Ueber

die Berechnung periodischer Natur-Erscheinungen.

Von **Marian Koller.**

(Vorgelegt in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 13. April 1848.)

1. Naturerscheinungen, die nach einer bestimmten Periode in derselben Ordnung und Grösse wiederkehren, werden periodische Naturerscheinungen genannt. Sie können unter der Voraussetzung, dass sie stetig fortschreiten und keine plötzliche Störung erleiden, durch einen mathematischen Ausdruck dargestellt werden, welcher (wie Bessel in den astr. Nachr. Nr. 136 sagt) die Beobachtungen in concisester Form darstellt und am unmittelbarsten zeigt, was die Theorie an dieser Erscheinung zu erklären hat. Die Anforderung, die man an diesen mathematischen Ausdruck stellt, ist daher, dass er nach Ablauf der einfachen, doppelten, $\ldots n$ fachen Periode die Erscheinung in derselben Ordnung und Grösse wieder darstelle.

2. Setzen wir, es sei k der Umfang der Periode, z. B. $k = 24$ Stunden; x eine Variable dieser Periode, z. B. eine bestimmte Stunde derselben; y die numerische Grösse der Erscheinung, die dieser Variablen entspricht; ist ferner die Kreisperipherie $2\pi = 360^0$, so kann y durch folgenden mathematischen Ausdruck dargestellt werden:

$$\text{(I)} \ldots \ldots \quad y = a + p_1 \sin\left(v' + \frac{x}{k}.2\pi\right) + p_2 \sin\left(v'' + \frac{x}{k}.4\pi\right) + p_3 \sin\left(v''' + \frac{x}{k}.6\pi\right) + \ldots$$

Hier wird y in derselben Ordnung und Grösse wiederkehren, wenn der Werth von x um k, $2k$, $\ldots nk$ vermehrt wird.

Gesetzt, man habe die Stände des Luftdruckes an einem bestimmten Orte stündlich beobachtet und will den täglichen Gang dieser Naturerscheinung durch den mathematischen Ausdruck (I) darstellen, so hat man

$$k = 24, \quad \frac{2\pi}{k} = 15^0.$$

Setzt man ferner in dem angeführten Ausdrucke (I) nach einander

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots 23,$$

und für y die aus den Beobachtungen bekannten, den Werthen der Variablen entsprechenden Grössen, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus denen sich die Constanten:

$$a,\ p_1,\ v',\ p_2,\ v'',\ p_3,\ v''' \text{ etc.}$$

bestimmen lassen.

In dem Folgenden soll nun der Weg gezeigt werden, auf dem man die Werthe dieser Constanten mit der möglichsten Schärfe finden kann.

3. Die angeführte Gleichung (I) lässt sich unter eine einfachere Form bringen. Man hat nämlich:

$$p_1 \sin\left(v'+\frac{x}{k}.2\pi\right)=p_1 \sin v' \cos\frac{x}{k}.2\pi+p_1 \cos v' \sin\frac{x}{k}.2\pi$$

$$p_2 \sin\left(v''+\frac{x}{k}.4\pi\right)=p_2 \sin v'' \cos\frac{x}{k}.4\pi+p_2 \cos v'' \sin\frac{x}{k}.4\pi$$

u. s. f. Setzt man nun

$$\begin{array}{ll} p_1 \sin v' = a_1 & p_1 \cos v' = b_1 \\ p_2 \sin v'' = a_2 & p_2 \cos v'' = b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_{n-1} \sin v_{n-1} = a_{n-1} & p_{n-1} \cos v_{n-1} = b_{n-1} \text{ und } \frac{x}{k}.2\pi = z, \end{array}$$

so geht die Gleichung (I) in folgende über

$$\text{(II)} \quad . \quad . \quad y=a+a_1 \cos z+b_1 \sin z+a_2 \cos 2z+b_2 \sin 2z+a_3 \cos 3z+b_3 \sin 3z+\ldots$$

Sind die durch die Beobachtungen gegebenen Werthe den Variablen y gleich α, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} und die ihnen entsprechenden Werthe der Variablen x gleich x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1}, und setzt man analog mit dieser Bezeichnung:

$$\frac{x_0}{k}.2\pi=z_0,\quad \frac{x_1}{k}.2\pi=z_1,\quad \frac{x_2}{k}.2\pi=z_2,\ \ldots\ \frac{x_{n-1}}{k}.2\pi=z_{n-1},$$

so hat man die Gleichungen

$$\begin{array}{l} \alpha \quad\ \ =a+a_1 \cos z_0 +b_1 \sin z_0 +a_2 \cos 2z_0 +b_2 \sin 2z_0 +\ldots \\ \alpha_1 \quad =a+a_1 \cos z_1 +b_1 \sin z_1 +a_2 \cos 2z_1 +b_2 \sin 2z_1 +\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1}=a+a_1 \cos z_{n-1}+b_1 \sin z_{n-1}+a_2 \cos 2z_{n-1}+b_2 \sin 2z_{n-1}+\ldots; \end{array}$$

man wird also so viele Constanten

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ b_1,\ b_2,\ b_3\ldots,$$

der Gleichung (II) bestimmen, oder so viele Glieder derselben entwickeln können, als man Beobachtungen in der Periode hat.

Gewöhnlich ist die Reihe der Gleichung (II) convergent, so dass man um die gewünschte Genauigkeit zu erhalten, nur weniger Glieder derselben bedarf und in der Regel mehr Gleichungen hat, als Constanten bestimmt werden sollen. Zur Bestimmung dieser Constanten wird daher am zweckmässigsten die Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden.

4. Die Beobachtungen der numerischen Werthe der periodischen Grösse y werden gewöhnlich in äquidistanten Zeitintervallen gemacht, so dass die Werthe von x in einer arithmetischen Reihe wachsen. Ist die Zahl der äquidistanten Beobachtungen während der Dauer einer Periode gleich n, so dass $k=n$, so ist: $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n-1$, oder nach der Bezeichnung des vorausgehenden Paragraphes: $x=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, ... $x_{n-1}=n-1$, mithin $z_0=0$, $z_1=\frac{2\pi}{n}$, oder Kürze halber mit Weglassung des Index: $\frac{2\pi}{n}=z$, mithin $z_2=\frac{4\pi}{n}=2z$, $z_3=\frac{6\pi}{n}=3z$ und allgemein

$$z_{n-1}=\frac{2(n-1)\pi}{n}=(n-1)z,$$

und die Gleichungen des vorigen Paragraphes gehen über in

$$\begin{aligned}
\alpha &= a + a_1 + a_2 + a_3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, + a_{n-1} \\
\alpha_1 &= a + a_1 \cos z + b_1 \sin z + a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z + \ldots \\
\alpha_2 &= a + a_1 \cos 2z + b_1 \sin 2z + a_2 \cos 4z + b_2 \sin 4z + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n-1} &= a + a_1 \cos (n-1) z + b_1 \sin (n-1) z + a_2 \cos 2 (n-1) z + b_2 \sin 2 (n-1) z + \ldots
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen soll nach dem im §. 3 Gesagten

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ b_1,\ b_2,\ b_3\ \ldots$$

so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate die übrig bleibenden Unterschiede der berechneten und beobachteten Werthe von α, oder dass allgemein

$$\Sigma[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots]^2$$

ein Minimum wird, wo m von $m = 0$ bis $m = n-1$ zu nehmen ist.

5. Setzt man die Differenzial-Quotienten dieser Summe in Beziehung auf jede der zu bestimmenden Grössen

$$a,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots\ b_1,\quad b_2,\ \ldots$$

respective gleich

$$2A,\ 2A_1,\ 2A_2,\ \ldots\ 2B_1,\ 2B_2\ldots,$$

so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= \Sigma[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] \\
A_1 &= \Sigma \cos mz [-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] \\
A_2 &= \Sigma \cos 2mz [-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_1 &= \Sigma \sin mz [-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] \\
B_2 &= \Sigma \sin 2mz [-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots]
\end{aligned}$$

etc. etc. etc.

Die plausibelsten Werthe von

$$a,\ a_1,\ a_2 \ldots b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots$$

sind aber bekanntlich jene, für welche

$$A = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ \ldots\ B_1 = 0,\ B_2 = 0\ \ldots;$$

wir haben daher zur Bestimmung dieser Werthe folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{(III)}\ \ .\ .\ .\ \ \Sigma\, &[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] = 0 \\
\Sigma \cos mz\, &[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] = 0 \\
\Sigma \sin mz\, &[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] = 0 \\
\Sigma \cos 2mz\, &[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] = 0 \\
\Sigma \sin 2mz\, &[-\alpha_m + a + a_1 \cos mz + b_1 \sin mz + a_2 \cos 2mz + b_2 \sin 2mz + \ldots] = 0
\end{aligned}$$

etc. etc. etc.

wobei nicht zu übersehen, dass in allen diesen Gleichungen m von $m = 0$ bis $m = n-1$ zu nehmen ist.

