ALLGEMEINE TRANSFORMATION

DER

BESTIMMTEN DOPPEL-INTEGRALE.

VON

D^R. ANTON WINCKLER,
PROFESSOR DER HÖHERN MATHEMATIK AM ST. ST. JOANNEUM ZU GRATZ.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 7. JÄNNER 1859.

Doppelte und mehrfache Integrale, zwischen constanten oder durch gewisse Bedingungen bestimmten veränderlichen Grenzen gehören zu den am häufigsten in Anwendung kommenden Partien der Integralrechnung. Zu ihrer praktischen Bedeutung gesellt sich das Interesse, welches sie an sich der Betrachtung darbieten, und diesen beiden Umständen zusammen sind wohl die zahlreichen neuen Erörterungen und die seltene Reihe scharfsinniger Kunstgriffe zuzuschreiben, mit welchen die Entwickelung jenes Gegenstandes weiter geführt worden ist. In den hieher gehörigen Arbeiten kann man im Allgemeinen zweierlei Tendenzen unterscheiden: es wird entweder hauptsächlich auf eine einfachere Gestaltung der Grenzbedingungen hinzuwirken gesucht, und in dieser Hinsicht steht die so überaus schöne Methode des Herrn Prof. Dirichlet oben an; oder es wird vor Allem eine Transformation des gegebenen Differential-Ausdrucks angestrebt, und in dieser letzteren Beziehung bleibt, so ferne es sich bei Integralen mit vorgeschriebenen Grenzen um irgend welche Allgemeinheit handelt, noch fast Alles zu wünschen übrig. — Die so nahe liegende Frage nach der allgemeinen Transformation der bestimmten mehrfachen Integrale durch gleichzeitige Einführung mehrerer neuen Veränderlichen wurde nämlich bis jetzt nur Einen Schritt weit, nur bis zur Darstellung des zu integrirenden Elementes verfolgt. Euler hat in der Abhandlung: „De formulis integralibus duplicatis" in den „Novi Commentarii Acad. Scient. Petrop. T. XIV, 1759" für doppelte Integrale die betreffende Formel, — welche also jetzt ihr erstes Jahrhundert feiert, — entwickelt und hierdurch die erste Grundlage zu einer Theorie der doppelten Integrale gegeben. Wie bekannt zeigte dann Lagrange im Jahre 1773, dass die Transformation dreifacher Integrale nach einer Methode geschehen könne, welche sich auf vielfache Integrale im Allgemeinen anwenden lässt. — So umfassend nun durch diese und einige spätere Arbeiten die Frage, soweit sie die Transformation des Elements betrifft, gelöst ist, so sehr mangelt es bis jetzt selbst an jedem Versuche, den zweiten Theil der Frage, nämlich die explicite Darstellung des transformirten Doppel-Integrals, in der Art allgemein zu lösen, dass die Anzahl der neuen Doppel-Integrale, in welche das gegebene zerfällt und zugleich die Grenzen derselben vollständig bestimmt wären. — In Ermangelung einer solchen Lösung mochte man sich nun allerdings damit beruhigen, dass die vollständige Ausführung der Transformation wenigstens in jedem einzelnen Falle sich werde finden lassen, aber man darf nicht übersehen, dass selbst hierzu im Allgemeinen jeder Anhaltspunkt fehlt, und wohl darum Alles, was in dieser Hinsicht erreicht worden ist, sich auf wenige und sehr specielle Fälle (wie z. B. die Complanation des dreiaxigen Ellipsoids etc.) beschränkt, bei welchen die Grenzen der neuen Doppel-Integrale mittelst geometrischer Betrachtungen, oder durch Verfahrungsarten ermittelt werden, welche derselben unmittelbar nachgebildet sind. Dass sich daraus der in anderen Fällen einzuschlagende Weg oder der Charakter der allgemeinen Lösung nicht erkennen lassen konnte, versteht sich, wie ich glaube, ganz von selbst.

In der vorliegenden Materie wachsen allerdings die Schwierigkeiten mit jeder Verallgemeinerung der Grenzbedingungen und mit der Anzahl der Integrationsveränderlichen sehr rasch, und es erscheint zweckmässig auch hier von dem verhältnissmässig Einfachen auszugehen, sich also zunächst auf Doppel-Integrale mit explicite gegebenen Grenzen zu beschränken und selbst bei diesen gewisse Voraussetzungen festzuhalten, zugleich aber auch die möglichst allgemeinen Gesichtspunkte der Behandlung zu verfolgen. — Rücksichtlich dieser letzten Bemerkung glaube ich mich beispielsweise auf eine frühere, im 45. Bande des mathematischen Journals von Crelle erschienene Arbeit beziehen zu können, worin ich die Transformation einer grössern Anzahl doppelter Integrale erörtert habe, welche sich mittelst einer einzigen neuen Veränderlichen auf Quadraturen zurückführen lassen. Als wichtigeres Ergebniss jener auf Grundlage gewisser geometrischer Vorstellungen durchgeführten Betrachtungen hebe ich hervor, dass zur Darstellung des transformirten Doppel-Integrals nie mehr als drei andere doppelte Integrale erforderlich sind, obgleich es deren in besonderen Fällen auch weniger, oder wenn man gewisse symmetrische Formen anstrebt, wohl auch mehr als drei sein können, die sich jedoch immer wieder auf diese Anzahl zurückführen lassen.

In der vorliegenden Abhandlung nun werde ich die in allen Theilen vollständig bestimmte Darstellung der Transformation des doppelten Integrals

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x,y)\, dy$$

unter der Voraussetzung herleiten, dass die Veränderlichen x, y gleichzeitig durch zwei andere λ, μ ersetzt werden, welche mit jenen in dem durch die Gleichungen

$$x = X_{(\lambda,\,\mu)} \qquad ; \qquad y = Y_{(\lambda,\,\mu)}$$

gegebenen Zusammenhange stehen.

Die Lösung dieser, wie man sieht, sehr allgemeinen Aufgabe ist bis jetzt weder auf geometrischem, noch auf analytischem Wege gelungen und es scheint auch in der That auf den ersten Anblick, dass sich, ohne vollständige Specialisirung der Grenzen und der Relationen zwischen den alten und neuen Veränderlichen, eine erschöpfende Beantwortung der Frage nicht werde finden lassen. Der weitere Verlauf der vorliegenden Arbeit wird indessen zeigen, dass dies gleichwohl der Fall ist.

Ich werde hierbei den rein analytischen Weg verfolgen, theils weil dieser der Natur der Aufgabe am angemessensten zu sein scheint, theils weil sich auf jenem Wege das Verfahren erkennen lässt, welches zum Ziele führt, wenn die Grenzbedingungen in anderer, noch allgemeinerer Form gegeben sind, als sie hier vorausgesetzt werden. Indessen ist es nicht schwierig vielen Theilen der folgenden analytischen Darstellung eine geometrische Deutung unterzulegen. Ich glaube sie also ohne weitere Ausführung dem Leser überlassen zu dürfen.

Einige an sich bemerkenswerthe Anwendungen des allgemeinen Ergebnisses werden den Schluss dieser Arbeit bilden, wobei ich nicht unterlassen werde die gelegentlich sich ergebenden, meines Wissens bereits bekannten Resultate, in jedem einzelnen Falle als solche zu bezeichnen.

1.

Um den folgenden Erörterungen eine völlig bestimmte Grundlage zu geben, müssen einige, die Allgemeinheit übrigens nur wenig beeinträchtigende Voraussetzungen bis zu ihrer ausdrücklichen Beseitigung festgehalten werden.

1. Bezüglich der Grenzen des Doppel-Integrals wird vorausgesetzt, dass $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ für alle zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werthe von x einförmig, stetig und endlich bleiben, und dass zwischen ξ_0 und ξ_1 kein Werth von x liege, für welchen $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ einander gleich werden, dass sich daher die Grenzbedingungen stets durch die Ungleichheiten:

$$\varphi^0(x) < y < \varphi^1(x)$$
$$\xi_0 < x < \xi_1$$

repräsentiren lassen, indem dann niemals $\varphi^0_{(x)}$ grösser als $\varphi^1_{(x)}$ werden kann. An dieser letztern Voraussetzung werde ich durchgehends festhalten, weil durch sie alle Betrachtungen wesentlich vereinfacht werden, und weil sie in der That keine eigentliche Beschränkung der Allgemeinheit in sich enthält. Denn gäbe es wirklich zwischen ξ_0 und ξ_1 einen oder selbst mehrere Werthe von x, für welche $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ einander gleich werden, so könnte man das Grenzenintervall der Veränderlichen y jenen Stellen entsprechend zerlegen, so dass man mehrere Doppel-Integrale erhielte, welche insgesammt der obigen Voraussetzung entsprächen und auf welche dann die später sich ergebenden Sätze unverändert angewendet werden können.

2. Die Transformation des Doppel-Integrals und der eben bezeichneten Grenzbedingungen durch die neuen Veränderlichen λ, μ geschehe vermöge der Relationen:

$$x = X_{(\lambda,\mu)} \quad ; \quad y = Y_{(\lambda,\mu)}$$

wobei die Functionen $X_{(\lambda,\mu)}$, $Y_{(\lambda,\mu)}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von λ, μ stets einförmig und stetig bleiben, ob λ, μ einzeln oder gleichzeitig innerhalb eines in Frage kommenden Intervalls sich ändern mögen, und wobei jene Functionen die Beschaffenheit haben, dass einem bestimmten Werthe von x und einem solchen von y jederzeit nur Ein bestimmter Werth von λ und ein solcher von μ entspreche.

Es ist eine nothwendige Folge aller dieser Voraussetzungen, dass sich aus den obigen zwei Gleichungen niemals eine solche bilden lasse, in welcher entweder blos λ und μ oder blos x und y vorkommen, so wie auch, dass es keine Werthe von λ und μ gibt, für welche $X_{(\lambda,\,\mu)}$ zwischen ξ_0 und ξ_1 liegt, wenn sowohl λ als μ aus den Gleichungen:

$$\varphi^0\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) = \varphi^1\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) = Y_{(\lambda,\,\mu)}$$

bestimmt werden.

3. Die Wurzel:

$$\begin{array}{llll} \mu = \mu_0 & \text{der Gleichung} & & X_{(\lambda,\,\mu)} = \xi_0 \\ \mu = \mu_1 & \text{"} & \text{"} & X_{(\lambda,\,\mu)} = \xi_1 \\ \mu = \mu^0 & \text{"} & \text{"} & Y_{(\lambda,\,\mu)} = \varphi^0\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) \\ \mu = \mu^1 & \text{"} & \text{"} & Y_{(\lambda,\,\mu)} = \varphi^1\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) \end{array}$$

wird als vollständig bestimmt und als reell für alle diejenigen Werthe von λ vorausgesetzt, deren Intervalle durch das Folgende ihre nähere Bestimmung erhalten, und welche mit $\lambda_0^{\,1}$, $\lambda_1^{\,0}$, $\lambda_0^{\,0}$, $\lambda_1^{\,1}$ bezeichnet werden mögen.

4. Diese vier Werthe von λ sind die **einzigen reellen**, in jeder Hinsicht vollkommen bestimmten Wurzeln gewisser Gleichungen, und zwar sei:

$$\begin{array}{lllll} \lambda = \lambda_0^{\,1} & \text{die Wurzel der Gleichungen} & \left\{\begin{array}{l} X_{(\lambda,\,\mu)} = \xi_0 \\ Y_{(\lambda,\,\mu)} = \varphi^1\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) \end{array}\right. & \text{oder:} & \mu_0 = \mu^1 \\ \lambda = \lambda_1^{\,0} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \left\{\begin{array}{l} X_{(\lambda,\,\mu)} = \xi_1 \\ Y_{(\lambda,\,\mu)} = \varphi^0\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) \end{array}\right. & \text{"} & \mu_1 = \mu^0 \\ \lambda = \lambda_0^{\,0} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \left\{\begin{array}{l} X_{(\lambda,\,\mu)} = \xi_0 \\ Y_{(\lambda,\,\mu)} = \varphi^0\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) \end{array}\right. & \text{"} & \mu_0 = \mu^0 \\ \lambda = \lambda_1^{\,1} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & \left\{\begin{array}{l} X_{(\lambda,\,\mu)} = \xi_1 \\ Y_{(\lambda,\,\mu)} = \varphi^1\,(X_{(\lambda,\,\mu)}) \end{array}\right. & \text{"} & \mu_1 = \mu^1 \end{array}$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass in Folge der oben bezeichneten Voraussetzungen die Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ keine Werthe von λ und μ, nämlich $\lambda = \lambda^{01}$, $\mu = \mu^{01}$ liefern kann, für welche $X_{(\lambda,\,\mu)}$ zwischen ξ_0 und ξ_1 fällt. In gleicher Weise können die der Gleichung $\mu_0 = \mu_1$ entsprechenden Werthe $\lambda = \lambda_{01}$, $\mu = \mu_{01}$ keinem zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werthe von $X_{(\lambda,\,\mu)}$ entsprechen.

2.

Ausser den so eben bezüglich der Functionen $\varphi^0{}_{(x)}$, $\varphi^1{}_{(x)}$, $X_{(\lambda,\,\mu)}$, $Y_{(\lambda,\,\mu)}$ gemachten Annahmen bedarf es keiner weiteren Beschränkungen. Dagegen müssen des Folgenden wegen alle diejenigen Unterscheidungen bemerkt werden, welche sowohl bei der blos partiellen als bei der gleichzeitigen Änderung der beiden Veränderlichen aufzufassen sind, und welche insbesondere bezüglich des Wachsens oder Abnehmens der Functionen $X_{(\lambda,\,\mu)}$, $Y_{(\lambda,\,\mu)}$, μ_0; μ_1, μ^0, μ^1 in dem ganzen zur Sprache kommenden Umfange eintreten können.

Es seien $\partial\lambda$, $\partial\mu$ an sich **positive**, sehr kleine Zuwachse der Veränderlichen λ, μ, deren Beziehung zu einander in folgender Weise festgesetzt wird. Man lasse nämlich in $X_{(\lambda,\,\mu)}$ und $Y_{(\lambda,\,\mu)}$ einmal blos λ um $\pm\,\partial\lambda$, und dann blos μ um $\pm\,\partial\mu$ sich ändern und setze voraus, es hänge $X_{(\lambda,\mu)}$ dergestalt von λ und μ ab, dass $\partial\lambda$, $\partial\mu$ gleichzeitig positiv werden, wenn man ihr Werthverhältniss gemäss der Gleichung

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} = X_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)}$$

bestimmt, so können bei der andern Function $Y_{(\lambda,\mu)}$ offenbar nur die folgenden zwei Fälle eintreten, nämlich dass entweder:

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)}$$

oder dass

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)}$$

wird, wobei alle Doppelzeichen correspondirende sind.

Lässt man dagegen einmal blos λ um $\pm\partial\lambda$ und dann blos μ um $\mp\partial\mu$ sich ändern, und setzt man voraus, es hänge nunmehr $X_{(\lambda,\mu)}$ in der Art von λ und μ ab, dass $\partial\lambda$, $\partial\mu$ positiv ausfallen, wenn man sie der Gleichung

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} = X_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)}$$

gemäss bestimmt, so können bei der Function $Y_{(\lambda,\mu)}$, deren Variable immer zu gleicher Zeit dieselben Änderungen annehmen, ebenfalls zwei Fälle eintreten, indem nämlich entweder

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)}$$

oder aber

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)}$$

sein kann, wo auch hier die Doppelzeichen insgesammt wieder correspondirende sind.

Es ist klar, dass hinsichtlich der partiellen Änderung der Variabeln andere Fälle, welche von den vier angeführten wesentlich verschieden wären, nicht möglich sind.

Ich werde nun die Relationen der Werthe von $X_{(\lambda,\mu)}$, $Y_{(\lambda,\mu)}$ unter dem Gesichtspunkte betrachten, dass darin beide Veränderliche sich gleichzeitig ändern, und zwar indem μ als irgend eine bestimmte Function von λ gedacht wird. Dabei fasse man alle überhaupt möglichen Beziehungen jener Functionswerthe in das Auge, welche sowohl bei blos partieller als gleichzeitiger Änderung von λ und μ eintreten können. — Man nehme zu dem Ende an, es sei $d\lambda$ die sehr kleine Änderung von λ, in Folge deren sich μ um $d\mu$ ändert, oder also, es sei $d\mu$ das Differential von μ genommen nach λ.

Um alle hierbei möglichen Fälle zu umfassen, gehe man von den beiden bezüglich der partiellen Änderung so eben getroffenen Unterscheidungen aus und verfahre wie folgt.

3.

Für den ersten Fall nehme ich wieder an, es hänge $X_{(\lambda,\mu)}$ so von λ, μ ab, dass $\partial\lambda$, $\partial\mu$ positive Werthe erhalten, wenn man einmal $\lambda \pm \partial\lambda$ und dann $\mu \pm \partial\mu$ an die Stelle von λ, μ, und die beiden entsprechenden Werthe von X einander gleich setzt; auch setze ich sofort

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} = X_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} = X_{(\lambda \pm d\lambda\ ,\ \mu \pm d\mu)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad A^{(0)}, B^{(0)}$$

was immer möglich ist, da die Taylor'sche Entwickelung als Bedingung für die vier Zuwachse die Gleichung:

$$\partial\lambda\partial\mu = \partial\lambda d\mu + \partial\mu d\lambda$$

liefert, welcher durch gehörige Wahl des Zeichens und Werthes von $d\lambda$ immer entsprochen werden kann.

Dies vorausgesetzt kann nun $Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)}$ zu den Gliedern der Ungleichheiten (Art. 2)

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} \;\ldots\ldots\; A^{(0)}$$
$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtreqless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} \;\ldots\ldots\; B^{(0)}$$

jedesmal drei verschiedene Stellungen einnehmen, und zwar in $A^{(0)}$:

$$\begin{array}{lllll}
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} & \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} & \gtrless Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)} & \ldots\ldots & A^{(1)} \\
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} & \gtrless Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)} & \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} & \ldots\ldots & A^{(2)} \\
Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)} & \gtrless Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} & \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} & \ldots\ldots & A^{(3)}
\end{array}$$

Dessgleichen in $B^{(0)}$:

$$\begin{array}{lllll}
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} & \gtreqless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} & \gtreqless Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)} & \ldots\ldots & B^{(1)} \\
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} & \gtreqless Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)} & \gtreqless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} & \ldots\ldots & B^{(2)} \\
Y_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \pm d\mu)} & \gtreqless Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} & \gtreqless Y_{(\lambda,\, \mu \pm \partial\mu)} & \ldots\ldots & B^{(3)}
\end{array}$$

Entwickelt man die Functionswerthe nach der Taylor'schen Reihe und bezeichnet man der Kürze wegen $X_{(\lambda,\, \mu)}$, $Y_{(\lambda,\, \mu)}$ einfach durch X, Y, so ergeben sich der Ordnung nach die folgenden, mit den obigen gleichbedeutenden Relationen:

$$\begin{array}{lll}
\frac{dX}{d\lambda}\partial\lambda & = \frac{dX}{d\mu}\partial\mu & = \frac{dX}{d\lambda}d\lambda + \frac{dX}{d\mu}d\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & > \frac{dY}{d\mu}\partial\mu & > \frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dY}{d\mu}d\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & > \frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dY}{d\mu}d\mu & > \frac{dY}{d\mu}\partial\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda + \frac{dY}{d\mu}\partial\mu & > \frac{dY}{y\lambda}\partial\lambda & > \frac{dY}{d\mu}\partial\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & < \frac{dY}{d\mu}\partial\mu & < \frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dX}{d\mu}d\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & < \frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dY}{d\mu}d\mu & < \frac{dY}{d\mu}\partial\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dY}{d\mu}d\mu & < \frac{dY}{d\beta}\partial\lambda & < \frac{dY}{d\mu}\partial\mu
\end{array}$$

worauf ich bald wieder zurückkommen werde.

4.

Im zweiten Fall (des Art. 2) hängt $X_{(\lambda,\, \mu)}$ so von λ, μ ab, dass $\partial\lambda$, $\partial\mu$ nur dann positive Werthe erhalten können, wenn man einmal $\lambda \pm \partial\lambda$ für λ und dann $\mu \mp \partial\mu$ für μ, und hierauf die beiden entsprechenden Werthe von Y einander gleich setzt. Zugleich setze man

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} = X_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)} = X_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \mp d\mu)} \;\ldots\ldots\; A_0\,,\ B_0$$

was immer möglich ist, weil die vier Zuwachse nur der Gleichung

$$\partial\lambda\partial\mu = \partial\lambda d\mu + \partial\mu d\lambda$$

zu genügen haben, welcher durch eine passende Wahl des eigenen Zeichens und Werthes von $d\lambda$ jederzeit entsprochen werden kann.

Ist dies der Fall, so kann nun $Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)}$, worin $d\lambda$, $d\mu$ bis auf die Zeichen gewöhnliche Differentiale vorstellen, zu den Gliedern der Ungleichheiten (Art. 2):

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0$$

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} \lessgtr Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad B_0$$

jedesmal drei verschiedene Stellungen einnehmen, nämlich in A_0:

$$\begin{array}{lllll}
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} & \gtrless Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} & \gtrless Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)} & \ldots\ldots\ldots & A_1 \\
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} & \gtrless Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)} & \gtrless Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} & \ldots\ldots\ldots & A_2 \\
Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)} & \gtrless Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} & \gtrless Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} & \ldots\ldots\ldots & A_3
\end{array}$$

und ebenso in B_0:

$$\begin{array}{lllll}
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} & \lessgtr Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} & \lessgtr Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)} & \ldots\ldots\ldots & B_1 \\
Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\ \mu)} & \lessgtr Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)} & \lessgtr Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} & \ldots\ldots\ldots & B_2 \\
Y_{[\lambda \pm d\lambda,\ \mu \mp d\mu)} & \lessgtr Y_{(\lambda \pm d\lambda,\ \mu)} & \lessgtr Y_{(\lambda,\ \mu \mp \partial\mu)} & \ldots\ldots\ldots & B_3
\end{array}$$

Mit diesen gleichbedeutend ergeben sich durch die Entwickelung der Functionswerthe in der obigen Ordnung die folgenden Relationen:

$$\begin{array}{lll}
\frac{dX}{d\lambda}\partial\lambda & = -\frac{dX}{d\mu}\partial\mu & = \frac{dX}{d\lambda}d\lambda - \frac{dX}{d\mu}d\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & > -\frac{dY}{d\mu}\partial\mu & > \frac{dY}{d\lambda}d\lambda - \frac{dY}{d\mu}d\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & > \frac{dY}{d\lambda}d\lambda - \frac{dY}{d\mu}d\mu & > -\frac{dY}{d\mu}\partial\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}d\lambda - \frac{dY}{d\mu}d\mu & > \frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & > -\frac{dY}{d\mu}\partial\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & < -\frac{dY}{d\mu}\partial\mu & < \frac{dY}{d\lambda}d\lambda - \frac{dY}{d\mu}d\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & < \frac{dY}{d\lambda}d\lambda - \frac{dY}{d\mu}d\mu & < -\frac{dY}{d\mu}\partial\mu \\
\frac{dY}{d\lambda}d\lambda - \frac{dY}{d\mu}d\mu & < \frac{dY}{d\lambda}\partial\lambda & < -\frac{dY}{d\mu}\partial\mu
\end{array}$$

mit deren näherer Betrachtung ich mich alsbald beschäftigen werde.

5.

Eliminirt man aus den sechs am Schluss des Art. 3 stehenden Relationen mittelst der Gleichungen $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ jedesmal drei der Incremente $\partial\lambda$, $\partial\mu$, $d\lambda$, $d\mu$, und setzt man zur Abkürzung:

$$\Delta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

so ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\partial\lambda > 0\ ,\ \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\partial\mu > 0\ ,\ \left\{\begin{array}{llll}
\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}d\lambda < 0\ ; & \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}d\mu > 0 & \ldots\ldots & A^{(1)} \\
\quad " \quad > 0\ ; & \quad " \quad > 0 & \ldots\ldots & A^{(2)} \\
\quad " \quad > 0\ ; & \quad " \quad < 0 & \ldots\ldots & A^{(3)}
\end{array}\right.$$

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\,\partial\lambda < 0\,,\ \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\,\partial\mu < 0\,,\ \begin{cases} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\,d\lambda > 0\,, & \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\,d\mu < 0 \,\ldots\ldots B^{(1)} \\ \quad\text{"} \quad < 0\,, & \quad\text{"} \quad < 0 \,\ldots\ldots B^{(2)} \\ \quad\text{"} \quad < 0\,, & \quad\text{"} \quad > 0 \,\ldots\ldots B^{(3)} \end{cases}$$

Verfährt man in derselben Weise mit den am Schlusse des Art. 4 aufgestellten Relationen, so findet man die denselben entsprechenden Bedingungen wie folgt:

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\,\partial\lambda > 0\,;\ \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\,\partial\mu < 0\,,\ \begin{cases} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\,d\lambda < 0\,, & \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\,d\mu < 0 \,\ldots\ldots A_1 \\ \quad\text{"} \quad > 0\,, & \quad\text{"} \quad < 0 \,\ldots\ldots A_2 \\ \quad\text{"} \quad > 0\,, & \quad\text{"} \quad > 0 \,\ldots\ldots A_3 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\,\partial\lambda < 0\,,\ \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\,\partial\mu < 0\,,\ \begin{cases} \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\mu}}\,d\lambda > 0\,, & \frac{\Delta}{\frac{dX}{d\lambda}}\,d\mu > 0 \,\ldots\ldots B_1 \\ \quad\text{"} \quad < 0\,, & \quad\text{"} \quad > 0 \,\ldots\ldots B_2 \\ \quad\text{"} \quad < 0\,, & \quad\text{"} \quad < 0 \,\ldots\ldots B_3 \end{cases}$$

Wie man hieraus sieht, sind durch die Bedingungen, worin $\partial\lambda$ und $\partial\mu$ vorkommen, die gleichzeitigen Zeichen von Δ und der partiellen Differentialquotienten $\frac{dX}{d\mu}$, $\frac{dX}{d\lambda}$ und folglich auch die entsprechenden (eigenen) Zeichen von $d\lambda$ und $d\mu$ in allen denkbaren Fällen bestimmt.

Es verdient jedoch im Interesse der Kürze schon jetzt bemerkt zu werden, dass die späterhin ausschliesslich in Frage kommenden eigenen Zeichen von $d\lambda$, resp. bei $A^{(2)}$ und $A^{(3)}$, bei $B^{(2)}$ und $B^{(3)}$, bei A_2 und A_3 so wie bei B_2 und B_3 jedesmal genau dieselben sind, und dass daher, weil eben, wie sich zeigen wird, die Vorzeichen von $d\mu$ nicht in Betracht kommen und $\partial\lambda$, $\partial\mu$ an und für sich positiv sind, von jetzt an immer nur auf die Fälle $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, A_1, A_2, B_1, B_2 Rücksicht zu nehmen ist.

6.

Um alle möglichen Zeichenverbindungen, welche die Bedingungen des vorigen Artikels zulassen, zu erhalten, muss man Δ seine zwei möglichen Vorzeichen $+$ und $-$ beilegen, daraus die Zeichen der partiellen Differentialquotienten $\frac{dX}{d\lambda}$, $\frac{dX}{d\mu}$ und sofort jenes von $d\lambda$ bestimmen. Alle hieraus entspringenden Fälle lassen sich indessen kurz zusammenfassen, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, in folgender Form:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Δ</th><th rowspan="2">$\frac{dX}{d\lambda}$</th><th rowspan="2">$\frac{dX}{d\mu}$</th><th colspan="2">Eigenes Zeichen von $d\lambda$</th></tr>
<tr><th>$A^{(1)}\ B^{(1)}\ A_1\ B_1$</th><th>$A^{(2)}\ B^{(2)}\ A_2\ B_2$</th></tr>
<tr><td>$A^{(1)}\ A^{(2)}$</td><td>$\pm$</td><td>$\pm$</td><td>$\pm$</td><td rowspan="4">$-$</td><td rowspan="4">$+$</td></tr>
<tr><td>$B^{(1)}\ B^{(2)}$</td><td>$\pm$</td><td>$\mp$</td><td>$\mp$</td></tr>
<tr><td>$A_1\ A_2$</td><td>$\pm$</td><td>$\mp$</td><td>$\pm$</td></tr>
<tr><td>$B_1\ B_2$</td><td>$\pm$</td><td>$\pm$</td><td>$\mp$</td></tr>
</table>

Hierin ist Alles enthalten, was nun im Folgenden über die Functionen X, Y ausser den im Art. 1 gemachten Annahmen, zu berücksichtigen ist. — Es drückt offenbar den Zusammenhang der Zeichen der Functional-Determinante Δ, der partiellen Differentialquotienten und der Zuwachse der Veränderlichen irgend zweier Functionen aus, welche gemeinschaftlich von denselben zwei veränderlichen Grössen abhängen. Ohne diesen Zusammenhang zu berücksichtigen wäre es nicht möglich das Zeichen der Determinante Δ allgemein zu fixiren, welches bekanntlich die Eingangs bezeichnete Euler'sche Transformation unbestimmt lässt.

7.

Um die folgenden Erörterungen auf genaue Bestimmungen zu gründen, müssen ferner noch alle, hinsichtlich des Wachsens und Abnehmens der Functionen:

$$\varphi^0(X_{(\lambda,\mu)}) \quad , \quad \varphi^1(X_{(\lambda,\mu)})$$

möglichen Fälle in Betracht gezogen werden. — Wie sich nun im weitern Verlauf herausstellen wird, kommt es hierbei auf die Änderungen dieser zwei Functionen in der Nähe derjenigen Werthe einer der beiden Veränderlichen, z. B. jener μ an, für welche die Ungleichheiten des Art. 1, an der Grenze ihrer Giltigkeit, in Gleichheiten übergehen, für welche also entweder:

$$\varphi^0(X_{(\lambda,\mu)}) = Y_{(\lambda,\mu)} \qquad \text{oder} \qquad \varphi^1(X_{(\lambda,\mu)}) = Y_{(\lambda,\mu)}$$

wird, und wofür (Art. 1) die Veränderliche μ als Function von λ die Werthe μ^0 und μ^1 erhält.

Da nun vermöge der Bedingung (Art. 1):

$$\varphi^0(X_{(\lambda,\mu)}) < Y_{(\lambda,\mu)} < \varphi^1(X_{(\lambda,\mu)})$$

jederzeit $\varphi^0(X)$ kleiner und $\varphi^1(X)$ grösser als Y bleiben muss, so ist leicht zu sehen, dass im Ganzen nur die folgenden vier Fälle möglich sind:

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda,\mu^0+\partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda,\mu^0+\partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda,\mu^1-\partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda,\mu^1-\partial\mu^1)}) \end{array}\right\} \ldots\ldots \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda,\mu^0-\partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda,\mu^0-\partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda,\mu^1+\partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda,\mu^1+\partial\mu^1)}) \end{array}\right\} \ldots\ldots \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda,\mu^0-\partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda,\mu^0-\partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda,\mu^1-\partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda,\mu^1-\partial\mu^1)}) \end{array}\right\} \ldots\ldots \mathrm{III}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda,\mu^0+\partial\mu^0)} > \varphi^0(X_{(\lambda,\mu^0+\partial\mu^0)}) \\ Y_{(\lambda,\mu^1+\partial\mu^1)} < \varphi^1(X_{(\lambda,\mu^1+\partial\mu^1)}) \end{array}\right\} \ldots\ldots \mathrm{IV}$$

wobei $\partial\mu^0$, $\partial\mu^1$ an sich positive, sehr kleine Zuwachse bezeichnen, deren nähere Bestimmung vorbehalten bleibt.

Welches aber auch die Werthverhältnisse jener Zuwachse seien, so folgt jedenfalls, dass die Erfüllung der obigen vier Bedingungen, hinsichtlich der Werthe der Veränderlichen μ davon abhängt, dass:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \ldots\ldots \text{bei I}$$
$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu > \mu^1 \ldots\ldots \text{bei II}$$

$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \; . \; . \; . \; . \; . \text{ bei III}$$

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu > \mu^1 \; . \; . \; . \; . \; . \text{ bei IV}$$

sei; eine Bemerkung auf welche ich später zurückkommen werde.

8.

Die so eben bezeichneten vier Fälle lassen sich in eine andere Form bringen, und zwar vermittelst einer Umgestaltung, wodurch die Functionen φ^0, φ^1 eliminirt und die entsprechenden Ungleichheiten einfach auf die Formen jener zurückgeführt werden, welche in den vorhergehenden Artikeln betrachtet worden sind. Zugleich erhalten auch die Verhältnisse der Zuwachse $\partial\mu^1$, $\partial\mu^0$ in jedem einzelnen Falle ihre nähere Bestimmung.

Es sei zu diesem Behufe φ^* der Repräsentant von φ^0 und φ^1; μ^* jener von μ^0 und μ^1, und zwar sei dieses μ^*, als Function von λ gedacht, derjenige Werth, welcher der Gleichung:

$$Y_{(\lambda,\,\mu^*)} = \varphi^*\,(X_{(\lambda,\,\mu^*)})$$

allein Genüge leistet. Lässt man darin λ um $\pm\, d\lambda$, und entsprechend μ^* um $\pm\, d\mu^*$ sich ändern, so wird man haben:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \pm d\mu^*)} = \varphi^*\,(X_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \pm d\mu^*)})$$

Bestimmt man nunmehr, wie dies in Art. 3 geschah, und unter der dort gemachten Voraussetzung bezüglich der Zeichen der Zuwachse $\partial\lambda$, $\partial\mu^*$, $d\lambda$, $d\mu^*$ diese letzteren gemäss der Gleichung

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)} = X_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \pm d\mu^*)} \; . \; . \; . \; . \; . \; A^*, B^*$$

so lässt sich der für Y gefundenen Gleichung auch die Form geben:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \pm d\mu^*)} = \varphi^*\,(X_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)})$$

Daraus lassen sich nun die folgenden Schlüsse ziehen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Ist} & \\
& Y_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)} \gtrless \varphi^*\,(X_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)}) \\
\text{so ist auch:} & \\
& Y_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \pm d\mu^*)} \lesseqgtr Y_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)} \\
\text{Ist dagegen} & \\
& Y_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)} \lesseqgtr \varphi^*\,(X_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)}) \\
\text{so ist:} & \\
& Y_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \pm d\mu^*)} \gtrless Y_{(\lambda,\,\mu^* \pm \partial\mu^*)}
\end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; C^*$$

Ganz analog verfahre man in dem Falle des Art. 4.

Lässt man nämlich in der Gleichung:

$$Y_{(\lambda,\,\mu^*)} = \varphi^*\,(X_{(\lambda,\,\mu^*)})$$

λ um $\pm\, d\lambda$ sich ändern, und ist $\mp\, d\mu^*$ die entsprechende Änderung von μ^*, so hat man:

$$Y_{(\lambda \pm d\lambda,\,\mu^* \mp d\mu^*)} = \varphi^*\,(X_{(\lambda \pm d\lambda;\,\mu^* \mp d\mu^*)})$$

und wenn man nun, wie in Art. 4 die Verhältnisse der Zuwachse gemäss der Gleichung:

$$X_{(\lambda\pm\delta\lambda,\ \mu^*)} = X_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)} = X_{(\lambda\pm d\lambda,\ \mu^*\mp d\mu^*)}\ \ldots\ldots\ A_*\ ,\ B_*$$

bestimmt, so kann man auch schreiben:

$$Y_{(\lambda\pm d\lambda,\ \mu^*\mp d\mu^*)} = \varphi^*\left(X_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)}\right)$$

Hieraus lässt sich schliessen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Ist} & \\
 & Y_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)} \lesseqgtr \varphi^*\left(X_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)}\right) \\
\text{so folgt:} & \\
 & Y_{(\lambda\pm d\lambda,\ \mu^*\mp d\mu^*)} \gtreqless Y_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)} \\
\text{Ist dagegen} & \\
 & Y_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)} \gtreqless \varphi^*\left(X_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)}\right) \\
\text{so ist:} & \\
 & Y_{(\lambda\pm d\lambda,\ \mu^*\mp d\mu^*)} \lesseqgtr Y_{(\lambda,\ \mu^*\mp\delta\mu^*)}
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ C_*$$

Andere Fälle als die eben betrachteten lassen sich nicht angeben.

9.

