} A_0 = b_0 \cos\gamma_0 - c_0 \cos\beta_0, \\ B_0 = c_0 \cos\alpha_0 - a_0 \cos\gamma_0, \\ C_0 = a_0 \cos\beta_0 - b_0 \cos\alpha_0 \end{cases}$$

und ganz ebenso

$$31)\quad \begin{cases} A_1 = b_1 \cos\gamma_1 - c_1 \cos\beta_1 . \\ B_1 = c_1 \cos\alpha_1 - a_1 \cos\gamma_1, \\ C_1 = a_1 \cos\beta_1 - b_1 \cos\alpha_1 \end{cases}$$

gesetzt werden kann.

Folglich ist offenbar

$$32)\quad A_0a_0 + B_0b_0 + C_0c_0 = 0,\quad A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = 0;$$

und weil also die zwischen den unbekannten Grössen x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 gegebenen linearen Gleichungen nach dem Obigen

$$\left.\begin{aligned} A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0 = 0, \\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} A_0x_1 + B_0y_1 + C_0z_1 = 0, \\ A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 = 0 \end{aligned}\right.$$

sind, so muss man nach 8) jetzt offenbar:

$$33)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = B_0C_1 - C_0B_1, \\ \mathrm{B} = C_0A_1 - A_0C_1, \\ \mathrm{C} = A_0B_1 - B_0A_1 \end{cases}$$

setzen.

Es ist also

$$34)\quad \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = (A_0B_1 - B_0A_1)^2 + (B_0C_1 - C_0B_1)^2 + (C_0A_1 - A_0C_1)^2$$

oder nach einer bekannten Relation:

$$35)\quad \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = (A_0^2 + B_0^2 + C_0^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1)^2.$$

Ferner ist nach 33):

$$\mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}b_0 + \mathrm{C}c_0 = (B_0C_1 - C_0B_1)\, a_0 + (C_0A_1 - A_0C_1)\, b_0 + (A_0B_1 - B_0A_1)\, c_0,$$

also:

$$\mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}b_0 + \mathrm{C}c_0 = (C_0b_0 - B_0c_0)\, A_1 + (A_0c_0 - C_0a_0)\, B_1 + (B_0a_0 - A_0b_0)\, C_1.$$

Nun ist aber nach 30), wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} C_0b_0 - B_0c_0 &= a_0\,(a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0) - (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) \cos\alpha_0, \\ A_0c_0 - C_0a_0 &= b_0\,(a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0) - (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) \cos\beta_0, \\ B_0a_0 - A_0b_0 &= c_0\,(a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0) - (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2) \cos\gamma_0: \end{aligned} \tag{36}$$

also:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}b_0 + \mathrm{C}c_0 = {} & (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0)\,(A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0) \\ & - (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)\,(A_1 \cos\alpha_0 + B_1 \cos\beta_0 + C_1 \cos\gamma_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Auf ähnliche Art ist nach 33):

$$\mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1 + \mathrm{C}c_1 = (B_0C_1 - C_0B_1)\, a_1 + (C_0A_1 - A_0C_1)\, b_1 + (A_0B_1 - B_0A_1)\, c_1,$$

also:

$$\mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1 + \mathrm{C}c_1 = (B_1c_1 - C_1b_1)\, A_0 + (C_1a_1 - A_1c_1)\, B_0 + (A_1b_1 - B_1a_1)\, C_0.$$

Nun ist aber nach 31), wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} B_1c_1 - C_1b_1 &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cos\alpha_1 - a_1\,(a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1), \\ C_1a_1 - A_1c_1 &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cos\beta_1 - b_1\,(a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1), \\ A_1b_1 - B_1a_1 &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cos\gamma_1 - c_1\,(a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1); \end{aligned} \tag{38}$$

also:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1 + \mathrm{C}c_1 = {} & (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\,(A_0 \cos\alpha_1 + B_0 \cos\beta_1 + C_0 \cos\gamma_1) \\ & - (a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1)\,(A_0a_1 + B_0b_1 + C_0c_1). \end{aligned} \tag{39}$$

Ferner ist nach 33):

$$\begin{aligned} & \mathrm{A} \cos\alpha_0 + \mathrm{B} \cos\beta_0 + \mathrm{C} \cos\gamma_0 \\ & = (B_0C_1 - C_0B_1) \cos\alpha_0 + (C_0A_1 - A_0C_1) \cos\beta_0 + (A_0B_1 - B_0A_1) \cos\gamma_0, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} & \mathrm{A} \cos\alpha_0 + \mathrm{B} \cos\beta_0 + \mathrm{C} \cos\gamma_0 \\ & = (C_0 \cos\beta_0 - B_0 \cos\gamma_0)\, A_1 + (A_0 \cos\gamma_0 - C_0 \cos\alpha_0)\, B_1 + (B_0 \cos\alpha_0 - A_0 \cos\beta_0)\, C_1. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach 30), wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} C_0 \cos\beta_0 - B_0 \cos\gamma_0 &= a_0 - (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0) \cos\alpha_0, \\ A_0 \cos\gamma_9 - C_0 \cos\alpha_0 &= b_0 - (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0) \cos\beta_0, \\ B_0 \cos\alpha_0 - A_0 \cos\beta_0 &= c_0 - (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0) \cos\gamma_0; \end{aligned} \tag{40}$$

also:

$$\begin{aligned} & \mathrm{A} \cos\alpha_0 + \mathrm{B} \cos\beta_0 + \mathrm{C} \cos\gamma_0 \\ & = A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0 - (a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0)\,(A_1 \cos\alpha_0 + B_1 \cos\beta_0 + C_1 \cos\gamma_0). \end{aligned} \tag{41}$$

Auf ähnliche Art ist nach 33):

$$\mathrm{A}\cos\alpha_1+\mathrm{B}\cos\beta_1+\mathrm{C}\cos\gamma_1$$
$$=(B_0C_1-C_0B_1)\cos\alpha_1+(C_0A_1-A_0C_1)\cos\beta_1+(A_0B_1-B_0A_1)\cos\gamma_1,$$

also:

$$\mathrm{A}\cos\alpha_1+\mathrm{B}\cos\beta_1+\mathrm{C}\cos\gamma_1$$
$$=(B_1\cos\gamma_1-C_1\cos\beta_1)A_0+(C_1\cos\alpha_1-A_1\cos\gamma_1)B_0+(A_1\cos\beta_1-B_1\cos\alpha_1)C_0.$$

Nun ist aber nach 31) wie man leicht findet:

42) $$\begin{aligned}B_1\cos\gamma_1-C_1\cos\beta_1&=(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1)\cos\alpha_1-a_1,\\ C_1\cos\alpha_1-A_1\cos\gamma_1&=(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1)\cos\beta_1-b_1,\\ A_1\cos\beta_1-B_1\cos\alpha_1&=(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1)\cos\gamma_1-c_1;\end{aligned}$$

also:

43) $$\begin{aligned}&\mathrm{A}\cos\alpha_1+\mathrm{B}\cos\beta_1+\mathrm{C}\cos\gamma_1\\ &=(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1)(A_0\cos\alpha_1+B_0\cos\beta_1+C_0\cos\gamma_1)-(A_0a_1+B_0b_1+C_0c_1).\end{aligned}$$

Leicht findet man aus 30) und 31):

44) $$A_0^2+B_0^2+C_0^2=a_0^2+b_0^2+c_0^2-(a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0)^2,$$

45) $$A_1^2+B_1^2+C_1^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2-(a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1)^2,$$

46) $$\begin{aligned}A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1&=(a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1)(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)\\ &-(a_0\cos\alpha_1+b_0\cos\beta_1+c_0\cos\gamma_1)(a_1\cos\alpha_0+b_1\cos\beta_0+c_1\cos\gamma_0)\end{aligned}$$