6. So weitläufig auch auf den ersten Anblick die Bestimmung der plausibelsten Werthe der Constanten aus diesen Gleichungen zu sein scheint, so wird sie doch sehr einfach, wenn man die darin vorkommenden Summenausdrücke der trigonometrischen Functionen näher ins Auge fasst. Sie reduciren sich alle auf folgende allgemeine Ausdrücke:

$$\Sigma \sin rmz;\quad \Sigma \cos rmz;\quad \Sigma (\sin rmz)^2;\quad \Sigma (\cos rmz)^2$$
$$\Sigma (\sin rmz \,.\, \sin \rho mz);\quad \Sigma (\sin rmz \,.\, \cos \rho mz) \text{ und } \Sigma (\cos rmz \,.\, \cos \rho mz),$$

wo r und ρ ganze positive Zahlen $nz = 2\pi$, also $(n-1)\,z = 2\pi - z$ ist, und m immer von $m = o$ bis $m = n-1$ genommen werden muss.

Für diese Bedingungen hat man aber

$$\Sigma \sin rmz = 0 \qquad \Sigma(\sin rmz . \sin \rho mz) = 0$$
$$\Sigma \cos rmz = 0 \qquad \Sigma(\sin rmz . \cos \rho mz) = 0$$
$$\Sigma(\sin rmz)^2 = \frac{n}{2} \qquad \Sigma(\cos rmz . \cos \rho mz) = 0.$$
$$\Sigma(\cos rmz)^2 = \frac{n}{2}$$

Demzufolge gehen die oben (§. 5) zur Bestimmung der Constanten gefundenen Gleichungen (III) in folgende über:

$$\text{(IV)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 = \Sigma(-\alpha_m) + na$$
$$0 = \Sigma(-\alpha_m \cos\ mz) + \frac{n}{2} a_1;\quad 0 = \Sigma(-\alpha_m \sin\ mz) + \frac{n}{2} b_1$$
$$0 = \Sigma(-\alpha_m \cos 2mz) + \frac{n}{2} a_2;\quad 0 = \Sigma(-\alpha_m \sin 2mz) + \frac{n}{2} b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und allgemein:

$$0 = \Sigma(-\alpha_m \sin rmz) + \frac{n}{2} a_r;\quad 0 = \Sigma(-\alpha_m \cos rmz) + \frac{n}{2} b_r$$

7. Die Richtigkeit der im vorigen Paragraphe angeführten Summenformeln kann auf folgende Weise gezeigt werden. Sie gründet sich auf die beiden nachstehenden Summenformeln:

$$1)\quad \sum_{x=0}^{x=x} \sin(p + xq) = \frac{\cos\left(p - \frac{q}{2}\right) - \cos\left[p + \left(x + \frac{1}{2}\right) q\right]}{2 \sin \frac{q}{2}}$$

und für $p = 0$:

$$\sum_{x=0}^{x=x} \sin xq = \frac{\cos \frac{q}{2} - \cos\left(x + \frac{1}{2}\right) q}{2 \sin \frac{q}{2}}.$$

$$2)\quad \sum_{x=0}^{x=x} \cos(p + xq) = \frac{\sin\left[p + \left(x + \frac{1}{2}\right) q\right] - \sin\left(p - \frac{q}{2}\right)}{2 \sin \frac{q}{2}}$$

und für $p = 0$:

$$\Sigma \cos xq = \frac{\sin\left(x + \frac{1}{2}\right) q + \sin \frac{q}{2}}{2 \sin \frac{q}{2}}.$$

Die Wahrheit dieser Gleichungen erhellt aus Folgendem. Es ist:

$$\sum_{x=0}^{x=x} \sin(p + xq) = \sin p + \sin(p + q) + \sin(p + 2q) + \ldots + \sin(p + xq)$$

und wegen $$2\sin\frac{q}{2}=2\sin\frac{q}{2},$$

auch $$2\sin\frac{q}{2}\sum_{x=0}^{x=x}\sin(p+xq)=2\sin\frac{q}{2}\sin p+2\sin\frac{q}{2}\sin(p+q)+\ldots+2\sin\frac{q}{2}\sin(p+qx);$$

es ist aber bekanntlich

$$2\sin\frac{q}{2}\sin\ p=\cos(p-\frac{q}{2})-\cos\ (p+\frac{q}{2})$$

$$2\sin\frac{q}{2}\sin(p+\ q)=\cos(p+\frac{q}{2})-\cos(p+\frac{3}{2}q)$$

$$2\sin\frac{q}{2}\sin(p+2q)=\cos(p+\frac{3}{2}q)-\cos(p+\frac{5}{2}q)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sin\frac{q}{2}\sin[p+(x-1)\,q]=\cos[p+(x-\frac{3}{2})\,q]-\cos[p+(x-\frac{1}{2})\,q]$$

$$2\sin\frac{q}{2}\sin[p+xq]=\cos[p+(x-\frac{1}{2})\,q]-\cos[p+(x+\frac{1}{2})\,q],$$

mithin durch Addition:

$$2\sin\frac{q}{2}\sum_{x=0}^{x=x}\sin[p+xq]=\cos(p-\frac{q}{2})-\cos[p+(x+\frac{1}{2})\,q],$$

und $$(\alpha)\qquad \sum_{x=0}^{x=x}\sin(p+xq)=\frac{\cos(p-\frac{q}{2})-\cos[p+(x+\frac{1}{2})\,q]}{2\sin\frac{q}{2}},$$

und für $p=0$: $$(\beta)\qquad \sum_{x=0}^{x=x}\sin xq=\frac{\cos\frac{q}{2}-\cos(x+\frac{1}{2})\,q}{2\sin\frac{q}{2}}.$$

Eben so hat man:

$$\sum_{x=0}^{x=x}\cos(p+xq)=\cos p+\cos(p+q)+\cos(p+2q)+\ldots.+\cos(p+xq),$$

mithin auch:

$$2\sin\frac{q}{2}\sum_{x=0}^{x=x}\cos(p+xq)=2\sin\frac{q}{2}\cos p+2\sin\frac{q}{2}\cos(p+q)+\ldots+2\sin\frac{q}{2}\cos(p+xq).$$

Es ist aber:

$$2\sin\frac{q}{2}\cos p=-\sin(p-\frac{q}{2})+\sin(p+\frac{q}{2})$$

$$2\sin\frac{q}{2}\cos(p+\ q)=-\sin(p+\frac{q}{2})+\sin(p+\frac{3}{2}q)$$

$$2\sin\frac{q}{2}\cos(p+2q)=-\sin(p+\frac{3}{2}q)+\sin(p+\frac{5}{2}q)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sin\frac{q}{2}\cos[p+(x-1)\,q]=-\sin[p+(x-\frac{3}{2})\,q]+\sin[p+(x-\frac{1}{2})\,q]$$

$$2\sin\frac{q}{2}\cos[p+xq]=-\sin[p+(x-\frac{1}{2})\,q]+\sin[p+(x+\frac{1}{2})\,q],$$

woraus durch Addition folgt:

$$2\sin\frac{q}{2}\sum_{x=0}^{x=x}\cos(p+xq)=\sin[p+(x+\frac{1}{2})\,q]-\sin(p-\frac{q}{2}),$$

also: $(\alpha')\;\ldots\;\sum_{x=0}^{x=x}\cos(p+qx)=\dfrac{\sin[p+(x+\frac{1}{2})\,q]-\sin(p-\frac{q}{2})}{2\sin\frac{q}{2}}$

und für $p=0$: $(\beta')\;\ldots\;\sum_{x=0}^{x=x}\cos qx=\dfrac{\sin(x+\frac{1}{2})\,q+\sin\frac{q}{2}}{2\sin\frac{q}{2}}$