Mit Hilfe der so eben bemerkten Sätze kann man die vier Relationen des Art. 7 in folgender Weise umformen. Verbindet man nämlich die Relationen A^*, B^* und C^*, sodann A_*, B_* und C_* mit jenen des Art. 7, so ergibt sich, wie leicht zu sehen:

Ist $X_{(\lambda,\ \mu)}$ so beschaffen, dass

$$X_{(\lambda\pm\delta\lambda,\ \mu)} = X_{(\lambda,\ \mu\pm\delta\mu)} = X_{(\lambda\pm d\lambda,\ \mu\pm d\mu)}\ \ldots\ldots\ A^{(0)}\ ,\ B^{(0)}$$

gesetzt werden kann, und ist entweder

$$Y_{(\lambda\pm\delta\lambda,\ \mu)} \gtreqless Y_{(\lambda,\ \mu\pm\delta\mu)}\ \ldots\ldots\ A^{(0)}$$

oder:

$$Y_{(\lambda\pm\delta\lambda,\ \mu)} \lesseqgtr Y_{(\lambda,\ \mu\pm\delta\mu)}\ \ldots\ldots\ B^{(0)}$$

so werden die vier Fälle des Art. 7 durch die folgenden ersetzt:

$$\left.\begin{array}{l}
Y_{(\lambda+d\lambda,\ \mu^0+d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\ \mu^0+\delta\mu^0)}\ \ldots\ldots\ A^{(1)}\ ,\ B^{(2)} \\
Y_{(\lambda-d\lambda,\ \mu^1-d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\ \mu^1-\delta\mu^1)}\ \ldots\ldots\ A^{(1)}\ ,\ B^{(2)}
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I}^{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
Y_{(\lambda-d\lambda,\ \mu^0-d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\ \mu^0-\delta\mu^0)}\ \ldots\ldots\ A^{(2)}\ ,\ B^{(1)} \\
Y_{(\lambda+d\lambda,\ \mu^1+d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\ \mu^1+\delta\mu^1)}\ \ldots\ldots\ A^{(2)}\ ,\ B^{(1)}
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{II}^{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
Y_{(\lambda-d\lambda,\ \mu^0-d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\ \mu^0-\delta\mu^0)}\ \ldots\ldots\ A^{(2)}\ ,\ B^{(1)} \\
Y_{(\lambda-d\lambda,\ \mu^1-d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\ \mu^1-\delta\mu^1)}\ \ldots\ldots\ A^{(1)}\ ,\ B^{(2)}
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{III}^{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
Y_{(\lambda+d\lambda,\ \mu^0+d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\ \mu^0+\delta\mu^0)}\ \ldots\ldots\ A^{(1)}\ ,\ B^{(2)} \\
Y_{(\lambda+d\lambda,\ \mu^1+d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\ \mu^1+\delta\mu^1)}\ \ldots\ldots\ A^{(2)}\ ,\ B^{(1)}
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{IV}^{(1)}$$

Ist $X_{(\lambda,\,\mu)}$ so beschaffen, dass:

$$X_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} = X_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)} = X_{(\lambda \pm d\lambda,\, \mu \mp d\mu)}$$

gesetzt werden kann, und ist entweder:

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \gtrless Y_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)} \; \ldots\ldots \; A_0$$

oder:

$$Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)} \lesseqgtr Y_{(\lambda,\, \mu \mp \partial\mu)} \; \ldots\ldots \; B_0$$

so werden die vier Fälle des Art. 7 durch die folgenden dargestellt:

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda - d\lambda,\, \mu^0 + d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\, \mu^0 + \partial\mu^0)} \; \ldots\ldots \; A_2\,,\, B_1 \\ Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^1 - d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\, \mu^1 - \partial\mu^1)} \; \ldots\ldots \; A_2\,,\, B_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{I}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^0 - d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\, \mu^0 - \partial\mu^0)} \; \ldots\ldots \; A_1\,,\, B_2 \\ Y_{(\lambda - d\lambda,\, \mu^1 + d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\, \mu^1 + \partial\mu^1)} \; \ldots\ldots \; A_1\,,\, B_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{II}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^0 - d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\, \mu^0 - \partial\mu^0)} \; \ldots\ldots \; A_1\,,\, B_2 \\ Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^1 - d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\, \mu^1 - \partial\mu^1)} \; \ldots\ldots \; A_2\,,\, B_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{III}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{(\lambda - d\lambda,\, \mu^0 + d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\, \mu^0 + \partial\mu^0)} \; \ldots\ldots \; A_2\,,\, B_1 \\ Y_{(\lambda - d\lambda,\, \mu^1 + d\mu^1)} > Y_{(\lambda,\, \mu^1 + \partial\mu^1)} \; \ldots\ldots \; A_1\,,\, B_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{IV}_1$$

Die derselben Nummer angehörenden und unter einander stehenden Buchstaben bezeichnen hierbei die Bedingungen der Art. 3 und 4, welchen die entsprechenden Functionen μ^0 und μ^1 zu genügen haben. So haben z. B. in $\mathrm{III}^{(1)}$ die Functionen μ^0 und μ^1 resp. den Bedingungen $A^{(2)}$ und $A^{(1)}$, oder aber auch jenen $B^{(1)}$ und $B^{(2)}$ Genüge zu leisten. Hiernach kann über den Sinn der gewählten Bezeichnungen wohl kein Zweifel bestehen.

Aus jeder dieser zweigliederigen Ungleichheiten entstehen zwei dreigliederige, wenn man dem entsprechenden $Y_{(\lambda \pm \partial\lambda,\, \mu)}$ seine möglichen Stellungen in denselben anweist. Die Zahl der Ungleichheitsbedingungen steigt hierdurch auf 32. Der Übersicht wegen habe ich schon weiter oben die Bezeichnung derjenigen in den Art. 3 und 4 aufgestellten Relationen beigefügt, aus welchen man jene dreigliederigen Bedingungen erhält, wenn man darin μ mit dem betreffenden Index versieht. So entstehen z. B. aus der erstern der Beziehungen $\mathrm{I}^{(1)}$ die einzig möglichen dreigliederigen:

$$Y_{(\lambda + \partial\lambda,\, \mu^0)} > Y_{(\lambda,\, \mu^0 + \partial\mu^0)} > Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^0 + d\mu^0)} \; \ldots\ldots \; A^{(1)}$$

$$Y_{(\lambda,\, \mu^0 + \partial\mu^0)} > Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^0 + d\mu^0)} > Y_{(\lambda + \partial\lambda,\, \mu^0)} \; \ldots\ldots \; B^{(2)}$$

welche man aus Art. 3 unmittelbar erhält, wenn man in $A^{(1)}$ und $B^{(2)}$ durchgehends μ^0 für μ setzt. Aus diesem Grunde nun wurde oben der entsprechenden Ungleichheit jedesmal noch das Zeichen $A^{(1)}$, $B^{(2)}$ beigefügt. In gleicher Weise sind die übrigen Bezeichnungen zu verstehen.

Ich bemerke schliesslich noch, dass aus dem Vorzeichen der an sich immer positiven Grösse $\partial\mu$ unmittelbar erkannt werden kann, ob das betreffende μ der grösste oder kleinste Werth ist, für welchen die zugehörige Ungleichheit noch besteht. So z. B. besagt die Ungleichheit:

$$Y_{(\lambda + d\lambda,\, \mu^0 + d\mu^0)} < Y_{(\lambda,\, \mu\, + \partial\mu^0)}$$

dass in der Function $Y_{(\lambda,\,\mu)}$ die Veränderliche μ nicht kleiner als μ^0 werden dürfe. Wo aber $\mu^1 - \partial\mu^1$ vorkommt, da besteht die entsprechende Bedingung nur für Werthe von μ^1, welche nicht grösser als μ^1 sind. — U. s. f.

10.

Ich komme nun zur nähern Betrachtung der zweiten Bedingung, durch welche die Grenzen des Doppel-Integrals gegeben sind, und welche heisst:

$$\xi_0 < X_{(\lambda,\,\mu)} < \xi_1{}'$$

Hier ist die Sache viel einfacher, denn man braucht blos zu untersuchen, wann die beiden Functionen μ_0, μ_1, welche der Form nach ganz dieselben sind und sich überhaupt nur durch die Constanten ξ_0, ξ_1 unterscheiden, der obigen Bedingung gemäss, entweder die obere oder die untere Grenze der Veränderlichen μ bilden. Beachtet man zu diesem Zwecke, dass nach der im Art. 1 angenommenen Bezeichnung:

$$X_{(\lambda,\,\mu_0)} = \xi_0 \quad ; \quad X_{(\lambda,\,\mu_1)} = \xi_1$$

und dass stets

$$X_{(\lambda,\,\mu)} > \xi_0 \quad ; \quad X_{(\lambda,\,\mu)} < \xi_1$$

bleiben soll, so kann man in folgender Weise bestimmen, in welchen Fällen μ_0 und μ_1 die grössten oder die kleinsten von allen zulässigen Werthen der Veränderlichen μ sind. Nun ist es eine unmittelbare Folge der Voraussetzungen (2) des Art. 1, dass immer gleichzeitig μ_0 der kleinste und μ_1 der grösste, oder umgekehrt μ_0 der grösste und μ_1 der kleinste jener Werthe sein müsse, dass also etweder:

$$X_{(\lambda,\,\mu_0+\partial\mu_0)} > \xi_0 \qquad \text{und} \qquad X_{(\lambda,\,\mu_1-\partial\mu_1)} < \xi_1$$

oder:

$$X_{(\lambda,\,\mu_0-\partial\mu_0)} > \xi_0 \qquad \text{und} \qquad X_{(\lambda,\,\mu_1+\partial\mu_1)} < \xi_1$$

ist. Entwickelt man die Functionswerthe nach der Taylor'schen Reihe, so ergibt sich, dass entweder:

$$\frac{dX_{(\lambda,\,\mu_0)}}{d\mu_0}\,.\,\partial\mu_0 > 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dX_{(\lambda,\,\mu_1)}}{d\mu_1}\,.\,\partial\mu_1 > 0$$

oder:

$$\frac{dX_{(\lambda,\,\mu_0)}}{d\mu_0}\,.\,\partial\mu_0 < 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dX_{(\lambda,\,\mu_1)}}{d\mu_1}\,.\,\partial\mu_1 < 0$$

Daraus aber folgt sogleich:

Es muss $\mu > \mu_0$ und $\mu < \mu_1$, oder also $\mu_0 < \mu_1$ sein, wenn $\frac{dX}{d\mu}$ positiv,

dagegen muss $\mu < \mu_0$ und $\mu > \mu_1$, oder also $\mu_0 > \mu_1$ sein, wenn $\frac{dX}{d\mu}$ negativ

ist. Es versteht sich von selbst, dass diesen Forderungen durch Werthe von λ entsprochen werden kann und muss, welche innerhalb bestimmter Intervalle liegen.

Bezüglich der Werthe von $Y_{(\lambda,\,\mu_0\pm\partial\mu_0)}$, $Y_{(\lambda,\,\mu_1\pm\partial\mu_1)}$ welche den oben zur Sprache gebrachten Werthen von X correspondiren, können nun wieder alle Fälle eintreten, welche in der Tabelle des Art. 6 unterschieden worden sind. Man würde die Zusammenstellung aller dieser Fälle erhalten, wenn man in jener Tabelle, den Zeichen von $\frac{dX}{d\mu}$ entsprechend, die Grenzen von μ, wie sie oben angegeben sind, beifügte.

11.

Es genügt jedoch nicht, dass $X_{(\lambda,\mu)}$ stets zwischen den Grenzen ξ_0 und ξ_1 eingeschlossen bleibe, sondern es muss gleichzeitig auch der andern Bedingung des Art. 1 Genüge geschehen, welche fordert, dass man jederzeit habe:

$$\varphi^0(X_{(\lambda,\mu)}) < Y_{(\lambda,\mu)} < \varphi^1(X_{(\lambda,\mu)})$$

Um nun diese beiden Bedingungen zu erfüllen, muss man allen in Art. 9 ausführlich angegebenen Fällen, in Verbindung mit den zugehörigen Bedingungen zwischen μ, μ^0 und μ^1, sodann mit den entsprechenden Zeichen von $\frac{dX}{d\mu}$ und von Δ noch die entsprechenden Bedingungen für μ, μ_0 und μ_1, wie sie aus dem vorigen Artikel sich ergeben, hinzufügen.

Ich unterlasse es auch hier, diese Fälle tabellarisch zusammen zu stellen, weil später folgende Übersichten solches entbehrlich machen. Die Erwähnung eines einzigen Falles dürfte hier genügen; ich wähle dazu den Fall $\mathrm{III}^{(1)}$ des Art. 9.

In Bezug auf μ^0 kann der Fall $A^{(2)}$, bezüglich μ^1 der Fall $A^{(1)}$ als zugehörig eintreten. Angenommen nun, es sei Δ positiv, so ist nach Art. 9:

$$\mu < \mu^0 \qquad \text{und} \qquad \mu < \mu^1$$

und nach Art. 5: $\frac{dX}{d\mu}$ positiv, folglich nach Art. 10:

$$\mu > \mu_0 \qquad \text{und} \qquad \mu < \mu_1$$

Ist dagegen Δ negativ, so folgt aus Art. 9 ebenfalls:

$$\mu < \mu^0 \qquad \text{und} \qquad \mu < \mu^1$$

und nach Art. 5: $\frac{dX}{d\mu}$ negativ, folglich nach Art. 10:

$$\mu < \mu_0 \qquad \text{und} \qquad \mu > \mu_1$$

Hiernach finden also gleichzeitig die folgenden Beziehungen statt:

$$\frac{dX}{d\mu} > 0 \;,\; \Delta > 0 \;,\; \mu < \mu^0 \;,\; \mu < \mu^1 \;,\; \mu > \mu_0 \;,\; \mu < \mu_1$$

$$\frac{dX}{d\mu} < 0 \;,\; \Delta < 0 \;,\; \mu < \mu^0 \;,\; \mu < \mu^1 \;,\; \mu < \mu_0 \;,\; \mu > \mu_1$$

Auf ähnliche Art würden sich alle übrigen Fälle ergeben.

12.

Durch das Vorhergehende sind in allen Fällen die Grenzbedingungen für die Veränderliche μ gegeben. Aber auch die correspondirenden Grenzen von λ sind dadurch bestimmt. Diese sind nämlich, wie sich zeigen wird, diejenigen Werthe von λ, für welche die Ungleichheiten:

$$\mu_0 \gtrless \mu^0 \quad ; \quad \mu_0 \gtrless \mu^1 \quad ; \quad \mu_1 \gtrless \mu^0 \quad ; \quad \mu_1 \gtrless \mu^1$$

in Gleichungen übergehen. Die wesentliche Frage hierbei betrifft jedoch, wie man sich bald überzeugen kann, nicht sowohl jene Werthe an und für sich, als vielmehr den Weg, auf welchem man von einem Werthe der Veränderlichen λ, der eine jener Ungleichheiten realisirt, ausgehend, zu dem Werthe, der diese Ungleichheit in eine Gleichung verwandelt, gelangen muss.

Angenommen z. B. es sei $\mu_0 < \mu^0$ die in dieser Richtung zu untersuchende Bedingung, und es sei irgend ein derselben entsprechender Werth für die Veränderliche λ gewählt, so ist es die Frage, ob man von diesem Werthe ausgehend, zu grösseren oder kleineren Zahlenwerthen übergehen müsse, um zu demjenigen zu gelangen, für welchen genau $\mu_0 = \mu^0$ wird. Auf welche Weise sich diese Frage in jedem einzelnen Falle beantworten lässt, wird sich deutlich genug aus der nähern Erörterung des oben gewählten Beispiels erkennen lassen.

Die vor Allem nothwendige Unterscheidung bezieht sich auf das Zeichen von $\frac{dX}{d\mu}$; dasselbe ergibt sich wie folgt.

Da die unabhängig Veränderliche μ in dem Intervall der Ungleichheit $\mu_0 < \mu^0$ liegen soll, so ist nothwendig:

$$\mu > \mu_0 \qquad \text{und} \qquad \mu < \mu^0$$

und es muss also in Folge der erstern Bedingung nach Art. 10 . . . $\frac{dX}{d\mu}$ positiv sein.

Diese Bestimmung bietet sofort ein Mittel dar, die ursprüngliche Ungleichheit $\mu_0 < \mu^0$ durch eine andere zu ersetzen; denn es muss jetzt offenbar auch:

$$X_{(\lambda,\,\mu_0)} < X_{(\lambda,\,\mu^0)}$$

oder also:

$$\xi_0 < X_{(\lambda,\,\mu^0)}$$

sein, und es geht diese Ungleichheit mit der ursprünglichen gleichzeitig und für denselben Werth von λ in eine Gleichung über. Damit nun aber dieser Übergang stattfinde, muss offenbar λ sich so ändern, dass $X_{(\lambda,\,\mu^0)}$ abnimmt.

Um die Art dieser Änderung zu erfahren, bemerke man, dass das Abnehmen von $X_{(\lambda,\,\mu^0)}$ auch durch eine blosse negative Änderung $-\delta\mu^0$ von μ^0 hervorgerufen werden kann, dass nämlich:

$$X_{(\lambda,\,\mu^0)} > X_{(\lambda,\,\mu^0-\delta\mu^0)} > \xi_0$$

Lässt man nun aber λ um $-d\lambda$ und in Folge dessen μ^0 um $-d\mu^0$ sich ändern, so kann man fragen, welches Zeichen die Änderung $d\lambda$ an sich haben müsse, damit $X_{(\lambda,\,\mu^0-\delta\mu^0)}$ sich durch $X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^0-d\mu^0)}$ ersetzen lasse, oder also, damit:

$$X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^0-d\mu^0)} = X_{(\lambda,\,\mu^0-\delta\mu^0)}$$

werde. Um diese Frage vollständig zu beantworten, muss man vor Allem bis zur Unterscheidung der möglichen Zeichen von $\frac{dX}{d\lambda}$ zurückgehen, was dadurch geschieht, dass man einmal annimmt, es sei $X_{(\lambda-\delta\lambda,\,\mu^0)}$ und dann $X_{(\lambda+\delta\lambda,\,\mu^0)}$ fähig den Werth $X_{(\lambda,\,\mu^0-\delta\mu^0)}$ darzustellen, so dass man entweder:

$$X_{(\lambda-\delta\lambda,\,\mu^0)} = X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^0-d\mu^0)} = X_{(\lambda,\,\mu^0-\delta\mu^0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; A^{(0)},\ B^{(0)}$$

oder aber:

$$X_{(\lambda+\delta\lambda,\,\mu^0)} = X_{(\lambda+d\lambda,\,\mu^0-d\mu^0)} = X_{(\lambda,\,\mu^0-\delta\mu^0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; A_0\ ,\ B_0$$

hat. — Da sich aber auch hieraus noch nicht die eigenen Zeichen von $d\lambda$ in ihrem nothwendigen Zusammenhange mit dem Zeichen der Determinante Δ ergeben, so lasse man zu den Gleichungen $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ noch die sechs, bezüglich der Function Y möglichen Fälle des Art. 3, und zu den Gleichungen A_0, B_0 die sechs Fälle des Art. 4 hinzu treten, so wird man, sowohl wenn $\frac{dX}{d\lambda}$ positiv als negativ ist, nicht nur das Zeichen von Δ, sondern auch jedesmal das eigene Zeichen von $d\lambda$ finden, und sofort aus $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ und A_0, B_0 erkennen, ob λ eine positive oder negative Änderung erfahren muss, damit $X_{(\lambda-d\lambda,\, \mu^0-d\mu^0)}$ oder $X_{(\lambda-\delta\lambda,\, \mu^0)}$, und $X_{(\lambda+d\lambda,\, \mu^0-d\mu^0)}$ oder $X_{(\lambda,\, \mu^0-\delta\mu^0)}$ abnehme und sich also dem festen Werthe ξ_0 auf diesem Wege nähern könne.

Die ganz gleiche Betrachtung ist bei der Ungleichheit $\mu_0 < \mu^1$, oder was gleichbedeutend ist, bei $\mu > \mu_0$, $\mu < \mu^1$, wo $\frac{dX}{d\mu}$ ebenfalls positiv sein muss, anzustellen.

Man kann daher diese beiden Fälle zusammenfassen, indem man von der Bedingung:

$$\mu_0 < \mu^*$$

oder den gleichbedeutenden:

$$\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^* \quad , \quad \frac{dX}{d\mu} \text{ positiv}$$

ausgeht, und dabei μ^* als den Repräsentanten von μ^0 und μ^1 ansieht.

Die gleiche Bezeichnung will ich auch bei allen übrigen noch in Betracht zu ziehenden Fällen gebrauchen. Da diese Fälle sich in durchaus anologer Weise, wie im eben betrachteten Beispiele erörtern lassen, so scheint es angemessener, statt der ins Einzelne gehenden Ausführung aller jener Fälle, eine übersichtliche Zusammenstellung aller hieher gehörigen Resultate, wie sie sich jedesmal gegenseitig bedingen, in einer Art folgen zu lassen, welche wohl jede weitere Erklärung unnöthig machen dürfte.

	Annahme	$\frac{dX}{d\mu}$	$\frac{dX}{d\lambda}$	Grenzen der Veränderlichen μ	$X_{(\lambda,\mu^*)} < \xi_1$ $X_{(\lambda,\mu^*)}$ wächst gleichzeitig mit:	$A^{(1)}$ Δ	$A^{(1)}$ Aenderung von λ	$B^{(1)}$ Δ	$B^{(1)}$ Aenderung von λ	$A^{(2)}$ Δ	$A^{(2)}$ Aenderung von λ	$B^{(2)}$ Δ	$B^{(2)}$ Aenderung von λ
(1)	$\mu^* < \mu_1$	+	+	$\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1,\ \mu > \mu^*$	$X_{(\lambda+\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda+d\lambda,\,\mu^*+d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*+\delta\mu^*)}$	+	—	—	—	+	+	—	+
(2)	$\mu^* > \mu_1$	—	—	$\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1,\ \mu < \mu^*$	$X_{(\lambda-\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^*-d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*-\delta\mu^*)}$	—	+	+	+	—	—	+	—
					$X_{(\lambda,\mu^*)} > \xi_0$ $X_{(\lambda,\mu^*)}$ nimmt gleichzeitig ab mit:								
(3)	$\mu^* > \mu_0$	+	+	$\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1,\ \mu < \mu^*$	$X_{(\lambda-\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^*-d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*-\delta\mu^*)}$	+	+	—	+	+	—	—	—
(4)	$\mu^* < \mu_0$	—	—	$\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1,\ \mu > \mu^*$	$X_{(\lambda+\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda+d\lambda,\,\mu^*+d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*+\delta\mu^*)}$	—	—	+	—	—	+	+	+
					$X_{(\lambda,\mu^*)} < \xi_1$ $X_{(\lambda,\mu^*)}$ wächst gleichzeitig mit:	A_1 Δ	A_1 Aenderung von λ	B_1 Δ	B_1 Aenderung von λ	A_2 Δ	A_2 Aenderung von λ	B_2 Δ	B_2 Aenderung von λ
(5)	$\mu^* > \mu_1$	—	+	$\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1,\ \mu < \mu^*$	$X_{(\lambda+\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda+d\lambda,\,\mu^*-d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*-\delta\mu^*)}$	—	—	+	—	—	+	+	+
(6)	$\mu^* < \mu_1$	+	—	$\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1,\ \mu > \mu^*$	$X_{(\lambda-\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^*+d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*+\delta\mu^*)}$	+	+	—	+	+	—	—	—
					$X_{(\lambda,\mu^*)} > \xi_0$ $X_{(\lambda,\mu^*)}$ nimmt ab gleichzeitig mit:								
(7)	$\mu^* < \mu_0$	—	+	$\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1,\ \mu > \mu^*$	$X_{(\lambda-\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda-d\lambda,\,\mu^*+d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*+\delta\mu^*)}$	—	+	+	+	—	—	+	—
(8)	$\mu^* > \mu_0$	+	—	$\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1,\ \mu < \mu^*$	$X_{(\lambda+\delta\lambda,\,\mu^*)} = X_{(\lambda+d\lambda,\,\mu^*-d\mu^*)} = X_{(\lambda,\,\mu^*-\delta\mu^*)}$	+	—	—	—	+	+	—	+

Die Ungleichheiten: $\mu_0 \gtrless \mu_1$ und $\mu^0 \gtrless \mu^1$, insbesondere deren Übergang in Gleichungen, blieben hier ganz unberücksichtigt, wofür der Grund nach den Voraussetzungen des Art. 1 leicht einzusehen ist. Was zunächst die Gleichung $\mu_0 = \mu_1$ betrifft, so sind darin μ_0 und μ_1 Functionen von durchaus gleicher Form, welche sich überhaupt nur durch die Constanten ξ_0 und ξ_1 unterscheiden. Jene Gleichung, welche ihren Ursprung in den beiden Gleichungen:

$$Y_{(\lambda,\mu)} = \xi_0 \qquad , \qquad X_{(\lambda,\mu)} = \xi_1$$

hat, ist also, wie man sieht, im Allgemeinen selbst eine Unmöglichkeit.

Die zweite Ungleichheit $\mu^0 \gtrless \mu^1$ kann in Folge der Voraussetzung des Art. 1 eben so wenig in eine Gleichung übergehen. Denn da es keinen zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werth von x gibt, für welchen $\varphi^0_{(x)}$ und $\varphi^1_{(x)}$ einander gleich werden, so gibt es auch keinen der Gleichung

$$\varphi^0(X_{(\lambda,\mu)}) = \varphi^1(X_{(\lambda,\mu)}) = Y_{(\lambda,\mu)}$$

genügenden zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werth von $X_{(\lambda,\mu)}$. Ein solcher Werth, er möge ξ heissen, müsste aber existiren, damit aus den Gleichungen:

$$\xi = X_{(\lambda,\mu)}$$
$$\varphi^0(\xi) = \varphi^1(\xi) = Y_{(\lambda,\mu)}$$

die Werthe $\lambda = \lambda^{01}$, $\mu = \mu^{01}$, welche der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ entsprechen, berechnet werden könnten. Es können daher niemals gleichzeitig jene Werthe im Bereiche der Integrationswerthe, — wenn gleich der eine ohne den andern — vorkommen.

An diesen Bemerkungen muss im Folgenden durchaus festgehalten werden.

13.

Aus der im vorigen Artikel angeführten Zusammenstellung lässt sich nun, in Verbindung mit jener des Art. 9, für alle Fälle, die hier in Frage kommen können, der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Determinante Δ, den Grenzbedingungen für die Veränderliche μ und den Grössenverhältnissen der hier ausschliesslich in Betracht kommenden vier Wurzelwerthe λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 herstellen. Wie sich derselbe in jedem einzelnen Falle finden lässt, ist nunmehr nachzuweisen; es wird aber vollkommen hinreichen, wenn die Art der Herleitung in zwei Fällen vollständig ausgeführt wird.

Als ersten Fall will ich jenen I$^{(1)}$ des Art. 9 annehmen, bei welchem die Bedingung $A^{(1)}$ für μ^0, und ebenfalls $A^{(1)}$ für μ^1 stattfindet, wofür ausserdem nach Art. 7

$$\mu > \mu^0 \qquad \text{und} \qquad \mu < \mu^1$$

sein muss. Das Zeichen von Δ ist aber hierdurch keineswegs schon bestimmt, es kann sowohl positiv als negativ sein.

Angenommen es sei Δ positiv, so ist klar, dass in der Zusammenstellung des Art. 12, und zwar in der

$$\left.\begin{array}{l}\text{Horizontalreihe (1)} \;\ldots\; \mu^* = \mu^0 \\ \quad\;\text{„} \qquad\quad \text{(3)} \;\ldots\; \mu^* = \mu^1\end{array}\right\} \mu > \mu_0 \,,\, \mu < \mu_1$$

zu setzen ist. Jene Tabelle liefert nun sogleich als zugehörend die folgenden unumgänglichen Bedingungen:

$$\mu^0 < \mu_1 \;.\;.\;.\;.\; \text{Änderung von } \lambda \text{ negativ,}$$
$$\mu^1 > \mu_0 \;.\;.\;.\;.\; \text{„ „ } \lambda \text{ positiv.}$$

Daraus folgt, dass λ von demjenigen Werth, wofür $\mu^0 < \mu_1$ bis zu demjenigen, wofür $\mu_0 = \mu^1$ ist, abnehmen muss, weil die entsprechende Änderung von λ negativ ist.

Es ist daher λ_1^0 der kleinste zulässige Werth der Veränderlichen λ.

In gleicher Weise ergibt sich, dass λ von einem der Ungleichheit $\mu^1 > \mu_0$ Genüge leistenden Werth bis zu demjenigen, wofür $\mu^1 = \mu_0$ wird, durch Wachsen gelangt, dass daher λ_0^1 der grösste aller zulässigen Werthe von λ ist.

Fasst man Alles zusammen, so folgt als Resultat:

Wenn die Functionen φ^0, φ^1 und X, Y der Bedingungen in $\mathrm{I}^{(1)}$ und $A^{(1)}$, $A^{(1)}$ entsprechen, und wenn Δ als positiv angesehen wird, so ist gleichzeitig:

$$\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1 \quad , \quad \mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

also:

$$\mu_0 < \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu_1 \quad , \quad \mu^1 > \mu_0 \quad , \quad \mu^0 < \mu^1$$

und:

$$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$$

oder auch:

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$$

Rücksichtlich der letztern Verwechselung der Zwischenwerthe λ_0^0 und λ_1^1 genügt es, zu bemerken, dass für deren Grössenverhältniss keine besondere Bedingung existirt, also die beiden angegebenen Verhältnisse gleich möglich sind. Der eigentliche Grund hiefür liegt aber darin, dass hier die Bedingungen:

$$\mu_0 < \mu_1 \qquad , \qquad \mu^0 < \mu^1$$

eine nothwendige Folge des Vorhergehenden sind, an und für sich schon stattfinden und also nicht in ihr Gegentheil übergehen können, so dass die diesem Übergange entsprechenden Werthe

$$\mu_{01} \;,\; \lambda_{01} \qquad \text{und} \qquad \mu^{01} \;,\; \lambda^{01}$$

zwischen den äussersten Grenzen λ_0^1 und λ_1^0 nicht vorkommen.

Da nun diese, in den Voraussetzungen des Art. 1 gegründete Forderung, welche allein noch zu beachten wäre, von selbst stattfindet, so kann also in der That von den Zwischengrenzen $\lambda^0{}_0$, $\lambda^1{}_1$ sowohl die eine als die andere die grössere sein.

Angenommen es sei nun Δ negativ, so ist nach der Tabelle des Art. 12 in der

$$\left.\begin{array}{l}\text{Horizontalreihe (4)} \;.\;.\;.\;.\; \mu^* = \mu^0 \\ \quad\text{„} \qquad\quad \text{(2)} \;.\;.\;.\;.\; \mu^* = \mu^1\end{array}\right\} \mu < \mu_0 \;,\; \mu > \mu_1$$

zu setzen. Jene Tabelle gibt zugleich als nothwendige Bedingungen:

$$\mu^0 < \mu_0 \;.\;.\;.\;.\; \text{Änderung von } \lambda \text{ negativ,}$$
$$\mu^1 > \mu_1 \;.\;.\;.\;.\; \text{„ „ } \lambda \text{ positiv.}$$

Es muss daher λ von demjenigen Werthe, für welcher $\mu^0 < \mu_0$ ist, bis zu demjenigen, wofür $\mu^0 = \mu_0$ wird, abnehmen, so dass $\lambda_0{}^0$ der kleinste zulässige Werth von λ ist.

Dagegen muss λ von dem Werthe wofür $\mu^1 > \mu_1$ bis zu jenem, wofür $\mu^1 = \mu_1$ wird, wachsen, wonach also $\lambda_1{}^1$ als der grösste aller zulässigen Werthe von λ erscheint.

Man sieht hieraus, dass unter den Bedingungen $\mathrm{I}^{(1)}$ und $A^{(1)}$, $A^{(1)}$ und wenn Δ negativ ist, gleichzeitig:

$$\mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1 \quad , \quad \mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

also:

$$\mu_0 > \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu_0 \quad , \quad \mu^1 > \mu_1 \quad , \quad \mu^0 < \mu^1$$

und

$$\lambda_1{}^1 > \lambda_0{}^1 > \lambda_1{}^0 > \lambda_0{}^0$$

oder auch:

$$\lambda_1{}^1 > \lambda_1{}^0 > \lambda_0{}^1 > \lambda_0{}^0$$

sein muss. Hinsichtlich der Vertauschung der Zwischenwerthe $\lambda_1{}^0$, $\lambda_0{}^1$ gilt hier dieselbe Bemerkung wie in dem, für das positive Zeichen von Δ betrachteten Falle.

Um den Vorgang bei den hier zu treffenden Bestimmungen, welche für alles Folgende durchaus massgebend sind, vollständig darlegen zu können, wähle ich noch einen zweiten Fall, nämlich denjenigen, welcher der Bedingung $\mathrm{III}^{(1)}$ des Art. 9 entspricht, und in welchem die Relation $B^{(1)}$ für μ^0, und $B^{(2)}$ für μ^1 besteht, wofür also nach Art. 9 jederzeit:

$$\mu < \mu^0, \mu < \mu^1$$

sein muss.

Auch hier ist die Betrachtung sowohl für das positive als das negative Vorzeichen von Δ durchzuführen.

Angenommen es sei Δ positiv, so muss in der Tabelle des Art. 12 und zwar in der

$$\left.\begin{array}{l} \text{Horizontalreihe (2) . . . . } \mu^* = \mu^0 \\ \text{,, } \qquad \text{(2) . . . . } \mu^* = \mu^1 \end{array}\right\} \mu < \mu_0 \ . \ \mu > \mu_1$$

gesetzt werden. Zugleich ergeben sich daraus als nothwendige Folge der gemachten Annahmen die Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} \mu^0 > \mu_1 \text{ . . . . } & \text{Änderung von } \lambda \text{ positiv,} \\ \mu^1 > \mu_1 \text{ . . . . } & \text{,, } \quad \text{,, } \ \lambda \text{ negativ.} \end{array}$$

Der Werth von λ, für welchen $\mu^0 > \mu_1$ ist, muss also wachsen, um denjenigen zu erreichen, für welchen $\mu^0 = \mu_1$ ist. Hiernach erscheint $\lambda_1{}^0$ als der grösste aller derjenigen Werthe von λ, für welche, wie bedungen ist, die Ungleichheit $\mu^0 > \mu_1$ nicht in ihr Gegentheil umschlägt.

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich, dass $\lambda_1{}^1$ der kleinste aller zulässigen Werthe von λ ist.

Was nun das Grössenverhältniss der beiden anderen Werthe $\lambda_0{}^0$, $\lambda_0{}^1$ betrifft, so ist dasselbe hier, im Gegensatze zu den beiden zuerst betrachteten Fällen, kein ganz unbestimmtes, sondern es muss hier $\lambda_0{}^0 > \lambda_0{}^1$ sein. Um dies zu zeigen, gehe ich von der Bemerkung aus, dass durch die Ungleichheiten

$$\mu < \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu > \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

zwar ausgesprochen ist, es müsse stets $\mu_0 > \mu_1$ bleiben, dass aber keineswegs, wie in den früheren Fällen, eine unüberschreitbare Beziehung zwischen μ^0 und μ^1, wie etwa $\mu^0 > \mu^1$ oder umgekehrt $\mu^0 < \mu^1$ vorliegt, dass daher die stets festzuhaltende Voraussetzung, wonach der Werth von λ, welcher der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ Genüge leistet, nicht in das Intervall des grössten und kleinsten Werthes ($\lambda_1{}^0$ und $\lambda_1{}^1$) fallen darf, erst noch besonders eingeführt werden muss. Dies kann aber auf folgende Art geschehen.

Da jederzeit

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^0)} < \xi_1$$

sein soll und da $\lambda_1{}^0$ der grösste zulässige Werth von λ ist, also das Intervall, welches der so eben angeführten Bedingung entspricht, durch die Relation:

$$\lambda_0{}^0 < \lambda < \lambda_1{}^0$$

gegeben ist, und da in ganz gleicher Weise auch

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^1)} < \xi_1$$

sein soll, $\lambda_1{}^1$ aber der kleinste zulässige Werth von λ, folglich das zugehörige Intervall durch die Relation

$$\lambda_0{}^1 > \lambda > \lambda_1{}^1$$

gegeben ist, so schliesst man mit Sicherheit: Soll die Gleichung $X_{(\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^1)}$ oder also jene $\mu^0 = \mu^1$ für keinen zwischen $\lambda_1{}^1$ und $\lambda_1{}^0$ liegenden Werth von λ erfüllt werden, so muss nothwendig $\lambda_0{}^0 > \lambda_0{}^1$ sein. Wäre nämlich $\lambda_0{}^0 < \lambda_0{}^1$, so würden sich die beiden Ungleichheiten

$$\lambda_1{}^0 > \lambda > \lambda_0{}^0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_0{}^1 > \lambda > \lambda_1{}^1$$

übergreifen, und es liesse sich dann zwischen $\lambda_0{}^0$ und $\lambda_1{}^0$ ein Werth von λ angeben, für welchen

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^0)} < X_{(\lambda, \mu^1)} < \xi_1$$

und ein anderer, ebenfalls zwischen $\lambda_0{}^0$ und $\lambda_0{}^1$ enthalten, für welchen

$$\xi_0 < X_{(\lambda, \mu^1)} < X_{(\lambda, \mu^0)} < \xi_1$$

sein würde. Es müsste folglich auch einen dritten, zwischen jenen beiden liegenden Werth von λ geben, für welchen eben:

$$X_{(\lambda, \mu^0)} = X_{(\lambda, \mu^1)} \text{ oder also } \mu^0 = \mu^1$$

wäre, was den Voraussetzungen widerspricht.

Hieraus zieht man das Resultat:

Für den Fall III[1] des Art. 9 und wenn für μ^0, μ^1 resp. die Bedingungen $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ stattfinden, dabei angenommen es sei Δ positiv, hat man:

$$\mu < \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu > \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

also:

$$\mu_0 > \mu_1 \qquad ; \qquad \mu^0 > \mu_1$$

und zugleich:

$$\lambda_1{}^0 > \lambda_0{}^0 > \lambda_0{}^1 > \lambda_1{}^0$$

Nimmt man Δ negativ an, so folgt aus Art. 12:

Horizontalreihe (3) . . . $\mu^{*} = \mu^{0}$ also $\mu^{0} > \mu_{0}$, . . . Änderung von λ positiv,
" (3) . . . $\overset{*}{\mu} = \mu^{1}$ " $\mu^{1} > \mu_{0}$, . . . " " λ negativ.