Wenn wir die Punkte (a_0, b_0, c_0) und (a_1, b_1, c_1) mit den Punkten zusammenfallen lassen, in denen die Directrixen der beiden Kegelschnitte von den auf sie von dem gemeinschaftlichen Brennpunkte gefällten Perpendikeln getroffen werden; so ist nach 18) und 25), weil der gemeinschaftliche Brennpunkt der Anfang der Coordinaten ist:

$$a_0\cos\alpha_0+b_0\cos\beta_0+c_0\cos\gamma_0=0,$$
$$a_1\cos\alpha_1+b_1\cos\beta_1+c_1\cos\gamma_1=0;$$

und nach I, 57) ist:

47) $$\left\{\begin{aligned}a_0^2+b_0^2+c_0^2&=\left(\frac{p_0}{2n_0}\right)^2,\\ a_1^2+b_1^2+c_1^2&=\left(\frac{p_1}{2n_1}\right)^2.\end{aligned}\right.$$

Also ist nach 19) und 26):

48) $$\begin{aligned}L_0&=-\frac{1}{4}p_0^2,\\ M_0&=-n_0^2(\mathrm{A}a_0+\mathrm{B}b_0+\mathrm{C}c_0),\\ N_0&=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-n_0^2\{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-(\mathrm{A}\cos\alpha_0+\mathrm{B}\cos\beta_0+\mathrm{C}\cos\gamma_0)^2\}\end{aligned}$$

und

49) $$\begin{aligned}L_1&=-\frac{1}{4}p_1^2,\\ M_1&=-n_1^2(\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}b_1+\mathrm{C}c_1),\\ N_1&=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-n_1^2\{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-(\mathrm{A}\cos\alpha_1+\mathrm{B}\cos\beta_1+\mathrm{C}\cos\gamma_1)^2\}.\end{aligned}$$

Ferner ist nach den obigen Formeln:

$$Aa_0 + Bb_0 + Cc_0 = -\left(\frac{p_0}{2n_0}\right)^2 (A_1 \cos\alpha_0 + B_1 \cos\beta_0 + C_1 \cos\gamma_0),$$

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 = \left(\frac{p_1}{2n_1}\right)^2 (A_0 \cos\alpha_1 + B_0 \cos\beta_1 + C_0 \cos\gamma_1);$$

$$\left.\begin{aligned} A \cos\alpha_0 + B \cos\beta_0 + C \cos\gamma_0 &= A_1 a_0 + B_1 b_0 + C_1 c_0, \\ A \cos\alpha_1 + B \cos\beta_1 + C \cos\gamma_1 &= -(A_0 a_1 + B_0 b_1 + C_0 c_1); \end{aligned}\right\} \quad 50)$$

$$A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = \left(\frac{p_0}{2n_0}\right)^2,$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = \left(\frac{p_1}{2n_1}\right)^2.$$

Die Entwickelung dieser Relationen genügt für unseren Zweck.

DRITTES CAPITEL.

Allgemeine Gleichungen der Bahn eines um die Sonne sich bewegenden Weltkörpers.

§. 16.

Wir nehmen die Sonne als den Anfang eines rechtwinkeligen Coordinatensystems der $x'\, y'\, z'$ an. Die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der $x'\, y'$. Der positive Theil der Axe der x' sei nach dem aufsteigenden Knoten der Bahn gerichtet, und der positive Theil der Axe der y' werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x' durch den rechten Winkel $(x'\, y')$ hindurch zu dem positiven Theil der Axe der y' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher in der Ekliptik die Längen von 0 bis 360° gezählt werden. Der positive Theil der Axe der z' sei nach dem Nordpole der Ekliptik hin gerichtet.

Bezeichnen wir die Neigung der Bahn, worunter wir den 180° nicht übersteigenden Winkel verstehen, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der $x'y'$ liegende Theil der Ebene der Bahn mit dem der beiden Theile der Ebene der $x'y'$ einschliesst, in welche dieselbe durch die Axe der x' getheilt wird und in welchem der positive Theil der Axe der y' liegt, durch i_0; so ist die Gleichung der Ebene der Bahn offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$z' = y' \operatorname{tang} i_0 \text{ oder } y' \sin i_0 - z' \cos i_0 = 0. \qquad 1)$$

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von der Sonne nach dem Perihelium der Bahn gezogene Gerade mit den positiven Theilen der Axen der x', y', z' einschliesst, seien respective λ_0', μ_0', ν_0'; und X', Y', Z' seien die Coordinaten irgend eines Punktes in der Axe der Bahn, dessen Entfernung von der Sonne wir durch R bezeichnen wollen; dann ist offenbar:

$$X' = R \cos\lambda_0',\quad Y' = R \cos\mu_0',\quad Z' = R \cos\nu_0'$$

oder:

$$X' = R \cos(180^0 - \lambda_0'),\quad Y' = R \cos(180^0 - \mu_0'),\quad Z' = R \cos(180^0 - \nu_0');$$

je nachdem der in Rede stehende Punkt in der von der Sonne nach dem Perihelium gehenden Geraden oder in der direct entgegengesetzten Geraden liegt; also ist:

$$X' = \pm R \cos \lambda_0', \; Y' = \pm R \cos \mu_0', \; Z' = \pm R \cos \nu_0';$$

wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, je nachdem der Punkt $(X' Y' Z')$ in der von der Sonne nach dem Perihelium gehenden Geraden, oder in der direct entgegengesetzten Geraden liegt. Betrachten wir aber R nicht, wie bisher, stets als positiv, sondern als positiv oder als negativ, je nachdem der Punkt $(X' Y' Z')$ in der von der Sonne nach dem Perihelium gehenden Geraden oder in der direct entgegengesetzten Geraden liegt; so können wir allgemein

2) $$X' = R \cos \lambda_0', \; Y' = R \cos \mu_0', \; Z' = R \cos \nu_0'$$

setzen.

Bezeichnen wir die im Sinne der Längen in der Ekliptik von 0 bis 360° gezählte Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten durch P_0, und den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel der von der Sonne nach dem Perihelium gezogenen Geraden gegen die Ebene der $x'y'$ oder die Ebene der Ekliptik, indem wir diesen Neigungswinkel als positiv oder als negativ betrachten, je nachdem das Perihelium auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $x' y'$ liegt, durch J_0; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

3) $$\cos \lambda_0' = \cos P_0 \cos J_0, \; \cos \mu_0' = \sin P_0 \cos J_0, \; \cos \nu_0' = \sin J_0;$$

also nach 2)

4) $$\left\{\begin{array}{l} X' = R \cos P_0 \cos J_0, \\ Y' = R \sin P_0 \cos J_0, \\ Z' = R \sin J_0. \end{array}\right.$$

Weil der Punkt $(X' Y' Z')$ in der Ebene der Bahn liegt, so müssen seine Coordinaten die Gleichung 1) befriedigen, und wir erhalten also nach 1) und 4) die Gleichung:

$$\sin i_0 \sin P_0 \cos J_0 - \cos i_0 \sin J_0 = 0,$$

woraus sich

5) $$\operatorname{tang} J_0 = \operatorname{tang} i_0 \sin P_0$$

ergibt. Also ist:

6) $$\cos J_0^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}, \; \sin J_0^2 = \frac{\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2};$$

und aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt, weil J_0 zwischen $-90°$ und $+90°$ liegt, also $\cos J_0$ stets positiv ist, allgemein:

7) $$\cos J_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}.$$

Verbindet man nun aber mit dieser Gleichung die Gleichung 5), so erhält man, weil

$$\sin J_0 = \cos J_0 \operatorname{tang} J_0$$

ist, ferner in völliger Allgemeinheit:

8) $$\sin J_0 = \frac{\operatorname{tang} i_0 \sin P_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}.$$

Eine weitere Verwandlung dieser Ausdrücke ist ohne besondere Cautelen nicht zulässig, weil dadurch leicht die Richtigkeit der Vorzeichen alterirt werden könnte.