Anmerkung. Die angeführten Summenformeln können auch auf folgende Art abgeleitet werden: Man hat bekanntlich

$$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\quad\text{und}\quad\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\ \text{wo}\ i=\sqrt{-1};$$

daraus folgt $\qquad e^{i\alpha}=i\sin\alpha+\cos\alpha\quad\ldots\quad(A)$

In Folge dieser Gleichung ist demnach:

$$\begin{aligned}
e^{ip} &= \cos p+i\sin p\\
e^{i(p+q)} &= \cos(p+q)+i\sin(p+q)\\
e^{i(p+2q)} &= \cos(p+2q)+i\sin(p+2q)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{i(p+xq)} &= \cos(p+xq)+i\sin(p+xq),
\end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned}
e^{ip}+e^{i(p+q)}+e^{i(p+2q)}+\ldots+e^{i(p+xq)} &= \cos p+\cos(p+q)+\ldots+\cos(p+xq)\\
&\quad+i\,[\sin p+\sin(p+q)\ldots+\sin(p+xq)]\\
&= A+Bi,
\end{aligned}$$

wo $\qquad A=\cos p+\cos(p+q)+\ldots+\cos(p+xq)$

und $\qquad B=\sin p+\sin(p+q)+\ldots+\sin(p+xq).$

Es ist aber auch

$$e^{ip}+e^{i(p+q)}+e^{i(p+2q)}+\ldots+e^{i(p+xq)}=e^{ip}\,[1+e^{iq}+e^{2iq}+\ldots+e^{xiq}]=\left(\frac{e^{(x+1)iq}-1}{e^{iq}-1}\right)e^{ip}=S,$$

oder vermöge der Gleichung (A)

$$S=\frac{(\cos p+i\sin p)\,[\cos(x+1)\,q-1+i\sin(x+1)\,q]}{\cos q-1+i\sin q},$$

und mit $\cos q-1-i\sin q$ Zähler und Nenner multiplicirt:

$$S=\frac{(\cos p+i\sin p)\,(\cos q-1-i\sin q)\,[\cos(x+1)\,q-1+i\sin(x+1)\,q]}{(\cos q-1)^2+i\sin^2 q}.$$

Setzt man in dem Zähler dieses Bruches

$$\cos q - 1 = -2\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2,$$

so hat man $(\cos p + i\sin p)(\cos q - 1 - i\sin q) = (\cos p + i\sin p)\left(-2\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2 - i\sin q\right)$,

und wirklich multiplicirt:

$$\begin{aligned}(\cos p + i\sin p)(\cos q - 1 - i\sin q) &= -2\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2\cos p - 2i\sin p\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2 - i\sin q\cos p + \sin p\sin q\\ &= -2\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2\cos p - 2i\sin p\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2 - 2i\cos p\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2} + 2\sin p\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}\\ &= 2\sin\frac{q}{2}\left[\sin p\cos\frac{q}{2} - \cos p\sin\frac{q}{2} - i\left(\cos p\cos\frac{q}{2} + \sin p\sin\frac{q}{2}\right)\right]\\ &= 2\sin\frac{q}{2}\left[\sin\left(p-\frac{q}{2}\right) - i\cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Da ferner im obigen Werthe von S

$$(\cos q - 1)^2 + i\sin^2 q = 2(1-\cos q) = 4\left(\sin\frac{q}{2}\right)^2,$$

so hat man $$S = \frac{\left[\sin\left(p-\frac{q}{2}\right) - i\cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\right]\left[\cos(x+1)q - 1 + i\sin(x+1)q\right]}{2\sin\frac{q}{2}},$$

oder wenn man diesen Ausdruck in seinen reellen und seinen imaginären Theil sondert:

$$S = \frac{\sin\left(p-\frac{q}{2}\right)\left[\cos(x+1)q - 1\right] + \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\sin(x+1)q}{2\sin\frac{q}{2}}$$

$$+ i\cdot\frac{\sin(p-q)\sin(x+1)q - \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\left[\cos(x+1)q - 1\right]}{2\sin\frac{q}{2}} = A + Bi.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}&\sin\left(p-\frac{q}{2}\right)\left[\cos(x+q) - 1\right] + \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\sin(x+1)q =\\ &= \sin\left(p-\frac{q}{2}\right)\cos(x+q) + \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\sin(x+1)q - \sin\left(p-\frac{q}{2}\right)\\ &= \sin\left[p + \left(x+\frac{1}{2}\right)q\right] - \sin\left(p-\frac{q}{2}\right);\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\sin(p-q)\sin(x+1)q - \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\left[\cos(x+1)q - 1\right]\\ &= \sin(p-q)\sin(x+1)q - \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\cos(x+1)q + \cos\left(p-\frac{q}{2}\right)\\ &= \cos\left(p-\frac{q}{2}\right) - \cos\left[p + \left(x+\frac{1}{2}\right)q\right];\end{aligned}$$

demnach $$A = \frac{\sin\left[p+\left(x+\frac{1}{2}\right)q\right] - \sin\left(p-\frac{q}{2}\right)}{2\sin\frac{q}{2}};\quad B = \frac{\cos\left(p-\frac{q}{2}\right) - \cos\left[p+\left(x+\frac{1}{2}\right)q\right]}{2\sin\frac{q}{2}},$$

mithin $$\cos p + \cos(p+q) + \ldots + \cos(p+xq) = \sum_{x=o}^{x=x}\cos(p+xq) = \frac{\sin\left[p+\left(x+\frac{1}{2}\right)q\right] - \sin\left(p-\frac{q}{2}\right)}{2\sin\frac{q}{2}},$$

und: $$\sin p + \sin(p+q) + \ldots + \sin(p+xq) = \sum_{x=o}^{x=x}\sin(p+xq) = \frac{\cos\left(p-\frac{q}{2}\right) - \cos\left[p+\left(x+\frac{1}{2}\right)q\right]}{2\sin\frac{q}{2}}.$$

8. Wenden wir diese bewiesenen Summenformeln auf die im §. 6 angeführten Gleichungen an, so haben wir zuerst:

$$\Sigma \sin rmz = \sin rz + \sin 2rz + \ldots + \sin (n-1) rz.$$

Aus der Gleichung (β) hat man aber für $q = rz$ und $x = n-1$:

$$\Sigma \sin rmz = \frac{\cos \frac{1}{2} rz - \cos (n - \frac{1}{2}) rz}{2 \sin \frac{1}{2} rz}.$$

Da nun nach §. 6

$$nz = 2\pi, \text{ also } (n - \frac{1}{2}) z = 2\pi - \frac{z}{2},$$

mithin

$$(n - \frac{1}{2}) rz = 2r\pi - \frac{rz}{2},$$

und da r immer eine ganze positive Zahl:

$$\cos (n - \frac{1}{2}) rz = \cos \frac{rz}{2},$$

so folgt

$$\Sigma \sin rmz = 0.$$

Aus der Formel (β') hat man:

$$\Sigma \cos rmz = \frac{\sin (n - \frac{1}{2}) rz + \sin \frac{1}{2} rz}{2 \sin \frac{1}{2} rz} = \frac{\sin (2r\pi - \frac{1}{2} rz) + \sin \frac{1}{2} rz}{2 \sin \frac{1}{2} rz},$$

also

$$\Sigma \cos rmz = 0.$$

Es ist ferner

$$\Sigma (\sin rm)^2 = (\sin rz)^2 + (\sin 2rz)^2 + \ldots + [\sin (n-1) rz]^2.$$

Nun ist bekanntlich

$$(\sin rz)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2rz$$
$$(\sin 2rz)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4rz$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$[\sin (n-1) rz]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 (n-1) rz,$$

demnach

$$\Sigma (\sin rmz)^2 = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2rz + \cos 4rz + \ldots + \cos 2 (n-1) rz].$$

Nach der Formel (α') ist aber für $p = q = 2rz$, und $p + qx = 2 (n-1) rz$,

auch

$$x = n - 2, \text{ also auch } (x + \frac{1}{2}) q = 2 (n - \frac{3}{2}) rz,$$

und

$$p + (x + \frac{1}{2}) q = 2 (n - \frac{1}{2}) rz = 4r\pi - rz, \text{ da } nz = 2\pi,$$

mithin

$$\cos 2rz + \cos 4rz + \ldots + \cos 2 (n-1) rz = \frac{\sin [4r\pi - rz] - \sin rz}{2 \sin rz} = -1,$$

demnach

$$\Sigma (\sin rmz)^2 = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Eben so ist

$$\Sigma (\cos rmz)^2 = 1 + (\cos rz)^2 + (\cos 2rz)^2 + \ldots + [\cos (n-1) rz]^2;$$

da nun
$$(\cos rz)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2rz$$
$$(\cos 2rz)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4rz$$
$$\cdot$$
$$[\cos\ (n-1)\ rz]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\,(n-1)\,rz,$$
so hat man durch Addition:
$$\Sigma\,(\cos rmz)^2 = 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}[\cos 2rz + \cos 4rz + \ldots + \cos 2\,(n-1)\,rz],$$
oder
$$\Sigma\,(\cos rmz)^2 = 1 + \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

9. Es ist ferner bekanntlich:
$$\sin rmz\,.\,\sin \rho mz = \frac{1}{2}\,.\,\cos(r-\rho)mz - \frac{1}{2}\,.\,\cos(r+\rho)\,mz,$$
also
$$\Sigma\sin rmz\,.\,\sin\rho mz = \frac{1}{2}\Sigma\cos(r-\rho)\,mz - \frac{1}{2}\Sigma\cos(r+\rho)\,mz.$$