Zugleich folgt, dass λ_0^0 der grösste und λ_0^1 der kleinste zulässige Werth von λ und:

$$\mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1$$

ist.

Was aber das Grössenverhältniss von λ_1^0, λ_1^1 betrifft, so ist dasselbe auch hier nicht ganz willkürlich, was sich auf folgende Art zeigen lässt.

Da nämlich:

$$\xi_0 < X_{(\lambda,\, \mu^0)} < \xi_1$$

bleiben soll, so muss nothwendig:

$$\lambda_0^0 > \lambda \qquad > \lambda_1^0$$

Da ferner:

$$\xi_0 < X_{(\lambda,\, \mu^1)} < \xi_1$$

so muss:

$$\lambda_0^1 < \lambda \qquad < \lambda_1^1$$

sein. Fiele nun λ_1^1 zwischen λ_0^0 und λ_1^0, so müsste es nothwendig zwischen λ_1^1 und λ_1^0 einen Werth geben, wofür $X_{(\lambda,\, \mu^0)} = X_{(\lambda,\, \mu^1)}$ oder also $\mu^0 = \mu^1$ würde, was gegen die Voraussetzung wäre.

Alles zusammengefasst hat man also das Resultat, dass bei dem Falle $\mathrm{III}^{(1)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$:

für Δ negativ: $\quad \mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu_1 \quad , \quad \mu < \mu^1$

und:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$$

Ich füge schliesslich noch die folgende Bemerkung bei:

In allen aus $\mathrm{I}^{(1)}$ und $\mathrm{II}^{(1)}$ entstehenden Fällen ist entweder die Bedingung $\mu^1 > \mu^0$ oder jene $\mu^1 < \mu^0$ ohne Weiteres schon vorgeschrieben, so dass man nicht zu besorgen braucht, es könnte eine Wurzel λ^{01} der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ in das Bereich der Werthe λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 fallen; wesshalb hier eine Vertauschung der zwei, zwischen die äussersten Grenzen fallenden, Werthe von λ stattfinden kann und muss, wenn man alle möglichen Fälle berücksichtigen will.

Bei den aus $\mathrm{III}^{(1)}$ und $\mathrm{IV}^{(1)}$ entspringenden Fällen jedoch besteht eine solche Bedingung $\mu^1 > \mu^0$ oder $\mu^1 < \mu^0$ nicht schon von selbst und sie muss daher erst besonders eingeführt werden, was auf oben bemerkte Art zu geschehen hat. Hierdurch aber fällt, wie gezeigt worden ist, die Vertauschung der beiden Zwischenwerthe der Grenzen weg.

14.

Nach diesen Auseinandersetzungen wird die folgende, der Übersicht wegen in die Form einer Tabelle gebrachte Zusammenstellung der auf die Fälle $\mathrm{I}^{(1)}$, $\mathrm{II}^{(1)}$, $\mathrm{III}^{(1)}$, $\mathrm{IV}^{(1)}$ sich beziehenden Resultate, welche ich in extenso anführen zu müssen glaube, keiner weitern Erklärung bedürfen.

Fälle des Art. 9.	Relation der Y für		Zeichen von Δ	Grenzen der Veränderlichen μ	Unüberschreitbare Bedingungen				Überschreitbare Bedingungen				Grenzwerthe der Veränderlichen λ	Nr.
	μ^0	μ^1			$\mu^* = \mu^0$		$\mu^* = \mu^1$		$\mu^* = \mu^0$		$\mu^* = \mu^1$			
$\mathrm{I}^{(1)}$	$A^{(1)}$	$A^{(1)}$	+	$\mu > \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(3)	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(1)	$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$ $> \lambda_1^1 > \lambda_0^0$	1
	$A^{(1)}$	$A^{(1)}$	—	$\mu > \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(2)	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(4)	$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$	2
	$B^{(2)}$	$B^{(2)}$	—	$\mu > \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$	(3)	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(1)	$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$ $> \lambda_1^1 > \lambda_0^0$	3
	$B^{(2)}$	$B^{(2)}$	+	$\mu > \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$	(2)	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(4)	$\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$	4
$\mathrm{II}^{(1)}$	$A^{(2)}$	$A^{(2)}$	+	$\mu < \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(1)	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(3)	$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$	5
	$A^{(2)}$	$A^{(2)}$	—	$\mu < \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(4)	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(2)	$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 < \lambda_1^0$ $> \lambda_1^1 > \lambda_0^0$	6
	$B^{(1)}$	$B^{(1)}$	—	$\mu < \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$	(1)	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(3)	$\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1$ $> \lambda_1^0 > \lambda_0^1$	7
	$B^{(1)}$	$B^{(1)}$	+	$\mu < \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$	(4)	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(2)	$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$ $> \lambda_1^1 < \lambda_0^0$	8
$\mathrm{III}^{(1)}$	$A^{(2)}$	$A^{(1)}$	—	$\mu < \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(2)	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(4)	$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$	9
	$A^{(2)}$	$A^{(1)}$	+	$\mu < \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0.\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(3)	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(1)	$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$	10
	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	+	$\mu < \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$	(2)	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(4)	$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$	11
	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	—	$\mu < \mu^0,\ \mu < \mu^1$ $\mu > \mu_0.\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$	(3)	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(1)	$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$	12
$\mathrm{IV}^{(1)}$	$A^{(1)}$	$A^{(2)}$	—	$\mu > \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(4)	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(2)	$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$	13
	$A^{(1)}$	$A^{(2)}$	+	$\mu > \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 > \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(1)	$\mu^0 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(3)	$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$	14
	$B^{(2)}$	$B^{(1)}$	+	$\mu > \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu < \mu_0,\ \mu > \mu_1$	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(4)	$\mu^1 < \mu_0$ $\lambda > \lambda_0^1$	(4)	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(2)	$\mu^1 > \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^1$	(2)	$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$	15
	$B^{(2)}$	$B^{(1)}$	—	$\mu > \mu^0,\ \mu > \mu^1$ $\mu > \mu_0,\ \mu < \mu_1$	$\mu^0 < \mu_1$ $\lambda < \lambda_1^0$	(1)	$\mu^1 < \mu_1$ $\lambda > \lambda_1^1$	(1)	$\mu^0 < \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^0$	(3)	$\mu^1 > \mu_0$ $\lambda < \lambda_0^1$	(3)	$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$	16

Die mit Klammern umgebenen Ziffern (1), (2), (3) bis (8) bezeichnen die Horizontalreihe der Tabelle des Art. 12, aus welcher die betreffenden Resultate hergeleitet worden sind.

Wie man sieht, kommen in dieser Zusammenstellung von den 1. 2. 3. 4. oder 24 möglichen gegenseitigen Stellungen der vier Werthe λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 nur 12 derselben vor. Man kann nach dem Grunde dieser Beschränkung fragen, der sich übrigens leicht einsehen lässt.

Einmal dürfen, wie gezeigt wurde, in $\mathrm{III}^{(1)}$ und $\mathrm{IV}^{(1)}$ die inneren Werthe der λ nicht vertauscht werden, so dass dadurch 4 Combinationen wegfallen; sodann sind diejenigen Verbindungen, worin

$$\lambda_1^{\ 1}\ ,\ \lambda_0^{\ 1}\quad ;\quad \lambda_0^{\ 1}\ ,\ \lambda_1^{\ 1}\quad ;\quad \lambda_1^{\ 0}\ ,\ \lambda_0^{\ 0}\quad ;\quad \lambda_0^{\ 0}\ ,\ \lambda_1^{\ 0}$$

resp. die grössten und kleinsten Werthe darstellen, überhaupt gar nicht zulässig, wodurch abermals 4 Combinationen wegfallen. Die weiteren 4 Combinationen wären nun diejenigen, welche in der letzterwähnten durch Versetzung der inneren Glieder entstehen würden. Es sind also in der That 12 solcher Combinationen, in Folge der Bedingungen der Aufgabe, ganz unzulässig und desshalb in der Zusammenstellung nicht vorhanden.

In durchaus analoger Weise kann man nun auch bezüglich der Fälle I_1, II_1, III_1, IV_1 verfahren und sich die entsprechende Übersicht entwerfen. Man kann sich jedoch dieser Mühe durch die Bemerkung entheben, dass für beide Veränderliche λ, μ genau dieselben Bedingungen wieder auftreten, so dass es, mit alleiniger Ausnahme der Reihenfolge, blos eine Wiederholung des bereits Angeführten wäre, wollte ich auch für die bezeichneten Fälle die Zusammenstellung mittheilen.

Damit man jedoch die Fälle übersichtlich vor sich habe, in welchen dieselben Bedingungen zum Vorschein kommen, und damit man sich in jedem einzelnen Falle von deren Identität leicht selbst überzeugen könne, füge ich die folgende kleine Tabelle hinzu.

Zeichen von Δ	Die Grenzbedingungen sind dieselben resp. in den Fällen:															
	$\mathrm{I}^{(1)}$ und I_1				$\mathrm{II}^{(1)}$ und II_1				$\mathrm{III}^{(1)}$ und III_1				$\mathrm{IV}^{(1)}$ und IV_1			
	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1	μ^0	μ^1
±	$A^{(1)}$	$A^{(1)}$	A_2	A_2	$A^{(2)}$	$A^{(2)}$	A_1	A_1	$A^{(2)}$	$A^{(1)}$	A_1	A_2	$A^{(1)}$	$A^{(2)}$	A_2	A_1
±	$B^{(2)}$	$B^{(2)}$	B_1	B_1	$B^{(1)}$	$B^{(1)}$	B_2	B_2	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	B_2	B_1	$B^{(2)}$	$B^{(1)}$	B_1	B_2

15.

Von jetzt an fallen, wie man sieht, alle Unterscheidungen weg, welche sich nicht unmittelbar auf die 16 Fälle der im vorigen Artikel enthaltenen Zusammenstellung beziehen. Aber auch diese Fälle sind keineswegs so verschieden, dass sie sich theilweise nicht schon zum Voraus auf einander reduciren liessen.

In der That lässt sich ohne Weiteres einsehen, dass jedesmal die zwei Fälle unter sich identisch sind, welche in der bezeichneten Tabelle unter:

1 und 8 ; 2 und 7 ; 3 und 6 ; 4 und 5

sodann unter:

9 und 16 ; 10 und 15 ; 11 und 14 ; 12 und 13

angeführt wurden, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil bei jedem dieser Paare das Zeichen von Δ dasselbe ist, während sowohl μ^0, μ^1, μ_0, μ_1 zu μ, als auch $\lambda_0^{\ 0}$, $\lambda_0^{\ 1}$, $\lambda_1^{\ 0}$, $\lambda_1^{\ 1}$ zu einander durchaus die entgegengesetzten Stellungen einnehmen. In Folge dieses Gegensatzes nehmen die entsprechenden doppelten Integrale zweimal das negative Zeichen an, bleiben aber gerade darum in jeden Fall identisch dieselben.

Hiernach hat man es also nur noch mit acht Fällen und zwar mit $I^{(1)}$ und $III^{(1)}$, oder auch mit $II^{(1)}$ und $IV^{(1)}$ zu thun. Welches dieser zwei Paare man wählt, ist ganz gleichgiltig.

Die Fälle, welche je einem dieser Paare entsprechen, liessen sich leicht auf die Hälfte reduciren durch eine Bemerkung, welche näher angedeutet zu werden verdient. Ich will dabei das Paar $I^{(1)}$, $III^{(1)}$ in das Auge fassen, dann kann man sich leicht überzeugen, dass jedesmal die Fälle:

1 und 3 ; 2 und 4 ; 9 und 11 ; 10 und 12

zu demselben Resultate führen müssen. In jedem dieser letztern Paare hat nämlich Δ einmal das positive und einmal das negative Vorzeichen, während die Bedingungen für μ jedesmal genau dieselben sind, so dass in dieser Hinsicht die Doppel-Integrale dieselbe Form erhielten. Nun muss man sie aber, wie sich später ergeben wird, immer mit dem negativen Zeichen nehmen, wenn Δ negativ ist. Dieses Zeichen wird aber wieder aufgehoben und daher Alles auf den Stand wie für positive Δ gebracht, weil in den Fällen eines negativen Δ die Relationen zwischen λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 durchgehends die umgekehrten von denjenigen sind, welche den Fällen für positive Δ entsprechen. Hiernach reducirt sich also in der That die Anzahl der näher zu erörternden Fälle auf vier, als welche man z. B. jene 1, 4, 10, 11 wählen könnte, die insgesammt einem positiven Δ zugehören. Ich werde jedoch von der hierdurch ermöglichten Abkürzung keinen Gebrauch machen, einmal um thatsächlich die der Sache nach bestehende Übereinstimmung aller in $I^{(1)}$ und $III^{(1)}$ enthaltenen Fälle, und zwar nicht nur wenn Δ positiv, sondern auch wenn es negativ ist, zu zeigen; sodann aber auch um alle 12 Formeln ausführlich vor sich zu haben, welche den 12 zwischen λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 möglichen Grössenverhältnissen (Art. 14) entsprechen. Ich bemerke hierbei noch, dass durch das Hinzukommen von 6 weiteren Gleichungen der Kürze kein Eintrag geschieht, indem dieselben in der für den spätern Gebrauch zweckmässigeren Darstellungsart des Doppelintegrals erscheinen, und also ohnehin durch Umformungen abgeleitet werden müssten, wenn solches nicht schon hier geschehen wäre. Alle sich ergebenden Endresultate werde ich jedesmal auf einander zurückzuführen suchen, um einen Schluss auf die wesentliche Übereinstimmung aller dieser Resultate unter sich ziehen zu können.

Im Hinblicke auf die zahlreichen Reductionen, welche in diesem und dem vorigen Artikel stattfanden, wird kaum die Vermuthung entstehen, als hätte sich die Betrachtung auf Umwegen bewegt. Denn es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass alle denkbaren Fälle nicht nur im Allgemeinen bezeichnet, sondern so ausführlich dargelegt werden mussten, um mit Sicherheit erkennen zu können, in wiefern sie sich auf einander zurückführen lassen und welches die Hauptfälle sind, womit das Weitere sich beschäftigen soll.

16.

Die nähere Untersuchung der Fälle, auf welche so eben alle übrigen zurückgeführt worden sind, leitet nun direct zur Lösung der ursprünglich gestellten Frage.

Nur eine kurze Bemerkung möge vorausgehen. Durch Einführung der neuen Veränderlichen $\lambda . \mu$ an Stelle der alten x, y geht das gegebene Differential $f(x, y)\, dx\, dy$ bekanntlich über in:

$$\pm \left(\frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}\right) f(X, Y)\, d\lambda\, d\mu$$

wobei, wie zuerst Euler a. a. O. gezeigt hat, dasjenige Zeichen zu wählen ist, für welches der Factor

$$\pm \left(\frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}\right) = \pm \Delta$$

positiv wird. Diese Zeichenbestimmung sollte scheinbar dem speciellen Falle vorbehalten bleiben, und bildet offenbar den schwierigern Theil der Frage, ohne dessen Erledigung an eine allgemeine Lösung derselben nicht zu denken war. Durch das Vorhergehende ist nun diese Zeichenbestimmung in die engste Verbindung mit den Grenzen des Integrals, resp. mit den Grössenverhältnissen der Wurzeln gewisser Gleichungen gebracht und zwar ist das transformirte Differential für ein an sich positives Δ, also in den Fällen 1, 4, 5, 8 zu setzen $= + f(X, Y) \, . \, \Delta\, d\lambda\, d\mu$. Wenn dagegen Δ an sich negativ ist, also in den Fällen 2, 3, 6, 7, so ist jenes Differential zu nehmen $= -f(X, Y) \, . \, \Delta\, d\lambda\, d\mu$.

Dies vorausgesetzt beginne ich nun mit dem ersten Falle des Art. 14, für welchen, bezüglich der Veränderlichen μ die Bedingungen:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad ; \quad \mu > \mu_0 \quad . \quad \mu < \mu_1$$

gegeben sind. — Vor Allem ist nun klar, dass diesen Bedingungen im Ganzen auf die folgenden vier Arten Genüge geschehen kann, nämlich

$$\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \; . \; . \; . \; . \; (1) \; ; \; (1^1)$$
$$\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \; . \; . \; . \; . \; (2) \; ; \; (4^1)$$
$$\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \; . \; . \; . \; . \; (3) \; . \; (3^1)$$
$$\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \; . \; . \; . \; . \; (4) \; , \; (2^1)$$

Hierzu kommen noch die weiteren Bedingungen:

$$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 \; . \; . \; . \; (l)$$

oder aber:

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (l^1)$$

Angenommen nun die erstere (l) finde statt, so leuchtet ein, dass man, um die Gesammtheit aller Werthe von λ und μ zu erschöpfen, welche zulässig sind, so lange die Ungleichheiten (1) unverändert bleiben, die Veränderliche μ nur diejenigen Werthe annehmen lassen darf, welche zwischen μ^0 und μ_1 liegen.

Was nun aber die Gesammtheit der zulässigen Werthe von λ betrifft, so muss man bemerken, dass die Bedingung $\mu^0 < \mu_1$ nur so lange stattfindet, als λ grösser ist, als der kleinste aller, derselben noch entsprechenden Werthe, nämlich grösser als λ_1^0, dass man aber von diesem Werthe an, die Veränderliche λ nur so weit wachsen lassen darf, als in den übrigen Gliedern von (1), also in den Beziehungen:

$$\mu_0 < \mu^0 \qquad , \qquad \mu_1 < \mu^1$$

keine Änderung eintritt. Die erste derselben geht aber schon in ihr Gegentheil über (und zwar früher als die zweite) wenn λ den auf λ_1^0 zunächst folgenden Werth λ_1^1 erreicht.

Sämmtliche Werthe von λ und μ, welche den Bedingungen (1) entsprechen, sind daher durch die Grenzen-Intervalle des Integrals:

$$(1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

dargestellt, und erst von dem Werthe $\lambda = \lambda_1^1$ an nehmen die Bedingungen (1) die Gestalt derjenigen in (2) an, welche hinwieder so lange unverändert bestehen, als sich λ von λ_1^1 bis λ_0^0 wachsend bewegt. — Da hierbei die Ungleichheit $\mu_0 < \mu_1$ nicht in ihr Gegentheil verkehrt wird, indem die Gleichung $\mu_0 = \mu_1$ vermöge früherer Voraussetzungen innerhalb des bezeichneten Intervalls keine Wurzel besitzt, so ist klar, dass der ganze Umfang der von der Bedingung (2) eingeräumten Werthe von λ und μ dargestellt wird durch die Intervalle der Grenzen des Integrals

$$(2) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, .\, \Delta\, d\mu$$

Lässt man sofort λ den Werth λ_0^0 wachsend überschreiten, so geht die Bedingung (2) in jene (3) über, und es bleibt darin so lange $\mu_0 < \mu^1$, als λ seinen grössten Werth λ_0^1 nicht überschritten hat. Hiernach erschöpfen die Grenzen des Integrals:

$$(3) = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

alle in (3) zulässigen Werthe der Veränderlichen λ und μ.

Es entsteht nun allein die Frage, ob man auch den Bedingungen in (4) noch Genüge leisten könne, ohne mit den zu Grunde liegenden Voraussetzungen in Widerspruch zu gerathen. Dass dies in der That unmöglich ist, davon kann man sich auf verschiedene Arten, sehr einfach aber wie folgt, überzeugen:

Aus dem hier vorliegenden ersten Falle der Tabelle des Art. 14 geht nämlich hervor, dass

$$\mu_0 < \mu^0 \text{ für } \lambda < \lambda_0^0$$

und

$$\mu_1 > \mu^1 \text{ für } \lambda > \lambda_1^1$$

Nun steht aber sowohl die erste als die letzte Ungleichheit, wie man sieht, mit (4) in directem Widerspruche. Wenn aber λ nicht kleiner als λ_0^0 und nicht grösser als λ_1^1 sein darf, so lässt die Bedingung (l), nämlich:

$$\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$$

auch nicht den geringsten Raum für einen Werth, geschweige denn für ein Intervall von Werthen der Variabeln λ übrig. Daraus folgt, dass die Bedingungen (4) sich unter den bestehenden Voraussetzungen nicht erfüllen lassen, und dass daher die Integrale (1), (2), (3) zusammen alle zulässigen Werthe von λ, μ erschöpfen und das gegebene doppelte Integral darstellen.

Hieraus folgt also: Wenn $\lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

Es bleibt noch der Fall zu erörtern, in welchem die Grenzwerthe von λ die Stellung in (l^1) zu einander haben. Zu dem Ende denke man sich die Ungleichheiten bezüglich μ in der schon oben angedeuteten Ordnung (1^1), (2^1), (3^1), (4^1) angeschrieben, so wird man durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie oben finden:

$$(1^1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu; \; (2^1) = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu; \; (3^1) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Den Ungleichheiten (4^1) vermag auch hier kein Werth von λ Genüge zu thun. In der That folgt aus der Tabelle des Art. 15, dass für:

$$\mu^1 < \mu_1 \text{ nothwendig } \lambda > \lambda_1^1$$

und für

$$\mu_0 < \mu^0 \quad \text{,,} \quad \lambda < \lambda_0^0$$

Nun soll aber vermöge (l^1) gleichzeitig auch noch:

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$$

sein; man sieht also, dass es absurd wäre, unter diesen nach allen Richtungen sich widersprechenden Anforderungen einen Werth von λ angeben zu wollen. Es finden somit auch in dem vorliegenden Falle nur drei Theilintegrale statt, und zwar ergibt sich:

Wenn $\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

Die Resultate (I) und (II) lassen sich durch eine einfache Verwandlung auf einander zurückführen. In der That, addirt man zum ersten und dritten Gliede der zuletzt erhaltenen Gleichung resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \;, \; \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht die Summe beider vom zweiten Gliede wieder ab, so erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, die zuerst gefundene Gleichung wieder. Daraus folgt also, dass zwischen den beiden Ergebnissen so lange kein wesentlicher Unterschied besteht, als die addirten und wieder subtrahirten Integrale nicht unbestimmt sind.

17.

Betrachtet man in gleicher Weise den zweiten Fall der Tabelle des Art. 14, welcher auf den Bedingungen:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

beruht, so zeigt sich auf der Stelle, dass die Veränderliche μ auch hier wieder auf vier Arten jenen Forderungen Genüge leisten könne, nämlich:

$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \;.\;.\;.\;. \; (1) \;,\; (1^1)$$

$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \;.\;.\;.\;. \; (2) \;,\; (4^1)$$

$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \;.\;.\;.\;. \; (3) \;,\; (3^1)$$

$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \;.\;.\;.\;. \; (4) \;,\; (2^1)$$

Hierzu kommen noch die weiteren Bedingungen aus Art. 14:

$$\lambda_1^{\,1} < \lambda_0^{\,1} < \lambda_1^{\,0} < \lambda_0^{\,0} \;.\;.\;. \; (l)$$

oder aber:

$$\lambda_1^{\,1} < \lambda_1^{\,0} < \lambda_0^{\,1} < \lambda_0^{\,0} \;.\;.\;.\;.\;. \; (l^1)$$

und ferner: Δ an sich negativ, also $-f(X, Y)\,\Delta\, d\lambda d\mu$ das neue Differential.

Ich werde zunächst wieder die Relation (l) als bestehend voraussetzen.

In der Bedingung (1) darf μ alle zwischen μ^0 und μ_0 liegenden Werthe annehmen, und λ ein Intervall von Werthen durchlaufen, für welches in der Stellung der Glieder in (1) keinerlei Änderung eintritt. Nun bleibt $\mu^0 < \mu_0$ nur so lange, als $\lambda > \lambda_0^{\,0}$, und $\mu_1 < \mu^0$ nur so lange, als noch $\lambda < \lambda_1^{\,0}$, wie dies aus Art. 14 hervorgeht. Folglich darf λ blos das Intervall $\lambda_0^{\,0}$ bis $\lambda_1^{\,0}$ durchlaufen, und man hat:

$$(1) = -\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y)\,.\,\Delta\, d\mu$$

für $\lambda = \lambda_1^{\,0}$ geht die Bedingung (1) in (2) über, und man findet durch das ähnliche Raisonnement:

$$(2) = -\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\,.\,\Delta\, d\mu$$

Für $\lambda = \lambda_0^{\,1}$ geht sofort (2) in (3) über und man erhält:

$$(3) = -\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y)\,\Delta\, d\mu$$

Auch hier kann der Bedingung in (4) nicht Genüge gethan werden. Denn, wie aus der Tabelle des Art. 14 hervorgeht, ist:

$$\mu_0 > \mu^1, \text{ so lange } \lambda > \lambda_0^1$$
$$\mu_1 < \mu^0, \quad „ \quad „ \quad \lambda < \lambda_1^0$$

Wenn aber hiernach λ einmal grösser als λ_0^1 und zugleich wieder kleiner als λ_1^0 sein soll, so kann ihm gemäss (l) gar kein Werth angewiesen werden. — Das Integral besteht also nur aus den obigen drei Theilen, so dass für: $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$ ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Addirt man zum ersten und dritten Gliede resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht deren Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, genau die Gleichung (II).

Legt man die Bedingungen (l^1) zu Grunde, und betrachtet die Ungleichheiten bezüglich der Veränderlichen μ in der oben bereits angedeuteten Ordnung (1^1), (2^1), (3^1), (4^1), so wird man durch eine ganz analoge Betrachtung finden, dass:

$$(1^1) = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu; \quad (2^1) = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu; \quad (3^1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu.$$

Man wird ferner finden, dass (4^1) auch in diesem Falle nicht befriedigt werden kann, und zwar darum, weil nach Art. 14

$$\mu_0 < \mu^1, \text{ wenn } \lambda < \lambda_0^1$$

und

$$\mu^0 < \mu_1, \text{ wenn } \lambda > \lambda_1^0$$

Wenn aber λ gleichzeitig grösser als λ_1^0 und kleiner als λ_0^1 sein soll, so lassen die Forderungen in (l^1) keinen Spielraum für irgend einen Werth von λ übrig. Es entspricht daher diesem Falle kein Integral, und man hat das Resultat:

Wenn $\lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Diese Gleichung lässt sich sogleich auf die oben erhaltene (III) zurückführen. Addirt man nämlich zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht deren Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so findet man genau die Gleichung (III) wieder.

18.

Ich komme zu dem unter Nr. 3 angeführten Falle des Art. 14, für welchen die Bedingungen bezüglich μ bestehen;

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1$$

denen man, im Allgemeinen auf die folgenden vier Arten genügen kann:

$$\begin{aligned}
&\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \; . \; . \; . \; . \; (1) \; , \; (1^1)\\
&\mu^0 < \mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \; . \; . \; . \; . \; (2) \; , \; (4^1)\\
&\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 \; . \; . \; . \; . \; (3) \; , \; (3^1)\\
&\mu_0 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 \; . \; . \; . \; . \; (4) \; , \; (2^1)
\end{aligned}$$

wozu für λ noch die weiteren Bedingungen:

$$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1 \quad . \; . \; (l)$$

oder auch:

$$\lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (l^1)$$

kommen, und wobei Δ an sich negativ ist.

Angenommen es finde die Bedingung (l) statt, so darf μ in (1) das Intervall von μ_0 bis μ^1, dagegen λ nur jenes von λ_0^1 bis λ_1^1 durchlaufen, weil nach Art. 14 nur dann $\mu_0 < \mu^1$, so lange $\lambda > \lambda_0^1$, und $\mu^1 < \mu_1$, so lange $\lambda < \lambda_1^1$ ist.

Man hat daher:

$$(1) = -\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Für $\lambda > \lambda_1^1$ geht also (1) in (2) über und erhält man:

$$(2) = -\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Wenn $\lambda > \lambda_0^0$ so geht (2) in (3) über und es bleibt (3) unverändert, so lange $\lambda < \lambda_1^0$, weil dann nach Art. 14 immer noch $\mu^0 < \mu_1$ bleibt. Es ist also:

$$(3) = -\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Was nun die Bedingung (4) betrifft, so kann ihr hier kein Genüge geschehen. Denn nach Art. 14 ist

$$\lambda > \lambda_0^0 \text{ wenn } \mu_0 < \mu^0$$

und

$$\lambda < \lambda_1^1 \text{ wenn } \mu^1 < \mu_1$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser Eingrenzung von λ, mit der Voraussetzung (l) zusammengehalten, lässt auf der Stelle erkennen, dass sich kein λ angeben lässt, welches (4) genügt.

Wenn also: $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$, so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

Auch diese Gleichung stimmt dem Wesen nach mit allen vorhergehenden überein. Um sich davon auf einfache Art zu überzeugen, addire man resp. zum ersten und dritten Gliede die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und ziehe ihre Summe vom zweiten Gliede ab, so wird man unmittelbar zur Gleichung (III) gelangen.

Es ist nun noch der Fall zu betrachten, in welchem die Voraussetzung (l^1) stattfindet. Man betrachte die Bedingungen für μ in der oben schon angedeuteten Aufeinanderfolge (1^1), (2^1), (3^1), (4^1) so wird man finden, dass (1^1) nur so lange unverändert bleibt, als μ zwischen μ_0 und μ^1 sich bewegt, und $\lambda > \lambda_0^1$ und $\lambda < \lambda_0^0$ bleibt, weil nach Art. 14 nur dann $\mu^0 < \mu_0$, $\mu_0 < \mu^1$ ist. Somit erhält man:

$$(1^1) = -\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Für $\lambda = \lambda_0^0$ geht (1^1) in (2^1) über und behält die letztere Form so lange sich μ zwischen μ^0 und μ^1, und so lange sich λ zwischen λ_0^0 und λ_1^1 bewegt, weil dann nach Art. 14 beständig $\mu_0 < \mu^0$ und $\mu^1 < \mu_1$ bleibt. Es ist daher

$$(2^1) = -\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Wenn sofort λ den Werth λ_1^1 überschreitet, so geht (2^1) in (3^1) über, und man findet hierfür durch dasselbe Raisonnement:

$$(3^1) = -\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Den Bedingungen (4^1) kann auch hier nicht entsprochen werden, denn nach Art. 14 muss:

$$\lambda < \lambda_0^0 \quad , \quad \text{wenn } \mu^0 < \mu_0$$

und

$$\lambda > \lambda_1^1 \quad , \quad \text{wenn } \mu_1 < \mu^1$$

sein soll. Diese Anforderungen, verglichen mit (l^1) lassen aber keinen Werth für λ zu. Hieraus folgt nun das Resultat:

Wenn $\lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \;\ldots\ldots\; (\mathrm{VI})$$

Addirt man zum ersten und dritten Gliede resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so ergibt sich genau die Gleichung (V).

19.

Für den vierten Fall des Art. 14 bestehen die Bedingungen:

$$\mu > \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

welchen auf die vier verschiedenen Arten:

$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \;\ldots\; (1)\,,\,(1^1)$$
$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu^1 < \mu_0 \;\ldots\; (2)\,,\,(4^1)$$
$$\mu_1 < \mu^0 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \;\ldots\; (3)\,,\,(3^1)$$
$$\mu^0 < \mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 \;\ldots\; (4)\,,\,(2^1)$$

entsprochen werden kann, und wozu die weitere Bedingung:

$$\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 \;\ldots\; (l)$$

oder aber:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1 \;\ldots\ldots\; (l^1)$$

kommt, und wobei Δ an sich positiv ist.

Wird zunächst (l) vorausgesetzt, so kann in (1) die Veränderliche μ alle zwischen μ_1 und μ^1 liegenden Werthe annehmen, und da stets $\mu_1 < \mu^1$ und $\mu^0 < \mu_1$ bleiben soll, was nach Art. 14 nur so lange der Fall ist, als gleichzeitig $\lambda > \lambda_1^1$ und $\lambda < \lambda_1^0$ bleibt, so hat man offenbar:

$$(1) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich dass:

$$(2) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu \quad ; \quad (3) = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu$$

Die Bedingungen (4) lassen sich auch hier nicht verwirklichen; denn nach Art. 14 muss nothwendig:

$$\lambda > \lambda_0^1 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu_0 < \mu^1$$

und

$$\lambda < \lambda_1^0 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu^0 < \mu_1$$

sein soll.

Da aber diese Eingrenzung von λ mit (l) gleichzeitig nicht bestehen kann, so rechtfertigt sich die obige Behauptung von selbst.

Wenn also: $\lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\ dy =$$

$$\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu \ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

Addirt man resp. zum ersten und dritten Glied die Integrale:

$$\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu^0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu$$

und zieht alsdann die Summe beider vom zweiten Gliede wieder ab, so erhält man die Gleichung (VI).

Wird die Relation (l^1) zu Grunde gelegt, so wird man durch ein Raisonnement, welches dem bisherigen durchaus analog ist und darum nicht näher ausgeführt zu werden braucht, erhalten:

$$(1^1) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu \ ; \ (2^1) = \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu \ ; \ (3^1) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu$$

Bezüglich der Bedingung (4^1) müsste nach Art. 14:

$$\lambda > \lambda_1^0 \quad . \quad \text{wenn} \quad \mu_1 < \mu^0$$

und

$$\lambda < \lambda_0^1 \quad , \quad \text{wenn} \quad \mu^1 < \mu_0$$

sein sollte, was mit (l^1) im Widerspruch steht, es bietet also (4^1) keine Lösung dar. Wenn daher $\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\ dy =$$

$$\int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X,\ Y)\ \Delta\ d\mu \ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

Addirt man zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Gliede wieder ab, so wird man die vorige Gleichung (VII) wieder finden.

20.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen sind alle zu $\mathrm{I}^{(1)}$ des Art. 14 gehörenden Fälle erledigt, und nicht nur die entsprechenden Transformationsformeln hergestellt, sondern successive auch auf einander zurückgeführt oder als wesentlich unter sich übereinstimmend erkannt worden. Dieselbe Aufgabe bleibt nun zur Vollendung des Beweises für die in $\mathrm{III}^{(1)}$ enthaltenen Fälle zu lösen übrig. Ich werde mich nunmehr mit derselben beschäftigen.

Der erste jener Fälle ist Nr. 9 der Tabelle in Art. 14, für welchen die Bedingungen bestehen:

$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_1$$

denen im Allgemeinen auf die folgenden sechs Arten Genüge geschehen kann:

$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu_0 < \mu^1 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^0 < \mu^1 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 < \mu^0 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 < \mu^0 \quad \ldots\ldots (4)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_0 \quad \ldots\ldots (5)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_0 \quad \ldots\ldots (6)$$

Hierzu kommt noch, dass:

$$\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0 \quad \ldots\ldots (l)$$

und Δ an sich negativ ist.

Mit Rücksicht auf diese und die übrigen in Art. 14 gegebenen Bedingungen lässt sich leicht einsehen, dass die Fälle (5) und (6) als unzulässig ausgeschlossen werden müssen. Denn darnach ist:

$$\lambda > \lambda_0^1\,, \text{ wenn } \mu^1 < \mu_0 \text{ wie in (5) gefordert wird,}$$

und

$$\lambda < \lambda_0^0\,, \text{ wenn } \mu^0 < \mu_0 \text{ wie in (6) gefordert wird.}$$

Da nun $\mu^1 < \mu_0$ und $\mu^0 < \mu_0$ gemeinschaftliche Bedingungen von (5) und (6) sind, so genügt es, zu untersuchen, ob es Werthe von λ gibt, welche jenen beiden Anforderungen und zugleich jener (l) genügen können. Aus $\lambda > \lambda_0^1$ und $\lambda < \lambda_0^0$ folgt aber $\lambda_0^0 > \lambda_0^1$ und diese Forderung steht mit (l) im Widerspruch: folglich kann weder (5) noch (6) entsprochen werden.

Um nun den Umfang der Werthe von λ und μ zu bestimmen, für welchen die Bedingungen (1) unverändert dieselben bleiben, bemerke man zunächst, dass μ alle Werthe durchlaufen darf, welche zwischen μ_1 und μ^0 liegen, dass aber, damit in der That $\mu_1 < \mu^0$ sei, nach

Art. 14 nothwendig $\lambda > \lambda_1^0$ vorausgesetzt werden müsse. Da also λ_1^0 die unterste Grenze von λ, so ergibt sich eben so aus (l) dass, wenn λ den nächst grössern Werth λ_0^0 erreicht, die Ungleichheit $\mu^0 < \mu_0$ in ihr Gegentheil übergeht, weil eben nach Art. 14:

$$\mu^0 > \mu_0 \text{ wird, wenn } \lambda > \lambda_0^0 \text{ ist.}$$

Daraus ergibt sich ohne Weiteres, dass das Bereich aller durch die Bedingungen in (1) eingeräumten Werthe von λ und μ durch die Grenzen-Intervalle des Integrals

$$(1) = -\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

erschöpft werden.