Nach den Formeln 3), 4), 7), 8) ist

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda_0' &= \frac{\cos P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ \cos\mu_0' &= \frac{\sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ \cos\nu_0' &= \frac{\operatorname{tang} i_0 \sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}\end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

und

$$\left.\begin{aligned}X' &= \frac{R\cos P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ Y' &= \frac{R\sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ Z' &= \frac{R\operatorname{tang} i_0 \sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Entfernung R sich auf den Durchschnittspunkt der Directrix mit der Axe der Bahn beziehe. Nach §. 3 liegt aber das Perihelium immer zwischen der Directrix und der Sonne, so dass also unter der oben rücksichtlich des Vorzeichens von R gemachten Voraussetzung R positiv, und folglich nach I, 15), wenn n_0 und p_0 ihre bekannte Bedeutung haben, augenscheinlich

$$R = \frac{p_0}{2n_0}$$

ist. Bezeichnen wir also die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Directrix mit der Axe der Bahn durch a_0', b_0'. c_0'; so ist nach 10):

$$\left.\begin{aligned}a_0' &= \frac{p_0}{2n_0}\cdot\frac{\cos P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ b_0' &= \frac{p_0}{2n_0}\cdot\frac{\sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ c_0' &= \frac{p_0}{2n_0}\cdot\frac{\operatorname{tang} i_0 \sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen der Directrix, die von einem beliebigen Punkte derselben nach entgegengesetzten Seiten hin gehen, mit den positiven Theilen der Axen der x', y', z' einschliesst, respective durch α_0', β_0', γ_0'; so sind, weil der Punkt (a_0', b_0', c_0') in der Directrix liegt, die Gleichungen derselben:

$$\frac{x'-a_0'}{\cos\alpha_0'} = \frac{y'-b_0'}{\cos\beta_0'} = \frac{z'-c_0'}{\cos\gamma_0'}. \qquad 12)$$

Die Gleichung der Ebene der Bahn ist nach 1)

$$y'\sin i_0 - z'\cos i_0 = 0;$$

folglich, weil der Punkt (a_0', b_0', c_0') in der Ebene der Bahn liegt:

$$b_0'\sin i_0 - c_0'\cos i_0 = 0;$$

so dass also die Gleichung der Ebene der Bahn auch unter der Form

$$(y' - b_0') \sin i_0 - (z' - c_0') \cos i_0 = 0$$

dargestellt werden kann. Weil nun die Directrix ganz in der Ebene der Bahn liegt, so ist nach 12):

13) $$\sin i_0 \cos \beta_0' - \cos i_0 \cos \gamma_0' = 0.$$

Weil ferner die Directrix auf der Axe der Bahn senkrecht steht, so ist:

14) $$\cos \lambda_0' \cos \alpha_0' + \cos \mu_0' \cos \beta_0' + \cos \nu_0' \cos \gamma_0' = 0.$$

Aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt, wenn G_0' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_0' &= G_0' (\sin i_0 \cos \nu_0' + \cos i_0 \cos \mu_0'),\\ \cos \beta_0' &= -G_0' \cos i_0 \cos \lambda_0',\\ \cos \gamma_0' &= -G_0' \sin i_0 \cos \lambda_0';\end{aligned}$$

woraus man, weil

$$\cos \alpha_0'^2 + \cos \beta_0'^2 + \cos \gamma_0'^2 = 1$$

ist, sogleich

$$G_0'^2 \{\cos \lambda_0'^2 + (\sin i_0 \cos \nu_0' + \cos i_0 \cos \mu_0')^2\} = 1,$$

und folglich, weil auch

$$\cos \lambda_0'^2 + \cos \mu_0'^2 + \cos \nu_0'^2 = 1$$

ist, nach leichter Rechnung

$$G_0'^2 \{1 - (\sin i_0 \cos \mu_0' - \cos i_0 \cos \nu_0')^2\} = 1$$

erhält. Nach 9) ist aber offenbar

$$\sin i_0 \cos \mu_0' - \cos i_0 \cos \nu_0' = 0,$$

also:

$$G_0'^2 = 1, \; G_0' = \pm 1;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_0' &= \pm (\sin i_0 \cos \nu_0' + \cos i_0 \cos \mu_0'),\\ \cos \beta_0' &= \mp \cos i_0 \cos \lambda_0',\\ \cos \gamma_0' &= \mp \sin i_0 \cos \lambda_0';\end{aligned}$$

und wenn man in diese Formeln für $\cos \lambda_0'$, $\cos \mu_0'$, $\cos \nu_0'$ ihre Werthe aus 9) einführt:

15) $$\left\{\begin{aligned}\cos \alpha_0' &= \pm \frac{\sec i_0 \sin P_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ \cos \beta_0' &= \mp \frac{\cos i_0 \cos P_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},\\ \cos \gamma_0' &= \mp \frac{\sin i_0 \cos P_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen der Directrix sind also nach 12):

16) $$\frac{x' - a_0'}{\sec i_0 \sin P_0} = - \frac{y' - b_0'}{\cos i_0 \cos P_0} = - \frac{z' - c_0'}{\sin i_0 \cos P_0}$$

oder

$$x' - a_0' = -\frac{(y' - b_0')\tang P_0}{\cos i_0 \cos i_0} = -\frac{(z' - c_0')\tang P_0}{\sin i_0 \cos i_0}. \tag{17}$$

Wir legen nun durch die Sonne als Anfang ein neues rechtwinkeliges Coordinatensystem der $x\,y\,z$. Die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der $x\,y$; der positive Theil der Axe der x sei nach dem Anfangspunkte der Längen, der positive Theil der Axe der y nach dem neunzigsten Grade der Längen, der positive Theil der Axe der z nach dem Nordpole der Ekliptik gerichtet. Bezeichnet dann Ω_0 die Länge des aufsteigenden Knotens, so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\Omega_0 - y'\sin\Omega_0,\\ y &= x'\sin\Omega_0 + y'\cos\Omega_0,\\ z &= z'; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

aus denen leicht:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\Omega_0 + y\sin\Omega_0,\\ y' &= -x\sin\Omega_0 + y\cos\Omega_0,\\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

erhalten wird. Bezeichnen wir nun in dem Systeme der $x\,y\,z$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Directrix mit der Axe der Bahn durch a_0, b_0, c_0; so ist nach 18):

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0'\cos\Omega_0 - b_0'\sin\Omega_0,\\ b_0 &= a_0'\sin\Omega_0 + b_0'\cos\Omega_0,\\ c_0 &= c_0'; \end{aligned}$$

also, wenn man für a_0', b_0', c_0' ihre Werthe aus 11) einführt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{p_0}{2n_0}\cdot\frac{\cos(P_0+\Omega_0)}{\sqrt{1+\tang i_0^2\sin P_0^2}},\\ b_0 &= \frac{p_0}{2n_0}\cdot\frac{\sin(P_0+\Omega_0)}{\sqrt{1+\tang i_0^2\sin P_0^2}},\\ c_0 &= \frac{p_0}{2n_0}\cdot\frac{\tang i_0\sin P_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2\sin P_0^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Bezeichnen wir die Länge des Periheliums durch $\mathfrak{L}_0$, so ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} P_0 + \Omega_0 &= \mathfrak{L}_0\\ P_0 &= \mathfrak{L}_0 - \Omega_0\\ \Omega_0 &= \mathfrak{L}_0 - P_0 \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} P_0 + \Omega_0 &= \mathfrak{L}_0 + 360^0\\ P_0 &= \mathfrak{L}_0 - \Omega_0 + 360^0\\ \Omega_0 &= \mathfrak{L}_0 - P_0 + 360^0; \end{aligned}\right.$$

also in völliger Allgemeinheit:

$$\left.\begin{aligned} \cos\mathfrak{L}_0 &= \cos(P_0+\Omega_0), & \sin\mathfrak{L}_0 &= \sin(P_0+\Omega_0);\\ \cos P_0 &= \cos(\mathfrak{L}_0-\Omega_0), & \sin P_0 &= \sin(\mathfrak{L}_0-\Omega_0);\\ \cos\Omega_0 &= \cos(\mathfrak{L}_0-P_0), & \sin\Omega_0 &= \sin(\mathfrak{L}_0-P_0). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Folglich kann man auch setzen:

22) $$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{p_0}{2n_0} \cdot \frac{\cos \Omega_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}; \\ b_0 &= \frac{p_0}{2n_0} \cdot \frac{\sin \Omega_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ c_0 &= \frac{p_0}{2n_0} \cdot \frac{\operatorname{tang} i_0 \sin P_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung der Ebene der Bahn im Systeme der xyz ist nach 1) und 19):

23) $$(x \sin \Omega_0 - y \cos \Omega_0) \sin i_0 + z \cos i_0 = 0$$

oder

24) $$x \sin \Omega_0 - y \cos \Omega_0 + z \cot i_0 = 0.$$

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine der beiden Richtungen der Directrix mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, seien respective α_0, β_0, γ_0. Die Entfernung eines beliebigen Punktes in der Richtung der Directrix, auf welche sich die Winkel α_0, β_0, γ_0 beziehen, von dem Durchschnittspunkte der Directrix mit der Axe der Bahn sei r. Dann sind die Coordinaten dieses Punktes im Systeme der xyz offenbar:

$$a_0 + r \cos \alpha_0,\ b_0 + r \cos \beta_0,\ c_0 + r \cos \gamma_0;$$

und wenn wir nun, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_0', β_0', γ_0' derselben Richtung der Directrix entsprechen, so sind die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes im Systeme der $x'\,y'\,z'$ auf dieselbe Art wie vorher:

$$a_0' + r \cos \alpha_0',\ b_0' + r \cos \beta_0',\ c_0' + r \cos \gamma_0'.$$

Folglich haben wir nach 18) die nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 + r \cos \alpha_0 &= (a_0' + r \cos \alpha_0') \cos \Omega_0 - (b_0' + r \cos \beta_0') \sin \Omega_0, \\ b_0 + r \cos \beta_0 &= (a_0' + r \cos \alpha_0') \sin \Omega_0 + (b_0' + r \cos \beta_0') \cos \Omega_0, \\ c_0 + r \cos \gamma_0 &= c_0' + r \cos \gamma_0'; \end{aligned}$$

also, weil nach 18), wie wir auch schon vorher gesehen haben,

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0' \cos \Omega_0 - b_0' \sin \Omega_0, \\ b_0 &= a_0' \sin \Omega_0 + b_0' \cos \Omega_0, \\ c_0 &= c_0' \end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 &= \cos \alpha_0' \cos \Omega_0 - \cos \beta_0' \sin \Omega_0, \\ \cos \beta_0 &= \cos \alpha_0' \sin \Omega_0 + \cos \beta_0' \cos \Omega_0, \\ \cos \gamma_0 &= \cos \gamma_0'. \end{aligned}$$

Führt man nun in diese Formeln für $\cos \alpha_0'$, $\cos \beta_0'$, $\cos \gamma_0'$ ihre Werthe aus 15) ein, so erhält man:

25) $$\left\{\begin{aligned} \cos \alpha_0 &= \pm \frac{\sec i_0 \sin P_0 \cos \Omega_0 + \cos i_0 \cos P_0 \sin \Omega_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ \cos \beta_0 &= \pm \frac{\sec i_0 \sin P_0 \sin \Omega_0 - \cos i_0 \cos P_0 \cos \Omega_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ \cos \gamma_0 &= \mp \frac{\sin i_0 \cos P_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}}; \end{aligned}\right.$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_0 &= \pm\frac{\sin P_0\cos\Omega_0+\cos i_0^2\cos P_0\sin\Omega_0}{\cos i_0\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}},\\
\cos\beta_0 &= \pm\frac{\sin P_0\sin\Omega_0-\cos i_0^2\cos P_0\cos\Omega_0}{\cos i_0\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}},\\
\cos\gamma_0 &= \mp\frac{\sin i_0\cos P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}}.
\end{aligned}\right\}\quad 26)$$

Weil nach 21)

$$\cos(P_0+\Omega_0)=\cos\mathfrak{L}_0,\ \sin(P_0+\Omega_0)=\sin\mathfrak{L}_0$$

ist, so erhellet auf der Stelle, dass auch

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_0 &= \pm\frac{\sin\mathfrak{L}_0-\sin i_0^2\cos P_0\sin\Omega_0}{\cos i_0\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}},\\
\cos\beta_0 &= \mp\frac{\cos\mathfrak{L}_0-\sin i_0^2\cos P_0\cos\Omega_0}{\cos i_0\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}},\\
\cos\gamma_0 &= \mp\frac{\sin i_0\cos P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}}
\end{aligned}\right\}\quad 27)$$

gesetzt werden kann.

Nach 22) und 27) ist auch:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha_0}{a_0} &= \pm\frac{2n_0}{p_0}\cdot\frac{\sin\mathfrak{L}_0-\sin i_0^2\cos P_0\sin\Omega_0}{\cos i_0\cos\mathfrak{L}_0},\\
\frac{\cos\beta_0}{b_0} &= \mp\frac{2n_0}{p_0}\cdot\frac{\cos\mathfrak{L}_0-\sin i_0^2\cos P_0\cos\Omega_0}{\cos i_0\sin\mathfrak{L}_0},\\
\frac{\cos\gamma_0}{c_0} &= \mp\frac{2n_0}{p_0}\cdot\cos i_0\cot P_0
\end{aligned}\right\}\quad 28)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha_0}{a_0} &= \pm\frac{2n_0}{p_0}\sec i_0\left(\operatorname{tang}\mathfrak{L}_0-\frac{\sin i_0^2\cos P_0\sin\Omega_0}{\cos\mathfrak{L}_0}\right),\\
\frac{\cos\beta_0}{b_0} &= \mp\frac{2n_0}{p_0}\sec i_0\left(\cot\mathfrak{L}_0-\frac{\sin i_0^2\cos P_0\cos\Omega_0}{\sin\mathfrak{L}_0}\right),\\
\frac{\cos\gamma_0}{c_0} &= \mp\frac{2n_0}{p_0}\cos i_0\cot P_0.
\end{aligned}\right\}\quad 29)$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von der Sonne nach dem Perihelium gezogene Gerade mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, respective durch λ_0, μ_0, ν_0; so haben wir ganz eben so wie vorher die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\cos\lambda_0 &= \cos\lambda_0'\cos\Omega_0-\cos\mu_0'\sin\Omega_0,\\
\cos\mu_0 &= \cos\lambda_0'\sin\Omega_0+\cos\mu_0'\cos\Omega_0,\\
\cos\nu_0 &= \cos\nu_0';
\end{aligned}$$

also nach 9):

$$\left.\begin{aligned}
\cos\lambda_0 &= \frac{\cos(P_0+\Omega_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}},\\
\cos\mu_0 &= \frac{\sin(P_0+\Omega_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}},\\
\cos\nu_0 &= \frac{\operatorname{tang} i_0\sin P_0}{\sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2\sin P_0^2}};
\end{aligned}\right\}\quad 30)$$

oder nach 21):

$$31)\quad \begin{cases} \cos\lambda_0 = \dfrac{\cos\Omega_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ \cos\mu_0 = \dfrac{\sin\Omega_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ \cos\nu_0 = \dfrac{\tang i_0 \sin P_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}}; \end{cases}$$

wovon die Richtigkeit auch aus 22) auf der Stelle erhellet.