Nach dem im §. 8 Gezeigten ist aber
$$\Sigma\cos(r-\rho)\,mz = 0,\quad \Sigma\cos(r+\rho)\,mz = 0,$$
also auch
$$\Sigma\sin rmz\,.\,\sin\rho mz = 0.$$

Eben so hat man
$$\sin rmz\,.\cos\rho mz = \frac{1}{2}\,.\,\sin\,(r+\rho)\,mz + \frac{1}{2}\,.\,\sin\,(r-\rho)\,mz,$$
daher
$$\Sigma\sin rmz\,.\,\cos\rho mz = \frac{1}{2}\,\Sigma\sin(r+\rho)\,mz + \frac{1}{2}\,\Sigma\sin(r-\rho)\,mz,$$
oder wegen
$$\Sigma\sin\,(r+\rho)\,mz = 0,\quad \Sigma\sin\,(r-\rho)\,mz = 0,$$
auch
$$\Sigma\sin\,rmz\,.\cos\,\rho mz = 0.$$

Endlich ist
$$\cos rmz\,.\,\cos\rho mz = \frac{1}{2}\,.\,\cos(r+\rho)mz + \frac{1}{2}\,.\,\cos(r-\rho)\,mz,$$
und also
$$\Sigma\cos rmz\,.\cos\rho mz = \frac{1}{2}\Sigma\,\cos(r+\rho)mz + \frac{1}{2}\,\Sigma\,\cos(r-\rho)\,mz,$$
oder wegen
$$\Sigma\cos(r+\rho)\,mz = 0,\quad \Sigma\cos\,(r+\rho)\,mz = 0,$$
auch
$$\Sigma\cos\,rmz\,.\,\cos\,\rho mz = 0.$$

10. Nach diesen Erörterungen wollen wir zu den Gleichungen (IV) §. 6. zurückkehren. Bekanntlich ist in allen m von $m=0$ bis $m=n-1$ zu nehmen. Daraus ergeben sich folgende Werthe für die gesuchten Constanten:

(V) . . . . .
$$a = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-1})$$
$$a_1 = \frac{2}{n}[\alpha + \alpha_1\cos z + \alpha_2\cos 2z + \ldots + \alpha_{n-1}\cos\,(n-1)\,z]$$
$$b_1 = \frac{2}{n}[\alpha_1\sin z + \alpha_2\sin 2z + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-1}\sin\,(n-1)\,z]$$
$$a_2 = \frac{2}{n}[\alpha + \alpha_1\cos 2z + \alpha_2\cos 4z + \ldots + \alpha_{n-1}\cos 2\,(n-1)\,z]$$
$$b_2 = \frac{2}{n}[\alpha_1\sin 2z + \alpha_2\sin 4z + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{n-1}\sin\,2\,(n-1)\,z]$$

$$a_3 = \frac{2}{n}[\alpha + \alpha_1 \cos 3z + \alpha_2 \cos 6z + \ldots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)\, 3z]$$

$$b_3 = \frac{2}{n}[\alpha_1 \sin 3z + \alpha_2 \sin 6z + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} \sin (n-1)\, 3z]$$

und allgemein
$$a_r = \frac{2}{n}[\alpha + \alpha_1 \cos rz + \alpha_2 \cos 2rz + \ldots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)\, rz]$$

$$b_r = \frac{2}{n}[\alpha_1 \sin rz + \alpha_2 \sin 2rz + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} \sin (n-1)\, rz].$$

11. In §. 4 wurde angenommen, dass die Beobachtungen der Grösse y in äquidistanten Zeitintervallen angestellt wurden. Wäre dieses nicht der Fall, sondern sind Unterbrechungen vorhanden, d. h. wurden nicht zu allen dieser Reihe entsprechenden Zeitintervallen Beobachtungen gemacht, so lassen sich die fehlenden Werthe der Grösse y auf folgende Weise ergänzen.

Es seien die fehlenden Werthe

$$\alpha_h,\ \alpha_i,\ \alpha_k \ldots,$$

so bestehen die in §. 10 angeführten Ausdrücke für

$$a,\ a_1,\ a_2 \ldots b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots$$

theils aus bekannten, theils aus unbekannten Gliedern.

Bezeichnet man die Summe der bekannten α mit $[\alpha]$, die Summe der bekannten α in den Cosinus oder Sinus des respectiven Vielfachen von z multiplicirt mit:

$$[\alpha \cos z],\quad [\alpha \sin z],\quad [\alpha \cos 2z],\quad [\alpha \sin 2z] \text{ u. s. f.},$$

so hat man für die Constanten

$$a,\ a_1,\ a_2 \ldots b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots$$

folgende Gleichungen:

$$\text{(VI)} \quad \ldots \quad a = \frac{1}{n}\Big[[\alpha] + \alpha_h + \alpha_i + \alpha_k + \ldots\Big]$$

$$a_1 = \frac{2}{n}\Big[[\alpha \cos z] + \alpha_h \cos hz + \alpha_i \cos iz + \alpha_k \cos kz + \ldots\ldots\Big]$$

$$b_1 = \frac{2}{n}\Big[[\alpha \sin z] + \alpha_h \sin hz + \alpha_i \sin iz + \alpha_k \sin kz + \ldots\ldots\Big]$$

$$a_2 = \frac{2}{n}\Big[[\alpha \cos 2z] + \alpha_h \cos 2hz + \alpha_i \cos 2iz + \alpha_k \cos 2kz + \ldots\Big]$$

$$b_2 = \frac{2}{n}\Big[[\alpha \sin 2z] + \alpha_h \sin 2hz + \alpha_i \sin 2iz + \alpha_k \sin 2kz + \ldots\Big]$$

etc. etc. etc.

Man hat ferner, nach §. 4, für $\alpha_h,\ \alpha_i,\ \alpha_k \ldots$ die Gleichungen

$$\alpha_h = a + a_1 \cos hz + b_1 \sin hz + a_2 \cos 2hz + b_2 \sin 2hz + \ldots$$

$$\alpha_i = a + a_1 \cos iz + b_1 \sin iz + a_2 \cos 2iz + b_2 \sin 2iz + \ldots$$

$$\alpha_k = a + a_1 \cos kz + b_1 \sin kz + a_2 \cos 2kz + b_2 \sin 2kz + \ldots$$

etc. etc. etc.

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe für

$$a,\ a_1,\ a_2 \ldots b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots$$

aus den Gleichungen (VI), so erhält man so viele Gleichungen zwischen den Unbekannten

$$\alpha_h,\ \alpha_i,\ \alpha_k \ldots$$

und bekannten Grössen, als es derlei Unbekannte gibt, aus denen man die Werthe für

$$\alpha_h,\ \alpha_i,\ \alpha_k\ \ldots$$

findet. Diese Werthe in die Gleichungen (VI) gesetzt, geben endlich die gesuchten Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2\ \ldots\ b_1,\ b_2,\ b_3\ \ldots$$

12. Sind diese Constanten auf die nun gezeigte Art bestimmt, und will man y in der ursprünglichen Form seines mathematischen Ausdruckes darstellen, so hat man vermöge §. 3:

$$\text{(VII.)}\quad \operatorname{tang} v' = \frac{a_1}{b_1} \qquad p_1 = \frac{a_1}{\sin v'} = \frac{b_1}{\cos v'}$$

$$\operatorname{tang} v'' = \frac{a_2}{b_2} \qquad p_2 = \frac{a_2}{\sin v''} = \frac{b_2}{\cos v''}$$

$$\operatorname{tang} v''' = \frac{a_3}{b_3} \qquad p_3 = \frac{a_3}{\sin v'''} = \frac{b_3}{\cos v'''}$$

u. s. f.

In welchem Quadranten die Winkel v', v'', v''' etc. zu nehmen seien, bestimmt der Umstand, dass man die Grössen p_1, p_2, p_3... immer positiv setzt, mithin die Sinus der Winkel v', v'', v'''... immer das Zeichen der a, und ihre Cosinus das Zeichen der b haben müssen, wie aus den oben angeführten Gleichungen für p_1, p_2, p_3... erhellt. Kennt man aber die Zeichen des Sinus und Cosinus eines Winkels, so ist auch der Quadrant bestimmt, in dem der Winkel zu nehmen ist. Sind einmal die Grössen p_1, p_2, p_3... und die Winkel v', v'', v'''... gefunden, und setzt man $\frac{2\pi}{k} = z$, so hat man für y die Gleichung:

$$\text{(VIII.)}\quad y = a + p_1 \sin [xz + v'] + p_2 \sin [x.2z + v''] + p_3 \sin [x.3z + v'''] + \ldots$$

13. Setzt man in der so eben für y entwickelten Formel statt x den Werth eines innerhalb des Umfanges der Periode liegenden Zeitmomentes, so erhält man den diesem Momente entsprechenden Werth von y.