Bei $\lambda = \lambda_0^0$ gehen die Ungleichheiten (1) in jene (2) über. Da hierbei μ beständig zwischen die Grenzen μ_1 und μ_0 eingeschlossen bleibt, also niemals den Werth erreichen kann, welchen μ^0 und μ^1 annehmen, wenn sie einander gleich werden (wobei es übrigens ganz gleichgiltig bleibt, von welcher Beschaffenheit der entsprechende Werth λ^{01} sein möge) so darf man λ bis λ^{01} wachsen (oder nöthigenfalls abnehmen) lassen, indem dann niemals der Fall eintritt, dass λ und μ gleichzeitig die der Gleichung $\mu^0 = \mu^1$ entsprechenden Werthe im Bereich der Integration annehmen.

Hieraus folgt, dass die Gesammtheit der Werthe von λ und μ, welche den Bedingungen in (2) Genüge leisten, in den Grenzen des Integrals:

$$(2) = -\int_{\lambda_0^0}^{\lambda^{01}} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

vollständig enthalten ist.

Bei dem Werthe $\lambda = \lambda^{01}$ angelangt, geht (2) in (3) über und behält diese Form bis $\lambda = \lambda_0^1$ wird. Es ist daher:

$$(3) = -\int_{\lambda^{01}}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Von $\lambda = \lambda_0^1$ an geht sofort (3) in (4) über und behält diese Form bis $\lambda = \lambda^1_1$ geworden ist. Man hat also:

$$(4) = -\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu.$$

Nimmt man nun alle diese Auflösungen zusammen, und bemerkt, dass die Integrale (2) und (3) in ein einziges sich verwandeln lassen und dass bei dieser Gelegenheit λ^{01} daraus verschwindet, so ergibt sich:

Wenn $\lambda_1^1 > \lambda_0^1 > \lambda_0^0 > \lambda_1^0$ so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad \ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

r *

Addirt man zum ersten Glied dieser Gleichung das Integral:

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht es vom zweiten Gliede wieder ab, so wird man nach einer einfachen Reduction die Gleichung (VIII) wieder finden.

21.

In gleicher Weise ist nun der Fall Nr. 10 der Tabelle des Art. 14 zu betrachten, wofür die Bedingungen bestehen:

$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu > \mu_0 \quad . \quad \mu < \mu_1$$

welchen, im Allgemeinen, auf die folgenden sechs Arten entsprochen werden kann:

$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu_1 < \mu^1 \;.\;.\;.\;. \;(1)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^0 < \mu^1 \;.\;.\;.\;. \;(2)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 < \mu^0 \;.\;.\;.\;. \;(3)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 < \mu^0 \;.\;.\;.\;. \;(4)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_1 \;.\;.\;.\;. \;(5)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_1 \;.\;.\;.\;. \;(6)$$

wozu die weitere Bedingung kommt, dass

$$\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0 \;.\;.\;.\;. \;(l)$$

und Δ an sich positiv sei. — Ich werde vor Allem nachweisen, dass die Fälle (5) und (6) auch hier ausgeschlossen werden müssen. Denn es ist nach Art. 14:

$$\lambda < \lambda_1^0 \text{ wenn } \mu^0 < \mu_1$$

und

$$\lambda > \lambda_1^1 \text{ wenn } \mu^1 < \mu_1$$

Da nun sowohl in (5) als in (6) gleichzeitig $\mu^0 < \mu_1$ und $\mu^1 < \mu_1$ sein soll, so sieht man, dass λ weder im Intervall von λ_0^0 bis λ_0^1 noch ausserhalb desselben einen Werth erhalten kann, welcher allen Anforderungen, worunter insbesondere (l) gehört, entspricht: hierdurch ist aber die Behauptung gerechtfertigt.

Die Ungleichheiten in (1) bleiben nun so lange dieselben, als μ zwischen μ_0 und μ^0 eingeschlossen bleibt. Zugleich aber muss nach Art. 14 nothwendig $\lambda > \lambda_0^0$ sein, damit wirklich $\mu_0 < \mu^0$ bleiben kann, und ebenso nothwendig muss $\lambda < \lambda_1^0$ bleiben, damit stets $\mu^0 < \mu_1$ bleibe, weil diese Ungleichheit für $\lambda = \lambda_1^0$ in ihr Gegentheil übergeht, indem

$$\mu_1 < \mu^0 \text{ wird, wenn } \lambda > \lambda_1^0$$

ist. Daraus ergibt sich ohne Weiteres, dass man habe:

$$(1) = \int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Für (2) findet man durch ein Raisonnement, welches dem entsprechenden im vorigen Art. durchaus analog ist:

$$(2) = \int_{\lambda_1^0}^{\lambda^{01}} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Bei dem Werthe $\lambda = \lambda^{01}$ angelangt, geht (2) in (3) über und behält dieselbe Form bis $\lambda = \lambda_1^1$ wird. Es ist daher:

$$(3) = \int_{\lambda^{01}}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Von $\lambda = \lambda_1^1$ an geht (3) in (4) über und behält diese Form bis $\lambda = \lambda_0^1$ geworden ist. Man hat also:

$$(4) = \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Nimmt man alle diese Integrale zusammen, und bemerkt, dass bei der Vereinigung von (2) und (3) der Grenzwerth λ^{01} ganz verschwindet, so wird man haben:

Wenn $\lambda_0^1 > \lambda_1^1 > \lambda_1^0 > \lambda_0^0$, so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(X)}$$

Addirt man zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Glied ab, so ergibt sich die Gleichung (IX) wieder.

22.

Den Bedingungen:

$$\mu < \mu^0 \quad ; \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu < \mu_0 \quad , \quad \mu > \mu_0$$

des unter Nr. 11 im Art. 14 angeführten Falles kann man im Allgemeinen ebenfalls auf sechs verschiedene Arten genügen, nämlich:

$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu_0 < \mu^0 \;.\;.\;.\;.\; (1)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^1 < \mu^0 \;.\;.\;.\;.\; (2)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu_0 < \mu^0 < \mu^1 \;.\;.\;.\;.\; (3)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu_0 < \mu^1 \;.\;.\;.\;.\; (4)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_0 \;.\;.\;.\;.\; (5)$$
$$\mu_1 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_0 \;.\;.\;.\;.\; (6)$$

wobei noch

$$\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

und Δ an sich positiv ist.

Vor Allem bemerke man, dass auch hier die Fälle (5) und (6) als unstatthaft ausgeschlossen werden müssen. Denn es ist nach Art. 14:

$$\lambda > \lambda_0^0 \quad , \quad \text{wenn } \mu^0 < \mu_0$$

und

$$\lambda < \lambda_0^1 \quad , \quad \text{wenn } \mu^1 < \mu_0$$

Da aber diese Forderungen gleichzeitig erfüllt werden müssten, so müsste auch $\lambda_0^0 < \lambda_0^1$ sein, während die Bedingung (l) fordert, dass $\lambda_0^0 > \lambda_0^1$ sei. Daraus sieht man, dass es gar nicht möglich ist, den Bedingungen (5) und (6) und gleichzeitig den übrigen Forderungen zu genügen.

Für die übrigen vier Ungleichheiten findet man auf ganz ähnlichem Wege, wie er nun wiederholt bezeichnet worden ist, dass:

$$(1) = \int\limits_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad ; \quad (2) = \int\limits_{\lambda_0^1}^{\lambda^{01}} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad .$$

$$(3) = \int\limits_{\lambda^{01}}^{\lambda_0^0} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad (4) = \int\limits_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Durch die Vereinigung dieser Integrale fällt die Zwischengrenze λ^{01} heraus, und man erhält das Resultat:

Wenn $\lambda_1^0 > \lambda_0^0 > \lambda_0^1 > \lambda_1^1$, so ist:

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int\limits_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int\limits_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^1} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int\limits_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int\limits_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu^0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XI)}$$

Addirt man zum zweiten Gliede das Integral:

$$\int\limits_{\lambda_0^0}^{\lambda_1^0} d\lambda \int\limits_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht es vom dritten Gliede wieder ab, so findet man genau die Gleichung (X) wieder.

23.

Ich komme zum letzten Falle, nämlich zu Nr. 12 des Art. 14, wofür die Bedingungen:

$$\mu < \mu^0 \quad , \quad \mu < \mu^1 \quad , \quad \mu > \mu_0 \quad , \quad \mu < \mu_1$$

gegeben sind, denen man wieder auf sechs Arten entsprechen kann:

$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu_1 < \mu^0 \quad . \; . \; . \; (1)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^1 < \mu^0 \quad . \; . \; . \; (2)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu_1 < \mu^0 < \mu^1 \quad . \; . \; . \; (3)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu_1 < \mu^1 \quad . \; . \; . \; (4)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu^0 < \mu^1 < \mu_1 \quad . \; . \; . \; (5)$$
$$\mu_0 < \mu < \mu^1 < \mu^0 < \mu_1 \quad . \; . \; . \; (6)$$

wobei noch:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$$

und Δ an sich negativ ist.

Da hierin:

$$\lambda > \lambda_1^0 \quad . \quad \text{wenn } \mu^0 < \mu_1$$

und

$$\lambda < \lambda_1^1 \quad , \quad \text{wenn } \mu^1 < \mu_1$$

so ist ohne Weiteres klar, dass auch hier die Bedingungen (5) und (6) als unerfüllbar auszuschliessen sind.

Da die Discussion der übrigen vier Fälle auf die wiederholt schon vorgekommene Art zu führen ist, so füge ich blos deren Ergebnisse bei. Man erhält nämlich:

$$(1) = -\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^1} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu \quad ; \quad (2) = -\int_{\lambda_1^1}^{\lambda^{01}} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu$$

$$(3) = -\int_{\lambda^{01}}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu \quad ; \quad (4) = -\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu^0} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu$$

Wenn daher:

$$\lambda_0^0 > \lambda_1^0 > \lambda_1^1 > \lambda_0^1$$

so ist:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi'(x)} f(x,\, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_1^0} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XII)}$$

Addirt man zum ersten und dritten Glied resp. die Integrale:

$$\int_{\lambda_0^1}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu \quad , \quad \int_{\lambda_1^0}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X,\, Y)\, \Delta\, d\mu$$

und zieht ihre Summe vom zweiten Gliede ab, so wird man die Gleichung (XI) genau wieder finden.

24.

Durch die vorangehenden Betrachtungen sind nun nicht blos die früher als wesentlich verschieden erkannten Fälle insgesammt untersucht, sondern es sind zugleich auch die ihnen entsprechenden Transformationsformeln des gegebenen Doppel-Integrals wirklich dargestellt worden, auf welche es ursprünglich vor Allem abgesehen war.

Es wurde gleichzeitig mit der Entwickelung jener 12 Gleichungen die wesentliche Übereinstimmung der in denselben enthaltenen Darstellungen des transformirten Integrals unter sich nachgewiesen, so dass von jetzt an, so weit es sich um den vollständigen Ausdruck dieses Integrals handelt, auch die letzten in Art. 15 noch für nöthig gehaltenen Unterscheidungen als ganz unwesentlich erscheinen und weiter nichts besagen, was man nicht unmittelbar durch blosse Addition und Subtraction gewisser endlicher Ausdrücke in Integralform erreichen kann.

Hiernach lässt sich das Ergebniss der ganzen vorhergehenden Untersuchung, alle Fälle umfassend, in folgender Weise darstellen:

Theorem.

Bezeichnen $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$ zwei Functionen von x, welche innerhalb der Werthe ξ_0 und ξ_1 von x endlich und stetig, so wie einwerthig und reell bleiben, und für keinen zwischen ξ_0 und ξ_1 liegenden Werth von x einander gleich werden; setzt man in dem doppelten Integral:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x,y)\, dy$$

an die Stelle der Veränderlichen x, y Functionen zweier neuen Veränderlichen λ, μ, bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$x = X_{(\lambda,\mu)} \quad , \quad y = Y_{(\lambda,\mu)}$$

aus welchen sich niemals eine dritte bilden lässt, welche blos x und y oder blos λ und μ enthält, und wobei $X_{(\lambda,\mu)}$, $Y_{(\lambda,\mu)}$ in Verbindung mit $\varphi^0_{(x)}$, $\varphi^1_{(x)}$ von der Beschaffenheit sind, dass die Wurzel:

$$\begin{array}{llll} \mu = \mu_0 & \text{der Gleichung} & X_{(\lambda,\mu)} = \xi_0 \\ \mu = \mu_1 & \text{"} \quad \text{"} & X_{(\lambda,\mu)} = \xi_1 \\ \mu = \mu^0 & \text{"} \quad \text{"} & Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^0\left(X_{(\lambda,\mu)}\right) \\ \mu = \mu^1 & \text{"} \quad \text{"} & Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^1\left(X_{(\lambda,\mu)}\right) \end{array}$$

vollkommen bestimmt, reell und so lange einwerthig bleibt, als λ zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe liegt, welche als die einzige reelle Wurzel:

$$\begin{array}{llll} \lambda = \lambda_0^0 & \text{der Gleichungen:} & X_{(\lambda,\mu)} = \xi_0 \ , & Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^0(\xi_0) \\ \lambda = \lambda_0^1 & \text{"} \quad \text{"} & X_{(\lambda,\mu)} = \xi_0 \ , & Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^1(\xi_0) \\ \lambda = \lambda_1^0 & \text{"} \quad \text{"} & X_{(\lambda,\mu)} = \xi_1 \ , & Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^0(\xi_1) \\ \lambda = \lambda_1^1 & \text{"} \quad \text{"} & X_{(\lambda,\mu)} = \xi_1 \ , & Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^1(\xi_1) \end{array}$$

sich ergeben; bezeichnet man ferner zur Abkürzung:

$$\Delta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

so ist:

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int\limits_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int\limits_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int\limits_{\mu^0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int\limits_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int\limits_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int\limits_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int\limits_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

wofür man auch jeden der eilf überigen, dem Werthe nach hiermit übereinstimmenden Ausdrücke (II) bis (XII) setzen kann, welche in den Art. 16 bis 24 entwickelt sind.

Durch diesen Satz ist die Unbestimmtheit des Zeichens von Δ, welche die Euler'sche Transformation übrig liess, allgemein aufgehoben. Es kann nun aber wohl geschehen, dass Δ seiner Natur nach (z. B. als Quadratwurzel) ein Doppelzeichen in sich schliesst. Auch in diesem Falle wird nicht erst eine besondere Untersuchung nöthig, wenn man die Grenzen der Integrale, unter Zugrundelegung irgend eines der beiden Zeichen von Δ, das Zeichen von X und Y und sofort die demselben entsprechenden Werthe der Grenzen bestimmt.

Dieser Fall entspricht zwar den Voraussetzungen des Satzes nicht; wenn aber in eben bezeichneter Weise alle Bestimmungen auf die zusammen gehörigen Zweige der Functionen X und Y bezogen werden, was immer geschehen kann, sobald die nicht zusammengehörigen Zweige für bestimmte, innerhalb des zu untersuchenden Intervalls liegende Werthe der Veränderlichen nicht zusammenlaufen, so verhält sich Alles so, wie bei einwerthigen Functionen und es finden daher die früheren Voraussetzungen statt.

25.

Ich werde nunmehr diese Lösung der in wenig beschränkter Allgemeinheit gestellten Aufgabe auf eine grössere Anzahl mehr oder weniger specieller Fälle anwenden, welche geeignet sind, die Bedeutung des gefundenen Theorems sowie auch die Art seiner Anwendung und einige dabei in Betracht kommende Umstände am besten ins Licht zu setzen.

Für die erste Anwendung nehme ich an, die Transformation solle dadurch geschehen, dass man voraussetzt, es sei:

$$x = X_{(\lambda, \mu)} = \mu$$
$$y = Y_{(\lambda, \mu)} = \lambda$$

Dafür erhält man dann $\Delta = +1$ und es folgt:

$$\mu_0 = \xi_0 \text{ aus der Gleichung } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_0$$
$$\mu_1 = \xi_1 \text{ aus der Gleichung } X_{(\lambda, \mu)} = \xi_1$$

Die Gleichungen:

$$Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^0(X_{(\lambda, \mu)}) \quad , \quad Y_{(\lambda, \mu)} = \varphi^1(X_{(\lambda, \mu)})$$

gehen daher beziehungsweise über in:

$$\lambda = \varphi^0(\mu)\,,\ \text{woraus}\ \mu = \mu^0 = \psi^0(\lambda)$$

und

$$\lambda = \varphi^1(\mu)\,,\ \text{woraus}\ \mu = \mu^1 = \psi^1(\lambda)$$

wobei jetzt auf $\psi^0(\lambda)$, $\psi^1(\lambda)$ die Bedingung der Einwerthigkeit in dem Sinne des vorigen Artikels überzutragen ist.

Ferner ergibt sich:

$$\lambda_0{}^0 = \varphi^0(\xi_0)\quad,\quad \lambda_1{}^0 = \varphi^0(\xi_1)\ \text{aus der Gleichung}\ \lambda = \varphi^0(\mu)$$
$$\lambda_0{}^1 = \varphi^1(\xi_0)\quad,\quad \lambda_1{}^1 = \varphi^1(\xi_1)\ \text{aus der Gleichung}\ \lambda = \varphi^1(\mu)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (I) des Art. 16 ein, so erfolgt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi^1(\xi_1)} d\lambda \int_{\psi^0(\lambda)}^{\xi_1} f(\mu, \lambda)\, d\mu + \int_{\varphi^1(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} d\lambda \int_{\psi^0(\lambda)}^{\psi^1(\lambda)} f(\mu, \lambda)\, d\mu + \int_{\varphi^0(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_0)} d\lambda \int_{\xi_0}^{\psi^1(\lambda)} f(\mu, \lambda)\, d\mu$$

Setzt man x für μ, und y für λ, so lässt sich, wie leicht zu sehen, dieser Gleichung die folgende Form geben:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\psi^0(y)}^{\xi_1} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\psi^1(y)}^{\xi_0} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi^1(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\psi^0(y)}^{\psi^1(y)} f(x, y)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Auf gleiche Art liessen sich aus den früheren Gleichungen (II) bis (XII) noch weitere eilf Formen ableiten. Ich will, des spätern Gebrauches wegen, nur noch diejenige anführen, welche sich aus (II) ergibt. Sie ist die folgende:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\psi^0(y)}^{\xi_1} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\psi^1(y)}^{\xi_0} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi^0(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x, y)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wobei die Gleichung $\varphi^0(x) = \varphi^1(x)$ keine zwischen ξ_0 und ξ_1 liegende reelle Wurzel besitzt, und die als einwerthig vorausgesetzte Function:

$$x = \psi^0(y)\quad \text{aus der Gleichung}\quad y = \varphi^0(x)$$

und

$$x = \psi^1(y)\quad \text{aus der Gleichung}\quad y = \varphi^1(x)$$

abzuleiten ist.

Hierdurch nun ist der Satz bewiesen, dass auch bei Doppel-Integralen mit veränderlichen Grenzen die Umkehrung der Integrationsfolge gestattet ist, dass aber hieraus im Allgemeinen **drei** andere doppelte Integrale hervorgehen, deren zum Theil veränderliche Grenzen aus der Umkehrung der ursprünglich gegebenen erhalten und zur Bildung der Grenzen in der durch die Gleichung (1) [oder (2)] vorgeschriebenen Weise mit einander verbunden werden müssen.

Diesen bemerkenswerthen Satz habe ich bereits in der früher erwähnten Abhandlung[1] durch rein geometrische Betrachtungen für den Fall begründet, dass die unteren Grenzen ξ_0 und $\varphi^0(x)$ Null seien. Das daselbst gefundene Resultat stimmt mit dem aus (2) sich ergebenden:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy = \int_0^{\varphi(\xi)} dy \int_0^{\xi} f(x, y)\, dx - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\xi)} dy \int_0^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$$

vollständig überein.

26.

Als Anwendungen des eben bewiesenen Satzes will ich einige besondere Fälle betrachten.

Angenommen es seien die Functionen $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$, sowie die Grenzwerthe ξ_0 und ξ_1 von der Beschaffenheit, dass gleichzeitig

$$\varphi^0(\xi_0) = \varphi^1(\xi_0) \qquad \text{und} \qquad \varphi^0(\xi_1) = \varphi^1(\xi_1)$$

sei, was offenbar mit den Voraussetzungen des Satzes nicht in Widerspruch steht.

Für diese Annahmen nun ergibt sich aus der Gleichung (1) des vorigen Art. statt des dreigliederigen der blos eingliederige Ausdruck:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int_{\psi^1(y)}^{\psi^0(y)} f(x, y)\, dx$$

Transformirt man das Integral rechter Hand durch Einführung einer neuen Veränderlichen z, welche mit der ursprünglichen x in der Beziehung

$$x = \frac{(a^1 + r)\,(a^0 - z)\,\psi^1(y) - (a^0 + r)\,(a^1 - z)\,\psi^0(y)}{(a^0 - a^1)\,(r + z)}$$

steht, und für welche also:

$$dx = \frac{(a^0 + r)\,(a^1 + r)}{a^0 - a^1} \cdot \frac{\psi^0(y) - \psi^1(y)}{(r + z)^2}\, dz$$

wo a^0, a^1, r gewisse constante Grössen bedeuten.

Setzt man zugleich:

$$f(x, y) = \frac{F(z, y)}{\psi^0(y) - \psi^1(y)}$$

wobei

$$z = \frac{a^0\,(a^1 + r)\,\psi^1(y) - a^1(a^0 + r)\,\psi^0(y) - (a^0 - a^1)\,rx}{(a^1 + r)\,\psi^1(y) - (a^0 + r)\,\psi^0(y) + (a^0 - a^1)\,x}$$

[1]) Crelle, Journal B. 45.

so geht die oben erhaltene Gleichung in die folgende über:

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int\limits_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} \frac{F(z,y)\,dy}{\psi^1(y)-\psi^0(y)} = \frac{(a^0+r)\,(a^1+r)}{a^0-a^1} \int\limits_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} dy \int\limits_{a^0}^{a^1} \frac{F(z,y)}{(r+z)^2}\,dz$$

Durch diese Gleichung ist das Doppel-Integral linker Hand auf ein viel einfacheres zurückgeführt, welches von den Functionen $\varphi^0(x)$, $\varphi^1(x)$ und deren Umkehrungen nur in so fern abhängt, als zwei besondere Werthe dieser Functionen die Grenzen bilden. Ein doppeltes Integral, wie das eben betrachtete hat also die Eigenschaft, dass man für $\varphi^0(x)$ und $\varphi^1(x)$ Functionen annehmen kann, welche man immer wolle, wenn nur sie und ihre Umkehrungen $\psi^0(y)$, $\psi^1(y)$ innerhalb des in Frage kommenden Intervalls stetig und einförmig bleiben und von der Beschaffenheit sind, dass:

$$\varphi^0(\xi_0) = \varphi^1(\xi_0) \quad , \quad \varphi^0(\xi_1) = \varphi^1(\xi_1)$$

ist: dann hängt der Werth des Integrals immer nur von den Endwerthen $\varphi^1(\xi_0)$ und $\varphi^1(\xi_1)$ ab.

Ich will annehmen, es werde $f(y) \,.\, F(z)$ an die Stelle von $F(z, y)$ gesetzt. Man findet dann:

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int\limits_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} F(z)\,\frac{f(y)\,dy}{\psi^1(y)-\psi^0(y)} = \frac{(a^0+r)\,(a^1+r)}{a^0-a^1} \int\limits_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} f(y)\,dy \int\limits_{a^0}^{a^1} \frac{F(z)\,dz}{(r+z)^2}$$

Für $a^0 = 0 \quad , \quad a^1 = \infty \quad , \quad r = 1$ folgt hieraus:

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int\limits_{\varphi^1(x)}^{\varphi^1(x)} F\left(\frac{x-\psi^0(y)}{\psi^0(y)-x}\right) . \frac{f(y)\,dy}{\psi^0(y)-\psi^1(y)} = \int\limits_{\varphi^1(\xi_0)}^{\varphi^1(\xi_1)} f(y)\,dy \int\limits_0^\infty \frac{F(z)\,dz}{(1+z)^2}$$

Es sei z. B.

$$\varphi^0(x) = x^{\frac{1}{r}} \quad ; \quad \varphi^1(x) = x^{\frac{1}{s}}$$

so ist:

$$\psi^0(y) = y^r \quad ; \quad \psi^1(y) = y^s$$

und setzt man zugleich

$$\xi_0 = 0 \quad ; \quad \xi_1 = 1$$

so werden offenbar alle Bedingungen erfüllt.

Ich will nun ausserdem noch annehmen, es sei:

$$F(z) = \frac{z^{m+1}}{(1+z)^{m+n-2}}$$

Dann erhält man nach einigen Umformungen:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^{\frac{1}{r}}}^{x^{\frac{1}{s}}} \frac{(y^r-x)^{m-1}\,(x-y^s)^{n-1}}{(y^r-y^s)^{m+n-1}} \,.\, f(y)\,dy = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int\limits_0^1 f(y)\,dy$$

Für $m = n = \frac{1}{2}$ folgt hieraus:

$$\int_0^1 dx \int_{x^{\frac{1}{r}}}^{x^{\frac{1}{s}}} \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{(y^r - x)(x - y^s)}} = \pi \int_0^1 f(y)\, dy$$

Wie man sieht, hat das Doppel-Integral die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sein Werth von r und s so lange unabhängig bleibt, als diese Constanten von einander verschieden sind.

27.

Wenn die untere Grenze $\varphi^0(x) = \eta_0$ constant ist, so geht die Gleichung (2) des Art. 25 über in:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\varphi(\xi_0)}^{\varphi(\xi)} dy \int_{\psi(y)}^{\xi_0} f(x, y)\, dx + \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} dy \int_{\xi_0}^{\xi} f(x, y)\, dx$$

wobei der Kürze wegen $\varphi(x)$ für $\varphi^1(x)$, $\psi(y)$ für $\psi^1(y)$ und ξ für ξ_1 gesetzt worden ist.

Man nehme an, es sei in dieser Gleichung ξ_0 ein Werth von x, für welchen:

$$\varphi(\xi_0) = \eta_0$$

so vereinfacht sich dieselbe und man erhält:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} dy \int_{\psi(y)}^{\xi} f(x, y)\, dx$$

wo also:

$$x = \psi(y) \text{ aus der Gleichung } y = \varphi(x)$$

als die einzige reelle, zwischen ξ_0 und ξ liegende Wurzel abzuleiten ist. — Setzt man nun:

$$\frac{f(y)}{\xi - \psi(y)} \cdot F(z) \text{ an die Stelle von } f(x, y)$$

und ist darin:

$$z = \frac{a_0 (a + r)\, \psi(y) - a\, (a_0 + r)\, \xi - (a_0 - a)\, rx}{(a + r)\, \psi(y) - (a_0 + r)\, \xi + (a_0 - a)\, x}$$

so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} \frac{f(y)\, dy}{\psi(y) - \xi} F(z) = \frac{(a_0 + r)(a + r)}{a_0 - a} \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} f(y)\, dy \int_{a_0}^{a} \frac{F(z)\, dz}{(r + z)^2}$$

In dieser Gleichung sind einige beachtenswerthe specielle Fälle enthalten, die sich leicht auf die folgende Art darstellen lassen.

Es sei zunächst:

$$\xi_0 = \eta_0 \quad , \quad \varphi(x) = x \quad , \quad \psi(y) = y \quad , \quad F(z) = 1$$

so erhält man die eigenthümliche, auf anderem Wege nicht so leicht herzustellende Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\xi_0}^{x} \frac{f(y)}{\xi - x}\, dy = \int_{\xi_0}^{\xi} f(y)\, dy$$

Setzt man dagegen $a_0 = 0$, $a = \infty$, dabei immer angenommen, dass $\varphi(\xi_0) = \eta_0$ sei, so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\eta_0}^{\varphi(x)} F\left(\frac{\xi - x}{x - \psi(y)}\right) \cdot \frac{f(y)\, dy}{\xi - \psi(y)} = \int_{\eta_0}^{\varphi(\xi)} f(y)\, dy \int_0^{\infty} \frac{F(z)}{(1+z)^2}\, dz$$

Daraus erhält man z. B. für $\xi_0 = \eta_0$, $\varphi(x) = x$ das Resultat:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\xi_0}^{x} F\left(\frac{\xi - x}{x - y}\right) \cdot \frac{f(y)\, dy}{\xi - y} = \int_{\xi_0}^{\xi} f(y)\, dy \int_0^{\infty} \frac{F(z)\, dz}{(1+z)^2}$$

Für den noch speciellern Fall, dass

$$\xi_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad F(z) = \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n-2}}$$

gesetzt wird, erhält man die Gleichung:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{x} \frac{(\xi - x)^{m-1}\, (x - y)^{n-1}}{(\xi - y)^{m+n-1}}\, f(y)\, dy = \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{\xi} f(y)\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich die beiden folgenden Fragen beantworten:

1. In der Gleichung:

$$\int_0^{x} \frac{(x - y)^{n-1}}{(\xi - y)^{m+n-1}} \cdot f(y)\, dy = F(x, \xi)$$

ist $F(x, \xi)$ eine gegebene Function: man soll die dieser Gleichung Genüge leistende Function $f(y)$ unter dem Integralzeichen finden.

Vermöge der oben entwickelten Formel hat man unmittelbar:

$$\int_0^{\xi} (\xi - x)^{m-1}\, F(x, \xi)\, dx = \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{\xi} f(y)\, dy$$

Setzt man nun in dem Integral linker Hand:

$$x = \xi \, . \, t$$

und differentiirt hierauf die ganze Gleichung in Bezug auf ξ, so wird man alsbald finden:

$$f(\xi) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\, \Gamma(n)} \int_0^1 (1 - t)^{m-1} \left\{ m\xi^{m-1}\, F(\xi t, \xi) + \xi^{m}\, \frac{d \, . \, F(\xi t, \xi)}{d\xi} \right\} dt$$

wodurch die Frage beantwortet ist.

Für $m = n = \frac{1}{2}$ erhält man hieraus die Gleichung, welche zur Lösung einer die Tautochronen betreffenden Aufgabe nöthig ist, und welche für jenen speciellen Fall mit Hilfe ziemlich umständlicher Reihenentwickelungen im 48. Bande des Journals von Crelle abgeleitet worden ist.

2. Von der eben vorgetragenen dem ersten Anschein nach verschieden ist die folgende Aufgabe.

In der Gleichung:

$$\int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(\xi - y)^{m+n-1}} \cdot d f(y) = \Phi(x)$$

ist $\Phi(x)$ eine gegebene Function: man verlangt die derselben entsprechende Form der Function $f(y)$.

Hier liefert die Gleichung (1) sogleich die Lösung, indem man daraus erhält:

$$f(\xi) - f(o) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \int_0^\xi (\xi - x)^{m-1}\, \Phi(x)\, dx$$

Für $m = 1 - n$ ergibt sich hieraus unmittelbar die Gleichung, welche zur Lösung einer den Fall eines schweren Körpers bei gegebener Fallzeit betreffenden Aufgabe nöthig ist, und welche dieser Aufgabe wegen zuerst Abel (s. Oeuvres compl. T. I, p. 29) für jenen besondern Werth von m, auf ganz anderm Wege entwickelt hat.

Ich füge schliesslich noch einige andere Anwendungen bei. Hat $\varphi(x)$ die Eigenschaft, dass:

$\varphi(o) = 0$, und setzt man noch $\xi_0 = \eta_0 = 0$, so folgt:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy = \int_0^{\varphi(\xi)} dy \int_{\psi(y)}^\xi f(x, y)\, dx$$

Hieraus findet man z. B. die Gleichung:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{x - \psi(y)}{\xi - \psi(y)}\right) \cdot \frac{f(y)\, dy}{\xi - \psi(y)} = \int_0^{\varphi(\xi)} f(y)\, dy \int_{\psi(y)}^\xi \frac{dx}{\xi - \psi(y)} \cdot F\left(\frac{x - \psi(y)}{\xi - \psi(y)}\right)$$

Setzt man in dem Integral rechter Hand

$$\frac{x - \psi(y)}{\xi - \psi(y)} = z \quad , \quad \frac{dx}{\xi - \psi(y)} = dz$$

so verwandelt es sich in das Product zweier von einander unabhängiger Quadraturen und man erhält:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{\psi(y) - x}{\psi(y) - \xi}\right) \frac{f(y)\, dy}{\xi - \psi(y)} = \int_0^{\varphi(x)} f(y)\, dy \int_0^1 F(z)\, dz$$

Es sei z. B.

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 z^2}} \quad : \quad \varphi(x) = x \quad ; \quad \psi(y) = y$$

und man bezeichne

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \cdot \sqrt{1-k^2 z^2}} = K$$

so erfolgt

$$\int_0^\xi dx \int^x \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{(\xi-x)(\xi+x-2y)} \cdot \sqrt{(\xi-y)^2-k^2(x-y)^2}} = K. \int_0^\xi \frac{f(y)}{\xi-y}\,dy$$

Hat $\varphi(x)$ die Eigenschaft, dass $\varphi(\xi) = 0$ wird, so ist

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^{\varphi(o)} dy \int_0^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

Daraus lässt sich leicht die Gleichung finden:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{x}{\psi(y)}\right) f(y)\,dy = \int_0^{\varphi(o)} f(y)\,\psi(y)\,dy \;.\; \int_0^1 F(z)\,dz$$

Setzt man darin für $F(z)$ den obigen Ausdruck und zugleich

$$\varphi(x) = \xi - x \quad , \quad \text{also} \quad \psi(y) = \xi - y$$

so ergibt sich:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\xi-x} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{(\xi-y)^2-x^2} \cdot \sqrt{(\xi-y)^2-k^2x^2}} = K \int_0^\xi \frac{f(y)}{\xi-y}\,dy$$

Wie man sieht kann man die Grenzen des Doppelintegrals auch als durch die Ungleichheit $0 < x + y < \xi$ gegeben ansehen.

Diese wenigen Beispiele mögen hinreichen die Bedeutung der im Art. 25 entwickelten Umkehrungs-Formeln erkennen zu lassen.

28.

Ich wende mich nunmehr zu einer andern Anwendung der allgemeinen Transformation, und zwar möge angenommen werden, es sei:

$$x = X_{(\lambda,\mu)} = \mu$$
$$y = Y_{(\lambda,\mu)}$$

so dass also nur die Function X näher specialisirt wird. Man hat dann einfach:

$$\Delta = + \frac{dY}{d\lambda}$$

und erhält:

$$\mu_0 = \xi_0 \qquad , \qquad \mu_1 = \xi_1$$

und für die Functionen μ^0 und μ^1 hat man die Gleichung:

$$Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^0(\mu) \quad , \quad \text{aus welcher folgt:} \quad \mu^0 = \psi^0(\lambda)$$
$$Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi^1(\mu) \quad , \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mu^1 = \psi^1(\lambda)$$

wobei nun die für μ^0. μ^1 gestellte Bedingung der Einförmigkeit auf die Functionen $\psi^0(\lambda)$, $\psi^1(\lambda)$ überzutragen ist.

Bezüglich der Werthe λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
Y_{(\lambda,\xi_0)} &= \varphi^0(\xi_0) \quad \text{woraus} \quad \lambda_0^0 = \theta^0(\xi_0)\\
Y_{(\lambda,\xi_1)} &= \varphi^0(\xi_1) \quad \text{„} \quad \lambda_1^0 = \theta^0(\xi_1)\\
Y_{(\lambda,\xi_0)} &= \varphi^1(\xi_0) \quad \text{„} \quad \lambda_0^1 = \theta^1(\xi_0)\\
Y_{(\lambda,\xi_1)} &= \varphi^1(\xi_1) \quad \text{„} \quad \lambda_1^1 = \theta^1(\xi_1)
\end{aligned}$$

wobei auch diese Werthe als vollständig bestimmt und als die einzigen reellen Wurzeln zweier Gleichungen vorausgesetzt werden.

Substituirt man nun diese besonderen Werthe in die Gleichung (1) des Art. 16, schreibt zugleich auch x für μ, und z für λ, so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x,y)\, dy =$$

$$\int_{\theta^1(\xi_1)}^{\theta^0(\xi_1)} dz \int_{\xi_1}^{\psi^0(z)} f(x, Y_{(z,x)}) \cdot \frac{dY}{dz}\, dx + \int_{\theta^1(\xi_1)}^{\theta^0(\xi_0)} dz \int_{\psi^0(z)}^{\psi^1(z)} f(z, Y_{(z,x)}) \cdot \frac{dY}{dz}\, dx + \int_{\theta^0(\xi_0)}^{\theta^0(\xi_0)} dz \int_{\xi_0}^{\psi^1(z)} f(x, Y_{(z,x)}) \cdot \frac{dY}{dz}\, dx$$

Andere Formen würden sich aus den eilf übrigen Darstellungen der allgemeinen Transformation ergeben; unter den oben ausdrücklich gemachten Annahmen fallen dieselben aber dem Wesen nach ganz mit der eben geführten Gleichung zusammen.

Diese Gleichung nun zeigt, wie man ein Doppel-Integral durch Einführung einer einzigen neuen Veränderlichen z transformiren müsse. Was durch sie hauptsächlich geleistet werden kann, besteht darin, dass man, wenn die Veränderlichen x, y in der Function $f(x, y)$ einen explicite gegebenen Ausdruck bilden, diesen durch die neue Veränderliche z ersetzen kann, so dass die nach x zuerst zu vollziehende Integration von der nähern Beschaffenheit von $f(z)$, weil eben z dabei constant bleibt, ganz unabhängig ist. Hierdurch ergeben sich Reductionsformeln für doppelte Integrale von Functionen, deren Argument z allein näher bestimmt ist, welche also ihrer übrigen Beschaffenheit nach willkürlich sind. In dieser Hinsicht stellt also die obige Gleichung in vollständiger Entwickelung den allgemeinen Typus der Lösung aller derartigen Probleme dar, so dass man in besonderen Fällen nur ihrer Vorschrift zu folgen braucht.