Weil der Brennpunkt sowohl der Anfang der $x'y'z'$, als auch der Anfang der xyz ist, so ist unter den gemachten Voraussetzungen:

$$a_0' \cos\alpha_0' + b_0' \cos\beta_0' + c_0' \cos\gamma_0' = 0,$$

$$a_0 \cos\alpha_0 + b_0 \cos\beta_0 + c_0 \cos\gamma_0 = 0:$$

und nach dem Obigen sind folglich die Gleichungen der Bahn im Systeme der $x'y'z'$:

$$32)\quad \begin{cases} y' \sin i_0 - z' \cos i_0 = 0, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ = n_0^2 \{(x'-a_0')^2 + (y'-b_0')^2 + (z'-c_0')^2 - (x'\cos\alpha_0' + y'\cos\beta_0' + z'\cos\gamma_0')^2\}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Bahn im Systeme der xyz sind aber:

$$33)\quad \begin{cases} x \sin i_0 \sin\Omega_0 - y \sin i_0 \cos\Omega_0 + z \cos i_0 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 \\ = n_0^2 \{(x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + (z-c_0)^2 - (x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0)^2\}. \end{cases}$$

In beide Systeme von Gleichungen die Werthe von

$$a_0',\ b_0',\ c_0';\ \cos\alpha_0',\ \cos\beta_0',\ \cos\gamma_0'$$

und

$$a_0,\ b_0,\ c_0;\ \cos\alpha_0,\ \cos\beta_0,\ \cos\gamma_0$$

aus dem Obigen einzuführen, unterliegt nicht der geringsten Schwierigkeit, und soll daher hier der Kürze wegen nicht weiter ausgeführt werden.

VIERTES CAPITEL.

Bestimmung der Durchschnittspunkte der Bahnen zweier um die Sonne sich bewegender Weltkörper, und Entwicklung der Bedingungen, von denen die Existenz der Durchschnittspunkte abhängt.

§. 17.

Nach III, 20), 22) haben wir die folgenden Formeln:

$$1)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{p_0}{2n_0} \cdot \dfrac{\cos(P_0+\Omega_0)}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}} = \dfrac{p_0}{2n_0} \cdot \dfrac{\cos\Omega_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ b_0 = \dfrac{p_0}{2n_0} \cdot \dfrac{\sin(P_0+\Omega_0)}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}} = \dfrac{p_0}{2n_0} \cdot \dfrac{\sin\Omega_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}}, \\ c_0 = \dfrac{p_0}{2n_0} \cdot \dfrac{\tang i_0 \sin P_0}{\sqrt{1+\tang i_0^2 \sin P_0^2}} \end{cases}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\cos\,(P_1+\Omega_1)}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}} = \frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\cos\,\mho_1}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\,,\\
b_1 &= \frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\sin\,(P_1+\Omega_1)}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}} = \frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\sin\,\mho_1}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\,,\\
c_1 &= \frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\mathrm{tang}\;i_1\,\sin\,P_1}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\,;
\end{aligned}\right\}\qquad 2)$$

wo die Bedeutung aller Zeichen aus dem Vorhergehenden ganz von selbst ersichtlich ist, und auch über die Annahme des aus dem vorhergehenden Capitel bekannten Coordinatensystems der xyz nichts weiter gesagt zu werden braucht.

Ferner ist nach III, 26), 27), wenn wir, wie es offenbar verstattet ist, in den dortigen Formeln nur die oberen Zeichen beibehalten:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\,\alpha_0 &= \frac{\sin\,P_0\,\cos\,\Omega_0+\cos\,i_0^2\,\cos\,P_0\,\sin\,\Omega_0}{\cos\,i_0\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_0^2\,\sin\,P_0^2}}\\
&= \frac{\sin\,\mho_0-\sin\,i_0^2\,\cos\,P_0\,\sin\,\Omega_0}{\cos\,i_0\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_0^2\,\sin\,P_0^2}}\,,\\
\cos\,\beta_0 &= \frac{\sin\,P_0\,\sin\,\Omega_0-\cos\,i_0^2\,\cos\,P_0\,\cos\,\Omega_0}{\cos\,i_0\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_0^2\,\sin\,P_0^2}}\\
&= -\frac{\cos\,\mho_0-\sin\,i_0^2\,\cos\,P_0\,\cos\,\Omega_0}{\cos\,i_0\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_0^2\,\sin\,P_0^2}}\,,\\
\cos\,\gamma_0 &= -\frac{\sin\,i_0\,\cos\,P_0}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_0^2\,\sin\,P_0^2}}
\end{aligned}\right\}\qquad 3)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\cos\,\alpha_1 &= \frac{\sin\,P_1\,\cos\,\Omega_1+\cos\,i_1^2\,\cos\,P_1\,\sin\,\Omega_1}{\cos\,i_1\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\\
&= \frac{\sin\,\mho_1-\sin\,i_1^2\,\cos\,P_1\,\sin\,\Omega_1}{\cos\,i_1\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\,,\\
\cos\,\beta_1 &= \frac{\sin\,P_1\,\sin\,\Omega_1-\cos\,i_1^2\,\cos\,P_1\,\cos\,\Omega_1}{\cos\,i_1\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\\
&= -\frac{\cos\,\mho_1-\sin\,i_1^2\,\cos\,P_1\,\cos\,\Omega_1}{\cos\,i_1\,\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\,,\\
\cos\,\gamma_1 &= -\frac{\sin\,i_1\,\cos\,P_1}{\sqrt{1+\mathrm{tang}\;i_1^2\,\sin\,P_1^2}}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad 4)$$

Weil nun nach II, 30), 31)

$$\begin{aligned}
A_0 &= b_0\,\cos\,\gamma_0-c_0\,\cos\,\beta_0, & A_1 &= b_1\,\cos\,\gamma_1-c_1\,\cos\,\beta_1,\\
B_0 &= c_0\,\cos\,\alpha_0-a_0\,\cos\,\gamma_0, & B_1 &= c_1\,\cos\,\alpha_1-a_1\,\cos\,\gamma_1,\\
C_0 &= a_0\,\cos\,\beta_0-b_0\,\cos\,\alpha_0; & C_1 &= a_1\,\cos\,\beta_1-b_1\,\cos\,\alpha_1
\end{aligned}$$

ist; so erhält man mittelst der vorhergehenden Formeln, wenn man nur überlegt, dass

$$\begin{aligned}
&\cos\,i_0^2\,(1+\mathrm{tang}\;i_0^2\,\sin\,P_0^2)\\
&= \cos\,i_0^2+\sin\,i_0^2\,\sin\,P_0^2 = \sin\,P_0^2+\cos\,i_0^2\,\cos\,P_0^2
\end{aligned}$$

ist, leicht:

$$5)\quad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{p_0}{2\,n_0}\sin i_0 \sin \Omega_0, \\ B_0 = \dfrac{p_0}{2\,n_0}\sin i_0 \cos \Omega_0, \\ C_0 = -\dfrac{p_0}{2\,n_0}\cos i_0; \end{cases}$$

und ganz ebenso:

$$6)\quad \begin{cases} A_1 = -\dfrac{p_1}{2\,n_1}\sin i_1 \sin \Omega_1, \\ B_1 = \dfrac{p_1}{2\,n_1}\sin i_1 \cos \Omega_1, \\ C_1 = -\dfrac{p_1}{2\,n_1}\cos i_1. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$7)\quad \begin{cases} A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = \left(\dfrac{p_0}{2\,n_0}\right)^2, \\ A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = \left(\dfrac{p_1}{2\,n_1}\right)^2; \end{cases}$$

wie auch aus II, 50) schon bekannt ist.