Wie genau der Ausdruck für y die numerischen Werthe der periodischen Erscheinung gibt, erkennt man dadurch, dass man für die äquidistanten Zeitmomente, für welche y durch Beobachtungen bekannt ist, die Werthe von y berechnet und ihre Unterschiede von den Daten der Beobachtungen sucht. Da die für y entwickelte Function in der Regel convergirt, so werden diese Differenzen desto kleiner, je mehr Glieder der Reihe für y man entwickelt, und die gewünschte Genauigkeit wird dann erreicht sein, wenn die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate so klein geworden, dass man sie Fehlern der Beobachtung oder sonstigen Störungen der Regelmässigkeit zuschreiben darf. Man wird daher nach erfolgter Entwickelung von zwei oder drei Gliedern der Reihe y die Summe dieser Fehlerquadrate suchen und daraus erkennen, ob die Entwickelung eines nachfolgenden Gliedes der Reihe zur gewünschten Genauigkeit nothwendig sei oder nicht.

Die Summe der übrigbleibenden Fehlerquadrate erhält man nun sehr einfach durch folgende Gleichung, in welcher ε, ε_1, ε_2, ε_3,... ε_{n-1} die Fehler bezeichnen, die den Zeitmomenten 0, 1, 2, 3,... n—1 zukommen, und wo

$$[\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon\varepsilon + \varepsilon_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-1}$$

und

$$[\alpha\alpha] = \alpha\alpha + \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_{n-1}$$

ist. Die Gleichung für die Summe der Fehlerquadrate ist

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\alpha\alpha] - na^2 - \frac{n}{2}.a_1^2 - \frac{n}{2}.b_1^2 - \frac{n}{2}.a_2^2 - \frac{n}{2}.b_2^2 - \frac{n}{2}.a_3^2 - \frac{n}{2}.b_3^2 - \ldots$$

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes erhellt aus Folgendem:

Wir haben nach §. 4 für die verschiedenen Werthe von α die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha &= a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \\
\alpha_1 &= a + a_1 \cos z + b_1 \sin z + a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z + \ldots \\
\alpha_2 &= a + a_1 \cos 2z + b_1 \sin 2z + a_2 \cos 4z + b_2 \sin 4z + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. f.,

mithin die übrig bleibenden Fehler

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -\alpha + a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \\
\varepsilon_1 &= -\alpha_1 + a + a_1 \cos z + b_1 \sin z + a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z + \ldots \\
\varepsilon_2 &= -\alpha_2 + a + a_1 \cos 2z + b_1 \sin 2z + a_2 \cos 4z + b_2 \sin 4z + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. f.,

also

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varepsilon &= \alpha^2 - \alpha a - \alpha a_1 - \alpha a_2 - \alpha a_3 - \ldots \\
\varepsilon_1\varepsilon_1 &= \alpha_1^2 - \alpha_1 a - \alpha_1 a_1 \cos z - \alpha_1 b_1 \sin z - \alpha_1 a_2 \cos 2z - \alpha_1 b_2 \sin 2z - \ldots \\
\varepsilon_2\varepsilon_2 &= \alpha_2^2 - \alpha_2 a - \alpha_2 a_1 \cos 2z - \alpha_2 b_1 \sin 2z - \alpha_2 a_2 \cos 4z - \alpha_2 b_2 \sin 4z - \ldots
\end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned}
[\varepsilon\varepsilon] = [\alpha\alpha] &- a\,(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots) \\
&- a_1\,(\alpha + \alpha_1 \cos z + \alpha_2 \cos 2z + \ldots) \\
&- b_1\,(\alpha_1 \sin z + \alpha_2 \sin 2z + \ldots) \\
&- a_2\,(\alpha + \alpha_1 \cos 2z_2 + \alpha_2 \cos 4z + \ldots) \\
&- b_2\,(\alpha_1 \sin 2z + \alpha_2 \sin 4z + \ldots)
\end{aligned}$$

u. s. f.,

oder die Werthe der innerhalb der Klammern eingeschlossenen Reihen aus §. 10 in diese Gleichung gesetzt:

$$\text{(IX)} \quad \ldots\ldots \quad [\varepsilon\varepsilon] = [\alpha\alpha] - na^2 - \frac{n}{2}a_1^2 - \frac{n}{2}b_1^2 - \frac{n}{2}a_2^2 - \frac{n}{2}b_2^2 - \ldots$$

Nach diesem Ausdrucke kann man für die entwickelte Anzahl von Gliedern die Summe der Fehlerquadrate bestimmen, so wie auch die Verminderung angeben, welche diese Summe durch Hinzufügung eines neuen Gliedes der Reihe für y erleidet.

14. Die am häufigsten vorkommenden Perioden sind jene, wo

1) $n = 24$, also in der Gleichung (VIII)

$$z = \frac{2\pi}{n} = 15 \text{ und } x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots 23$$

ist. Für diese Periode hat man zur Berechnung der Grösse na, a_1, $a_2 \ldots b_1$, b_2, $b_3 \ldots$ aus den Gleichungen (V) §. 10, wenn man die in den Zeitmomenten 0, 1, 2, 3 ... 23 beobachteten Grössen mit 0, I, II, III ... XXIII bezeichnet:

$$24a = 0 + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \ldots + \mathrm{XXIII}.$$

$$\begin{aligned}
12a_1 = &(\mathrm{I} + \mathrm{XXIII} - \mathrm{XI} - \mathrm{XIII}) \cos 15^0 \\
&+ (\mathrm{II} + \mathrm{XXII} - \mathrm{X} - \mathrm{XIV}) \cos 30^0 \\
&+ (\mathrm{III} + \mathrm{XXI} - \mathrm{IX} - \mathrm{XV}) \cos 45^0 \\
&+ (\mathrm{IV} + \mathrm{XX} - \mathrm{VIII} - \mathrm{XVI}) \cos 60^0 \\
&+ (\mathrm{V} + \mathrm{XIX} - \mathrm{VII} - \mathrm{XVII}) \cos 75^0 \\
&+ 0 - \mathrm{XII}.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
12b_1 = &(\mathrm{I} + \mathrm{XI} - \mathrm{XIII} - \mathrm{XXIII}) \sin 15^0 \\
&+ (\mathrm{II} + \mathrm{X} - \mathrm{XIV} - \mathrm{XXII}) \sin 30^0 \\
&+ (\mathrm{III} + \mathrm{IX} - \mathrm{XV} - \mathrm{XXI}) \sin 45^0 \\
&+ (\mathrm{IV} + \mathrm{VIII} - \mathrm{XVI} - \mathrm{XX}) \sin 60^0 \\
&+ (\mathrm{V} + \mathrm{VII} - \mathrm{XVII} - \mathrm{XIX}) \sin 75^0 \\
&+ \mathrm{VI} - \mathrm{XVIII}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12a_2 = &(\mathrm{I} + \mathrm{XI} + \mathrm{XIII} + \mathrm{XXIII} - \mathrm{V} - \mathrm{VII} - \mathrm{XVII} - \mathrm{XIX}) \cos 30^0 \\
&+ (\mathrm{II} + \mathrm{X} + \mathrm{XIV} + \mathrm{XXII} - \mathrm{IV} - \mathrm{VIII} - \mathrm{XVI} - \mathrm{XX}) \cos 60^0 \\
&+ 0 + \mathrm{XII} - \mathrm{VI} - \mathrm{XVIII}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12b_2 = {} & (\mathrm{I} + \mathrm{V} + \mathrm{XIII} + \mathrm{XVII} - \mathrm{VII} - \mathrm{XI} - \mathrm{XIX} - \mathrm{XXIII}) \sin 30^0 \\
& + (\mathrm{II} + \mathrm{IV} + \mathrm{XIV} + \mathrm{XVI} - \mathrm{VIII} - \mathrm{X} - \mathrm{XX} - \mathrm{XXII}) \sin 60^0 \\
& + \mathrm{III} + \mathrm{XV} - \mathrm{IX} - \mathrm{XXI}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12a_3 = {} & (\mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{IX} + \mathrm{XV} + \mathrm{XVII} + \mathrm{XXIII} \\
& \qquad - \mathrm{III} - \mathrm{V} - \mathrm{XI} - \mathrm{XIII} - \mathrm{XIX} - \mathrm{XXI}) \cos 45^0 \\
& + 0 + \mathrm{VIII} - \mathrm{XVI} - \mathrm{IV} - \mathrm{XII} - \mathrm{XX}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12b_3 = {} & (\mathrm{I} + \mathrm{III} + \mathrm{IX} + \mathrm{XI} + \mathrm{XVII} + \mathrm{XIX} \\
& \qquad - \mathrm{V} - \mathrm{VII} - \mathrm{XIII} - \mathrm{XV} - \mathrm{XXI} - \mathrm{XXIII}) \sin 45^0 \\
& + \mathrm{II} + \mathrm{X} + \mathrm{XVIII} - \mathrm{VI} - \mathrm{XIV} - \mathrm{XXII}.
\end{aligned}$$