Von der eben bezeichneten Art sind die, jedoch mit Hilfe geometrischer Betrachtungen gefundenen Reductionsformeln, deren Eingangs Erwähnung geschah. Obgleich ich nun eine ziemlich grosse Anzahl solcher im 45. Bande des Journals von Crelle entwickelt habe, so scheinen doch die folgenden weiteren Fälle schon darum Beachtung zu verdienen, weil sie den, bis dahin noch nicht sehr weit geführten, Gegenstand der Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen nahe berühren, zugleich aber geeignet sein dürften, den Nutzen der vorangehenden Resultate noch mehr hervortreten zu lassen.

29.

Als ersten Fall möge angenommen werden, es sei:

$$f(x, y) = f(z) \qquad \text{und} \qquad z = ax + bxy + cy$$

Dann ist:

$$Y(z, x) = \frac{z - ax}{bx + c} \quad , \quad \Delta = \frac{dY}{dz} = \frac{1}{bx + c}$$

Zugleich seien

$$\varphi^0(x) = \eta_0 \quad , \quad \varphi^1(x) = \eta_1$$

constante Grössen, so dass also:

$$\psi^0(z) = \frac{z - c\eta_0}{a + b\eta_0} \quad , \quad \psi^1(z) = \frac{z - c\eta_1}{a + b\eta_1}$$

$$\theta^0(\xi_0) = a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0 \quad . \quad \theta^1(\xi_0) = a\xi_0 + b\xi_0\eta_1 + c\eta_1$$

$$\theta^0(\xi_1) = a\xi_1 + b\xi_1\eta_0 + c\eta_0 \quad , \quad \theta^1(\xi_1) = a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1$$

Da ausserdem:

$$\int f(z) \cdot \frac{dY}{dz}\, dx = \frac{f(z)}{b} \log (bx + c) + \text{Const.}$$

so ergibt sich, wenn man in die Formel des vorigen Art. substituirt:

$$\int_{\xi}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ax + bxy + cy)\, dy =$$

$$\frac{1}{b} \left\{ \int_{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}^{a\xi_0 + b\xi_0\eta_1 + c\eta_1} f(z) \cdot \log \frac{ac + bz}{(b\xi_0 + c)(b\eta_1 + a)}\, dz + \int_{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1}^{a\xi_1 + b\xi_1\eta_0 + c\eta_0} f(z) \cdot \log \frac{ac + bz}{(b\xi_1 + c)(b\eta_0 + a)}\, dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{b} \log \frac{a + b\eta_1}{a + b\eta_0} \cdot \int_{a\xi_0 + b\xi_0\eta_0 + c\eta_0}^{a\xi_1 + b\xi_1\eta_1 + c\eta_1} f(z)\, dz$$

Man kann auf ganz gleiche Art die Reduction bewirken, wenn die gegebene Function die Form $f\,[(\alpha + x)\,(\beta + y)]$ hat, wie aus der Bemerkung hervorgeht, dass:

$$ax + bxy + cy = \frac{1}{b} \left\{ (bx + c)\,(by + a) - ac \right\}$$

ist.

Für $b = 0$ gehen die drei Integral-Ausdrücke in unbestimmte Formen über, deren wahre Werthe man jedoch entweder auf gewöhnliche Art oder auch wie folgt bestimmen kann. Es ist nämlich:

$$\log \frac{ac + bz}{(b\xi_0 + c)(b\eta_1 + a)} = \log \left(1 + \frac{bz}{ac}\right) - \log \left(1 + \frac{b\xi_0}{c}\right) - \log \left(1 + \frac{b\eta_1}{a}\right)$$

folglich geht, wenn man jeden der drei Logarithmen bis auf zwei Glieder entwickelt, der Ausdruck über in:

$$- b \left(\frac{\xi_0}{c} + \frac{\eta_1}{a} - \frac{z}{ac}\right) + \ . \ . \ .$$

Da der Factor b durch Division fortgeht, so hat man, wenn nach dessen Beseitigung $b = 0$ gesetzt wird, und wenn man dann mit den zwei überigen Integralen auf gleiche Weise verfährt, schliesslich auch wieder b für c setzt, die Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ax + by)\, dy =$$

$$\frac{1}{ab}\left\{ \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_0 + b\eta_1} (z - a\xi_0 - b\eta_1) f(z)\, dz + \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_1} (z - a\xi_1 - b\eta_1) f(z)\, dz + \int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_0} (z - a\xi_1 - b\eta_0) f(z)\, dz \right\}$$

wobei, der Symmetrie wegen, eine etwas andere Form als die unmittelbar sich darbietende gewählt worden ist.

Gewissermassen analog zu dem eben betrachteten Falle ist derjenige, für welchen

$$z = a e^{mx} + b e^{mx + ny} + c e^{ny}$$

und

$$\Delta = \frac{dY}{dz} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z - ae^{mx}}$$

folglich:

$$\int f(x, Y) \frac{dY}{dz} dx = -\frac{1}{mnz} \log (ze^{-mx} - a) + \text{Const.}$$

Angenommen es sei auch hier $\varphi^0(x) = \eta_0$, $\varphi^1(x) = \eta_1$ constant, so ist:

$$\psi^0(z) = \frac{1}{m} \log \frac{z - ce^{n\eta_0}}{a + be^{n\eta_0}} \quad , \quad \psi^1(z) = \frac{1}{m} \log \frac{z - ce^{n\eta_1}}{a + be^{n\eta_1}}$$

$$\theta^0(\xi_0) = ae^{m\xi_0} + be^{m\xi_0 + n\eta_0} + ce^{n\eta_0} \quad , \quad \theta^1(\xi_0) = ae^{m\xi_0} + be^{m\xi_0 + n\eta_1} + ce^{n\eta_1}$$

$$\theta^0(\xi_1) = ae^{m\xi_1} + be^{m\xi_1 + n\eta_0} + ce^{n\eta_0} \quad , \quad \theta^1(\xi_1) = ae^{m\xi_1} + be^{m\xi_1 + n\eta_1} + ce^{n\eta_1}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung des vorigen Artikels ein, so ergibt sich:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ae^{mx} + be^{mx+ny} + ce^{ny})\, dy =$$

$$\frac{1}{mn}\left\{ \int_{\theta^0(\xi_1)}^{\theta^1(\xi_1)} \frac{f(z)}{z} \log \frac{ac + bz}{(ze^{-m\xi_1} - a)(ze^{-n\eta_0} - c)}\, dz + \int_{\theta^1(\xi_0)}^{\theta^0(\xi_0)} \frac{f(z)}{z} \log \frac{ac + bz}{(ze^{-m\xi_0} - a)(ze^{-n\eta_1} - c)} \,.\, dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{mn} \int_{\theta^0(\xi_0)}^{\theta^1(\xi_1)} \frac{f(z)}{z} \log \frac{ze^{-n\eta_0} - c}{ze^{-n\eta_1} - c} \,.\, dz$$

Für $\xi_0 = \eta_0 = 0$ und $\xi_1 = \eta_1 = \infty$ ergibt sich hieraus, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ae^{mx} + be^{mx+ny} + ce^{ny})\, dy = \frac{1}{mn} \int_{a+b+c}^{\infty} \frac{f(z)}{z} \log \frac{(z-a)(z-c)}{bz + ac}\, dz$$

t*

Es verdient schliesslich noch bemerkt zu werden, dass, wenn man $f(bz + ac)$ an die Stelle von $f(z)$ setzt, die oben entwickelten Formeln das Doppel-Integral der Function

$$f\{(be^{mx} + c)(be^{ny} + a)\}$$

liefern.

30.

Mehrere bemerkenswerthe Einzelnheiten lassen sich aus dem Falle ableiten, in welchem für das Argument der Ausdruck:

$$z = \frac{ax^m + by^n + c}{\alpha x^m + \beta y^n + \gamma} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

gewählt wird. Dieser Annahme entspricht die Gleichung:

$$(\alpha z - a)\,x^m + (\beta z - b)\,y^n + \gamma z - c = 0$$

woraus folgt:

$$y = Y(z, x) = \left(\frac{(\alpha z - a)\,x^m + \gamma z - c}{b - \beta z}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Man findet hieraus:

$$\frac{dY}{dz} = \frac{(\alpha b - a\beta)\,x^m + b\gamma - \beta c}{n\,(b + \beta z)^{\frac{1}{n}+1}} \cdot \left((\alpha z - a)\,x^m + \gamma z - c\right)^{\frac{1}{n}+1}$$

und sofort das unbestimmte Integral:

$$\int f(x, Y)\,\frac{dY}{dz}\,dx =$$

$$\frac{(\alpha b - a\beta)\,f(z)}{n\,(b - \beta z)^{\frac{1}{n}+1}} \cdot \int\left((\alpha z - a)x^m + \gamma z - c\right)^{\frac{1}{n}-1} x^m dx + \frac{(b\gamma - \beta c)f(z)}{n(b - \beta z)^{\frac{1}{n}+1}}\int\left((\alpha z - a)x^m + \gamma z - c\right)^{\frac{1}{n}-1} dx \ldots (2)$$

Um von hier aus weiter zu kommen ist es nöthig die Grenzen des Integrals sowie auch gewisse Bestimmungen über die Constanten fest zu setzen.

Ich werde nun zunächst $c = -k$ und $\gamma = -\varkappa$ setzen und unter k und $\varkappa$ positive Werthe verstehen; ferner werde ich durchgehends $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ für m und n schreiben und annehmen, es seien die Grenzen des Integrals durch die Bedingung

$$0 < \alpha x^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} < \lambda$$

gegeben, dabei aber nur die, derselben genügenden, positiven Werthe von x und y zulässig.

Bestimmt man unter diesen Voraussetzungen die Grenzen sowohl des ursprünglichen als des transformirten Integrals, so erhält man:

$$\varphi^0(x) = 0 \qquad , \qquad \varphi^1(x) = \left(\frac{\varkappa - \alpha x^{\frac{1}{m}}}{\beta}\right)^n$$

$$\xi_0 = 0 \qquad , \qquad \xi_1 = \left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)^m$$

$$\psi^0(z) = \left(\frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a}\right)^m \qquad . \qquad \psi^1(z) = \left(\frac{b\varkappa - \beta k}{ba - \beta a}\right)^m$$

$$\theta^0(\xi_0) = \frac{k}{\varkappa} \qquad . \qquad \theta^1(\xi_0) = \infty$$

$$\theta^0(\xi_1) = \infty \qquad , \qquad \theta^1(\xi_1) = \infty$$

Dies vorausgesetzt gibt nun die Gleichung des Art. 28 unmittelbar:

$$\iint f\left(\frac{ax^{\frac{1}{m}} + by^{\frac{1}{n}} - k}{\alpha x^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} - \varkappa}\right) dx\, dy = \int_{\frac{k}{\varkappa}}^{\infty} f(z)\, dz \int_0^{\left(\frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a}\right)^m} \frac{dY}{dz} \, . \, dx$$

Nun ist aber, nach Anwendung der jetzt eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{dY}{dz}\, dx = n \, . \, \frac{(\alpha b - a\beta)\, x^{\frac{1}{m}} + \beta k - b\varkappa}{(\beta z - b)^{n+1}} \left\{ \varkappa z - k - (\alpha z - a)\, x^{\frac{1}{m}} \right\}^{n-1}$$

wenn man also eine neue Veränderliche t für x einführt, für welche:

$$t = \frac{\alpha z - a}{\varkappa z - k}\, x^{\frac{1}{m}} \qquad . \qquad x = \left(\frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a}\right)^m . \, t^m$$

$$dx = m \left(\frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a}\right)^m . \, t^{m-1}\, dt$$

so erfolgt:

$$\frac{dY}{dz}\, dx = mn\, \frac{(\varkappa z - k)^{m+n-1}}{(\alpha z - a)^m\, (\beta z - b)^{n+1}} \left\{ (\alpha b - a\beta)\, \frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a} \, . \, t + \beta k - b\varkappa \right\} t^{m-1}\, (1 - t)^{n-1}\, dt$$

Ferner ist, wie man sich auf der Stelle überzeugt:

$$(\alpha b - a\beta)\, \frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a} \, . \, t + \beta k - b\varkappa = (\beta z - b) \, . \, \frac{\alpha k - a\varkappa}{\alpha z - a}\, t + (\beta k - b\varkappa)\, (1 - t)$$

folglich hat man auch:

$$\int_0^{\left(\frac{\varkappa z - k}{\alpha z - a}\right)^m} \frac{dY}{dz}\, dx =$$

$$mn\, \frac{(\varkappa z - k)^{m+n-1}}{(\alpha z - a)^m\, (\beta z - b)^n} \left\{ \frac{\alpha k - a\varkappa}{\alpha z - a} \int_0^1 t^m\, (1 - t)^{n-1}\, dt + \frac{\beta k - b\varkappa}{\beta z - b} \int_0^1 t^{m-1}\, (1 - t)^n\, dt \right\}$$

Die beiden letzten Integrale lassen sich durch Gammafunctionen ausdrücken, und man findet das Resultat:

Erstreckt sich die Integration über alle positiven Werthe von x, y, welche der Bedingung

$$0 < \alpha x^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} < \varkappa$$

Genüge thun, so findet die Gleichung statt:

$$\iint f\left(\frac{ax^{\frac{1}{m}} + by^{\frac{1}{n}} - k}{\alpha x^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} - \varkappa}\right) dx\, dy =$$

$$\frac{mn}{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \int\limits_{\frac{k}{\varkappa}}^{\infty} \frac{(\varkappa z - k)^{m+n-1}}{(\alpha z - a)^m (\beta z - b)^n} \left\{ m\, \frac{\alpha k - a\varkappa}{\alpha z - a} + n\, \frac{\beta k - b\varkappa}{\beta z - b} \right\} dz$$

Die Potenzen $(\alpha z - a)^m$, $(\beta z - b)^n$ bleiben, wie man sich leicht überzeugt, sowohl für gebrochene als ganze Werthe von m und n reell, insofern:

$$\alpha k - a\varkappa > 0 \qquad \text{und} \qquad \beta k - b\varkappa > 0$$

In diesem Falle gilt also auch die obige Formel für alle Werthe m und n.

Für $\alpha = \beta = \varkappa = 1$ erhält man den speciellen Fall einer allgemeinen Reductionsformel für ein beliebig vielfaches Integral, welche meines Wissens zuerst Liouville gefunden hat und die später in voller Allgemeinheit von Schlömilch hergeleitet wurde.

31.

Minder einfach wird das Ergebniss, wenn die Grenzen des Integral constant sind. Lässt man dasselbe sowohl nach x als nach y mit o anfangen, setzt also:

$$\xi_0 = o \quad , \quad \xi_1 = \xi \quad ; \quad \varphi^0(x) = o \quad , \quad \varphi^1(x) = \eta$$

und legt man den Werth von z in der Form zu Grunde, wie er im vorigen Artikel, Gleichung (1) angegeben wurde, so findet man:

$$\psi^0(z) = \left(\frac{\gamma z - c}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \psi^1(z) = \left(\frac{\gamma z - c + (\beta z - b)\eta^n}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\theta^0(\xi_0) = \frac{c}{\gamma} \quad ; \quad \theta^1(\xi_0) = \frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}$$

$$\theta^0(\xi_1) = \frac{a\xi^m + c}{\alpha\xi^m - \gamma} \quad , \quad \theta^1(\xi_1) = \frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{\alpha\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}$$

Wenn man nun die beiden Integrale, welche in der Gleichung (2) des vorigen Art. vorkommen, auch hier vermittelst einer neuen Grösse t transformirt, für welche:

$$t = -\frac{\alpha z - a}{\gamma z - c}\, x^m \quad , \quad x = \left(-\frac{\gamma z - c}{\alpha z - a}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot t^{\frac{1}{m}}$$

$$dx = \frac{1}{m}\left(-\frac{\gamma z - c}{\alpha z - a}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot t^{\frac{1}{m} - 1}\, dt$$

und wenn man nach geschehener Substitution bemerkt, dass:

$$\int (1-t)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{1}{m}}\, dt = -\frac{mn}{m+n}(1-t)^{\frac{1}{n}} \cdot t^{\frac{1}{m}} + \frac{n}{m+n}\int (1-t)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{1}{m}-1}\, dt$$

wie sich durch theilweises Integriren ergibt, so wird man bald finden:

$$\int f(x,\,Y)\,\frac{dY}{dz}\,dx = \frac{a\beta - \alpha b}{m+n} \cdot \frac{x\left[\gamma z - c + (az - \alpha)x^m\right]^{\frac{1}{n}}}{(a-\alpha z)(b-\beta z)^{\frac{1}{n}+1}}$$

$$+ \frac{1}{m+n} \cdot \frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{(a-\alpha z)^{\frac{1}{m}}(b-\beta z)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma - \alpha c}{m(a-\alpha z)} + \frac{b\gamma - \beta c}{n(b-\beta z)} \right\} \cdot \int (1-t)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{1}{m}-1}\, dt$$

Dieses vorausgesetzt substituire man nun die angegebenen Grenzwerthe von x und die denselben entsprechenden von t, sowie auch die ebenfalls angegebenen Grenzen von z in die Gleichung des Art. 28; setze auch der Kürze wegen:

$$Z = \frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{(a-\alpha z)^{\frac{1}{m}}(b-\beta z)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma - \alpha c}{m(a-\alpha z)} + \frac{b\gamma - \beta c}{n(b-\beta z)} \right\}$$

$$U = \frac{\xi(a\beta - \alpha b)}{(a-\alpha z)(b-\beta z)} \cdot \left(\frac{\gamma z - c + (\alpha z - a)\xi^m}{b - \beta z} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$V = \frac{\eta(b\alpha - \beta a)}{(a-\alpha z)(b-\beta z)} \cdot \left(\frac{\gamma z - c + (\beta z - b)\eta^n}{a - \alpha z} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Dann wird man nach einigen nahe liegenden Umformungen erhalten:

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(\frac{ax^m + by^n + c}{\alpha x^m + \beta y^n + \gamma}\right) dy =$$

$$\frac{1}{m+n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} \left\{ \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}} Z \cdot f(z)\, dz - \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{\alpha\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}} Z \cdot f(z)\, dz + \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^m + c}{\alpha\xi^m + \gamma}} Z \cdot f(z)\, dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{m+n} \left\{ \int_{\frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}}^{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{\alpha\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}} f(z)\, dz \cdot \left[V + Z \int_0^{\frac{b-\beta z}{\gamma z - c}\eta^n} (1-t)^{\frac{1}{m}-1}\, t^{\frac{1}{n}-1}\, dt \right] + \int_{\frac{a\xi^m - c}{\alpha\xi^m + \gamma}}^{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{\alpha\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}} f(z)\, dz \cdot \left[U + Z \int_0^{\frac{a-\alpha z}{\gamma z - c}\xi^m} (1-t)^{\frac{1}{n}-1}\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt \right] \right\}$$

Die Integrationen nach t lassen sich unbestimmt ausführen, wenn entweder $\frac{1}{m}$ oder $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n}$ eine ganze Zahl ist. Es versteht sich von selbst, dass man für gebrochene Werthe von m und n, die soeben erhaltene Gleichung und die ihr zu Grunde liegende Transformation durch die Veränderliche t, nicht anwenden kann, wenn die Coëfficienten so beschaffen sind, dass einzelne Bestandtheile jener Gleichung imaginär werden; man muss dann, um das Imaginäre zu vermeiden, eine andere Transformation zu Grunde legen.

Sind speciell $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $c = 0$, so wird

$$Z = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \frac{z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}}} \quad , \quad U = 0 \quad , \quad V = 0$$

und es ergibt sich für diese Annahmen:

$$mn\, a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot \int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ax^m + by^n)\, dy =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{m})\,\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})} \left\{ \int_0^{a\xi^m} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz - \int_0^{a\xi^m + b\eta^n} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz + \int_0^{b\eta^n} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz \right\}$$

$$+ \int_{a\xi^m}^{a\xi^m + b\eta^n} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz \int_0^{\frac{a\xi^m}{z}} t^{\frac{1}{m}-1} (1-t)^{\frac{1}{m}-1}\, dt + \int_{b\eta^n}^{a\xi^m + b\eta^n} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz \int_0^{\frac{b\eta^n}{z}} t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{m}-1}\, dt$$

Es sei noch specieller

$$\xi = \infty \qquad , \qquad \eta = \infty$$

so erhält man die, meines Wissens zuerst von Raabe gefundene Gleichung:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax^m + by^n)\, dy = \frac{1}{mn\, a^{\frac{1}{m}}\, b^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{m})\,\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{m}) + (\frac{1}{n})} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz$$

Soll diese Gleichung für alle möglichen positiven Werthe von m und n gelten, so müssen offenbar die Coëfficienten a und b positiv sein.

32.

Einer der Fälle, in welchen die vorhin erhaltenen Formeln wegen darin vorkommenden imaginären Bestandtheile unbrauchbar werden, verdient näher in Betracht gezogen zu werden.

Ich werde dabei annehmen, es seien die Grenzen bezüglich der ursprünglichen Veränderlichen x und y, sowie der neuen z dieselben wie im vorigen Falle. —

Geht man nun auch hier wieder von dem Ausdruck

$$\int f(x, Y) \frac{dY}{dz}\, dx = \frac{b\alpha - \beta a}{m+n} \cdot \frac{x\left[(a - \alpha z)x^m + c - \gamma z\right]^{\frac{1}{n}}}{(a - \alpha z)(\beta z - b)^{\frac{1}{n}+1}}$$

$$+ \frac{m}{m+n} \frac{1}{(\beta z - b)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma - \alpha c}{m(\alpha z - a)} + \frac{b\gamma - \beta c}{m(\beta z - b)} \right\} \int \left((a - \alpha z)\, x^m + c - \gamma z\right)^{\frac{1}{n}-1} dx$$

aus, setzt zur Abkürzung:

$$T = \frac{m}{(\beta z - b)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{a\gamma - \alpha c}{m\,(\alpha z - a)} + \frac{b\gamma - \beta c}{n\,(\beta z - b)} \right\}$$

und legt den beiden Grössen U und V dieselbe Bedeutung bei, wie im vorigen Artikel, so wird man nach einigen leichten Umformungen zu der folgenden Gleichung gelangen:

$$\int\limits_0^\xi dx \int\limits_0^\eta f\left(\frac{ax^m + by^n + c}{\alpha x^m + \beta y^n + \gamma}\right) dy =$$

$$\frac{1}{m+n}\left\{ \int\limits_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^m + c}{\alpha\xi^m + \gamma}} T.\,f(z)\,dz \int\limits_\infty^{\left(\frac{\gamma z - c}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}}} \Big[(a - \alpha z)\,x^m + c - \gamma z\Big]^{\frac{1}{n} - 1} dx + \int\limits_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}} T.\,f(z)\,dz \int\limits_0^\infty \Big[(a - \alpha z)x^m + c - \gamma z\Big]^{\frac{1}{n} - 1} dx \right\}$$

$$+ \frac{1}{m+n}\left\{ \int\limits_{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{\alpha\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}}^{\frac{a\xi^m + c}{\alpha\xi^m + \gamma}} f(z)dz \left[U + T \int\limits_\xi^\infty \Big[(a - \alpha z)\,x^m + c - \gamma c\Big]^{\frac{1}{n} - 1} dx \right] + \int\limits_{\frac{a\xi^m + b\eta^n + c}{\alpha\xi^m + \beta\eta^n + \gamma}}^{\frac{b\eta^n + c}{\beta\eta^n + \gamma}} f(z)\,dz \left[V + T \int\limits_\infty^{\left(\frac{(\beta z - b)\,\eta^n + \gamma z - b}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}}} \Big[(a - \alpha z)x^m + c - \gamma z\Big]^{\frac{1}{n} - 1} dx \right] \right\}$$

Vorausgesetzt nun, es seien die Coëfficienten so beschaffen, dass die Ausdrücke:

$$a\gamma - \alpha c \qquad , \qquad a\beta - \alpha b \qquad , \qquad c\beta - \gamma b$$

insgesammt positiv sind, so wird man stets reelle Formen behalten, wenn man auf die vier Integrale nach x die folgenden Transformationen anwendet.

Bezeichnet man zur Abkürzung jene vier Integrale der Ordnung nach durch i_1, i_2, i_3, i_4, und setzt man in erstere

$$t = \frac{\gamma z - c}{a - \alpha z}\, x^{-m} \qquad , \qquad dx = -\frac{1}{m}\left(\frac{\gamma z - c}{a - \alpha z}\right)^{\frac{1}{m}}.\ t^{-\left(\frac{1}{m} + 1\right)}\, dt$$

so wird man finden:

$$i_1 = -\frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m\,(a - \alpha z)^{\frac{1}{m}}} \,.\int\limits_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{n} - 1}\,.\ t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}\, dt$$

oder

$$i_1 = -\frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m\,(a - \alpha z)^{\frac{1}{m}}} \,.\, \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\sin\left(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n}\right)} \,.\, \frac{\Gamma\!\left(\frac{1}{m}\right)\,\Gamma\!\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\!\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$$

Mittelst derselben Transformation erhält man ferner:

$$i_3 = +\frac{(\gamma z - c)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}}{m\,(a - \alpha z)^{\frac{1}{m}}} \,.\int\limits_0^{\frac{\gamma z - c}{a - \alpha z}\,.\,\xi^{-m}} (1 - t)^{\frac{1}{n} - 1}\, t^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}\, dt$$

Behufs der Transformation der Integrale i_2 und i_4 setze man:

$$t = \frac{c-\gamma z}{(a-\alpha z)x^m + c - \gamma z} \quad , \qquad dx = -\frac{1}{m}\left(\frac{c-\gamma z}{a-\alpha z}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{m}-1} . \frac{dt}{t^2}$$

so ergibt sich in ganz analoger Weise wie i_1 der Werth:

$$i_2 = + \frac{(c-\gamma z)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{m(a-\alpha z)^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

und sofort auch:

$$i_4 = -\frac{(c-\gamma z)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}}{m(a-\alpha z)^{\frac{1}{m}}} \int^{\frac{c-\gamma z}{\beta z - b}\eta^{-n}} (1-t)^{\frac{1}{m}-1} . \, t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} dt$$

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$S = \frac{1}{(a-\alpha z)^{\frac{1}{m}}(\beta z - b)^{\frac{1}{n}}}\left[\frac{a\gamma - \alpha c}{m(a-\alpha z)} + \frac{c\beta - \gamma b}{n(\beta z - b)}\right]$$

und substituirt für i_1, i_2, i_3, i_4 die so eben gefundenen Werthe, so wird man zu der Gleichung gelangen:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f\left(\frac{ax^m + by^n + c}{\alpha x^m + \beta y^n + \gamma}\right) dy =$$

$$\frac{1}{(m+n)\sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\left\{\sin\frac{\pi}{m}\int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^m+c}{\alpha\xi^m+\gamma}} f(z)(\gamma z - c)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} . S . dz - \sin\frac{\pi}{n}\int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\eta^n+c}{\beta\eta^n+\gamma}} f(z)(c-\gamma z)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} . S dz\right\}$$

$$-\frac{1}{m+n}\int_{\frac{a\xi^m+c}{\alpha\xi^m+\gamma}}^{\frac{a\xi^m+b\eta^n+c}{\alpha\xi^m+\beta\eta^n+\gamma}} dz f(z)\left\{U - S . (\gamma z - c)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} . \int_0^{\frac{\gamma z - c}{a-\alpha z}\xi^{-m}} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} dt\right\}$$

$$-\frac{1}{m+n}\int_{\frac{b\eta^n+c}{\beta\eta^n+\gamma}}^{\frac{a\xi^m+b\eta^n+c}{\alpha\xi^m+\beta\eta^n+\gamma}} dz f(z)\left\{V + S . (c-\gamma z)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} . \int_0^{\frac{c-\gamma z}{\beta z - b}\eta^{-n}} (1-t)^{\frac{1}{m}-1} t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} dt\right\}$$

In dem speciellen Falle:

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1, c = 0$$

muss, damit die rücksichtlich der Coëfficienten gemachten Voraussetzungen stattfinden, angenommen werden, es sei b an sich negativ. Schreibt man daher $-b$ für b und betrachtet dann b als positiv, so wird man nach einigen sich leicht anbietenden Reductionen die folgende Gleichung erhalten:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ax^m - by^n)\, dy =$$

$$\frac{1}{mna^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} \left\{ \sin\frac{\pi}{m} \int_0^{a\xi^m} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz + \sin\frac{\pi}{n} \int_0^{b\eta^n} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(-z)\, dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{mna^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}}} \left\{ \int_{a\xi^m}^{a\xi^m - b\eta^n} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz \int_0^{\frac{z}{a\xi^m}} (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} dt + \int_{b\eta^n}^{b\eta^n - a\xi^m} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(-z)\, dz \int_0^{\frac{z}{b\eta^n}} (1-t)^{\frac{1}{m}-1} t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} dt \right\}$$

Macht man die noch speciellere Annahme, dass $\xi = \infty$, $\eta = \infty$ sei, so wird man haben:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax^m - by^n)\, dy =$$

$$\frac{1}{mna^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} \left\{ \sin\frac{\pi}{m} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(z)\, dz + \sin\frac{\pi}{n} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(-z)\, dz \right\}$$

Diese letztere Gleichung ist, so viel mir bekannt, zuerst von **Raabe** gefunden worden. (Crelle, Journal Bd. 37.)

Diese besonderen Fälle mögen genügen, um den Nutzen der Gleichung des Art. 28 für die Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen zu zeigen.

33.

Die folgenden Anwendungen werden die Allgemeinheit des Theorems in Art. 24 in grösserm Masse als die bisherigen in Anspruch nehmen, indem darin gleichzeitig zwei neue Veränderliche zur Transformation verwendet werden. Ich werde dabei die Function unter den Integralzeichen als abhängig von zwei von einander getrennten Ausdrücken, — die ich der Kürze halber Argumente nennen werde, — voraussetzen, und für jeden derselben, als gegebene Function von x und y, eine neue Veränderliche einführen.

Um hierbei mit dem einfachsten Falle zu beginnen, will ich annehmen, die Function hänge von den beiden Ausdrücken:

$$ax + by \qquad , \qquad \alpha x + \beta y$$

ab, und es seien die Integrationsgrenzen durchaus constant, nämlich ξ_0 und ξ_1 nach x, und η_0 und η_1 nach y. — Setzt man nun:

$$ax + by = \lambda \qquad . \qquad \alpha x + \beta y = \mu$$

so folgt:

$$x = X_{(\lambda,\,\mu)} = \frac{\beta\lambda - b\mu}{a\beta - \alpha b} \quad ; \quad y = Y_{(\mu,\,\lambda)} = \frac{\alpha\lambda - a\mu}{b\alpha - \beta a}$$

und

$$\Delta = \frac{1}{\alpha b - a\beta}$$

Auch findet man:

$$\mu_0 = \frac{\beta}{b}\lambda + \frac{\alpha b - a\beta}{b}\xi_0 \quad , \quad \mu^0 = \frac{\alpha}{a}\lambda + \frac{\beta a - b\alpha}{a}\eta_0$$

$$\mu_1 = \frac{\beta}{b}\lambda + \frac{\alpha b - a\beta}{b}\xi_1 \quad , \quad \mu^1 = \frac{\alpha}{a}\lambda + \frac{\beta a - b\alpha}{a}\eta_1$$

und sofort:

$$\lambda_0^{\,0} = a\xi_0 + b\eta_0 \quad , \quad \lambda_1^{\,0} = a\xi_1 + b\eta_0$$

$$\lambda_0^{\,1} = a\xi_0 + b\eta_1 \quad , \quad \lambda_1^{\,1} = a\xi_1 + b\eta_1$$

Dies vorausgesetzt, geht die Gleichung (III) des Art. 17 über in die folgende:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(ax + by, \alpha x + \beta y)\, dy =$$

$$\frac{1}{\alpha b - a\beta}\left\{\int_{a\xi_0 + b\eta_0}^{a\xi_1 + b\eta_0} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{\alpha b - a\beta}{b}\xi_0}^{\frac{\alpha}{a}\lambda + \frac{a\beta - \alpha b}{a}\eta_0} f(\lambda, \mu)\, d\mu + \int_{a\xi_1 + b\eta_0}^{a\xi_0 + b\eta_1} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{\alpha b - a\beta}{b}\xi_0}^{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{\alpha b - a\beta}{b}\xi_1} f(\lambda, \mu)\, d\mu + \int_{a\xi_1 + b\eta_1}^{a\xi_0 + b\eta_1} d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda + \frac{\alpha b - a\beta}{b}\xi_1}^{\frac{\alpha}{a}\lambda + \frac{a\beta - \alpha b}{a}\eta_1} f(\lambda, \mu)\, d\mu \right\}$$

Diese Gleichung liefert eine zwar nur specielle, aber immerhin bemerkenswerthe Verification der allgemeinen Transformationsformeln, wenn man für $f(\lambda, \mu)$ einfach den Werth 1 setzt. Man gelangt dann in der That auf eine reine Identität.

Um eine der vielen Anwendungen, welche sich von obiger Gleichung machen lassen, zu bemerken, will ich annehmen, es sei:

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \eta_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \infty \quad , \quad \eta_1 = \infty$$

Dann erhält man, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax + by, \alpha x + \beta y)\, dy = \frac{1}{\alpha b - a\beta}\int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{\alpha}{a}\lambda} f(\lambda, \mu)\, d\mu$$

Es sei z. B.

$$f(\lambda, \mu) = e^{-\left(\frac{h}{\lambda} + \frac{\lambda}{k}\right)\mu}$$

so ist:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\left(\frac{h}{ax + by} + \frac{ax + by}{k}\right)(\alpha x + \beta y)}\, dy = \frac{k}{\alpha b - a\beta}\int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + hk}\left(e^{-\frac{\beta}{bk}(\lambda^2 + hk)} - e^{-\frac{\alpha}{ak}(\lambda^2 + hk)}\right)$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung:

$$\lambda^2 = hkx$$

so geht sie über in:

$$\frac{k}{2\,(ab - a\beta)} \int_0^\infty \frac{dx}{x+1} \left(e^{-\frac{\beta h}{b}(x+1)} - e^{-\frac{ah}{a}(x+1)} \right)$$

Bezeichnet man nun, wie seit Bessel's Vorschlag üblich ist, den „Integrallogarithmus"

$$\int_0^\infty e^{-r\,(1+x)} \frac{dx}{1+x} = -\; li\,(e^{-r})$$

so hat man das folgende Resultat:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\left(\frac{h}{ax+by} + \frac{ax+by}{k}\right)(ax+\beta y)}\, dy = \frac{k}{2\,(ab - a\beta)} \left\{ li\left(e^{-\frac{a}{a}h}\right) - li\left(e^{-\frac{\beta}{b}h}\right) \right\}$$

welches auf anderm Wege weniger leicht zu finden wäre.

Nimmt man an, es sei gegeben:

$$f\,(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^{r-1}\,\mu^{s-1}}{(1+\lambda)^n}$$

so folgt:

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{a}{a}\lambda} f\,(\lambda, \mu)\, d\mu = \frac{1}{s} \left\{ \left(\frac{a}{a}\right)^s - \left(\frac{\beta}{b}\right)^s \right\} \int_0^\infty \frac{\lambda^{r+s-1}\, d\lambda}{(1+\lambda)^n}$$

und man hat daher die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{(ax+by)^{r-1}\,(ax+\beta y)^{s-1}}{(1+ax+by)^n}\, dy = \frac{1}{sa^s\, b^s} \cdot \frac{(ab)^s - (a\beta)^s}{ab - a\beta} \cdot \frac{\Gamma(r+s)\,\Gamma(n-r-s)}{\Gamma(n)}$$

Damit dieses Doppel-Integral einen endlichen Werth behalte, muss, wie man sieht $n > r + s$ sein.

Nimmt man ferner an, es sei

$$f\,(\lambda, \mu) = \lambda^{n-1}\, e^{-k\mu}$$

so folgt zunächst:

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{a}{a}\lambda} f\,(\lambda, \mu)\, d\mu = \frac{1}{k} \int_0^\infty \lambda^{n-1} \left(e^{-\frac{\beta}{b}k\lambda} - e^{-\frac{a}{a}k\lambda} \right) d\lambda$$

und man hat daher nach Ausführung dieser letztern Integration das Resultat:

$$\int^\infty dx \int_0^\infty (ax + by)^{n-1}\; e^{-k\,(ax+\beta y)}\, dy = \frac{\Gamma(n)}{k^{n+1}\, a^n\, \beta^n} \cdot \frac{(ab)^n - (a\beta)^n}{ab - a\beta}$$

Wenn in den beiden letzten Fällen $\alpha = a$ und $\beta = b$ wird, so erscheinen die entsprechenden Resultate rechter Hand in unbestimmter Form. Nach bekannten Regeln erhält man jedoch sehr leicht ihren wahren Werth, nämlich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{(ax+by)^{m-2}}{(1+ax+by)^n}\, dy = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m)}{ab\,.\,\Gamma(n)}$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty (ax+by)^{n-1}\, e^{-k(ax+by)}\, dy = \frac{n\Gamma(n)}{abk^{n+1}}$$

wobei m für $r+s$ geschrieben wurde.