Weil ferner nach II, 33)

$$\mathrm{A} = B_0 C_1 - C_0 B_1,$$
$$\mathrm{B} = C_0 A_1 - A_0 C_1,$$
$$\mathrm{C} = A_0 B_1 - B_0 A_1$$

ist, so ist nach 5) und 6):

$$8)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = -\dfrac{p_0}{2\,n_0}\cdot\dfrac{p_1}{2\,n_1}(\sin i_0 \cos i_1 \cos \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \cos \Omega_1), \\ \mathrm{B} = -\dfrac{p_0}{2\,n_0}\cdot\dfrac{p_1}{2\,n_1}(\sin i_0 \cos i_1 \sin \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \sin \Omega_1), \\ \mathrm{C} = -\dfrac{p_0}{2\,n_0}\cdot\dfrac{p_1}{2\,n_1}\sin i_0 \sin i_1 \sin(\Omega_0 - \Omega_1); \end{cases}$$

woraus mittelst leichter Rechnung

$$9)\quad \begin{aligned} &\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 \\ &= \left(\frac{p_0}{2\,n_0}\right)^2\cdot\left(\frac{p_1}{2\,n_1}\right)^2\cdot\{1 - [\cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos(\Omega_0 - \Omega_1)]^2\} \end{aligned}$$

erhalten wird. Weil nach 5) und 6) offenbar

$$10)\quad \begin{aligned} &A_0 A_1 + B_0 B_1 + C_0 C_1 \\ &= \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\{\cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos(\Omega_0 - \Omega_1)\} \end{aligned}$$

ist, so erhält man die Gleichung 9) mittelst der Gleichungen 7) und dieser letzteren Gleichung auch unmittelbar aus der in II, 35) bewiesenen Gleichung

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 \\ &= (A_0^2 + B_0^2 + C_0^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A_0 A_1 + B_0 B_1 + C_0 C_1)^2. \end{aligned}$$

Aus 8) ergeben sich auch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}\sin\Omega_0 - \mathrm{B}\cos\Omega_0 &= \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\cos i_0\sin i_1\sin(\Omega_0-\Omega_1),\\ \mathrm{A}\sin\Omega_1 - \mathrm{B}\cos\Omega_1 &= \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\sin i_0\cos i_1\sin(\Omega_0-\Omega_1); \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\sin\Omega_0 - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\cos\Omega_0 &= -\cot i_0,\\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\sin\Omega_1 - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\cos\Omega_1 &= -\cot i_1; \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\frac{\cot i_0\cos\Omega_1 - \cot i_1\cos\Omega_0}{\sin(\Omega_0-\Omega_1)}\,\mathrm{C},\\ \mathrm{B} &= -\frac{\cot i_0\sin\Omega_1 - \cot i_1\sin\Omega_0}{\sin(\Omega_0-\Omega_1)}\,\mathrm{C} \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

folgt.

Ferner ergibt sich aus 1), 2), 5), 6) leicht:

$$\left.\begin{aligned} &A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0\\ &= \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\sin i_0\cos i_1\sin P_0 - \cos i_0\sin i_1\sin(\mho_0-\Omega_1)}{\cos i_0\sqrt{1+\tan i_0^2\sin P_0^2}},\\ &A_0a_1 + B_0b_1 + C_0c_1\\ &= -\frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\cos i_0\sin i_1\sin P_1 - \sin i_0\cos i_1\sin(\mho_1-\Omega_0)}{\cos i_1\sqrt{1+\tan i_1^2\sin P_1^2}}; \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

oder, weil nach III. 21) offenbar

$$\begin{aligned} \sin(\mho_0-\Omega_1) &= \sin(P_0+\Omega_0-\Omega_1),\\ \sin(\mho_1-\Omega_0) &= \sin(P_1-\Omega_0+\Omega_1) \end{aligned}$$

ist:

$$\left.\begin{aligned} &A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0\\ &= -\frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\sin i_0\cos i_1\sin P_0 - \cos i_0\sin i_1\sin(P_0+\Omega_0-\Omega_1)}{\cos i_0\sqrt{1+\tan i_0^2\sin P_0^2}},\\ &A_0a_1 + B_0b_1 + C_0c_1\\ &= -\frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\cdot\frac{\cos i_0\sin i_1\sin P_1 - \sin i_0\cos i_1\sin(P_1-\Omega_0+\Omega_1)}{\cos i_1\sqrt{1+\tan i_1^2\sin P_1^2}}. \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Mittelst dieser Formeln findet man die Grössen

$$\mathrm{A}\cos\alpha_0 + \mathrm{B}\cos\beta_0 + \mathrm{C}\cos\gamma_0 \text{ und } \mathrm{A}\cos\alpha_1 + \mathrm{B}\cos\beta_1 + \mathrm{C}\cos\gamma_1,$$

weil nach II. 50) auf S. 99

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}\cos\alpha_0 + \mathrm{B}\cos\beta_0 + \mathrm{C}\cos\gamma_0 &= A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0,\\ \mathrm{A}\cos\alpha_1 + \mathrm{B}\cos\beta_1 + \mathrm{C}\cos\gamma_1 &= -(A_0a_1 + B_0b_1 + C_0c_1) \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

ist.

Ferner ist:

$$Aa_0 + Bb_0 + Cc_0$$

$$= -\frac{\left(\frac{p_0}{2n_0}\right)^2 \cdot \frac{p_1}{2n_1}}{\cos i_0 \sqrt{1+\operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos i_0 (\sin i_0 \cos i_1 \cos \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \cos \Omega_1) \cos (P_0 + \Omega_0) \\ + \cos i_0 (\sin i_0 \cos i_1 \sin \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \sin \Omega_1) \sin (P_0 + \Omega_0) \\ + \sin i_0^2 \sin i_1 \sin (\Omega_0 - \Omega_1) \sin P_0 \end{array} \right\},$$

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1$$

$$= -\frac{\frac{p_0}{2n_0} \cdot \left(\frac{p_1}{2n_1}\right)^2}{\cos i_1 \sqrt{1+\operatorname{tang} i_1^2 \sin P_1^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos i_1 (\sin i_0 \cos i_1 \cos \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \cos \Omega_1) \cos (P_1 + \Omega_1) \\ + \cos i_1 (\sin i_0 \cos i_1 \sin \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \sin \Omega_1) \sin (P_1 + \Omega_1) \\ + \sin i_1^2 \sin i_0 \sin (\Omega_0 - \Omega_1) \sin P_1 \end{array} \right\}.$$

Die erste eingeklammerte Grösse ist:

$$\begin{aligned} &\sin i_0 \cos i_0 \cos i_1 \cos P_0 - \cos i_0^2 \sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) \\ &\qquad + \sin i_0^2 \sin i_1 \sin (\Omega_0 - \Omega_1) \sin P_0 \\ = &\sin i_0 \cos i_0 \cos i_1 \cos P_0 - \sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) \\ &\qquad + \sin i_0^2 \sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) \\ &\qquad + \sin i_0^2 \sin i_1 \sin (\Omega_0 - \Omega_1) \sin P_0, \end{aligned}$$

also offenbar:

$$\begin{aligned} &- \sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) \\ &+ \sin i_0 \cos P_0 \{\cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos (\Omega_0 - \Omega_1)\}. \end{aligned}$$