2) Für eine zweite oft vorkommende Periode ist $n = 12$, also $z = 30^0$, und bezeichnet man die den äquidistanten Zeitmomenten 0, 1, 2, 3...11 entsprechenden Werthe der periodischen Grösse mit 0, I, II, III...XI, so hat man zur Bestimmung der Constanten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
12a &= 0 + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \ldots + \mathrm{XI}. \\
6a_1 &= (\mathrm{I} + \mathrm{XI} - \mathrm{V} - \mathrm{VII}) \cos 30^0 + (\mathrm{II} + \mathrm{X} - \mathrm{IV} - \mathrm{VIII}) \cos 60^0 + 0 - \mathrm{VI}. \\
6b_1 &= (\mathrm{I} + \mathrm{V} - \mathrm{VII} - \mathrm{XI}) \sin 30^0 + (\mathrm{II} + \mathrm{IV} - \mathrm{VIII} - \mathrm{X}) \sin 60^0 + \mathrm{III} - \mathrm{IX}. \\
6a_2 &= 0 + \mathrm{VI} - \mathrm{III} - \mathrm{IX} + (\mathrm{I} + \mathrm{V} + \mathrm{VII} + \mathrm{XI} - \mathrm{II} - \mathrm{IV} - \mathrm{VIII} - \mathrm{X}) \cos 60^0. \\
6b_2 &= (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{VII} + \mathrm{VIII} - \mathrm{IV} - \mathrm{V} - \mathrm{X} - \mathrm{XI}) \sin 60^0. \\
6a_3 &= 0 + \mathrm{IV} + \mathrm{VIII} - \mathrm{II} - \mathrm{VI} - \mathrm{X}. \\
6b_3 &= \mathrm{I} + \mathrm{V} + \mathrm{IX} - \mathrm{III} - \mathrm{VII} - \mathrm{XI}.
\end{aligned}$$

3) Endlich für eine dritte ebenfalls häufig vorkommende Periode ist $n=8$, also $z=45^0$. Bezeichnet man ebenfalls für die äquidistanten Zeitmomente 0, 1, 2, 3 . . . 7 die ihnen entsprechenden Grössen mit 0, I, II, III . . . VII, so hat man

$$\begin{aligned}
8a &= 0 + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \ldots + \mathrm{VII}. \\
4a_1 &= 0 - \mathrm{IV} + (\mathrm{I} + \mathrm{VII} - \mathrm{III} - \mathrm{V}) \cos 45^0. \\
4b_1 &= \mathrm{II} - \mathrm{VI} + (\mathrm{I} + \mathrm{III} - \mathrm{V} - \mathrm{VII}) \sin 45^0. \\
4a_2 &= 0 + \mathrm{IV} - \mathrm{II} - \mathrm{VI}. \\
4b_2 &= \mathrm{I} + \mathrm{V} - \mathrm{III} - \mathrm{VII}. \\
4a_3 &= 0 - \mathrm{IV} + (\mathrm{III} + \mathrm{V} - \mathrm{I} - \mathrm{VII}) \cos 45^0. \\
4b_3 &= \mathrm{VI} - \mathrm{II} + (\mathrm{I} + \mathrm{III} - \mathrm{V} - \mathrm{VII}) \sin 45^0.
\end{aligned}$$

15. Um ein numerisches Beispiel dieser Berechnungsweise zu geben, wollen wir den mathematischen Ausdruck für die monatlichen Schwankungen des Luftdruckes aus den Daten mehrjähriger an der Sternwarte in Kremsmünster angestellten Beobachtungen suchen. Die Beobachtungen geben die Schwankungen des Luftdruckes in den einzelnen Monaten des Jahres, wie folgt:

Jänner	0''966	Mai	0''691	September	0''670
Februar	0.971	Juni	0.574	October	0.801
März	0.912	Juli	0.509	November	0.886
April	0.809	August	0.550	December	0.921.

Diese Zahlen sind Pariser Zolle. Aus diesen Daten hat man

$$12a = 9''260, \text{ also } a = 0''7717.$$

Ferner:

$$\mathrm{I}+\mathrm{XI}-\mathrm{V}-\mathrm{VII}=0.768;\qquad \mathrm{II}+\mathrm{X}-\mathrm{IV}-\mathrm{VIII}=0.437$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log 0.768 = & 9.885361 & \log 0.437 = & 9.640481 \\
\log\cos 30^0 = & \underline{9.937531} & \log\cos 60^0 = & \underline{9.698970} \\
 & 9.822892 & & 9.349451
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
0.768\ \cos 30^0 &= 0.665108 \\
0.437\ \cos 60^0 &= 0.218500 \\
\mathrm{O}-\mathrm{VI} &= \underline{0.457000} \\
6a_1 &= 1.340608
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{V}-\mathrm{VI}-\mathrm{XI}=0.074;\qquad \mathrm{II}+\mathrm{IV}-\mathrm{VIII}-\mathrm{X}=0.046$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log 0.074 = & 8.869232 & \log 0.046 = & 8.662758 \\
\log\sin 30^0 = & \underline{9.698970} & \log\sin 60^0 = & \underline{9.937531} \\
 & 8.568202 & & 8.600289
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
0.074\,.\sin 30^0 &= 0.037000 \\
0.046\,.\sin 60^0 &= 0.039837 \\
\mathrm{III}-\mathrm{IX} &= \underline{0.008000} \\
6b_1 &= 0.084837.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}+\mathrm{V}+\mathrm{VII}+\mathrm{XI}-\mathrm{II}-\mathrm{IV}-\mathrm{VIII}-\mathrm{X} &= -0.144 \\
\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{VII}+\mathrm{VIII}-\mathrm{IV}-\mathrm{V}-\mathrm{X}-\mathrm{XI} &= +0.031
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log -0.144 = & 9.158362_n & \log 0.031 = & 8.491362 \\
\log\cos 60^0 = & \underline{9.698970} & \log\sin 60^0 = & \underline{9.937531} \\
 & 8.857332_n & \log 6b_2 = & 8.428893
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
-0.144\ \cos 60^0 &= -0.072 \\
\mathrm{O}+\mathrm{VI}-\mathrm{III}-\mathrm{IX} &= \underline{-0.135} \\
6a_2 &= -0.207.
\end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Grössen p_1, v', p_2, v'', so haben wir

$$\begin{array}{rl|rl}
\log 6a_1 = & 0.127301 & \log 6a_2 = & 9.315970_n \\
\log 6b_1 = & \underline{8.928585} & \log 6b_2 = & \underline{8.428893} \\
\log \mathrm{tang}\ v' = & 1.198716 & \log \mathrm{tang}\ v'' = & 0.887077_n \\
v' = & 86^0\,22'\,44''4 & v'' = & 277^0\,23'\,23''1 \\
\log\sin v' = & 9.999132 & \log\sin v'' = & 9.996378_n \\
\log\cos v' = & \underline{8.800416} & \log\cos v'' = & \underline{9.109301} \\
\log 6p_1 = & 0.128169 & \log 6p_2 = & 9.319592 \\
\log 6 = & \underline{0.778151} & \log 6 = & \underline{0.778151} \\
\log p_1 = & 9.350018 & \log p_2 = & 8.541441
\end{array}$$

Bezeichnet man demnach die dem Monate mit dem Index x entsprechende Schwankung des Luftdruckes mit y_x, so hat man

$$\begin{aligned}
y_x = 0''7717 &+ \overline{9.350018}\sin[30^0\!.x + 86^0\,22'\,7] \\
&+ \overline{8.541441}\sin[60^0\!.x + 277^0\,23'\,4].
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind die mit einer Querlinie überzogenen Zahlen Logarithmen.

Um zu sehen, mit welcher Genauigkeit dieser Ausdruck die Werthe von y darstellt, wollen wir nach §. 13 Gleichung (IX) die Summe der übrigbleibenden Fehlerquadrate suchen.

Man findet nun

$$[\alpha\alpha] = 7.454498$$

$$na^2 + \frac{n}{2}a_1^2 + \frac{n}{2}b_1^2 + \frac{n}{2}a_2^2 + \frac{n}{2}b_2^2 = 7.453630,$$

mithin

$$[\varepsilon\varepsilon] = 0.000868.$$

Da die Scale des Barometers, das zu diesen Beobachtungen verwendet wurde, mittelst des Nonius 0″.01 gibt, und man demnach die Hälfte davon, oder 0″.005 noch gut schätzen kann, so wird der mögliche Beobachtungsfehler, in so ferne er von der Lesung abhängt, nicht 0″.002 oder 0″.003 übersteigen.