Ich will schliesslich annehmen, es sei:

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\sin k\lambda}{\lambda}\, e^{-\varkappa\mu}$$

so wird man mit Benützung bekannter Formeln finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k(ax+by)}{ax+by}\, e^{-\varkappa(\alpha x+\beta y)}\, dy = \frac{1}{\varkappa}\,.\,\frac{1}{ab-\alpha\beta}\,.\,\operatorname{arctang} \frac{(ab-\alpha\beta)\,\varkappa k}{\alpha\beta\varkappa^2 + abk^2}$$

Daraus folgt, wenn man $\varkappa = 0$ setzt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k(ax+by)}{ax+by}\, dy = \frac{1}{k}\,.\,\frac{1}{ab}$$

Diese Gleichung, welche eine gewisse Analogie zu der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

zeigt, stellt den Werth des Doppel-Integrals als dem Product der Coëfficienten a und b umgekehrt proportional dar, was beim ersten Anblick wohl auffallen mag. Dass aber in der That jener Werth um so grösser werden muss, je kleiner a und b sind, ergibt sich bald aus der Bemerkung, dass x und y von Null angefangen, ein sehr grosses Intervall von Werthen durchlaufen müssen, ehe der Bogen $k(ax+by)$ den Werth π erreicht, der Sinus desselben also negativ wird, und in das Integral negative Elemente eingehen. Das Integral umfasst also einen mit abnehmenden Werthen von a und b sich rasch ausbreitenden Umfang von lauter positiven Elementen, die fast insgesammt viel grösser sind, als die später eintretenden negativen, und daraus lässt sich das unbegrenzte Wachsthum des Integrals, welches mit der unbegrenzten Abnahme der Coëfficienten a und b eintritt, hinlänglich erklären.

Setzt man entweder $k = 1$, oder, was auf dasselbe hinführt, x, y für kx, ky so erhält man:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin(ax+by)}{ax+by}\, dy = \frac{1}{ab}$$

u. s. f.

34.

Die vorhin entwickelten Formeln lassen sich noch beträchtlich verallgemeinen. In der That, es sei:

$$ax^m + by^n = \lambda \quad , \quad \alpha x^m + \beta y^n = \mu$$

so folgt:

$$x = X_{(\lambda,\,\mu)} = \left(\frac{\beta\lambda - b\mu}{a\beta - \alpha b}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$y = Y_{(\lambda,\,\mu)} = \left(\frac{\alpha\lambda - a\mu}{b\alpha - \beta a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$\Delta = \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(ab - \alpha\beta)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}} \cdot (\alpha\lambda - a\mu)^{\frac{1}{n}-1} \, (b\mu - \beta\lambda)^{\frac{1}{m}-1}$$

Rücksichtlich der Grenzbedingungen werde angenommen, die Integration habe sich über alle diejenigen positiven Werthe von x und y zu erstrecken, welche mit der Ungleichheit:

$$0 < \alpha x^m + \beta y^n < \varkappa$$

verträglich sind. Dann folgt:

$$\varphi^0(x) = 0 \quad , \quad \varphi^1(x) = \left(\frac{\varkappa - \alpha x^m}{\beta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$$

und hiernach:

$$\mu_0 = \frac{\beta}{b}\,\lambda \quad , \quad \mu^0 = \frac{\alpha}{a}\,\lambda$$

$$\mu_1 = \frac{\beta}{b}\,\lambda + \frac{ab - \alpha\beta}{ab}\,\varkappa \quad , \quad \mu^1 = \varkappa$$

woraus sich sofort die weiteren Werthe:

$$\lambda_0^{\,0} = 0 \quad , \quad \lambda_0^{\,1} = \frac{b}{\beta}\,\varkappa$$

$$\lambda_1^{\,0} = \frac{a}{\alpha}\,\varkappa \quad , \quad \lambda_1^{\,1} = \frac{a}{\alpha}\,\varkappa$$

ergeben. Dies vorausgesetzt substituire man diese besonderen Werthe in die allgemeine Gleichung (VI) des Art. 18, so wird man, ohne weitere Umgestaltungen direct erhalten:

$$\iint f\,(ax^m + by^n,\, \alpha x^m + \beta y^n)\, dx\, dy =$$

$$\frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(ab - \alpha\beta)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}} \cdot \int_0^{\frac{a}{\alpha}\varkappa} d\lambda \int_{\varkappa}^{\frac{\alpha}{a}\lambda} (\alpha\lambda - a\mu)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (b\mu - \beta\lambda)^{\frac{1}{m}-1} \cdot f\,(\lambda,\mu)\, d\mu$$

$$+ \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(\beta a - b\alpha)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}} \int_0^{\frac{b}{\beta}\varkappa} d\lambda \int_{\varkappa}^{\frac{\beta}{b}\lambda} (\beta\lambda - b\mu)^{\frac{1}{m}-1} \cdot (a\mu - \alpha\lambda)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f\,(\lambda,\mu)\, d\mu$$

wobei das ursprüngliche Integral auf alle der Ungleichheit

$$0 < ax^m + \beta y^n < x$$

entsprechenden positiven Werthe von x und y sich erstrecken muss.

Diese in allen Theilen symmetrische Formel besitzt einen erheblichen Grad von Allgemeinheit. Ähnlich wie im vorigen Artikel, kann man die entsprechende Formel auch für den Fall constanter Grenzen herstellen. Sind dieselben 0 und ∞, so ist:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax^m + by^n, \alpha x^m + \beta y^n)\, dy =$$

$$\frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(\alpha b - a\beta)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}} \cdot \int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{\alpha}{a}\lambda} (\alpha\lambda - a\mu)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (b\mu - \beta\lambda)^{\frac{1}{m}-1} \cdot f(\lambda, \mu)\, d\mu$$

Man kann leicht bewirken, dass auch auf der rechten Seite die Grenzen constant werden; setzt man nämlich

$$\mu = \lambda\rho$$

wo ρ eine von λ unabhängige neue Veränderliche bezeichnet, und ändert man nach geschehener Substitution rechter Hand die Integrationsfolge, bezüglich λ und ρ, so wird man finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax^m + by^n, \alpha x^m + \beta y^n)\, dy =$$

$$\frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(\alpha b - a\beta)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}} \cdot \int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{\alpha}{a}} (\alpha - a\rho)^{\frac{1}{n}-1} (b\rho - \beta)^{\frac{1}{m}-1} d\rho \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} f(\lambda, \lambda\rho)\, d\lambda$$

Setzt man hierin x und y für x^m und y^n, und schreibt man dann überall $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ für m und n, so nimmt diese Gleichung die etwas einfachere Form an:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax + by, \alpha x + \beta y) \cdot x^{m-1} y^{n-1}\, dy =$$

$$\frac{1}{(\alpha b - a\beta)^{m+n-1}} \cdot \int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{\alpha}{a}} (\alpha - a\rho)^{n-1} (b\rho - \beta)^{m-1} d\rho \int_0^\infty \lambda^{m+n-1} f(\lambda, \lambda\rho)\, d\lambda$$

Beispielsweise sei:

$$f(\lambda, \mu) = f(\gamma\lambda + c\mu) = f[\lambda(c\rho + \gamma)]$$

Aus der am Schlusse des Art. 31 angeführten Gleichung ergibt sich dann der Werth des Doppel-Integrals:

$$= \frac{1}{(\gamma a + c\alpha)^m (\gamma b + c\beta)^n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty z^{m+n-1} f(z)\, dz$$

und da:

$$\int_0^\infty \lambda^{m+n-1} f(\lambda, \lambda\rho)\, d\lambda = \frac{1}{(c\rho+\gamma)^{m+n}} \cdot \int_0^\infty z^{m+n-1} f(z)\, dz$$

so findet man nach einigen leichten Reductionen:

$$\int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{\alpha}{a}} \frac{(\alpha - a\rho)^{n-1} (b\rho - \beta)^{m-1}}{(c\mu + \gamma)^{m+n}}\, d\rho = \frac{(\alpha b - a\beta)^{m+n-1}}{(a\gamma + \alpha c)^m (b\gamma + \beta c)^n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Setzt man hierin a und b für $\frac{\alpha}{a}$ und $\frac{\beta}{b}$, so ergibt sich hieraus:

$$\int_b^a \frac{(a-\rho)^{n-1} (\rho - b)^{m-1}}{(c+\rho)^{m+n}}\, d\rho = \frac{(a-b)^{m+n-1}}{(a+c)^m (b+c)^n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Für $\rho = b + x \quad , \quad a - b = 1 \quad , \quad c + b = \alpha$ folgt die Gleichung:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} (1-x)^{n-1}}{(x+\alpha)^{m+n}}\, dx = \frac{1}{(1+\alpha)^m \alpha^n} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

welche zuerst von Abel bemerkt worden ist. (S. Abel, Oeuvres compl. T. I, p. 95.) Eine andere Bedeutung als die einer einfachen Transformation des Euler'schen Integrals erster Art hat jedoch diese Gleichung nicht, wie man sogleich sieht, wenn in der Formel:

$$\int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1}\, dt = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

die Substitution:

$$t = \frac{1+\alpha}{x+\alpha}\, x \qquad , \qquad dx = \frac{(1+\alpha)\,\alpha}{(x+\alpha)^2}\, dx$$

gemacht wird.

Nimmt man an, es sei

$$f(\lambda, \mu) = e^{-\lambda}\, F\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

und bemerkt man, dass:

$$\int_0^\infty \lambda^{m+n-1} f(\lambda, \lambda\rho)\, d\lambda = \Gamma(m+n)\,.\, F(\rho)$$

so ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(ax+by)} \cdot F\left(\frac{\alpha x+\beta y}{ax+by}\right) \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot dy = \frac{\Gamma(m+n)}{(ab-a\beta)^{m+n-1}} \int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{\alpha}{a}} (\alpha - a\rho)^{n-1} (b\rho - \beta)^{m-1} F(\rho)\, d\rho$$

Schliesslich will ich annehmen es sei:

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\mu^r}{(1+\lambda)^{r+s}}$$

Dann wird man weiter finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{(\alpha x+\beta y)^r\, x^{m-1}\, y^{n-1}}{(1+ax+by)^{r+s}}\, dy =$$

$$\frac{1}{(ab-a\beta)^{m+n-1}} \cdot \frac{\Gamma(m+n+r)\,\Gamma(s)}{\Gamma(m+n+r+s)} \cdot \int_{\frac{\beta}{b}}^{\frac{\alpha}{a}} (\alpha - a\rho)^{n-1} (b\rho - \beta)^{m-1} \cdot \rho^r\, d\rho$$

35.

An die Stelle zweier linearen Verbindungen der Veränderlichen x und y möge nunmehr blos eine und das Product der Veränderlichen treten, so dass das gegebene Differential:

$$x^{m-1}\, y^{n-1} f(ax+by,\, xy)\, dx\, dy$$

sei. Für manche Anwendungen, von welchen später die Rede sein wird, ist es zweckmässig, jene Ausdrücke durch neue Veränderliche in der Art zu ersetzen, dass man annimmt:

$$ax + by = 2\lambda$$
$$xy = \lambda^2 \mu$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

$$x = \lambda\, \frac{1 \pm \sqrt{1-ab\mu}}{a}$$

$$y = \lambda\, \frac{1 \mp \sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

und es tritt hier der früher ausgeschlossene Fall ein, dass zwar λ und μ durch x und y, nicht aber umgekehrt x und y durch λ und μ vollständig bestimmt sind. Hinsichtlich der Doppelwerthe von x und y sind daher die am Schlusse des Art. 24 angedeuteten Betrachtungen anzustellen. Vor Allem bemerke man, dass

$$\frac{dx}{d\mu} = \mp \frac{b\lambda}{2\sqrt{1-ab\mu}} \quad , \quad \frac{dy}{d\mu} = \pm \frac{a\lambda}{2\sqrt{1-ab\mu}}$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{1 \pm \sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{1 \mp \sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

und also:

$$\Delta = \mp \frac{\lambda}{\sqrt{1-ab\mu}}$$

wobei die Doppelzeichen durchaus correspondirende sind. Das gegebene Differential erhält hiernach die Form:

$$\mp \frac{\lambda^{m+n-1}}{a^{m-1}\, b^{n-1} \sqrt{1-ab\mu}} \left\{ 1 \mp \sqrt{1-ab\mu} \right\}^{m-1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1-ab\mu} \right\}^{n-1} . f\,(2\lambda,\, \lambda^2\mu)\, d\lambda\, d\mu$$

Fügt man hierzu noch die Gleichungen:

$$\frac{ax}{1 \pm \sqrt{1-ab\rho}} = \frac{by}{1 \mp \sqrt{1-ab\mu}}$$

$$\frac{ax}{2\lambda} + \frac{by}{2\lambda} = 1$$

welche sich aus den bereits angeführten unmittelbar ergeben, so übersieht man auf der Stelle den Zusammenhang der Werthe von x und y, welcher bei einseitiger Änderung von μ oder von λ stattfindet. Betrachtet man nämlich y als Function von x, so ergeben sich wegen des Doppelzeichens zwei Zweige derselben, welche sich in einem Werthe nur dann vereinigen. wenn, für ein beliebiges λ, die Gleichung $1-ab\mu = 0$ stattfindet oder also

$$\mu = \frac{1}{ab}$$

Die Grenzen des vorgelegten Integrals seien constant, und zwar die unteren Grenzen gleich Null, so dass man es also mit:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} x^{m-1}\, y^{n-1}\, f\,(ax+by,\, xy)\, dy$$

zu thun hat. —

Bezüglich des Doppelzeichens, womit der durch λ, μ dargestellte Differentialausdruck behaftet ist, bemerke man nun vor Allem, dass an der Stelle, bei welcher die Doppelwerthe sich mit einander vereinigen, also für $\mu = \frac{1}{ab}$, die Relation $ax = by$ stattfindet, mithin $y = \frac{a}{b}x$ wird, und dass es daher zweckmässig sein wird das Integral in die beiden Theile:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\frac{a}{b}x} x^{m-1}\, y^{n-1} f\,(ax+by,\, xy)\, dy \quad \text{und} \quad \int_0^{\xi} dx \int_{\frac{a}{b}x}^{\eta} x^{m-1}\, y^{n-1} f\,(ax+by,\, xy)\, dy$$

zu zerlegen, und jeden einzelnen zu betrachten. Indem man von einem dieser Theile ausgeht, kann man entweder das obere oder das untere Zeichen wählen, muss aber dann an allen Consequenzen, welche sich aus dieser Annahme ergeben, durchaus und namentlich auch bei dem andern Theile des Integrals festhalten. — Ich will nun das obere Zeichen wählen, und von dem erstern Theile ausgehen, so dass:

$$x = \lambda\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad y = \lambda\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

$$\mu = \frac{x\,(2\lambda - ax)}{b\lambda^2} = \frac{y\,(2\,\lambda - by)}{a\lambda^2}\;;\;\Delta = -\,\frac{\lambda}{\sqrt{1-ab\mu}}$$

Vor Allem handelt es sich nun um die Grenzen μ_0, μ_1, μ^0, μ^1 und $\lambda_0^{\,0}$, $\lambda_0^{\,1}$, $\lambda_1^{\,0}$, $\lambda_1^{\,1}$. Bei der oben getroffenen Wahl des Zeichens existirt offenbar kein Werth $\mu = \mu_0$, für welchen $x = \xi_0 = 0$ werden könnte. Dies wäre zwar der Fall, wenn zugleich auch $\lambda = 0$ gesetzt würde, aber es liegt in der Definition aller Grössen μ_0, μ_1, μ^0, μ^1 dass sie den betreffenden Gleichungen Genüge leisten müssen, welchen Werth man der Veränderlichen λ beilegen möge.

Dagegen erhält man nun für $x = \xi_1 = \xi$ den Werth

$$\mu_1 = \frac{\xi\,(2\,\lambda - a\xi)}{b\lambda^2}$$

Für $y = \eta_0 = 0$ sieht man ferner, dass

$$\mu^0 = 0$$

sein müsse.

Was nun aber μ^1 betrifft, so hat man nach Art. 24 hiefür die Gleichung:

$$Y = \varphi^1\,(X)$$

oder also im vorliegenden Falle:

$$\lambda\,.\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b} = \frac{a}{b}\,.\,\lambda\,.\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a}$$

oder

$$\frac{2\,\lambda}{b}\sqrt{1-ab\mu} = 0$$

woraus folgt

$$\mu^1 = \frac{1}{ab}$$

Für $\lambda_0^{\,0}$ hat man die Gleichungen:

$$0 = \lambda\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad 0 = \lambda\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

woraus nothwendig folgt

$$\lambda_0^{\,0} = 0$$

Für $\lambda_0^{\,1}$ bestehen die Bedingungen:

$$0 = \lambda\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad \varphi^1(\xi_0) = \frac{a}{b}\,\xi_0 = 0 = \lambda\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

woraus folgt

$$\lambda_0^{\,1} = 0$$

Für $\lambda_1^{\,0}$ hat man:

$$\xi = \lambda\,.\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad 0 = \lambda\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

welchen beiden Gleichungen nur dann gleichzeitig genügt werden kann, wenn man:

$$\lambda_1^0 = \frac{a\xi}{2} \quad \text{und} \quad \mu_1^0 = 0$$

setzt.

Für λ_1^1 endlich hat man die beiden Gleichungen:

$$\xi = \lambda\, \frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad \frac{b}{a}\,\lambda\, \frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a} = \lambda\, \frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

welchen man gleichzeitig durch die Werthe:

$$\lambda_1^1 = a\xi \quad \text{und} \quad \mu_1^1 = \frac{1}{ab}$$

genügt. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (IV) des Art. 17 ein, so ergibt sich:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\frac{a}{b}x} f(ax+by,\, xy)\,.\, x^{m-1}\, y^{n-1}\, dy =$$

$$-\frac{1}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^{\frac{a\xi}{2}} \lambda^{m+n-1}\, d\lambda \int_{\frac{1}{ab}}^{0} (1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1-\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\, \frac{f(2\lambda,\, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu$$

$$-\frac{1}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_{\frac{a\xi}{2}}^{a\xi} \lambda^{m+n-1}\, d\lambda \int_{\frac{1}{ab}}^{\frac{\xi(2\lambda-a\xi)}{b\lambda^2}} (1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1-\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\, \frac{f(2\lambda,\, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu \tag{1}$$

Da für $\mu = \frac{1}{ab}$ die Wurzelgrösse $\sqrt{1-ab\mu}$ durch Null geht und ihr Zeichen ändert, so ist für den zweiten Theil des ursprünglichen Integrals das untere Zeichen jener Wurzel zu Grunde zu legen, also nunmehr zu setzen:

$$x = \lambda\, \frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{a} \quad , \quad y = \lambda\, \frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{b}$$

$$\Delta = +\frac{\lambda}{\sqrt{1-ab\mu}}$$

Bestimmt man die Grenzen des entsprechenden transformirten Doppel-Integrals, so erlangt man auf durchaus analoge Weise wie oben, die Werthe:

$$\mu_0 = 0 \quad ; \quad \mu_1 = \frac{\xi(2\lambda - a\xi)}{b\lambda^2} \quad ; \quad \mu^0 = \frac{1}{ab} \quad , \quad \mu^1 = \frac{\eta(2\lambda - b\eta)}{a\lambda^2}$$

und ebenso:

$$\lambda_0^0 = 0 \quad , \quad \mu_0^0 = \frac{1}{ab} \quad ; \quad \lambda_0^1 = \frac{b\eta}{2} \quad , \quad \mu_0^1 = 0$$

$$\lambda_1^0 = a\xi \quad , \quad \mu_1^0 = \frac{1}{ab} \quad ; \quad \lambda_1^1 = \frac{a\xi + b\eta}{2} \; ; \quad \mu_1^1 = \frac{4\,\xi\eta}{(a\xi + b\eta)^2}$$

Setzt man nun auch diese Werthe in die Gleichung (IV) des Art. 17 ein, so ergibt sich:

$$\int_0^{\xi} dx \int_{\frac{a}{b}x}^{\eta} f(ax+by,\, xy)\,.\, x^{m-1}\, y^{n-1}\, dy =$$

$$+\frac{1}{a^{m-1}\,b^{n-1}}\int_0^{\frac{b\eta}{2}} \lambda^{m+n-1}\, d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} (1-\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\,(1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\,\frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu$$

$$+\frac{1}{a^{m-1}\,b^{n-1}}\int_{\frac{b\eta}{2}}^{a\xi} \lambda^{m+n-1}\, d\lambda \int_{\frac{\eta(2\lambda-b\eta)}{a\lambda^2}}^{\frac{1}{ab}} (1-\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\,(1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\,\frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu \quad \ldots (2)$$

$$+\frac{1}{a^{m-1}\,b^{n-1}}\int_{a\xi}^{\frac{a\xi+b\eta}{2}} \lambda^{m+n-1}\, d\lambda \int_{\frac{\eta(2\lambda-b\eta)}{a\lambda^2}}^{\frac{\xi(2\lambda-a\xi)}{a\lambda^2}} (1-\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\,(1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\,\frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu$$

Addirt man die beiden Gleichungen (1) und (2) zusammen, so stellt die Summe das verlangte Doppel-Integral dar.

Es ist leicht dieses Resultat in einem gewissen Sinne noch zu verallgemeinern. Denkt man sich nämlich unter den Integralzeichen an die Stelle von $f(ax+by,\, xy)$ überhaupt nur $f(x,\, y)$ geschrieben, so hat man in (1) statt $f(x,\, y)$ zu setzen:

$$f\left\{\lambda\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{a}\;,\;\lambda\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{b}\right\}$$

in (2) dagegen:

$$f\left\{\lambda\,\frac{1-\sqrt{1-ab\mu}}{a}\;,\;\lambda\,\frac{1+\sqrt{1-ab\mu}}{b}\right\}$$

Sonst aber ändert sich Nichts.

Ich hebe die folgenden besonderen Fälle hervor. Es sei nämlich

$$m = 1 \quad , \quad n = 1$$

Dann erhält man aus (1) und (2) nach einigen Umformungen:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax+by,\, xy)\, x^{m-1}\, y^{n-1}\, dy =$$

$$\int_0^{\frac{a\xi}{2}} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu + \int_0^{\frac{b\eta}{2}} \lambda d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu$$

$$+\int_{\frac{a\xi}{2}}^{\frac{a\xi+b\eta}{2}} \lambda d\lambda \int_{\frac{\xi(2\lambda-a\xi)}{b\lambda^2}}^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu + \int_{\frac{b\eta}{2}}^{\frac{a\xi+b\eta}{2}} \lambda d\lambda \int_{\frac{\eta(2\lambda-b\eta)}{a\lambda^2}}^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda,\,\lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu \qquad (\mathrm{I})$$

Es seien ferner in (1) und (2):

$$\xi = \infty \quad , \quad \eta = \infty \quad , \quad a \text{ und } b \text{ positiv,}$$

so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1}\, y^{n-1} f(ax+by,\, xy)\, dy =$$

$$\frac{1}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-1}\, d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} (1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1-\sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda,\, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-n}\, d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} (1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda,\, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu \qquad \text{(II)}$$

Setzt man hierin auch noch $m = 1$, $n = 1$, so erfolgt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax+by,\, xy)\, dy = 2\int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{f(2\lambda,\, \lambda^2\mu)}{\sqrt{1-ab\mu}}\, d\mu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \text{(III)}$$

36.

Die zahlreichen Anwendungen, welche die beiden zuletzt angeführten Gleichungen zulassen, sind von besonderm Interesse, weil sich aus ihnen nicht nur bereits bekannte sondern auch mehrere bemerkenswerthe neue Resultate ableiten lassen.

In (II) setze man:

$$f(ax+by,\, xy) = e^{-k\sqrt{xy}} \,.\, \sin(ax+by)$$

und mache zugleich die Integration in Bezug auf λ zur ersten so wird man finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1}\, y^{n-1}\, e^{-k\sqrt{xy}} \,.\, \sin(ax+by)\, dy =$$

$$\frac{1}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} (1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1-\sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \int_0^\infty \lambda^{m+n-1}\, e^{-k\lambda\sqrt{\mu}} \,.\, \sin 2\lambda\, d\lambda$$

$$+ \frac{1}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} (1-\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1} \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}} \int \lambda^{m+n-1}\, e^{-k\lambda\sqrt{\mu}} \,.\, \sin 2\lambda\, d\lambda$$

Führt man die Integration bezüglich λ nach der bekannten Formel von Euler aus, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1}\, y^{n-1}\, e^{-k\sqrt{xy}} \,.\, \sin(ax+by)\, dy =$$

$$\frac{\Gamma(m+n)}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{\sin\left\{(m+n)\, arctg\, \dfrac{2}{k\sqrt{\mu}}\right\}}{(k^2\mu+4)^{\frac{m+n}{2}}\, \sqrt{1-ab\mu}} \Big[(1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1-\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}$$

$$+ (1-\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\, (1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\Big]\, d\mu$$

Auf ganz analoge Weise erhält man auch:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1}\, y^{n-1}\, e^{-k\sqrt{xy}} \,.\, \cos\,(ax+by)\, dy =$$

$$\frac{\Gamma\,(m+n)}{a^{m-1}\, b^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{\cos\left\{(m+n)\, arctg\, \frac{2}{k\sqrt{\mu}}\right\}}{(k^2\mu+4)^{\frac{m+n}{2}}\, \sqrt{1-ab\mu}} \Big[(1+\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\,(1-\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}$$

$$+(1-\sqrt{1-ab\mu})^{m-1}\,(1+\sqrt{1-ab\mu})^{n-1}\Big]\, d\mu$$

Man sieht hieraus, dass jedes dieser beiden Doppel-Integrale sich vollständig finden lässt, wenn m und n ganze Zahlen sind, und dass jedenfalls das Differential bezüglich μ algebraisch wird, wenn wenigstens $m+n$ eine ganze Zahl ist.

Angenommen es sei $m=1$, $n=1$, so folgt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \sin\,(ax+by)\, dy = 8k \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{\sqrt{\mu}\, d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}\,.\,(4+k^2\,\mu)^2}$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \cos\,(ax+by)\, dy = 2 \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{k^2\mu-4}{(k^2\mu+4)^2} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{1-ab\mu}}$$

Setzt man in der erstern Gleichung:

$$\frac{\mu}{1-ab\mu} = t^2 \quad , \quad d\mu = \frac{2\,t\,dt}{(1-abt^2)^2}$$

in der letztern dagegen:

$$1-ab\mu = t^2 \quad , \quad d\mu = -\frac{2\,t}{b}\, dt$$

so gehen die Integrale rechter Hand über, resp. in:

$$\int_0^\infty \frac{2\,t^2\, dt}{\{4+(4\,ab+k^2)\,t^2\}^2} = \frac{\pi}{4\,(4\,ab+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$2\int_0^1 \frac{k^2+4\,ab-k^2\,t^2}{(k^2+4\,ab-k^2\,t^2)^2}\, dt = -\frac{2}{k^2+4\,ab} + \frac{k}{(k^2+4\,ab)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{k^2+4\,ab}+k}{\sqrt{k^2+4\,ab}-k}$$

Dies vorausgesetzt hat man also die beiden Resultate:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \,.\, \sin\,(ax+by)\, dy = \frac{2\,\pi k}{(k^2+4\,ab)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-k\sqrt{xy}} \cos\,(ax+by)\, dy = -\frac{4}{k^2+4\,ab} + \frac{2\,k}{(k^2+2\,ab)^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{k^2+4\,ab}+k}{\sqrt{k^2+4\,ab}-k}$$

Die erstere dieser beiden Gleichungen fand meines Wissens zuerst Cauchy; beide sind mittelst ziemlich verwickelter Reihenentwickelungen hergeleitet in einer der Noten zu dem „Mémoire sur la théorie de la propagation des ondes . . ." (S. Mémoires présentés par div. sav. T. I. 1827.) Um seine Form zu erhalten braucht man nur $a = 1$, $b = 1$, und $2k$ für k zu setzen.

37.

In der Gleichung (III) des Art. 35 setze man für $f(ax + by, xy)$ einmal

$$e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by) \quad \text{und dann} \quad e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by)$$

so wird man erhalten:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \cos(ax + by)\, dy = 2\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \int_0^\infty e^{-\varkappa\lambda\sqrt{\mu}} \cdot \sin k\lambda\sqrt{\mu} \cdot \cos 2\lambda\, d\lambda$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \cdot \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \sin(ax + by)\, dy = 2\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \int_0^\infty e^{-\varkappa\lambda\sqrt{\mu}} \cdot \cos k\lambda\sqrt{\mu} \cdot \sin 2\lambda\, d\lambda$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma\lambda} \cos\alpha\lambda \sin\beta\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)^2 + \gamma^2} - \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2}\right\}$$

folglich kann man die beiden auf λ sich beziehenden Integrationen ausführen und erhält:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by)\, dy =$$

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\sqrt{1 - ab}} \left\{\frac{k\sqrt{\mu} + 2}{(k\sqrt{\mu} + 2)^2 + \varkappa^2\mu} + \frac{k\sqrt{\mu} - 2}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2\mu}\right\}$$

und ebenso:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by)\, dy =$$

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \left\{\frac{k\sqrt{\mu} + 2}{(k\sqrt{\mu} + 2)^2 + \varkappa^2\mu} - \frac{k\sqrt{\mu} - 2}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2\mu}\right\}$$

Wie man sieht, können nunmehr auch die Integrationen bezüglich μ vollständig ausgeführt werden. Beachtenswerther als die hierdurch sich ergebenden sehr weiläufigen Resultate ist jedoch die Erörterung des besondern Falles, welcher der Annahme $\varkappa = 0$ entspricht.

Der erste Theil der Integrale rechter Hand ist alsdann:

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{(k\sqrt{\mu} + 2)\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{1 - ab\mu}}$$

Dieses Integral hat stets einen bestimmten Werth, welcher sich leicht finden lässt, wenn man etwa setzt:

$$\sqrt{\mu} = \frac{4x}{x^2+4ab} \quad ; \quad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = -8 \cdot \frac{x^2-4ab}{(x^2+4ab)^2}\,dx$$

Es folgt alsdann:

$$\sqrt{1-ab\mu} = -\frac{x^2-4ab}{x^2+4ab} \quad ; \quad k\sqrt{\mu}+2 = \frac{2(x^2+2kx+4ab)}{x^2+4ab}$$

so dass das Integral übergeht in:

$$4\int_0^{2\sqrt{ab}} \frac{dx}{x^2+2kx+4ab}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ab-k^2}} \arccos \frac{k}{2\sqrt{ab}} \quad , \text{ wenn } \quad 4ab-k^2>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2-4ab}} \log \frac{\left(k+\sqrt{k^2-4ab}\right)^2}{4ab} \quad , \text{ wenn } \quad k^2-4ab>0$$

Der zweite Theil der auf μ sich beziehenden Integrale unterscheidet sich vom ersten nur durch das Zeichen von k; er ist

$$4\int_0^{2\sqrt{ab}} \frac{dx}{x^2-2kx+4ab}$$

und zwar in der ersten Gleichung abzuziehen, in der zweiten zu addiren. — Der Werth desselben ist

$$= \frac{2}{\sqrt{4ab-k^2}} \arccos \frac{-k}{2\sqrt{ab}} \quad , \text{ wenn } \quad 4ab-k^2>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2-4ab}} \log \frac{\left(k-\sqrt{k^2-4ab}\right)^2}{4ab} \quad , \text{ wenn } \quad k^2-4ab>0$$

Verbindet man nun diese beiden Theile in der angegebenen Weise, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax+by)\,dy = \frac{2}{\sqrt{4ab-k^2}}\left(2\arccos\frac{k}{2\sqrt{ab}}-\pi\right), \text{ wenn } 4ab-k^2>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2-4ab}} \log \frac{\left(k+\sqrt{k^2-4ab}\right)^2}{16a^2b^2}, \text{ wenn } k^2-4ab>0$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax+by)\,dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ab-k^2}} \,, \quad \text{wenn} \quad 4ab-k^2>0$$

$$= 0 \quad , \quad \text{wenn} \quad k^2-4ab>0$$

Die Resultate der letztern Gleichung, wonach das Doppel-Integral eine discontinuirliche Function ist, fand zuerst Cauchy in der erwähnten Abhandlung, ebenfalls mittelst unendlicher Reihen. — Schliesslich noch die Bemerkung, dass, wenn man in der zweiten Gleichung dieses Artikels $k = 0$ setzt, daraus die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\sin(ax+by)}{\sqrt{xy}} dy = 2\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,.\,\sqrt{1-ab\mu}}\,.\int_0^\infty e^{-\varkappa\lambda\sqrt{\mu}} \sin 2\lambda\, d\lambda$$

hervorgeht, deren rechte Seite nach Ausführung der auf λ sich beziehenden Integration übergeht in:

$$4\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{(\varkappa^2\mu+4)\sqrt{\mu}\,.\,\sqrt{1-ab\mu}}$$

Führt man auch diese Integration aus, so wird man $\frac{2\pi}{\sqrt{4ab+k^2}}$ erhalten, und es folgt somit die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\sin(ax+by)}{\sqrt{xy}} dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ab+k^2}}$$

welche für $a = 1$, $b = 1$ ganz mit derjenigen übereinstimmt, welche Cauchy a. a. O. aus der Betrachtung von Reihen erhielt.

38.

In der Gleichung (III) des Art. 35 setze man für $f(ax+by, xy)$ einmal:

$$e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax+by) \qquad \text{und dann:} \qquad e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax+by)$$

so wird man nach Umkehrung der Integrationsfolge der Veränderlichen λ und μ finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax+by)\, dy = 2\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,.\,\sqrt{1-ab\mu}} \int_0^\infty e^{-\varkappa\lambda\sqrt{\mu}} \sin k\lambda\sqrt{\mu}\,.\,\sin 2\lambda\, d\lambda$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa\sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax+by)\, dy = 2\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,.\,\sqrt{1-ab\mu}} \int_0^\infty e^{-\varkappa\lambda\sqrt{\mu}} \cos k\lambda\sqrt{\mu}\,.\,\cos 2\lambda\, d\lambda$$

Nun ist offenbar:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma\lambda} \sin\alpha\lambda \sin\beta\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\left\{\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2+\gamma^2} - \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2+\gamma^2}\right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma\lambda} \cos\alpha\lambda \cos\beta\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\left\{\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2+\gamma^2} + \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2+\gamma^2}\right\}$$

Es lassen sich also auch hier die beiden Integrationen nach λ sogleich ausführen, und man erhält:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa \sqrt{xy}} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by)\, dy =$$

$$\varkappa \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - ab\mu}} \left\{ \frac{1}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2\mu} - \frac{1}{(k\sqrt{\mu} + 1)^2 + \varkappa^2\mu} \right\}$$

und ebenso:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\varkappa \sqrt{xy}} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by)\, dy =$$

$$\varkappa \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - ab\mu}} \left\{ \frac{1}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2\mu} + \frac{1}{(k\sqrt{\mu} + 2)^2 + \varkappa^2\mu} \right\}$$

Da sich auch die Integrationen bezüglich μ ausführen lassen, so sieht man dass die beiden Doppel-Integrale in endlicher Form gefunden werden können.

Von Interesse ist jedoch nur der specielle Fall für $\varkappa = 0$. Es ereignet sich nämlich auch hierfür der Umstand, das beide Integrale rechter Hand verschwinden, wenn $(k^2 - 4\,ab)$ negativ, dagegen einen von Null verschiedenen Werth erhalten, wenn jener Ausdruck positiv ist. Um dies zu zeigen bemerke man vor Allem, dass das auf das zweite Glied sich beziehende Integral, nämlich:

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \frac{\varkappa}{(k\sqrt{\mu} + 2)^2 + \varkappa^2\mu}$$

unter allen Umständen mit $\varkappa$ verschwindet, so dass man es also nur mit dem ersten Gliede

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - ab\mu}} \cdot \frac{\varkappa}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2\mu}$$

zu thun hat. Es sei nun k so beschaffen, dass $k\sqrt{\mu} - 2$ niemals Null werden kann, so lange μ zwischen 0 und $\frac{1}{ab}$ liegt, so dass also der Ausdruck $k\sqrt{\mu}$ auch für den grössten Werth von μ den Werth 2 nicht erreicht, und daher

$$\frac{k}{\sqrt{ab}} - 2 < 0 \qquad \text{oder} \qquad k^2 - 4\,ab < 0$$

Alsdann bleibt, wie im vorigen Falle, auch für $\varkappa = 0$ der Nenner stets von Null verschieden, folglich das Integral endlich. Mit $\varkappa = 0$ werdend verschwindet also der ganze Ausdruck.