Die zweite obige eingeklammerte Grösse ist:

$$\begin{aligned} &\sin i_0 \cos i_1^2 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \cos i_0 \sin i_1 \cos i_1 \cos P_1 \\ &+ \sin i_0 \sin i_1^2 \sin (\Omega_0 - \Omega_1) \sin P_1 \\ = &\sin i_0 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) \qquad - \cos i_0 \sin i_1 \cos i_1 \cos P_1, \\ &- \sin i_0 \sin i_1^2 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) \\ &+ \sin i_0 \sin i_1^2 \sin (\Omega_0 - \Omega_1) \sin P_1. \end{aligned}$$

also offenbar:

$$\begin{aligned} &\sin i_0 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) \\ &- \sin i_1 \cos P_1 \{\cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos (\Omega_0 - \Omega_1)\}. \end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen:

17)

$$Aa_0 + Bb_0 + Cc_0$$

$$= \left(\frac{p_0}{2n_0}\right)^2 \cdot \frac{p_1}{2n_1} \cdot \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) \\ - \sin i_0 \cos P_0 [\cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos (\Omega_0 - \Omega_1)] \end{array} \right\}}{\cos i_0 \sqrt{1 + \operatorname{tang} i_0^2 \sin P_0^2}},$$

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1$$

$$= -\frac{p_0}{2n_0} \cdot \left(\frac{p_1}{2n_1}\right)^2 \cdot \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sin i_0 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) \\ - \sin i_1 \cos P_1 [\cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos (\Omega_0 - \Omega_1)] \end{array} \right\}}{\cos i_1 \sqrt{1 + \operatorname{tang} i_1^2 \sin P_1^2}}.$$

Berechnen wir die drei Hilfswinkel θ, Q_0, Q_1 mittelst den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta = \cos i_0 \cos i_1 + \sin i_0 \sin i_1 \cos(\Omega_0 - \Omega_1),\\ &\tang Q_0 = \tang i_0 \sin P_0,\\ &\tang Q_1 = \tang i_1 \sin P_1; \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

und nehmen, was offenbar verstattet ist, jeden der beiden Winkel Q_0 und Q_1 zwischen -90^0 und $+90^0$, so dass die Cosinus dieser beiden Winkel jedenfalls positiv sind; so lassen sich die obigen Formeln auf folgende Art darstellen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}b_0 + \mathrm{C}c_0\\ &= \left(\frac{p_0}{2\,n_0}\right)^2 \cdot \frac{p_1}{2\,n_1} \cdot \frac{\cos Q_0}{\cos i_0} \left\{ \sin i_1 \cos(P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) - \sin i_0 \cos P_0 \cos\theta \right\},\\ &\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \left(\frac{p_0}{2\,n_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{p_1}{2\,n_1}\right)^2 \cdot \sin\theta^2,\\ &\mathrm{A}\cos\alpha_0 + \mathrm{B}\cos\beta_0 + \mathrm{C}\cos\gamma_0\\ &= \frac{p_0}{2\,n_0} \cdot \frac{p_1}{2\,n_1} \cos Q_0 \{\sin i_1 \sin(P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) - \tang i_0 \cos i_1 \sin P_0\} \end{aligned} \qquad 19)$$

und

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1 + \mathrm{C}c_1\\ &= -\frac{p_0}{2\,n_0} \cdot \left(\frac{p_1}{2\,n_1}\right)^2 \cdot \frac{\cos Q_1}{\cos i_1} \left\{ \sin i_0 \cos(P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \sin i_1 \cos P_1 \cos\theta \right\},\\ &\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \left(\frac{p_0}{2\,n_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{p_1}{2\,n_1}\right)^2 \cdot \sin\theta^2,\\ &\mathrm{A}\cos\alpha_1 + \mathrm{B}\cos\beta_1 + \mathrm{C}\cos\gamma_1\\ &= -\frac{p_0}{2\,n_0} \cdot \frac{p_1}{2\,n_1} \cos Q_1 \{\sin i_0 \sin(P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \tang i_1 \cos i_0 \sin P_1\}. \end{aligned} \qquad 20)$$

Die Grössen L_0, M_0, N_0 und L_1, M_1, N_1 erhält man mittelst der folgenden aus II, 48), 49) bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} &L_0 = -\tfrac{1}{4} p_0^2,\\ &M_0 = -n_0^2(\mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}b_0 + \mathrm{C}c_0),\\ &N_0 = n_0^2(\mathrm{A}\cos\alpha_0 + \mathrm{B}\cos\beta_0 + \mathrm{C}\cos\gamma_0)^2 - (n_0^2 - 1)(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2) \end{aligned} \qquad 21)$$

und

$$\begin{aligned} &L_1 = -\tfrac{1}{4} p_1^2,\\ &M_1 = -n_1^2(\mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1 + \mathrm{C}c_1),\\ &N_1 = n_1^2(\mathrm{A}\cos\alpha_1 + \mathrm{B}\cos\beta_1 + \mathrm{C}\cos\gamma_1)^2 - (n_1^2 - 1)(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2); \end{aligned} \qquad 22)$$

worauf dann die Grössen G_0 und G_1 durch Auflösung der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &L_0 - 2\,M_0\,G_0 + N_0\,G_0^2 = 0,\\ &L_1 - 2\,M_1\,G_1 + N_1\,G_1^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

erhalten werden. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Bahnen mit ihrer Knotenlinie ergeben sich mittelst der Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = G_0\mathrm{A},\ y_0 = G_0\mathrm{B},\ z_0 = G_0\mathrm{C},\\ &x_1 = G_1\mathrm{A},\ y_1 = G_1\mathrm{B},\ z_1 = G_1\mathrm{C}. \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

Setzen wir

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{p_1}{2 n_1} \cdot \frac{\cos Q_0}{\cos i_0} \{ \sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) - \sin i_0 \cos P_0 \cos \theta \},$$

25) $$\mathfrak{B}_0 = \frac{p_1}{2 n_1} \sin \theta,$$

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{p_1}{2 n_1} \cos Q_0 \{ \sin i_1 \sin (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) - \operatorname{tang} i_0 \cos i_1 \sin P_0 \}$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{p_0}{2 n_0} \cdot \frac{\cos Q_1}{\cos i_1} \{ \sin i_0 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \sin i_1 \cos P_1 \cos \theta \},$$

26) $$\mathfrak{B}_1 = \frac{p_0}{2 n_0} \sin \theta,$$

$$\mathfrak{C}_1 = -\frac{p_0}{2 n_0} \cos Q_1 \{ \sin i_0 \sin (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \operatorname{tang} i_1 \cos i_0 \sin P_1 \};$$

so ist:

$$\mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}b_0 + \mathrm{C}c_0 = \left(\frac{p_0}{2 n_0}\right)^2 \cdot \mathfrak{A}_0,$$

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \left(\frac{p_0}{2 n_0}\right)^2 \cdot \mathfrak{B}_0^2,$$

$$\mathrm{A} \cos \alpha_0 + \mathrm{B} \cos \beta_0 + \mathrm{C} \cos \gamma_0 = \frac{p_0}{2 n_0} \cdot \mathfrak{C}_0;$$

und

$$\mathrm{A}a_1 + \mathrm{B}b_1 + \mathrm{C}c_1 = \left(\frac{p_1}{2 n_1}\right)^2 \cdot \mathfrak{A}_1,$$

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \left(\frac{p_1}{2 n_1}\right)^2 \cdot \mathfrak{B}_1^2,$$

$$\mathrm{A} \cos \alpha_1 + \mathrm{B} \cos \beta_1 + \mathrm{C} \cos \gamma_1 = \frac{p_1}{2 n_1} \cdot \mathfrak{C}_1;$$

folglich:

$$L_0 = -\frac{1}{4} p_0^2,$$

$$M_0 = -\frac{1}{4} p_0^2 \mathfrak{A}_0,$$

$$N_0 = \frac{1}{4} p_0^2 \left(\mathfrak{C}_0^2 - \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} \mathfrak{B}_0^2\right)$$

und

$$L_1 = -\frac{1}{4} p_1^2,$$

$$M_1 = -\frac{1}{4} p_1^2 \mathfrak{A}_1,$$

$$N_1 = \frac{1}{4} p_1^2 \left(\mathfrak{C}_1^2 - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} \mathfrak{B}_1^2\right).$$

Daher werden die Gleichungen 23), aus denen G_0 und G_1 bestimmt werden müssen:

27) $$\begin{cases} 1 - 2 \mathfrak{A}_0 G_0 - \left(\mathfrak{C}_0^2 - \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} \mathfrak{B}_0^2\right) G_0^2 = 0, \\ 1 - 2 \mathfrak{A}_1 G_1 - \left(\mathfrak{C}_1^2 - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} \mathfrak{B}_1^2\right) G_1^2 = 0; \end{cases}$$

und zur Bestimmung der Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 hat man wieder die Gleichungen 24), zur Bestimmung von A, B, C aber die Formeln 8).