Nimmt man ihn 0″0025, so dass jede Beobachtung um diese Grösse fehlerhaft wäre, so ist die Summe dieser Fehlerquadrate 0″000072. Es muss daher das sich durch den Ausdruck von y ergebende $[\varepsilon\varepsilon]$ nahe auf diese Grösse gebracht werden. Wird demnach noch ein Glied des Ausdruckes für y entwickelt, so hat man nach §. 14

$$6a_3 = 0 + \mathrm{IV} + \mathrm{VIII} - \mathrm{II} - \mathrm{VI} - \mathrm{X} = 0.02$$

$$6b_3 = \mathrm{I} + \mathrm{V} + \mathrm{IX} - \mathrm{III} - \mathrm{VII} - \mathrm{XI} = 0.066,$$

demnach

$$\log 6a_3 = 8.301030$$

$$\log 6b_3 = 8.819544$$

$$\log \operatorname{tang} v''' = 9.481486$$

$$v''' = 16^0 51' 30'' 2$$

$$\log \sin v''' = 9.462409$$

$$\log \cos v''' = 9.980923$$

$$\log 6p_3 = 8.838621$$

$$\log 6 = 0.778151$$

$$\log p_3 = 8.060470.$$

Man findet nun

$$\frac{n}{2}.a_3^2 + \frac{n}{2}.b_3^2 = 0.000793$$

früher war

$$[\varepsilon\varepsilon] = 0.000868,$$

mithin die übrig bleibende Summe der Fehlerquadrate 0.000075,
mit welcher Schärfe man sich begnügen kann.

Wir haben daher für die monatlichen Schwankungen des Luftdruckes folgenden Ausdruck

$$\text{(X)} \quad y_x = 0''7717 + \overline{9.350018} \sin(30^0.x + 86^0 22' 7) + \overline{8.541441} \sin(60^0.x + 277^0 23' 4) + \overline{8.060470} \sin(90^0.x + 16^0 51' 5).$$

16. Die so eben gefundene Formel für y kann noch zweckmässiger ausgedrückt werden.

Bei Zeiteinheiten (hier Monate), die selbst ein Complex kleinerer Intervalle (hier Tage) sind, erhält man die Daten der Beobachtungen, die in Rechnung genommen werden (nämlich die numerische Grösse der periodischen Erscheinung, die den respectiven höhern Zeiteinheiten entspricht), indem man das Mittel der in den kleineren Zeiteinheiten angestellten Beobachtungen nimmt. Diese Mittel entsprechen demnach nicht dem Anfange, sondern der Mitte der höhern Zeiteinheit (hier der Mitte des Monates).

Unsere oben entwickelte Formel schliesst also die Voraussetzung ein, dass das Jahr mit 15. Jänner beginnt. Will man das Jahr wie gewöhnlich mit dem 1. Jänner anfangen, so muss jedes x um $\frac{1}{2}$ (da man nämlich jeden Monat von 30 Tagen nimmt) vermehrt, und die Winkel v', v'', v''', damit die Werthe von y_x unverändert bleiben, um 15^0, 30^0, 45^0 vermindert werden, so dass man hat

$$\text{(XI)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad y_x = 0''.7717 + \overline{9.350018} \sin\left[30^0\left(x+\frac{1}{2}\right) + 71^0 22' 7\right]$$
$$+ \overline{8.541441} \sin\left[60^0\left(x+\frac{1}{2}\right) + 247^0 23' 4\right]$$
$$+ \overline{8.060470} \sin\left[90^0\left(x+\frac{1}{2}\right) + 331^0 51' 5\right].$$

17. Der mathematische Ausdruck einer periodischen Naturerscheinung setzt uns auch in den Stand die Zeiten zu bestimmen, zu welchen dieselbe in ihrem Maximum, Minimum oder in ihrer mittleren Grösse stattfindet. Wir wollen zu diesem Zwecke die Formel (VIII) berücksichtigen.

Soll y ein Maximum oder Minimum werden, so muss der Differenzialquotient von y, in Beziehung auf x genommen, gleich Null sein, oder $\frac{dy}{dx}=0$. Differenziirt man wirklich den oben angeführten Ausdruck für y, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = p_1 z \cos[xz + v'] + 2p_2 z \cos[x.2z + v''] + 3p_3 z \cos[x.3z + v'''] + \cdots,$$

mithin die Bedingsgleichung für die Maxima und Minima der Function y

$$\text{(XII)} \quad . \; . \quad 0 = p_1[\cos xz + v'] + 2p_2 \cos[x.2z + v''] + 3p_3 \cos[x.3z + v'''] + \cdots$$

Die Auflösung dieser Gleichung, nämlich die Bestimmung von x, welches einem Maximum oder Minimum entspricht, geschieht am einfachsten nach der sogenannten indirecten Methode, welche wir hier der Vollständigkeit wegen näher betrachten und begründen wollen.

18. Schon aus dem Gange der Erscheinung, wie ihn die unmittelbaren Beobachtungen geben, sieht man, zwischen welche zwei Werthe von x der Formel (VIII) ein Wendepunct der Erscheinung, rücksichtlich ihrer numerischen Grösse, fällt. Für diese beiden Werthe von x, welche ich

$$x=c \text{ und } x=c'$$

setzen will, berechnet man den Werth der Gleichung (XII). Wird für einen der beiden Werthe von x, z. B. für $x=c$, diese Gleichung gleich Null gefunden, so ist c der gesuchte genaue Werth des Zeitmomentes x für den fraglichen Wendepunct.

Findet man aber für $x=c$ den Werth dieser Gleichung gleich d, und für

$x=c'$ „ „ „ „ „ d', so ist der Werth von x, der dem Wendepuncte entspricht

$$\text{(XIII)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = c - \frac{d(c-c')}{d-d'} = c + \frac{d(c'-c)}{d-d'} = c + \frac{d(c-c')}{d'-d}.$$

In der Regel findet man durch diese Rechnung den Werth von x schon in der ersten Decimale genau. Will man die Annäherung noch weiter treiben, so nehme man das so gefundene x für eines der obigen c, welches dann mit dem zweiten c verbunden, einen noch mehr genäherten Werth von x gibt, u. s. f. Der Grund dieser Methode beruht auf folgender Betrachtung:

Den §. 17 gefundenen Ausdruck

$$p_1 \cos[xz + v'] + 2p_2 \cos[x \,.\, 2z + v''] + 3p_3 \cos[x \,.\, 3z + v'''] + \ldots,$$

den ich gleich y setzen will, kann man in der ersten Annäherung als eine lineare Function von x betrachten,

und $\quad y = A + Bx$

setzen, da nun für $x = c$: $\quad y = d$

und für $x = c'$: $\quad y = d'$

so hat man $\quad d = A + Bc$

$$d' = A + Bc'$$

und daher $\quad d' - d = B[c' - c]$

und $\quad B = \dfrac{d' - d}{c' - c},$

mithin auch $\quad A = d - Bc = \dfrac{c'd - d'c}{c' - c}.$

Für $y = o$ hat man daher $\quad x = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{cd' - c'd}{d' - d}$

oder $\quad x = c + \dfrac{d(c - c')}{d' - d}$

den oben angeführten Ausdruck.

Anmerkung. Diese Annäherungsformel kann auch auf folgende Art gerechtfertigt werden: Ist y eine Function von x, und setzt man in selbe für x die Werthe

$$c = x + w$$
$$c' = x + w',$$

so hat man bekanntlich

$$Y = y + (c - x) \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{(c - x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

also

$$Y' = y + (c' - x) \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{(c' - x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots,$$

$$Y - y = (c - x) \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{(c - x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

$$Y' - y = (c' - x) \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{(c' - x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

Für unseren hier besprochenen Fall ist

$$Y - y = d$$

$Y' - y = d'$ und $y = 0$;

demnach

$$d = (c - x) \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{(c - x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

$$d' = (c' - x) \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{(c' - x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

Da $c - x$ und $c' - x$ oder w und w' kleine Grössen sind, so kann man bei der ersten Annäherung die Glieder der Ausdrücke für d und d', welche höhere Potenzen dieser Grössen enthalten, weglassen, so dass man demnach hat:

$$d = (c - x) \,.\, \frac{dy}{dx}$$

$$d = (c' - x) \,.\, \frac{dy}{dx},$$

also auch
$$\frac{d}{d'}=\frac{c-x}{c'-x}$$
$$x(d'-d)=cd'-c'd$$
und
$$x=\frac{cd'-c'd}{d'-d}$$
oder
$$x=c+\frac{d(c-c')}{d'-d}=c-\frac{d(c-c')}{d-d'}.$$