Anders aber verhält es sich in dem letzten noch zu betrachtenden Falle, wenn $k\sqrt{\mu} - 2$ für einen zwischen 0 und $\frac{1}{ab}$ liegenden Werth von μ verschwinden kann, oder also:

$$\frac{k}{\sqrt{ab}} - 2 > 0 \qquad \text{oder} \qquad k^2 - 4\,ab > 0$$

ist. Dann erscheint das Integral als zu der Classe der sogenannten singulären Integrale gehörig, deren Werth blos aus einem unendlich kleinen Intervall der Grenzen entspringt und zu welchem aus den übrigen Intervallen kein Beitrag geleistet wird. Im vorliegenden Falle bildet jenes Intervall die unendlich nahe Umgebung des Werthes $\mu = \frac{4}{k^2}$, für welchen der Nenner $(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2 \mu$ mit $\varkappa$ verschwindet, und daher das entsprechende Element des Integrals unendlich gross macht. Ich will nun vor Allem das Integral in die Form

$$\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu} - ab}} \cdot \frac{\varkappa}{(k\sqrt{\mu} - 2)^2 + \varkappa^2 \mu}$$

bringen und von der Bemerkung ausgehen, dass, weil nur die in unmittelbarer Nähe von $\mu = \frac{4}{k^2}$ liegenden Werthe in Frage kommen, der Factor

$$\sqrt{\frac{1}{\mu} - ab} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4\,ab}$$

als constant vor das Integralzeichen gesetzt werden kann. Setzt man zugleich auch

$$\sqrt{\mu} = \frac{2}{x} \quad , \quad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = -\frac{4\,dx}{x^2}$$

so ergibt sich:

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 - 4\,ab}} \int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} \frac{\varkappa\,dx}{(k - x)^2 + \varkappa^2}$$

Bezeichnet ε eine sehr kleine Grösse, so verschwinden, für $\varkappa = 0$, offenbar diejenigen Theile dieses Integrals, deren Grenzen resp. von $2\sqrt{ab}$ bis $k - \varepsilon$, und von $k + \varepsilon$ bis ∞ sich erstrecken, so dass allein das Zwischenglied:

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 - 4\,ab}} \int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon} \frac{\varkappa\,dx}{(k - x)^2 + \varkappa^2}$$

übrig bleibt, welches um so näher den ganzen Integralwerth darstellt, je enger das Intervall $k - \varepsilon$ bis $k + \varepsilon$ genommen wird. Führt man nun die Integration aus, so erfolgt:

$$\frac{4}{\sqrt{k^2 - 4ab}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)$$

Hieraus lässt sich leicht erkennen, was für ein in Null übergehendes $\varkappa$ hervorgeht. Für $\varkappa = 0$ wird nämlich der eine Factor

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right) = \frac{\pi}{2}$$

und für ein gleichfalls ohne Ende abnehmendes ε stellt der andere Factor

$$\frac{2}{\sqrt{k^2 - 4ab}}$$

bereits den richtigen Grenzwerth dar.

Fasst man diese Resultate zusammen, so folgt, dass jedes der beiden Integrale:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \sin(ax + by)\,dy \quad ; \quad \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{\cos k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cos(ax + by)\,dy$$

$$= 0 \quad , \quad \text{wenn} \quad 4\,ab - k^2 > 0$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - 4\,ab}} \quad , \quad \text{wenn} \quad k^2 - 4\,ab > 0$$

Für das erstere Doppel-Integral stimmen diese Ergebnisse genau mit denjenigen überein, welche Cauchy a. a. O. auf ganz verschiedenem Wege gefunden hat. Soviel mir bekannt ist dagegen das zweite Integral bis jetzt nicht in Betracht gezogen worden.

39.

Setzt man in der Gleichung (III) des Art. 35 für $f\,(ax + by,\, xy)$ den Ausdruck:

$$\frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin\,(ax+by)}{ax+by}$$

so wird man finden:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin\,(ax+by)}{ax+by}\,dy = \int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,.\sqrt{1-ab\mu}} \int_0^\infty \frac{\sin\,(k\sqrt{\mu}\,.\,\lambda)}{\lambda} \sin 2\,\lambda\,d\lambda\,.$$

Um zuerst die Integration nach λ auszuführen, kann man von der bekannten Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma\lambda}\,\frac{\cos a\lambda - \cos b\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2}\log\frac{\gamma^2+b^2}{\gamma^2+a^2}$$

ausgehen und bemerken, dass

$$\cos a\lambda - \cos b\lambda = -\,2\sin\frac{a-b}{2}\,\lambda\,\sin\frac{a+b}{2}\,\lambda$$

und also, wenn: $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$ gesetzt wird:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma\lambda}\,\frac{\sin\beta\lambda}{\lambda}\,\sin\alpha\lambda d\lambda = \frac{1}{4}\log\frac{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2+\gamma^2}$$

und für $\gamma = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta\lambda}{\lambda}\,\sin\alpha\lambda\,.\,d\lambda = \frac{1}{4}\log\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2$$

Setzt man hierin: $\beta = k\sqrt{\mu}$, $\alpha = 2$ und substituirt dann den Werth des Integrals in die obige Gleichung, so folgt für deren rechte Seite der Ausdruck:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{ab}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,.\,\sqrt{1-ab\mu}}\,\log\left(\frac{2+k\sqrt{\mu}}{2-k\sqrt{\mu}}\right)^2$$

Setzt man darin, der Vereinfachung wegen:

$$ab\,.\,\mu = \cos^2 x \quad , \quad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = -\,\frac{2\sin x}{\sqrt{ab}}\,.\,dx$$

so erhält man:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,.\,\log\left(\frac{2\sqrt{ab}+k\cos x}{2\sqrt{ab}-k\cos x}\right)^2$$

Ob sich dieses Integral in endlicher Form darstellen lässt, oder ob es nur einer Reduction auf eine einfachere Quadratur fähig sei, will ich auf folgende Art zu entscheiden suchen. Es seien α und β zwei Constante und zwar sei:

$$0 < \alpha < \pi \qquad \text{und} \qquad -1 < \beta < +1$$

so ist offenbar:

$$\int_0^\alpha dx \int_0^\beta \frac{\cos x \, dy}{y \cos x + 1} = \int_0^\beta dy \int_0^\alpha \frac{\cos x \, dx}{y \cos x + 1}$$

Führt man auf jeder Seite die erste Integration aus, so findet man:

$$\int_0^\alpha \log(1 + \beta \cos x)\, dx = \int_0^\beta \frac{dy}{y} \left\{ \alpha - \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \, arctg \left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \, . \, \mathrm{tang} \, \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

Schreibt man $-\beta$ für β, und $-y$ für y, so erfolgt:

$$\int_0^\alpha \log(1 - \beta \cos x)\, dx = \int_0^\beta \frac{dy}{y} \left\{ \alpha - \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \, . \, \mathrm{tang} \, \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen gibt:

$$\int_0^\alpha \log \frac{1+\beta \cos x}{1-\beta \cos x}\, dx = 2 \int_0^\beta \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} \left\{ \mathrm{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \, . \, \mathrm{tang} \, \frac{\alpha}{2} \right) - \mathrm{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \, . \, \mathrm{tang} \, \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

Das Integral rechter Hand lässt eine beträchtliche Vereinfachung zu. In der That, setzt man:

$$y = \sin x \quad , \quad dy = \cos x \, dx$$

so gelangt man zu der bemerkenswerthen Gleichung:

$$\int_0^\alpha \log \frac{1+\beta \cos x}{1-\beta \cos x}\, dx = 2 \int_0^{\arcsin \beta} \frac{dx}{\sin x} \, \mathrm{arctg} \, (\sin \alpha \, \mathrm{tang} \, x) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt hieraus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+\beta \cos x}{1-\beta \cos x}\, dx = 2 \int_0^{\arcsin \beta} \frac{x}{\sin x}\, dx$$

Hieraus geht nun zur Genüge hervor, dass von einer Darstellung des vorliegenden Integrals in endlicher Form nicht die Rede sein kann. Ich erwähne dieses Umstandes auch darum, weil aus einer Formel von Lobatschewsky[1]) (Mém. Kasan. 1836. II, p. 23) für jenes Integral sich der Werth:

$$2\lambda \log \sec \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \arccos \beta \right)$$

ergibt.

---

[1]) S. Bierens de Haan. Tables d'intégrales définies. T. 343, Nr. 13.

Dies vorausgesetzt, hat man also:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sin(ay+by)}{ax+by}\, dy = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^{\arcsin\frac{k}{2\sqrt{ab}}} \frac{x\, dx}{\sin x} \quad , \qquad \text{wenn } 4ab - k^2 < 0$$

Die oben gefundene Formel (1) ist nicht mehr brauchbar, wenn der absolute Werth von β die Einheit übersteigt. Dann muss in der Gleichung:

$$\int_0^a \log \frac{1+\beta \cos x}{1+\cos x}\, dx = \int_1^\beta dy \int_0^a \frac{\cos x\, dx}{y \cos x + 1}$$

die Integration nach x auf der rechten Seite durch Logarithmen statt durch Bogen geschehen, wobei man findet:

$$\int_0^a \log \frac{1+\beta\cos x}{1+\cos x}\, dx = \int_1^\beta \frac{dy}{y} \left\{ a - \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \log \frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} \,.\, \operatorname{tang} \frac{a}{2}}{\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} \,.\, \operatorname{tang} \frac{a}{2}} \right\}$$

Führt man in gleicher Weise in der Gleichung:

$$\int_0^a \log \frac{1-\beta \cos x}{1-\cos x}\, dx = \int_1^\beta dy \int_0^a \frac{-\cos x\, dx}{-y \cos x + 1}$$

die Integration aus, so erfolgt:

$$\int_0^a \log \frac{1-\beta\cos x}{1-\cos x}\, dx = \int_0^\beta \frac{dy}{y} \left\{ a - \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \log \frac{\sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \,.\, \operatorname{tang} \frac{a}{2}}{\sqrt{y-1} - \sqrt{y+1} \,.\, \operatorname{tang} \frac{a}{2}} \right\}$$

also durch Subtraction der beiden Gleichungen:

$$\int_0^a \log \frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\, dx = -2\int_0^a \log \operatorname{tang}\frac{x}{2}\, dx$$

$$+ \int_1^\beta \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} \log \frac{\left(\sqrt{y-1} + \sqrt{y+1} \,.\, \operatorname{tang}\frac{a}{2}\right)\left(\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} \,.\, \operatorname{tang}\frac{a}{2}\right)}{\left(\sqrt{y-1} - \sqrt{y+1} \,.\, \operatorname{tang}\frac{a}{2}\right)\left(\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} \,.\, \operatorname{tang}\frac{a}{2}\right)}$$

Auch hier lässt das letzte Glied eine beträchtliche Vereinfachung zu, wenn man:

$$\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} = \operatorname{tang}\frac{x}{2} \quad , \qquad y = \sec x \quad , \qquad dy = \sin x \sec^2 x\, dx$$

substituirt. Nach einigen Umformungen erhält man nämlich:

$$\int_0^a \log \left(\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\right)^2 dx = -2\int_0^a \log\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)^2 dx + \int_0^{\operatorname{arcsec}\beta} \log\left(\frac{\sin(a+x)}{\sin(a-x)}\right)^2 dx \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Diese Gleichung ist nur so lange giltig als $\beta \cos \alpha$ nicht unter die Einheit fällt. Durch die Gleichungen (1) und (2) ist die Transformation des in Frage gestellten Integrals für alle Fälle gegeben, in welchen es nicht unbestimmt oder unendlich gross wird.

40.

Der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Veränderlichen sei den Gleichungen

$$x = X_{(\lambda,\,\mu)} = (r\lambda + s)^m\,(a\mu + b)^n$$

$$y = Y_{(\lambda,\,\mu)} = (r\lambda + s)^m\,(\alpha\mu + \beta)^n$$

gemäss festgestellt. Man erhält dann, wie leicht zu sehen:

$$\Delta = mnr\,(a\beta - \alpha b)\,.\,(r\lambda + s)^{2m-1}\,.\,(a\mu + b)^{n-1}\,.\,(\alpha\mu + \beta)^{n-1}$$

und wenn die gegebenen Grenzen des Integrals nach x und y constant sind, so ergeben sich diejenigen bezüglich der neuen Veränderlichen wie folgt. Es ist

$$\mu = -\frac{b}{a} + \frac{x^{\frac{1}{n}}}{a\,(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \mu = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{\alpha\,(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}}$$

also:

$$\mu_0 = -\frac{b}{a} + \frac{\xi_0^{\frac{1}{n}}}{a\,(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \mu_1 = -\frac{b}{a} + \frac{\xi_1^{\frac{1}{n}}}{a\,(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}}$$

$$\mu^0 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\eta_0^{\frac{1}{n}}}{\alpha\,(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}} \quad , \quad \mu^1 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\eta_1^{\frac{1}{n}}}{\alpha\,(r\lambda + s)^{\frac{m}{n}}}$$

Daraus findet man auf bekannte Art, die weiteren Grenzen-Werthe:

$$\lambda_0^{\,0} = -\frac{s}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{a\eta_0^{\frac{1}{n}} - \alpha\xi_0^{\frac{1}{n}}}{a\beta - \alpha b}\right)^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \lambda_1^{\,0} = -\frac{s}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{a\eta_0^{\frac{1}{n}} - \alpha\xi_1^{\frac{1}{n}}}{a\beta - \alpha b}\right)^{\frac{n}{m}}$$

$$\lambda_1^{\,0} = -\frac{s}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{a\eta_1^{\frac{1}{n}} - \alpha\xi_0^{\frac{1}{n}}}{a\beta - \alpha b}\right)^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \lambda_1^{\,1} = -\frac{s}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{a\eta_1^{\frac{1}{n}} - \alpha\xi_1^{\frac{1}{n}}}{a\beta - \alpha b}\right)^{\frac{n}{m}}$$

Da hierdurch Alles gegeben ist, was zur Darstellung des transformirten Integrals verlangt wird, so scheint eine weitere Ausführung derselben nicht nöthig zu sein. Wohl aber verdienen einige besondere Fälle einer nähern Beachtung. Es sei nämlich:

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \eta_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = \xi \quad , \quad \eta_1 = \eta$$

Ausserdem nehme man an, es sei

$$r = 1 \quad , \quad s = 0 \quad , \quad a = 1 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad \alpha = -1 \quad , \quad \beta = +1$$

Dann ergibt sich:

$$\mu_0 = 0 \quad , \quad \mu^0 = +1 \quad , \quad \mu_1 = \xi^{\frac{1}{n}}\lambda^{-\frac{m}{n}} \quad , \quad \mu^1 = 1 - \eta^{\frac{1}{n}}\lambda^{-\frac{m}{n}}$$

$$\lambda_0^{\,0} = 0 \quad , \quad \lambda_1^{\,0} = \xi^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \lambda_0^{\,1} = \eta^{\frac{1}{m}} \quad , \quad \lambda_1^{\,1} = \left(\xi^{\frac{1}{m}} + \eta^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}$$

$$\Delta = mn\,.\,\lambda^{2m-1}\,\mu^{n-1}\,(1-\mu)^{n-1}\,, \quad x = \lambda^m\mu^n \quad , \quad y = \lambda^m(1-\mu)^n$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (III) des Art. 17, so findet man nach einigen Umgestaltungen die folgende Gleichung:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x, y)\, dy =$$

$$mn \left\{ \int_0^{\xi^{\frac{1}{m}}} \lambda^{2m-1}\, d\lambda \int_{\xi^{\frac{1}{n}} \lambda^{-\frac{m}{n}}}^{1} (\mu-\mu^2)^{n-1} f[\lambda^m \mu^n, \lambda^m (1-\mu)^n]\, d\mu + \int_0^{\eta^{\frac{1}{m}}} \lambda^{2m-1}\, d\lambda \int_{\eta^{\frac{1}{n}} \lambda^{-\frac{m}{n}}}^{1} (\mu-\mu^2)^{n-1} f[\lambda^m (1-\mu)^n, \lambda^m \mu^n]\, d\mu \right\}$$

$$+ mn \int_0^{\left(\xi^{\frac{1}{m}} + \eta^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}} \lambda^{2m-1}\, d\lambda \left\{ \int_0^{\xi^{\frac{1}{n}} \lambda^{-\frac{m}{n}}} (\mu-\mu^2)^{n-1} f[\lambda^m \mu^n, \lambda^m (1-\mu)^n]\, d\mu + \int_0^{\eta^{\frac{1}{n}} \lambda^{-\frac{m}{n}}} (\mu-\mu)^{n-1} f[\lambda^m (1-\mu)^n, \lambda^m \mu^n]\, d\mu \right\}$$

worin die Symmetrie bezüglich ξ und η deutlich hervortritt.

Nimmt man hierin die besonderen Werthe $m = 1$, $n = 2$ an und setzt zugleich auch:

$$\mu = \cos^2\theta \qquad , \qquad d\mu = -2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

so kann man der Gleichung nach einigen leichten Umformungen die folgende sehr einfache Gestalt geben:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x,y)\, dy =$$

$$\int_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}^{\xi} \lambda\, d\lambda \int_0^{\arccos\frac{\xi}{\lambda}} f(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)\, d\theta + \int_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}^{\eta} \lambda\, d\lambda \int_0^{\arccos\frac{\eta}{\lambda}} f(\lambda\sin\theta, \lambda\cos\theta)\, d\theta$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \lambda\, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)\, d\theta$$

Diese Formel wird in vielen Fällen von Nutzen sein, da, wie bekannt, die zu Grunde liegenden Substitutionen:

$$x = \lambda\cos\theta \qquad , \qquad y = \lambda\sin\theta$$

häufig die gewünschte Umgestaltung des gegebenen Differentials bewirken.

Ist $\xi = \infty$ und $\eta = \infty$, so ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^{\infty} \lambda\, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)\, d\theta$$

Es sei z. B.

$$f(x, y) = e^{-k^2(x^2+y^2)}$$

so gibt die angeführte Formel unmittelbar:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-k^2(x^2+y^2)}\, dy = \int_0^{\infty} \lambda\, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k^2\lambda^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\, d\theta$$

oder was dasselbe sagt:

$$\left\{\int_0^\infty e^{-k^2 x^2}\, dx\right\}^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-k^2 \lambda^2} \,.\, \lambda\, d\lambda$$

Das rechter Hand noch stehen gebliebene Integral lässt sich unbestimmt finden und hat den Werth $\frac{1}{2\,k^2}$ und man erhält somit die bekannte Gleichung:

$$\int_0^\infty e^{-k^2 x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,k}$$

Es sei ferner:

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \,.\, x^{2\,m-1}\, y^{2\,n-1}$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, x^{2\,m-1}\, dx \int_0^\infty e^{-y^2}\, y^{2\,n-1}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,m-1}\theta \sin^{2\,n-1}\theta\, d\theta \int_0^\infty e^{-\lambda^2}\, \lambda^{2\,(m+n)-1}\, d\lambda$$

Bemerkt man aber, dass:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, x^{2\,m-1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x} \,.\, x^{m-1}\, dx = \frac{1}{2}\,\Gamma(m)$$

so geht die so eben gefundene Gleichung über in die folgende

$$\frac{1}{2}\,\Gamma(m)\,\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,m-1}\theta \sin^{2\,n-1}\theta\, d\theta$$

woraus man sofort erhält:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,m-1}\theta \,.\, \sin^{2\,n-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Es sei hierin:

$$\cos\theta = \sqrt{x} \quad , \quad \sin\theta = \sqrt{1-x} \quad , \quad d\theta = -\frac{dx}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in die bekannte Relation der Euler'schen Integrale erster und zweiter Gattung, indem man erhält:

$$\int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Ich will ferner noch annehmen, es werde an die Stelle von $f(x, y)$ der Ausdruck:

$$\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{ax^2+by^2)}}$$

gesetzt. Man findet dann aus der frühern Gleichung die folgende:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{ax^2+by^2}}\, dy = \int_0^\infty f(\lambda^2)\, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}}$$

Vorausgesetzt, dass a positiv und $\frac{b}{a} < 1$ sei, lässt sich das auf θ beziehende Integral in die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sin^2 \theta}}$$

bringen und man hat dann, wenn zur Bezeichnung dieses elliptischen Integrals nach Legendre das Zeichen $F^I\left(\sqrt{1 - \frac{b}{a}}\right)$ angewendet wird, die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{ax^2 + by^2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\, F^I\left(\sqrt{1 - \frac{b}{a}}\right) . \int_0^\infty f(\lambda^2)\, d\lambda$$

welche man auch auf anderem Wege leicht finden könnte.

41.

Um in einem bestimmten Falle die oben betrachtete Transformation anzuwenden, wenn die Integrations-Grenzen veränderlich sind, seien dieselben gegeben durch die Ungleichheit:

$$0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Es seien ferner in den Ausdrücken:

$$x = (r\lambda + s)^m (a\mu + b)^n \quad , \quad y = (r\lambda + s)^m (\alpha\mu + \beta)^n$$

die besonderen Werthe

$$r = 1 \quad , \quad s = 0 \quad ; \quad b = 0 \quad , \quad \beta = -\alpha$$

und

$$m = 2 \quad , \quad n = 2$$

auch werde a^2 für a gesetzt, so dass also:

$$x = X_{(\lambda,\mu)} = a\sqrt{\lambda\mu}$$

$$y = Y_{(\lambda,\mu)} = b\sqrt{\lambda(1 - \mu)}$$

Angenommen nun die Integration habe sich nur auf alle positive Werthe von x und y zu erstrecken, welche jener Ungleichheit Genüge leisten, so ist

$$\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y)\, dy$$

das zu betrachtende Integral, also:

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \xi_1 = a \quad , \quad \varphi^0(x) = 0 \quad , \quad \varphi^1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Hierfür ergibt sich aus den bekannten Gleichungen:

$$\mu_0 = 0 \quad , \quad \mu_1 = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \mu^0 = 1 \quad , \quad \mu^1 \text{ unbestimmt.}$$

$$\lambda_0^0 = 0 \quad , \quad \lambda_0^1 = 1 \quad , \quad \lambda_1^0 = 1 \quad , \quad \lambda_1^1 = 1$$

Auch findet man:

$$\Delta = \frac{ab}{4\sqrt{\mu - \mu^2}}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (X) des Art. 21, so folgt:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \frac{ab}{4}\int_0^1 d\lambda \int_0^1 \frac{f\left[a\sqrt{\lambda\mu},\, b\sqrt{\lambda(1-\mu)}\right]}{\sqrt{\mu(1-\mu)}}\, d\mu$$

wobei alle positiven Werthe von x und y zu umfassen sind, welche der Bedingung:

$$0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

entsprechen. Setzt man $\lambda = \rho^2$, $\mu = \cos^2\theta$ so wird

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = ab\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\rho\cos\theta\,,\, b\rho\sin\theta)\, d\theta$$

Handelt es sich z. B. um den Inhalt des Quadranten der Ellipse, so ist $f(x, y) = 1$ zu setzen und man erhält, wie es sein soll, $\frac{\pi}{4}ab$ für den Werth des Doppel-Integrals.

42.

Unterwirft man den Ausdruck

$$f(x^2 - 2xy\cos\gamma + y^2) \cdot \frac{dx\, dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

der doppelten Integration, und soll derselbe alsdann durch neue Veränderliche transformirt werden, so eignen sich hierzu die Relationen:

$$x = X_{(\lambda,\mu)} = a\lambda\sqrt{1 - b^2\mu^2} - b\mu\sqrt{1 - a^2\lambda^2}$$
$$y = Y_{(\lambda,\mu)} = a\lambda\sqrt{1 - b^2\mu^2} + b\mu\sqrt{1 - a^2\lambda^2}$$

worin unter a und b positive Grössen verstanden sind.

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$x + y = 2a\lambda\sqrt{1 - b^2\mu^2} \quad , \quad xy = a^2\lambda^2 - b^2\mu^2$$
$$x^2 + y^2 = 2\left[a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 - 2a^2b^2\lambda^2\mu^2\right]$$

Dessgleichen erhält man:

$$x^2 - 2xy\cos\gamma + y^2 = 4\left[a^2\lambda^2\sin^2\frac{\gamma}{2} + b^2\mu^2\cos^2\frac{\gamma}{2} - a^2b^2\lambda^2\mu^2\right]$$
$$(1 - x^2)(1 - y^2) = (1 - a^2\lambda^2 - b^2\mu^2)^2$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = 1 - a^2\lambda^2 - b^2\mu^2$$

wenn nämlich vorausgesetzt wird, es solle in der hier vorliegenden Aufgabe stets der positive Werth dieser Wurzelgrösse genommen werden. — Ferner findet man:

$$\Delta = 2ab \cdot \frac{a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 - 1}{\sqrt{1 - a^2\lambda^2} \cdot \sqrt{1 - b^2\mu^2}}$$

so dass sich das vorgelegte Differential in den folgenden Ausdruck verwandelt:

$$-2\,ab\,.\,f\left[4\left(a^2\lambda^2\sin^2\frac{\gamma}{2}+b^2\mu^2\cos^2\frac{\gamma}{2}-a^2b^2\lambda^2\mu^2\right)\right]\,.\,\frac{d\lambda\,d\mu}{\sqrt{1-a^2\lambda^2}\,.\,\sqrt{1-b^2\mu^2}}$$

Ohne der Allgemeinheit zu schaden kann man hierin

$$a=\cos\frac{\gamma}{2}\quad,\quad b=\sin\frac{\gamma}{2}$$

setzen, so dass nunmehr

$$x=\lambda\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}-\mu\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$y=\lambda\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}+\mu\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

wird, und der gegebene Differential-Ausdruck die Form

$$f\left[\sin^2\gamma-(1-\lambda^2)(1-\mu^2)\sin^2\gamma\right]\,.\,\frac{-\sin\gamma\,.\,d\lambda\,d\mu}{\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}\,.\,\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}$$

erhält. Um die Bestimmung der Integrations-Grenzen bezüglich λ und μ an einem bestimmten Falle durchzuführen, will ich annehmen das Doppel-Integral habe sich auf alle positiven und negativen Werthe von x und y zu erstrecken, welche der Bedingung

$$0<x^2+y^2<1$$

Genüge thun. Dann sind die Grenzen des Doppel-Integrals offenbar:

$$\xi_0=-1\quad,\quad\xi_1=+1$$

$$\varphi^0(x)=-\sqrt{1-x^2}\quad,\quad\varphi^1(x)=+\sqrt{1-x^2}$$

Die Werthe μ_0, μ_1 ergeben sich, wenn man aus der Gleichung

$$x=a\lambda\,.\,\sqrt{1-b^2\mu^2}-b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2}$$

den Werth

$$b\mu=-x\sqrt{1-a^2\lambda^2}\pm a\lambda\sqrt{1-x^2}$$

ableitet und darin $x=-1$ und $x=+1$ setzt, wie folgt:

$$\mu_0=+\frac{\sqrt{1-a^2\lambda^2}}{b}\quad,\quad\mu_1=-\frac{\sqrt{1-a^2\lambda^2}}{b}$$

Wenn für irgend einen Werth von λ die Veränderliche μ zwischen diesen Grenzen liegt, so bleibt, wie oben vorausgesetzt wurde, der Ausdruck:

$$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=1-a^2\lambda^2-b^2\mu^2=(\sqrt{1-a^2\lambda^2}-b\mu)(\sqrt{1-a^2\lambda^2}+b\mu)$$

in der That beständig positiv.

Was nun ferner die Werthe μ^0, μ^1 betrifft, so müssen sie sich aus der Gleichung:

$$x^2+y^2=1$$

ergeben, welcher sie Genüge leisten müssen. Daraus aber folgt, wie leicht zu sehen:

$$1-2\,b^2\mu^2=2\,a^2\lambda^2\,(1-2\,b^2\mu^2)$$

und dieser Gleichung wird, was auch λ sein möge, entsprochen wenn man

$$\mu = \pm \frac{1}{b\sqrt{2}}$$

setzt. Hierdurch sind nun μ^0, μ^1 bis auf die Zeichen gefunden, welche sich wie folgt bestimmen lassen.

Da μ^0 der Bedingung $y = \varphi^0(x) = -\sqrt{1-x^2}$ entsprechen und für y einen negativen Werth geben soll, so überzeugt man sich auf der Stelle, dass

$$\mu^0 = -\frac{1}{b\sqrt{2}} \quad , \quad \mu^1 = +\frac{1}{b\sqrt{2}}$$

zu setzen ist.

Für $\lambda_0{}^0$ hat man die Gleichungen:

$$-1 = a\lambda\sqrt{1-b^2\mu^2} - b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2} \quad \text{oder} \quad -1 = 2\,a\lambda\sqrt{1-b^2\mu^2}$$
$$0 = a\lambda\sqrt{1-b^2\mu^2} - b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2} \quad \text{oder} \quad +1 = 2\,b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2}$$

woraus man sieht, dass $\lambda_0{}^0$ negativ ($\mu_0{}^0$ dagegen positiv) werden muss, und zwar findet man

$$\lambda_0{}^0 = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Für $\lambda_1{}^1$ hat man aus ähnlichen Gründen die Gleichungen:

$$+1 = 2\,a\lambda\sqrt{1-b^2\mu^2}$$
$$-1 = 2\,b\mu\sqrt{1-a^2\lambda^2}$$

woraus folgt:

$$\lambda_1{}^1 = +\frac{1}{a\sqrt{2}}$$

In gleicher Weise findet man die übrigen Werthe

$$\lambda_0{}^1 = -\frac{1}{a\sqrt{2}} \quad , \quad \lambda_1{}^0 = +\frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Dieses vorausgesetzt, substituire man die gefundenen Werthe in die Gleichung (IV) des Art. 17, so ergibt sich:

$$\iint \frac{f(x^2 - 2\,xy\cos\gamma + y^2)}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$2\,ab\int_{-\frac{1}{a\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{a\sqrt{2}}} d\lambda \int_{-\frac{1}{b\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{b\sqrt{2}}} \frac{f\left[\sin^2\gamma - 4\left(a^2\lambda^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(b^2\mu^2 - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sqrt{1-a^2\lambda^2}\,.\,\sqrt{1-b^2\mu^2}}\,d\mu$$

wobei für x und y alle positiven und negativen Werthe zu setzen welche der Bedingung $0 < x^2 + y^2 < 1$ genügen.

Im 20. Bande des Journals von Crelle beschäftigt sich Prof. Haedenkamp mit einer analogen Transformation für den besondern Fall, in welchem

$$\frac{f(x^2 - 2\,xy\cos\gamma + y^2)}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\gamma - (x^2 - 2\,xy\cos\gamma + y^2)}}\,\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2}}$$

Setzt man:

$$x = \cos u \quad , \quad y = \sin v$$

so verwandelt sich der Differentialausdruck sogleich in die daselbst gewählte Form, nämlich in:

$$\frac{du\, dv}{\sqrt{1 - \cos^2\gamma - \cos^2 u - \cos^2 v - 2\cos\gamma \cos u \cos v}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wendet man dagegen die Transformation mittelst der Grössen λ, μ an, so erhält man:

$$\frac{d\lambda\, d\mu}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-\lambda^2\cos^2\frac{\gamma}{2})} \,.\, \sqrt{(1-\mu^2)\,(1-\mu^2\sin^2\frac{\gamma}{2})}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wenn nun aber hieraus der Schluss gezogen wird, dass auch die doppelten Integrale von (1) und (2) einander gleich seien und zwar dass

$$\iint \frac{du\, dv}{\sqrt{1 - \cos^2\gamma - \cos^2 u - \cos^2 v - 2\cos^2\gamma \cos u \cos v}} = \mathrm{F}\left(\lambda, \cos\frac{\gamma}{2}\right) . \mathrm{F}\left(\mu, \sin\frac{\gamma}{2}\right) \quad \ldots \quad (3)$$

das Product zweier elliptischen Integrale erster Gattung sei, so liegt hierin offenbar ein Irrthum; denn aus den vorangegangenen Betrachtungen hat sich mit Bestimmtheit ergeben, dass das durch zwei neue Veränderliche transformirte Doppel-Integral nicht nur aus Einem, sondern im Allgemeinen aus drei wesentlich verschiedenen Bestandtheilen gebildet ist, deren Grenzen nicht constant, sondern veränderlich sind. Nun müssten aber wohl die Grenzen bezüglich der neuen Veränderlichen λ, μ constant, oder, was dasselbe ist, von einander unabhängig sein, wenn aus der Integration von (2) das angegebene Product hervorgehen sollte. Fehlschlüsse, wie derjenige, aus welchem die Gleichung (3) erhalten worden ist, lassen sich jedoch in dieser Materie auch sonst öfter bemerken.

Ich füge nur noch bei, dass man in dem oben betrachteten Beispiele auch die Grenzbedingung: $0 < x^2\cos^2\frac{\gamma}{2} + y^2\sin^2\frac{\gamma}{2} < 1$ hätte zu Grunde legen können, und dass die Transformations-Gleichungen:

$$x = a\lambda\sqrt{1 + b^2\mu^2} - b\mu\sqrt{1 + a^2\lambda^2}$$

$$y = a\lambda\sqrt{1 + b^2\mu^2} + b\mu\sqrt{1 + a^2\lambda^2}$$

wofür man

$$\Delta = -2ab \,.\, \frac{1 + a^2\lambda^2 + b^2\mu^2}{\sqrt{1 + a^2\lambda^2} \,.\, \sqrt{1 + b^2\mu^2}}$$

erhält, ebenfalls zu neuen Resultaten führt.

43.

Manche bemerkenswerthe Ergebnisse lassen sich aus der folgenden Betrachtung ziehen.

Der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Veränderlichen sei durch die Gleichungen:

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\lambda^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

gegeben, oder, was dasselbe heisst, es seien für x, y die folgenden Ausdrücke in λ, μ gewählt worden:

$$x = X_{(\lambda,\,\mu)} = \left\{ \frac{(\lambda^s - \mu^s)(\lambda^r - a^r)(\mu^r - a^r)}{(\mu^r - a^r)(\lambda^s - b^s) - (\lambda^r - a^r)(\mu^s - b^s)} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$y = Y_{(\lambda,\,\mu)} = \left\{ \frac{(\mu^r - \lambda^r)(\lambda^s - b^s)(\mu^s - b^s)}{(\mu^r - a^r)(\lambda^s - b^s) - (\lambda^r - a^r)(\mu^s - b^s)} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$P = (\mu^r - a^r)(\lambda^s - b^s) \quad , \quad Q = (\lambda^r - a^r)(\mu^s - b^s)$$

so ergibt sich, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$\Delta = \frac{1}{mn} \cdot X^{1-m} \cdot Y^{1-n} \cdot \frac{\left[r\mu^{r-1}(\lambda^s - \mu^s)\,Q + s\mu^{s-1}(\mu^r - \lambda^r)\,P\right]\left[s\lambda^{s-1}(\lambda^r - \mu^r)\,Q + r\lambda^{r-1}(\mu^s - \lambda^s)\,P\right]}{(P-Q)^3}$$

Was die Grenzen des Doppel-Integrals betrifft, so werde ich in den Fällen, von welchen bald ausführlicher die Rede sein wird, annehmen, die Integration habe alle diejenigen positiven Werthe von x und y zu umfassen, welche der Bedingung:

$$0 < \frac{x^m}{\alpha^r - a^r} + \frac{y^n}{\beta^s - b^s} < 1$$

Genüge leisten, vorausgesetzt dass α, β, a, b positive Grössen bezeichnen. Da die Durchführung der Aufgabe in der so eben angedeuteten Allgemeinheit hier, schon der weitläufigen Resultate wegen nicht Platz finden kann, so werde ich nur solche Fälle näher erörtern, in welchen gewisse Specialisirungen eine Vereinfachung bewirken.

44.

Zunächst möge der besondere Fall betrachtet werden, in welchem die beiden Exponenten r und s einander, und zwar jeder der Einheit gleich ist.

Für diesen Fall wird Δ wesentlich einfacher. Man erhält nämlich nach einigen Reductionen:

$$\Delta = \frac{1}{mn\,(a-b)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}} \cdot \frac{\mu - \lambda}{\left[(\lambda - a)(a - \mu)\right]^{1-\frac{1}{m}} \left[(\lambda - b)(\mu - b)\right]^{1-\frac{1}{n}}}$$

Dieser Ausdruck kommt also zur Anwendung, wenn in einem Doppel-Integral statt x, y die neuen Veränderlichen λ, μ vermöge der Gleichungen:

$$\frac{x^m}{\lambda - a} + \frac{y^n}{\lambda - b} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu - a} + \frac{y^n}{\mu - b} = 1$$

eingeführt werden sollen. Auch hierbei findet die Voraussetzung des Art. 1 nicht statt, dass die neuen Veränderlichen λ, μ durch die alten x, y ganz unzweideutig bestimmt seien. Um sich hiervon zu überzeugen kann man λ, μ explicite durch x, y ausdrücken, was, wie man sogleich bemerkt, sowohl für λ als auch für μ die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades erfordert. Aber es ist zugleich auch klar, dass diese Gleichung genau dieselbe für λ wie für μ ist, dass mithin λ und μ die beiden Wurzeln jener Gleichung sind, und dass man also hat:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{x^m + y^n + a + b \pm \sqrt{(x^m + y^n + a + b)^2 - 4\,(bx^m + ay^n + ab)}\right\}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left\{x^m + y^n + a + b \mp \sqrt{(x^m + y^n + a + b)^2 - 4\,(bx^m + ay^n + ab)}\right\}$$

wo die Doppel-Zeichen correspondirende sind.

Es ist nun aber von Interesse die Grenzen zu kennen, zwischen welchen diese Wurzeln gleichzeitig liegen, wenn man, wie dies die Aufgabe verlangt, x und y als positive und reelle Grössen voraussetzt.

Leichter als aus den angeführten Wurzelausdrücken lässt sich diese Frage auf folgendem Wege beantworten.