Soll es wirklich Durchschnittspunkte der beiden Bahnen geben, so muss, vorausgesetzt, dass G_0 und G_1 endliche völlig bestimmte reelle Grössen sind, die Gleichung

$$G_0 = G_1 \tag{28}$$

erfüllt sein.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_0 &= \mathfrak{C}_0^2 - \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2}\,\mathfrak{B}_0^2, \\ \mathfrak{D}_1 &= \mathfrak{C}_1^2 - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2}\,\mathfrak{B}_1^2; \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

so sind die beiden Gleichungen 27):

$$\begin{aligned} 1 - 2\,\mathfrak{A}_0\,G_0 - \mathfrak{D}_0\,G_0^2 &= 0, \\ 1 - 2\,\mathfrak{A}_1\,G_1 - \mathfrak{D}_1\,G_1^2 &= 0; \end{aligned} \tag{30}$$

und soll diesen beiden Gleichungen durch ein und dieselbe Grösse genügt werden können, so muss die Gleichung

$$(\mathfrak{D}_0 - \mathfrak{D}_1)^2 - 4\,(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_1)\,(\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_0\,\mathfrak{A}_1) = 0 \tag{31}$$

erfüllt sein.

§. 18.

Man kann die vorhergehenden Formeln noch auf einen anderen Ausdruck bringen. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0' &= \frac{\cos Q_0}{\cos i_0}\,\{\sin i_1 \cos (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) - \sin i_0 \cos P_0 \cos \theta\}, \\ \mathfrak{B}_0' &= \sin \theta, \\ \mathfrak{C}_0' &= \cos Q_0\,\{\sin i_1 \sin (P_0 + \Omega_0 - \Omega_1) - \operatorname{tang} i_0 \cos i_1 \sin P_0\}; \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1' &= -\frac{\cos Q_1}{\cos i_1}\,\{\sin i_0 \cos (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \sin i_1 \cos P_1 \cos \theta\}, \\ \mathfrak{B}_1' &= \sin \theta, \\ \mathfrak{C}_1' &= -\cos Q_1\,\{\sin i_0 \sin (P_1 - \Omega_0 + \Omega_1) - \operatorname{tang} i_1 \cos i_0 \sin P_1\}; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} A' &= -(\sin i_0 \cos i_1 \cos \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \cos \Omega_1), \\ B' &= -(\sin i_0 \cos i_1 \sin \Omega_0 - \cos i_0 \sin i_1 \sin \Omega_1), \\ C' &= -\sin i_0 \sin i_1 \sin (\Omega_0 - \Omega_1); \end{aligned} \tag{34}$$

so ist:

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{p_1}{2\,n_1}\,\mathfrak{A}_0',\quad \mathfrak{B}_0 = \frac{p_1}{2\,n_1}\,\mathfrak{B}_0',\quad \mathfrak{C}_0 = \frac{p_1}{2\,n_1}\,\mathfrak{C}_0';$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{p_0}{2\,n_0}\,\mathfrak{A}_1',\quad \mathfrak{B}_1 = \frac{p_0}{2\,n_0}\,\mathfrak{B}_1',\quad \mathfrak{C}_1 = \frac{p_0}{2\,n_0}\,\mathfrak{C}_1'$$

und

$$A = \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\,A',\quad B = \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\,B',\quad C = \frac{p_0}{2\,n_0}\cdot\frac{p_1}{2\,n_1}\,C'.$$

Also werden die Gleichungen 27):

$$1 - 2\,\frac{p_1}{2\,n_1}\,\mathfrak{A}_0'\,G_0 - \left(\frac{p_1}{2\,n_1}\right)^2 \left(\mathfrak{C}_0'^2 - \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2}\,\mathfrak{B}_0'^2\right) G_0^2 = 0,$$

$$1 - 2\,\frac{p_0}{2\,n_0}\,\mathfrak{A}_1'\,G_1 - \left(\frac{p_0}{2\,n_0}\right)^2 \left(\mathfrak{C}_1'^2 - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2}\,\mathfrak{B}_1'^2\right) G_1^2 = 0;$$

und zur Bestimmung von x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 hat man, wenn

$$G_0' = \frac{p_0}{2\,n_0} \cdot \frac{p_1}{2\,n_1}\,G_0, \quad G_1' = \frac{p_0}{2\,n_0} \cdot \frac{p_1}{2\,n_1}\,G_1$$

gesetzt wird, die Formeln:

$$35)\quad \begin{cases} x_0 = G_0'\,\mathrm{A}', \; y_0 = G_0'\,\mathrm{B}', \; z_0 = G_0'\,\mathrm{C}'; \\ x_1 = G_1'\,\mathrm{A}', \; y_1 = G_1'\,\mathrm{B}', \; z_1 = G_1'\,\mathrm{C}'; \end{cases}$$

wo nach dem Obigen G_0' und G_1' aus den beiden Gleichungen:

$$36)\quad \begin{cases} \left(\frac{p_0}{2\,n_0}\right)^2 - 2\,\frac{p_0}{2\,n_0}\,\mathfrak{A}_0'\,G_0' - \left(\mathfrak{C}_0'^2 - \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2}\,\mathfrak{B}_0'^2\right) G_0'^2 = 0. \\ \left(\frac{p_1}{2\,n_1}\right)^2 - 2\,\frac{p_1}{2\,n_1}\,\mathfrak{A}_1'\,G_1' - \left(\mathfrak{C}_1'^2 - \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2}\,\mathfrak{B}_1'^2\right) G_1'^2 = 0: \end{cases}$$

oder aus den Gleichungen:

$$37)\quad \begin{cases} p_0^2 - 4\,n_0\,p_0\,\mathfrak{A}_0'\,G_0' - 4\,\{n_0^2\,\mathfrak{C}_0'^2 - (n_0^2 - 1)\,\mathfrak{B}_0'^2\}\,G_0'^2 = 0. \\ p_1^2 - 4\,n_1\,p_1\,\mathfrak{A}_1'\,G_1' - 4\,\{n_1^2\,\mathfrak{C}_1'^2 - (n_1^2 - 1)\,\mathfrak{B}_1'^2\}\,G_1'^2 = 0 \end{cases}$$

bestimmt werden müssen.

Wird einer der beiden Kegelschnitte, etwa der erste, ein aus dem Brennpunkte mit dem Halbmesser r_0 beschriebener Kreis, so muss man nach §. 11 in diesen Gleichungen offenbar $n_0 = 0$ und $p_0 = 2\,r_0$ setzen, und auf ganz ähnliche Art verfahren, wenn der andere Kegelschnitt ein Kreis werden sollte. Dass dann, wie es erforderlich ist, die betreffenden Formeln blos von der Neigung der Bahn und der Länge des Knotens abhängen, wird aus dem Obigen sogleich ersichtlich sein.