19. Wendet man diesen allgemeinen Ausdruck (XIII) auf unser Beispiel an, so haben wir zur Bestimmung der Zeiten der Maxima und Minima der Luftschwankungen folgende Gleichung:

$$0=\overline{9.350018}\cos[30^0(x+\tfrac{1}{2})+\ 71^0 22' 7]$$
$$+\overline{8.842471}\cos[60^0(x+\tfrac{1}{2})+247^0 23' 4]$$
$$+\overline{8.537591}\cos[90^0(x+\tfrac{1}{2})+331^0 51' 5].$$

Die im §. 15 angeführten Werthe der Schwankungen des Luftdruckes in den einzelnen Monaten des Jahres zeigen, dass das Maximum derselben innerhalb Jänner und Februar fällt; wir haben daher nach §. 18:
$$c=0 \quad c'=1,$$
und wenn wir, was hier genügt, bloss Logarithmen mit 5 Decimalen gebrauchen, so haben wir für
$$x=c=0:$$

$$\log\cos 86^0 22' 7=8.80050 \qquad \log\cos 277^0 23' 4=9.10932$$
$$\underline{9.35002} \qquad \underline{8.84247}$$
$$8.15052 \qquad 7.95179$$
$$\log\cos 16^0 51' 5=9.98092$$
$$\underline{8.53759}$$
$$8.51851.$$

Die diesen Logarithmen entsprechenden Zahlen sind
$$0.01444$$
$$0.00895$$
$$\underline{0.03300,}$$
mithin
$$d=+0.05639$$

Ferner ist für
$$x=c'=1:$$

$$\log 116^0 22' 7=9.64767_n \qquad \log\cos 337^0 23' 4=9.96527$$
$$\underline{9.35002} \qquad \underline{8.84247}$$
$$8.99769_n \qquad 8.80774$$
$$\log\cos 106^0 51' 5=9.46241_n$$
$$\underline{8.53759}$$
$$8.00000_n$$

und die entsprechenden Zahlen:

$$\begin{array}{r} -0.09947 \\ +0.06423 \\ +0.01000, \\ \hline \end{array}$$

mithin $d' = -0.04524.$

Aus diesen Daten erhält man die Gleichung (XIII)

$$x = 0.554.$$

Will man die Annäherung fortsetzen, so hat man

$$c = 0.554 \quad c' = 1.000.$$

Damit findet man

$$d = +0.00858,$$

und früher fanden wir $d' = -0.04524$

mithin $d - d' = +0.05382,$

und daher $\frac{d(c-c')}{d-d'} = -0.071;$

da nun $c = +0.554,$

so ist in zweiter Annäherung $x = 0.625 = 0.62.$

Da man den Monat zu 30 Tage rechnet, so ist

0.62 Jänner = 18.6 Jänner.

Indem aber nach dem (§. 16) Gesagten x mit der Mitte des Monats beginnt, so müssen 15 Tage dazugefügt werden, um die Tage vom 1. Monatstage angefangen zu erhalten, mithin fällt das Maximum der Schwankungen des Luftdruckes auf

Jänner 33.6 oder Februar 3.6.

Ebenso sieht man aus den in §. 15 angeführten Schwankungen des Luftdruckes, dass ein Minimum zwischen $x = 6$ und $x = 7$ fällt.

Auf dem so eben gezeigten Wege findet man nun

$$x = 6.19.$$

Setzt man die Annäherung fort, indem man

$$c = 6.19 \text{ und } c' = 6$$

annimmt, so erhält man

$$x = 6.189 = 6.19.$$

Demnach fällt das Minimum der Luftschwankung auf Juli 20.7.

Werden die den Wendepunkten entsprechenden Werthe von x, nämlich

$$x = 0.62 \text{ und } x = 6.19$$

in die Gleichung (XI) gesetzt, so erhält man die Schwankung in ihrem Maximum und Minimum.

20. Aus der Gleichung (VIII) erhält man auch die Grösse des Mittels der numerischen Werthe der periodischen Erscheinung, und die Zeit, auf welche dieses Mittel fällt.

Es kann nämlich leicht gezeigt werden, dass das arithmetische Mittel aller, durch diese Gleichung gefundenen Werthe von y dem ersten Gliede a derselben gleich sei.

Denn die Gleichung für y besteht ausser der Grösse a aus einer Reihe von Gliedern, deren jedes das Product einer constanten Grösse in einen Factor von der Form sin $[v+qx]$, wo $q=\frac{2\pi}{x}$ oder ein Vielfaches dieser Grösse ist.

Bei der Entwicklung der einzelnen Werthe von y wird in jedem Gliede dieser Reihe x von $x=0$ bis $x-1$ genommen, so dass man für die Summe aller y hat

$$\Sigma y = x \, . \, a + p_1 \sum_{x=o}^{x=x-1} \sin(v' + qx) + p_2 \sum_{x=o}^{x=x-1} \sin(v'' + 2qx) + p_3 \sum_{x=o}^{x=x-1} \sin(v''' + 3qx) + \ldots$$

Es ist aber für was immer für eine ganze Zahl m

$$\sum_{x=o}^{x=x-1} \sin(v + mqx) = 0, \text{ wenn } \frac{2\pi}{x} = q \text{ oder } qx = 2\pi.$$

Denn nach §. 7 ist

$$\sum_{x=o}^{x=x-1} \sin(v + mqx) = \frac{\cos(v - \frac{mq}{2}) - \cos[v + (x - \frac{1}{2})mq]}{2 \sin \frac{mq}{2}}.$$

Da nun $$xq = 2\pi, \quad mxq = 2m\pi, \text{ also } (x - \tfrac{1}{2})mq = 2m\pi - \frac{mq}{2},$$

mithin $$v + (x - \tfrac{1}{2})mq = 2m\pi + (v - \frac{mq}{2})$$

und $$\cos[v + (x - \tfrac{1}{2})mq] = \cos(v - \frac{mq}{2}),$$

so folgt $$\sum_{x=o}^{x=x-1} \sin(v + mqx) = 0.$$

Daher ist $$\Sigma y = x \, . \, a,$$

und daher $$a = \frac{\Sigma y}{x},$$

mithin a dem arithmetischen Mittel der Werthe von y gleich.

Aus dem Gesagten erhellt, dass zur Bestimmung der Zeit, wo die periodische Erscheinung ihren mittleren Werth hat, die Gleichung führt

$$a = a + p_1 \sin(v' + x \, . \, z) + p_2 \sin(v'' + x \, . \, 2z) + p_3 \sin(v''' + x \, . \, 3z) + \ldots$$

oder

$$\text{(XIV)} \quad \ldots \quad 0 = p_1 \sin(v' + x \, . \, z) + p_2 \sin(v'' + x \, . \, 2z) + p_3 \sin(v''' + x \, . \, 3z) + \ldots$$

21. Um auch diese Bestimmung in unserem Beispiele zu erläutern, haben wir aus der Gleichung (XI) §. 16 zur Auffindung der Zeit der mittleren Schwankungen des Luftdruckes die Gleichung

$$\text{(XV)} \quad \ldots\ldots \quad 0 = \overline{9.350018} \, . \sin[30^0(x + \tfrac{1}{2}) + 71^0 22' 7]$$
$$+ \overline{8.541441} \, . \sin[60^0(x + \tfrac{1}{2}) + 247^0 23' 4]$$
$$+ \overline{8.060470} \, . \sin[90^0(x + \tfrac{1}{2}) + 331^0 51' 5].$$

Die Auflösung dieser Gleichung geschieht mittelst der indirecten Methode auf die im §. 18 gezeigte Art.

Aus den im §. 15 angeführten Beobachtungsdaten für y sieht man, dass die mittleren Werthe dieser Grösse zwischen

$$x=3 \text{ und } x=4$$

und ferner zwischen

$$x=8 \text{ und } x=9$$

fallen werden, und man findet, wenn man

$$c=3 \text{ und } c'=4$$

setzt, bei der ersten Annäherung

$$x=3.17,$$

und bei der zweiten

$$x=3.32,$$

mithin fällt der mittlere Luftdruck auf

April 24.6.

Eben so hat man für

$$c=9 \text{ und } c'=8$$

bei der ersten Annäherung

$$x=8.65$$

und bei der zweiten

$$x=8.70,$$

mithin die Zeit, auf welche ebenfalls die mittlere Schwankung des Luftdruckes während des Jahres fällt:

October 6.0.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1850

Band/Volume: 1_1

Autor(en)/Author(s): Koller Marian Wolfgang

Artikel/Article: Ueber die Berechnung periodischer Natur-Erscheinungen. (Vorgelegt am 13.4.1848.) 54-74