In den Gleichungen

$$x = \left\{-\frac{(\lambda - a)(\mu - a)}{a - b}\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$y = \left\{+\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen, es seien die als positiv vorausgesetzten Grössen a und b so beschaffen, dass $a > b$, folglich $a - b$ positiv ist.

Alsdann lassen sich drei Intervalle unterscheiden, zwischen welchen λ liegen kann; die entsprechenden Intervalle von μ lassen sich wie folgt finden.

Es sei zunächst $\lambda > a > b$ so ist $\lambda - a$ und $\lambda - b$ positiv; es kann daher x unter allen Umständen nur dann reell und positiv bleiben, wenn $\mu - a$ negativ, oder also $\mu < a$ ist. Damit ferner auch y reell und positiv bleibe, muss $\mu - b$ positiv, folglich $\mu > b$ sein.

Nimmt man ferner an, es sei $a > \lambda > b$ so ergibt sich durch dasselbe Raisonnement dass $\mu > a$ und $\mu > b$ sein müsse.

Nimmt man endlich den letzten noch möglichen Fall an, dass $a > b > \lambda$, dann könnte x offenbar nur reell und positiv sein, wenn $\mu - a$ positiv, folglich $\mu > a$ wäre, während y unter derselben Voraussetzung nur dann reell und positiv sein könnte, wenn $\mu - b$ negativ, folglich $\mu < b$ wäre. Wäre nun aber $\mu > a$ und $\mu < b$ so müsste auch $b > a$ sein, was gegen die Voraussetzung ist. Es sind also nur die beiden zuerst betrachteten Fälle möglich, und es folgt hieraus, dass

$$\text{entweder } \lambda > a > b \text{ und gleichzeitig } a > \mu > b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\text{oder } a > \lambda > b \text{ und gleichzeitig } \mu > a > b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

sein muss, womit die Grenzen der Wurzeln jener quadratischen Gleichung gegeben sind.

Da sowohl x als y durchaus symmetrische Functionen von λ und μ sind, so ist das Bereich der Werthe, welche x und y durchlaufen, dasselbe, ob man sich λ und μ in den Intervallen (1) oder in jenen (2) bewegen lässt. Daraus folgt, dass bei Bestimmung der

Integrations-Grenzen bezüglich der neuen Veränderlichen nur entweder die Intervalle (1) oder nur jene (2) berücksichtigt werden dürfen, in keinem Falle aber die beiden zugleich.

Welches der Intervalle (1), (2) man wähle, ist an und für sich ganz gleichgültig. Wenn man aber, wie es seither gehalten wurde, bezüglich der Aufeinanderfolge der Integrationen nach den neuen Veränderlichen, bereits eine feste Ordnung gewählt hat, so übt jene Wahl auf die Form des transformirten Integrals einen wesentlich bestimmenden Einfluss aus. Dieser Umstand verdient eine etwas nähere Ausführung, und ich werde daher, immer unter der seitherigen Annahme, dass zuerst nach μ und erst dann nach λ integrirt werde, die beiden Fälle (1), (2) nach einander betrachten.

45.

Aus der Grenzbedingung:

$$0 < \frac{x^m}{\alpha - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

folgt

$$\xi_0 = 0 \quad , \quad \varphi^0(x) = 0$$

$$\xi_1 = \sqrt[m]{\alpha - a} \quad , \quad \varphi^1(x) = \sqrt[n]{\frac{\beta - b}{\alpha - a}} \cdot \sqrt[n]{\alpha - a - x^m}$$

Unter der durchaus festzuhaltenden Annahme, dass

$$\alpha > \beta > a > b$$

werde ich nun den ersten der im vorigen Artikel unterschiedenen Fälle näher betrachten, in welchem nämlich

$$\lambda > a > b \qquad \text{und zugleich} \qquad a > \mu > b$$

ist. Vor Allem handelt es sich dann um die Werthe μ_0, μ_1, μ^0, μ^1.

Nach Art. 1 findet man nun

μ_0 aus der Gleichung $(\lambda - a)(\mu - a) = 0$, so dass $\mu_0 = a$

μ_1 aus der Gleichung $(\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a)$ also $\mu_1 = a_1 - \dfrac{(a - b)(\alpha - a)}{\lambda - a}$

wobei, wie man sich sogleich überzeugt, $\mu_1 > b$ bleibt, so lange man $\lambda > \alpha$ nimmt. Sofort erhält man:

μ^0 aus der Gleichung $(\lambda - b)(\mu - b) = 0$, so dass $\mu^0 = b$

μ^1 aus der Gleichung $(\lambda - b)(\mu - b) = (a - b)(\beta - b) + \dfrac{\beta - b}{\alpha - a}(\lambda - a)(\mu - a)$

woraus sich ergibt:

$$\mu^1 = a - \frac{(\alpha - a)(a - b)(\lambda - \beta)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b} = b + \frac{(\beta - b)(a - b)(\alpha - \lambda)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b}$$

Hier muss nun untersucht werden, für welches Intervall von Werthen der Veränderlichen λ der Werth von μ^1 in der That zwischen a und b liegt. Dieses aber lässt sich entscheiden, wenn man bestimmt, zwischen welchen Werthen λ liegen müsse, damit die Brüche in den beiden Darstellungen von μ positiv bleiben. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass der Ausdruck im Nenner $\lambda(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b$ stets positiv bleibt, so lange λ

zwischen den äussersten Werthen α und b der Ungleichheit $\alpha > \beta > a > b$ enthalten bleibt. In der That erhält man den Werth $(\alpha - a)(\alpha - \beta)$ für $\lambda = \alpha$ und ebenso erhält man den Werth $(\beta - b)(a - b)$ für $\lambda = b$. Da nun der gedachte Ausdruck linear ist, so leuchtet die Richtigkeit des Behaupteten von selbst ein.

Untersucht man nun auch den Zähler jener Brüche, so ist klar, dass das Zeichen des einen nur von dem Factor $\lambda - \beta$ abhängt, dass also der ganze Bruch positiv bleibt, so lange $\lambda > \beta$ ist. Eben so zeigt sich, dass der zweite Bruch nur so lange positiv bleibt, als $\lambda > \alpha$ ist.

Daraus folgt als Resultat:

Es ist: $a > \mu^1 > b$ nur so lange als $\alpha > \lambda > \beta > a > b$;
und der für μ^1 gefundene Ausdruck ist nur so lange giltig als jenes der Fall bleibt.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass diese Einschränkungen aus den beiden zu Grunde gelegten Bedingungen $\lambda > a > b$, $a > \mu > b$ und der Grenzbedingung des Doppel-Integrals hervorgegangen sind.

Auf diese Ergebnisse gestützt sind nun auch die Werthe von λ_0^0, λ_1^1, λ_0^1, λ_1^0 zu bestimmen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen des Art. 1 erhält man λ_0^0 aus den beiden Gleichungen:

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0 \quad , \quad (\lambda - b)(\mu - b) = 0$$

welchen gleichzeitig genügt wird, wenn man

$$\lambda_0^0 = a \quad , \quad \mu_0^0 = b$$

setzt. Zwar würden auch die Werthe $\lambda_0^0 = b$, $\mu_0^0 = a$ genügen; sie sind aber nicht zulässig, weil sonst, entgegen der frühern Voraussetzung, λ unter a zu liegen käme.

Ferner findet man λ_1^1 aus den Gleichungen:

$$(\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a)$$
$$(\alpha - a)(\lambda - b)(\mu - b) = (\alpha - a)(\beta - b)(a - b) + (\lambda - a)(\mu - a)(\beta - b)$$

Da die letztere Gleichung sich einfach durch die folgende $(\lambda - b)(\mu - b) = 0$ ersetzen lässt, so folgt, dass den beiden Gleichungen durch die Werthe

$$\lambda_1^1 = \alpha \quad , \quad \mu_1^1 = b$$

entsprochen werden kann. Zwar geschieht dies auch, wenn man $\lambda_1^1 = b$, $\mu_1^1 = \alpha$ setzt; da aber hierbei Werthe von λ vorkämen, welche kleiner als a wären, so würde man mit der zu Grunde liegenden Voraussetzung in Widerspruch gerathen.

Für λ_0^1 hat man die beiden Gleichungen

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0$$
$$(\alpha - a)(\lambda - b)(\mu - b) = (\alpha - a)(\beta - b)(a - b) + (\lambda - a)(\mu - a)(\beta - b)$$

Wie man leicht bemerkt, kann die letztere Gleichung durch $(\lambda - b)(\mu - b) = (\beta - b)(a - b)$ ersetzt werden, so dass die Werthe

$$\lambda_0^1 = \beta \quad , \quad \mu_0^1 = a$$

als entsprechend erscheinen. Auch das Paar $\lambda_0^1 = a$, $\mu_0^1 = \beta$ genügt jenen Gleichungen, aber es ist dennoch auszuschliessen, weil darin ein Werth von μ vorkommt, welcher grösser als a, nämlich $= \beta$ ist, was der Voraussetzung widerspricht.

Endlich hat man für λ_1^0 die Gleichungen:

$$(\lambda - b)(\mu - b) = 0 \quad . \quad (\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a)$$

welchen durch die Werthe:

$$\lambda_1^0 = \alpha \qquad , \qquad \mu_1^0 = b$$

Genüge geschieht. Die beiden Werthe $\lambda_1^0 = b$, $\mu_1^0 = \alpha$, welche ebenfalls genügen, sind unzulässig, indem dabei μ über a zu liegen kommt.

Die Substitution der so eben ermittelten Grenzwerthe in die Gleichung (IV) des Art. 17 liefert nun das folgende bemerkenswerthe Resultat:

$$mn\,(a-b)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} \,.\iint f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$\int_a^\beta d\lambda \int_a^b \frac{(\mu-\lambda)\,f(X, Y)\,d\mu}{\Big[(\lambda-a)\,(a-\mu)\Big]^{1-\frac{1}{m}}\Big[(\lambda-b)\,(\mu-b)\Big]^{1-\frac{1}{n}}} + \int_\beta^\alpha d\lambda \int_{a+\frac{(\alpha-a)\,(a-b)\,(\beta-\lambda)}{\lambda\,(\alpha-\beta-a+b)+a\beta-\alpha b}}^b \frac{(\mu-\lambda)\,f(X, Y)\,d\mu}{\Big[(\lambda-a)\,(a-\mu)\Big]^{1-\frac{1}{m}}\Big[(\lambda-\beta)\,(\mu-\beta)\Big]^{1-\frac{1}{n}}}$$

wobei das Doppel-Integral linker Hand sich über alle positiven Werthe von x und y zu erstrecken hat, welche der Bedingung

$$0 < \frac{x^m}{\alpha - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

entsprechen, und worin zur Abkürzung:

$$X = \left(-\,\frac{(\lambda-a)\,(\mu-a)}{a-b}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad , \qquad Y = \left(\frac{(\lambda-b)\,(\mu-b)}{a-b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

gesetzt wurde; dabei ist vorausgesetzt, dass $\alpha > \beta > a > b$ sei.

46.

In gleicher Weise werde ich nun auch den Fall (2) des Art. 44 betrachten, für welchen gezeigt worden ist, dass alle möglichen Werthe von x, y erhalten werden können, wenn man λ, μ in den Intervallen

$$a > \lambda > b \quad \text{und gleichzeitig} \quad \mu > a > b$$

sich bewegen lässt. Sucht man, immer unter der Voraussetzung dass $\alpha > \beta > a > b$, die Werthe von μ_0, μ_1, μ^0, μ^1 so ergibt sich auf gleiche Art wie im vorigen Artikel

$$\mu_0 = a \qquad , \qquad \mu_1 = a + \frac{(a-b)\,(\alpha-a)}{a-\lambda}$$

wobei in der That $\mu_1 > a$ bleibt, so lange $\lambda < a$ ist.

Für μ^0 lässt sich kein Werth angeben, welcher den obigen Anforderungen entspricht und für welchen gleichzeitig sowohl x als auch y positiv wäre. Indessen eliminirt die allgemeine Formel, auf welche der vorliegende Fall alsbald angewendet werden wird, von selbst die fragliche Grösse μ^0.

Ferner ist:

$$\mu^1 = a + \frac{(\alpha-a)\,(a-b)\,(\beta-\lambda)}{\lambda\,(\alpha-\beta-a+b)+a\beta-\alpha b}$$

Wie früher gezeigt wurde, bleibt der Nenner dieses Bruches so lange positiv, als λ zwischen den äussersten Werthen α und b enthalten ist. Es bleibt somit der ganze Bruch positiv, so lange $\lambda < \beta$ ist. Daraus folgt also:

Es ist $\mu^1 > a > b$, nur so lange als $\alpha > \beta > \lambda$ bleibt.

Die vier Grenzwerthe der Veränderlichen λ ergeben sich wie folgt.

λ_0^0 findet man aus den Gleichungen:

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0 \quad , \quad (\lambda - b)(\mu - b) = 0$$

Man genügt beiden zugleich, wenn man setzt:

$$\lambda_0^0 = b \quad , \quad \mu_0^0 = a$$

Zwar liesse sich jenen Gleichungen auch noch dadurch Genüge thun, dass man $\lambda_0^0 = a$, $\mu_0^0 = b$ setzt; aber diese beiden Werthe sind auszuschliessen, weil sonst μ unter a herabgehen würde.

λ_1^1 erhält man aus den beiden Gleichungen

$$(\lambda - a)(\mu - a) = (b - a)(\alpha - a) \quad , \quad (\lambda - b)(\mu - b) = 0$$

und man findet:

$$\lambda_1^1 = b \quad , \quad \mu_1^1 = \alpha$$

Die beiden anderen, im Allgemeinen noch möglichen Werthe $\lambda_1^1 = \alpha$, $\mu_1^1 = b$ sind wie leicht zu sehen, unzulässig.

λ_0^1 liefern die Gleichungen:

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0 \quad , \quad (\lambda - b)(\mu - b) = (\beta - b)(a - b)$$

aus ihnen findet man:

$$\lambda_0^1 = a \quad , \quad \mu_0^1 = \beta$$

Die beiden noch möglichen Werthe $\lambda_0^1 = \beta$, $\mu_0^1 = a$ sind zu verwerfen.

λ_1^0 endlich folgt aus den Gleichungen:

$$(\lambda - b)(\mu - b) = 0 \quad , \quad (\lambda - a)(\mu - a) = (\beta - a)(\alpha - a)$$

und zwar hat man zu nehmen:

$$\lambda_1^0 = b \quad , \quad \mu_1^0 = \alpha$$

Auch hier sind die weiteren Werthe $\lambda_1^0 = \alpha$, $\mu_1^0 = b$ als den Voraussetzungen widersprechend nicht zulässig.

Setzt man diese Werthe der Grenzen von λ und μ in die Gleichung (V) des Art. 18 ein, so ergibt sich als Resultat dieser Betrachtung:

$$mn\,(a - b)^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1} \cdot \iint f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b d\lambda \int_{a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \lambda)}{\lambda(a - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b}}^{\alpha} \frac{(\mu - \lambda) f(X, Y)\, d\mu}{\left[(\lambda - a)(a - \mu)\right]^{1 - \frac{1}{m}} \left[(\lambda - b)(\mu - b)\right]^{1 - \frac{1}{n}}}$$

wobei das Integral auf der linken Seite sich auf alle positiven Werthe von x und y bezieht, welche der Bedingung

$$0 < \frac{x^m}{\alpha - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

genügen, und wobei zur Abkürzung:

$$X = \left(-\frac{(\lambda - a)(\mu - a)}{a - b}\right)^{\frac{1}{m}} \quad , \quad Y = \left(\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

gesetzt, und $\alpha > \beta > a > b$ angenommen worden ist.

Vergleicht man das Resultat dieses Artikels mit jenem des vorigen, so zeigt sich der merkwürdige Umstand, dass das transformirte Integral einmal blos aus einem, und das anderemal aus zwei verschiedenen Ausdrücken zusammengesetzt erscheint. Es kann daher wohl die Frage entstehen, ob sich die Übereinstimmung beider Ergebnisse nachweisen lasse. Die Beantwortung dieser Frage ist schon darum von Interesse, weil in ihr zugleich eine gute Probe nicht nur der so eben gefundenen, sondern auch einiger früheren allgemeinen Resultate enthalten ist.

Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass die in diesem Artikel erhaltene Transformation unmittelbar auf die zweigliederige des vorigen Artikels führt, wenn man einfach (im Sinne des Art. 25 begründeten Satzes) die Integrationsfolge umkehrt, und sich hierzu der Formel (2) des Art. 25 bedient, vermöge welcher man hat:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^{\varphi^1(\lambda)} f(\lambda, \mu)\, d\mu =$$

$$\int_{\varphi^0(\lambda_1)}^{\varphi^0(\lambda_0)} d\lambda \int_{\psi^0(\mu)}^{\lambda_1} f(\lambda, \mu)\, d\lambda + \int_{\varphi^1(\lambda_0)}^{\varphi^1(\lambda_1)} d\mu \int_{\psi^1(\mu)}^{\lambda_0} f(\lambda, \mu)\, d\lambda + \int_{\varphi^0(\lambda_0)}^{\varphi^1(\lambda_1)} d\mu \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(\lambda, \mu)\, d\lambda$$

worin $\lambda = \psi^0(\mu)$ aus der Gleichung $\mu = \varphi^0(\lambda)$

und $\lambda = \psi^1(\mu)$ aus der Gleichung $\mu = \varphi^1(\lambda)$

abzuleiten ist. In dem vorliegenden Fall ist zu setzen

$$\lambda_0 = a \quad , \quad \lambda_1 = b \quad , \quad \varphi^0(\lambda) = a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \lambda)}{\lambda(\alpha - \beta - a + b) + ab - \alpha b}, \quad \varphi^1(\lambda) = a$$

Daraus erhält man also: $\varphi^1(\lambda_0) = \varphi^1(\lambda_1) = a$ und

$$\varphi^0(\lambda_0) = \beta \quad , \quad \varphi^0(\lambda_1) = \alpha \quad , \quad \psi^0(\mu) = a + \frac{(\alpha - a)(a - b)(\beta - \mu)}{\mu(\alpha - \beta - a + b) + a\beta - \alpha b}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$F(\lambda, \mu) = \frac{f(X, Y)}{\left[(\lambda - a)(a - \mu)\right]^{1-\frac{1}{m}} \left[(\lambda - b)(\mu - b)\right]^{1-\frac{1}{n}}}$$

so hat man also:

$$\int_a^b d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^{a} (\mu - \lambda) \,.\, F(\lambda, \mu)\, d\mu = \int_\alpha^\beta d\mu \int_{\psi^0(\mu)}^{b} (\mu - \lambda)\, F(\lambda, \mu)\, d\lambda + \int_\beta^\alpha d\mu \int_a^b (\mu - \lambda)\, F(\lambda, \mu)\, d\lambda$$

Wenn man nun in den beiden rechts stehenden Integralen die Veränderlichen λ und μ mit einander vertauscht und bemerkt, dass hierdurch $F(\lambda, \mu)$ als durchaus symmetrische Function von λ und μ sich nicht ändert, während der andere Factor $(\mu - \lambda)$ als alternirende

Function das entgegengesetzte Zeichen annimmt, und die Ausdrücke $\varphi^0(\lambda)$ und $\psi^0(\mu)$ geradezu in einander übergehen, so folgt unmittelbar, dass:

$$\int_a^b d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^a (\mu - \lambda)\, F(\lambda, \mu)\, d\mu = \int_a^\beta d\lambda \int_a^b (\mu - \lambda)\, F(\lambda, \mu)\, d\mu + \int_\beta^a d\lambda \int_{\varphi^0(\lambda)}^b (\mu - \lambda)\, F(\lambda, \mu)\, d\mu$$

Q. E. D.

47.

Um an bereits bekannte Resultate anzuschliessen, will ich einige besondere Fälle der so eben gefundenen Formeln betrachten, und wähle dazu den Fall, in welchem $\beta = \alpha$ ist: Hierfür ergibt sich aus der Gleichung des Art. 45, wenn man darin zugleich m und n für $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ setzt:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \int_\alpha^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu - \lambda) f(X, Y)\, d\mu}{[(\lambda - a)(a - \mu)]^{1-m}\, [(\lambda - b)(\mu - b)]^{1-n}}$$

mit der Bedingung:

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}}}{\alpha - a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{\alpha - b} < 1 \quad , \quad x \text{ und } y \text{ positiv}$$

und wobei

$$X = \left[\frac{(\lambda - a)(a - \mu)}{a - b}\right]^m \quad , \quad Y = \left[\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b}\right]^n$$

Es sei zunächst

$$f(x, y) = 1$$

dann lässt sich der Werth des Doppel-Integrals leicht finden, man erhält nämlich:

$$\int_0^{(\alpha - a)^m} dx \int_0^{\left(\frac{\alpha - b}{\alpha - a}\right)^n \left(\alpha - a - x^{\frac{1}{m}}\right)^n} dy = \left(\frac{\alpha - b}{\alpha - a}\right)^n \int_0^{(\alpha - a)^m} dx \left(\alpha - a - x^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

Setzt man hierin:

$$x = (\alpha - a)^m \,.\, t^m \quad , \quad dx = m(\alpha - a)^m\, t^{m-1}\, dt$$

so geht das letztere Integral über in:

$$m(\alpha - a)^m (\alpha - b)^n \int_0^1 (1 - t)^n\, t^{m-1}\, dt$$

wofür sich der Werth:

$$\frac{mn}{m+n} (\alpha - a)^m (\alpha - b)^n \,.\, \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Hieraus zieht man das Resultat:

$$\int_a^\alpha d\lambda \int_a^b \frac{(\mu - \lambda)\, d\mu}{[(\lambda - a)(a - \mu)]^{1-m}\, [(\lambda - b)(\mu - b)]^{1-n}} = \frac{mn}{m+n} (\alpha - a)^m (\alpha - b)^n (a - b)^{m+n-1} \,.\, \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Ich will ferner annehmen, es werde

$$f\left(1 + \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right)$$

für $f(x, y)$ gesetzt.

Drückt man diese Function durch λ, μ aus, so erhält man sehr einfach:

$$f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) \text{ für } f(X, Y)$$

Es ist daher:

$$\iint f\left(1 + \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx\, dy =$$

$$\frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \int_{\alpha}^{a} d\lambda \int_{\alpha}^{b} \frac{(\mu-\lambda) f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{\left[(\lambda-a)\,(a-\mu)\right]^{1-m}\,\left[(\lambda-b)\,(\mu-b)\right]^{1-n}}$$

wobei:

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}}}{\alpha - a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{\alpha - b} < 1$$

In dieser Gleichung sind einige bemerkenswerthe besondere Fälle enthalten, zu welchen man auf folgende Art gelangen kann. Man setze $-\lambda$, $-\mu$ für λ, μ, so wie gleichzeitig auch $-a$, $-b$ für a, b und setze hierauf $\alpha = 0$; dadurch nimmt die Gleichung die folgende Form an:

$$\iint f\left(1 - \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} - \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx\, dy = \frac{mn}{(b-a)^{m+n-1}} \int_{0}^{a} d\lambda \int_{a}^{b} \frac{(\lambda-\mu) f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{\left[(\lambda-a)\,(a-\mu)\right]^{1-m}\,\left[(\lambda-b)\,(\mu-b)\right]^{1-n}}$$

mit der Bedingung:

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b} < 1$$

Bemerkt man nun, dass aus einer Gleichung des Art. 30 das auch sonst schon bekannte Resultat:

$$\iint F\left(\frac{x^{\frac{1}{m}}}{a} + \frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx\, dy = mn\, a^m b^n \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_{0}^{1} z^{m+n-1} F(z)\, dz \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

folgt, wobei für x, y die obigen Bedingungen gelten, und setzt man $F(z) = f(1-z)$ so kann man das ursprünglich gegebene Doppel-Integral sogleich auf eine Quadratur reduciren, und erhält somit die folgende Gleichung:

$$\int_{0}^{a} d\lambda \int_{a}^{b} \frac{(\lambda-\mu) f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{\left[(\lambda-a)\,(a-\mu)\right]^{1-m}\,\left[(\lambda-b)\,(\mu-b)\right]^{1-n}} =$$

$$a^m b^n\, (b-a)^{m+n-1} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \int_{0}^{1} z^{m+n-1} f(1-z)\, dz$$

Es sei, um ein Beispiel zu betrachten:

$$f(z) = z^{r-1} \qquad , \qquad f(1-z) = (1-z)^{r-1}$$

so findet man die bemerkenswerthe Gleichung:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda-\mu)\,\lambda^{r-1}\,\mu^{r-1}\,d\mu}{\left[(\lambda-a)(a-\mu)\right]^{1-m} \cdot \left[(\lambda-b)(\mu-b)\right]^{1-n}} = a^{m+r-1}\,b^{n+r-1}\,(b-a)^{m+n-1}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(r)}{\Gamma(m+n+r)}$$

Indem ich noch weiter specialisire, sei

$$m = n = r = \frac{1}{2}$$

Dann ergibt sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad , \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

und wenn man zugleich λ^2, μ^2 für λ, μ und a^2, b^2 für a, b setzt:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu^2-\lambda^2)\,d\mu}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(a^2-\mu^2)(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

Wie man sieht ist diese bekannte Gleichung, welche zuerst Lamé fand, und welche später von Poisson auf andere Weise abgeleitet, von Chasles und Terquem aber durch geometrische Betrachtungen gefunden wurde (s. Moigno, Calc. intégr. pag. 244 — 249), nur ein sehr specieller Fall des oben entwickelten Theorems.

Ich will schliesslich noch annehmen, es sei

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-k^2z^2}} \qquad , \qquad m+n = 1$$

dann wird man nach wenigen Umformungen erhalten:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda-\mu)\,d\mu}{\left[(\lambda-a)(a-\mu)\right]^{n}\left[(\lambda-b)(\mu-b)\right]^{1-n}} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{a^2b^2-\lambda^2\mu^2}\cdot\sqrt{a^2b^2-k^2\lambda^2\mu^2)}} =$$

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}\cdot\frac{b^{n-2}}{a^{n+1}}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{\pi}{\sin n\pi}\cdot\frac{b^{n-2}}{a^{n+1}}\cdot K$$

wenn man, wie in Art. 27 mit K das hierin vorkommende elliptische Integral bezeichnet.

Auf ähnliche Weise würde man durch die Annahmen

$$f(z) = \sqrt{1-z^2}\,.\,\sqrt{1-k^2z^2} \qquad , \qquad m+n = 1$$

$$f(z) = \log\,(1-z)$$

u. s. w. zu neuen Resultaten gelangen.

48.

Die so eben gefundenen Ergebnisse waren, für die Annahme $\beta = \alpha = 0$, besondere Fälle der am Schlusse des Art. 45 erhaltenen Gleichung. Ich werde nunmehr einige Anwendungen von der im Art. 46 entwickelten allgemeinen Gleichung, für die Annahme $\alpha - a = \beta - b$ folgen lassen, wofür jene Gleichung in

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \cdot \int_a^b d\lambda \int_{\alpha+b-\lambda}^{\alpha} \frac{(\mu-\lambda) f(X, Y)\, d\mu}{[(\lambda-a)(\alpha-\mu)]^{1-m}\; [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

übergeht, mit der Bedingung

$$0 < \frac{x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}}{\alpha - a} < 1$$

Man nehme an, es werde hierin

$$f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) \text{ an die Stelle von } f(x, y),$$

also:

$$f(\lambda + \mu) \text{ an die Stelle von } f(X, Y)$$

gesetzt. Alsdann ergibt sich, wie man leicht ersieht, die folgende Gleichung:

$$\iint f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) dx\, dy = \frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}} \cdot \int_a^b d\lambda \int_{\alpha+b-\lambda}^{\alpha} \frac{(\mu-\lambda) f(\lambda+\mu)\, d\mu}{[(\lambda-a)(\alpha-\mu)]^{1-m}\; [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

Da nun

$$f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) = f\left(a + b + (\alpha - a) \cdot \frac{x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}}{\alpha - a}\right)$$

so hat man, nach der Gleichung (1) des vorigen Artikels:

$$\iint f\left(a + b + x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}}\right) dx\, dy = mn\, (\alpha - a)^{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^1 z^{m+n-1} f[a + b + (\alpha - a) z]\, dz$$

womit man sofort weiter findet:

$$\int_a^b d\lambda \int_{\alpha+b-\lambda}^{\alpha} \frac{(\mu-\lambda) f(\lambda+\mu)\, d\mu}{[(\lambda-a)(\alpha-\mu)]^{1-m}\; [(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}} =$$

$$(\alpha - a)^{m+n} (a - b)^{m+n-1} \cdot \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \int_0^1 z^{m+n-1} f[a + b + (\alpha - a) z]\, dz$$

Es geht aus der Herleitung dieser Gleichung hervor, dass sie auf der Annahme beruht, es sei $\alpha - a$ positiv. Für $m = n = \frac{1}{2}$ geht die Gleichung in die folgende über:

$$\int_a^b d\lambda \int_{\alpha+b-\lambda}^{\alpha} \frac{(\mu-\lambda) f(\lambda+\mu)\, d\mu}{\sqrt{(\lambda-a)(\alpha-\mu)(\lambda-b)(\mu-b)}} = (\alpha - a)\, \pi \int_0^1 f[a + b + (\alpha - a) z]\, dz$$

Für $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ erhält man z. B.

$$\int_a^b d\lambda \int_{\alpha+b-\lambda}^{\alpha} \frac{(\mu-\lambda)\, d\mu}{\sqrt{(\lambda-a)(\alpha-\mu)(\lambda-b)(\mu-b)(\lambda+\mu)}} = 2\pi\left(\sqrt{\alpha+b} - \sqrt{a+b}\right)$$

So wie die vom Art. 43 an entwickelten Resultate sich auf die Substitutions-Gleichungen

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\lambda^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

gründen, so lässt sich eine Reihe nicht minder interessanter Resultate erlangen, wenn man die Transformation mittelst der Gleichungen:

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\lambda^r - \alpha^r} + \frac{y^n}{\mu^s - \beta^s} = 1$$

oder mittelst der hiervon wesentlich verschiedenen:

$$\frac{x^m}{\lambda^r - a^r} + \frac{y^n}{\mu^s - b^s} = 1$$

$$\frac{x^m}{\mu^s - \beta^s} + \frac{y^n}{\lambda^r - \alpha^r} = 1$$

bewirkt. Eben so sind die Ergebnisse von besonderm Interesse, welche der Transformation mittelst der Beziehungen:

$$x = (ae^{r\lambda} + be^{s\mu})^m$$

$$y = (\alpha e^{r\lambda} + \beta e^{s\mu})^n$$

entsprechen. U. s. w.

Die nähere Ausführung dieser Fälle würde jedoch hier den Raum zu sehr in Anspruch nehmen, kann aber um so eher einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben, als der Zweck aller früheren Specialitäten hauptsächlich darin bestand, die Bedeutung und den Nutzen des allgemeinen Satzes über die Transformation so wie die Art seiner Anwendung in gegebenen Fällen darzulegen.

49.

Den Beschluss der vorliegenden Arbeit möge die Begründung eines sehr allgemeinen, und wie es scheint, für die Theorie der bestimmten Integrale nicht unwichtigen Verfahrens bilden. Wie bekannt, gewinnt jene Theorie einen grossen Theil ihrer Resultate aus der Betrachtung doppelter Integrale mit constanten Grenzen, welche sie in den beiden Arten der Integrationsfolge jedesmal auf Quadraturen zu reduciren oder so weit möglich, vollständig zu bestimmen sucht. Wenn aber weder bei der einen noch bei der andern Folge der Integrationen eine solche Reduction möglich ist und sich also auf diesem Wege nichts erreichen lässt, so kann doch in manchen Fällen eine andere Methode wirksam sein, welche in der Transformation des Doppel-Integrals durch zwei neue Veränderliche besteht und welche ich in Kürze hier bezeichnen will. Wenn, wie bisher, der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Veränderlichen durch die Gleichungen:

$$x = X_{(\lambda,\ \mu)} \qquad , \qquad y = Y_{(\lambda,\ \mu)}$$

und daraus abgeleitet, durch:

$$\lambda = \Lambda_{(x,\, y)} \quad . \quad \mu = M_{(x,\, y)}$$

gegeben ist, und wenn aus der Gleichung

$$\begin{aligned} X_{(\lambda,\, \mu)} &= \xi_0 \text{ der Werth } \mu = \mu_0 \\ X_{(\lambda,\, \mu)} &= \xi_1 \quad " \quad " \quad \mu = \mu_1 \\ Y_{(\lambda,\, \mu)} &= \eta_0 \quad " \quad " \quad \mu = \mu^0 \\ Y_{(\lambda,\, \mu)} &= \eta_1 \quad " \quad " \quad \mu = \mu^1 \end{aligned}$$

berechnet wird, so hat man zufolge der Gleichung (XII) des Art. 23:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\Lambda(\xi_0,\, \eta_1)}^{\Lambda(\xi_1,\, \eta_1)} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\Lambda(\xi_1,\, \eta_1)}^{\Lambda(\xi_1,\, \eta_0)} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu + \int_{\Lambda(\xi_1,\, \eta_0)}^{\Lambda(\xi_0,\, \eta_0)} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta\, d\mu$$

wobei, wie bisher:

$$\Delta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

Hierdurch ist das bemerkte Verfahren im Wesentlichen gegeben.

Die folgende Umformung der Gleichung aber verdient näher berührt zu werden. Man setze nämlich den Ausdruck:

$$\left\{ \frac{d\Lambda}{dy} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{d\Lambda}{dx} \cdot \frac{dM}{dy} \right\} f(x, y) \text{ an die Stelle von } f(x, y)$$

und bemerke, dass der alsdann auf der ersten Seite der Gleichung vorkommende Ausdruck:

$$\left\{ \frac{d\Lambda}{dy} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{d\Lambda}{dx} \cdot \frac{dM}{dy} \right\} \left\{ \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu} \right\}$$

nach der Lehre von den Determinanten gleich der Einheit ist, so dass sich die Function unter den Integralzeichen, bezüglich λ und μ, auf $f(X, Y)$ reducirt, dass folglich auch:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta_0}^{\eta_1} f(x, y) \left\{ \frac{d\Lambda}{dy} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{d\Lambda}{dx} \cdot \frac{dM}{dy} \right\} dy =$$

$$\int_{\Lambda(\xi_0,\, \eta_1)}^{\Lambda(\xi_1,\, \eta_1)} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, d\mu + \int_{\Lambda(\xi_1,\, \eta_1)}^{\Lambda(\xi_1,\, \eta_0)} d\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_0} f(X, Y)\, d\mu + \int_{\Lambda(\xi_1,\, \eta_0)}^{\Lambda(\xi_0,\, \eta_0)} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu_0} f(X, Y)\, d\mu$$

Setzt man z. B. hierin

$$f(x, y) = 1$$

so lässt sich das Doppel-Integral auf der ersten Seite der Gleichung unmittelbar auf zwei Quadraturen bringen, wenn man von der folgenden Bemerkung ausgeht. Es findet nämlich, wie man sich direct durch Differentiiren überzeugen kann, identisch die folgende Gleichung statt:

$$\frac{d\Lambda}{dy}\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\left[\Lambda \frac{dM}{dx} - M \frac{d\Lambda}{dx}\right]}{dy} + \frac{d\left[M \frac{d\Lambda}{dy} - \Lambda \frac{dM}{dy}\right]}{dx} \right\}$$

Wird dieser Ausdruck zwischen constanten Grenzen nach x und y integrirt, so kann man beim ersten Theil die Integration nach y, und beim zweiten jene nach x zur ersten machen, so dass man, wie leicht zu sehen, zu der Gleichung gelangt:

$$\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \left[\Lambda \frac{dM}{dx} - M \frac{d\Lambda}{dx} \right]_{\eta_0}^{\eta_1} + \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta_1} dy \left[M \frac{d\Lambda}{dy} - \Lambda \frac{dM}{dy} \right]_{\xi_0}^{\xi_1} =$$

$$\int_{\Lambda(\xi_0,\,\eta_1)}^{\Lambda(\xi_0,\,\eta_0)} \mu_0\, d\lambda + \int_{\Lambda(\xi_1,\,\eta_0)}^{\Lambda(\xi_1,\,\eta_1)} \mu_1\, d\lambda + \int_{\Lambda(\xi_0,\,\eta_0)}^{\Lambda(\xi_1,\,\eta_0)} \mu^0\, d\lambda + \int_{\Lambda(\xi_1,\,\eta_1)}^{\Lambda(\xi_0,\,\eta_1)} \mu^1\, d\lambda$$

Durch ihre Symmetrie liefert diese Relation eine gewisse Controle aller bei ihrer Herleitung benutzten Resultate.

Die in das Einzelne gehende Erörterung dieses Gegenstandes würde jedoch mehr zur Lehre von den bestimmten (einfachen) Integralen als hieher gehören und mag an anderm Orte weiter geführt werden. Ich glaubte desselben als einer der zahlreichen Anwendungen erwähnen zu müssen, welche die allgemeine Lösung der im Eingange dieser Arbeit mir gestellten Aufgabe zulässt.

Berichtigung.

Seite 175 ganz unten heisst es:

$$2\,\lambda \log \sec \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \arccos \beta \right)$$

soll aber r i c h t i g heissen:

$$2\,\pi \log \sec \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \beta \right)$$