NEUE THEORIE

DER

ULTRAELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

VON

Dr. FRIEDRICH PRYM.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 14. JÄNNER 1864.

EINLEITUNG.

Ist

$$u = \int_0^x \frac{\tfrac{1}{2}.dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

ein immer endlich bleibendes elliptisches Integral, so hat **Jacobi** zuerst gezeigt, dass x als Function von u eindeutig bestimmt ist, und man hat nach seiner Bezeichnung

$$\sqrt{x} = \sin am\, u; \quad \sqrt{1-x} = \cos am\, u; \quad \sqrt{1-\varkappa^2 x} = \Delta\, am\, u;$$

diese drei Formen sind einwerthige doppelt periodische Functionen von u, von denen jede innerhalb des ihre Perioden umfassenden Parallelogramms zweimal ∞ und 0 wird.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn man die auf die elliptischen naturgemäss folgenden Integrale betrachtet, wo unter dem Wurzelzeichen eine Function fünften oder sechsten Grades steht, wie

$$u_1 = \int^x \frac{(\alpha+\beta x)\, dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}};$$

für diesen Fall hat **Jacobi** zuerst nachgewiesen [1]), und wir werden es noch zeigen, dass, wenn der Werth von x bestimmt ist, noch keineswegs der Werth von u_1 bestimmt ist; sondern dass man immer den Integrationsweg so einrichten kann, dass u_1 **jeden beliebigen Werth**

---

[1]) **Crelle**, Band 13. De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.

erhält. Es entsprechen demnach einem Werthe von x alle möglichen Werthe von u_1 und umgekehrt: so dass man im Allgemeinen u_1 weder als Function von x, noch x als Function von u_1 betrachten darf.

Nimmt man aber noch ein zweites ähnlich gebautes Integral

$$u_2 = \int^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}},$$

das mit dem vorigen in keiner linearen Relation steht (so dass $u_2 = mu_1 + n$ wäre) und setzt fest, dass der Integrationsweg von u_2 derselbe, wie der von u_1: so ist, wenn der Werth von u_1 und von x einmal festgesetzt, dadurch auch der Werth von u_2 **eindeutig** bestimmt. Wir können also setzen:

$$u_2 = f_2(u_1 \mid x)$$

und ebenso:

$$u_1 = f_1(u_2 \mid x)$$

wo f_1, f_2 einwerthige Functionen bezeichnen, die darum keinen analytischen Ausdruck zu haben brauchen, sondern eine gleichsam nur tabellarische Bedeutung behaupten. Daraus wird sich dann ergeben:

$$x = \varphi(u_1 \mid u_2).$$

Den Charakter dieser Function zu untersuchen, ist das vorgelegte Problem, und zumal den der fünf Functionen:

$$\sqrt{x},\quad \sqrt{1-x},\quad \sqrt{1-\varkappa^2 x},\quad \sqrt{1-\lambda^2 x},\quad \sqrt{1-\mu^2 x},$$

die ich speciell **ultraëlliptische** nenne, weil sie in dieser Classe von Transcendenten eine ebenso einfache Rolle spielen, wie die elliptischen Functionen bei der vorigen, und die übrigen sich leicht durch diese fünf ausdrücken lassen. Zur Discussion dieser Formen bediene ich mich der anschaulichen Methode meines hochverehrten Lehrers **Riemann**, niedergelegt in seiner „Theorie der **Abel**'schen Functionen"[1]) zumal aber in seiner Inaugural-Dissertation: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse." Göttingen 1851 bei Huth. Sollte es mir gelingen, durch diese Arbeit die Bekanntschaft mit der **Riemann**'schen Theorie für weitere Kreise zu vermitteln und zum Studium derselben anzuregen, so würde ich dies als das schönste Resultat meiner Arbeit betrachten.

[1]) **Crelle**, Band 54, auch als Separatabdruck aus demselben erschienen, Berlin bei **Reimer**.

ERSTER THEIL.

Graphik des Problems.

§. 1.

Die Form der Gleichung niedrigsten Grades, die auf ultraëlliptische Integrale führt, ist, wenn wir die höchste vorkommende Potenz der Variablen durch eingeklammerte Indices bezeichnen,

$$F(s^{(2)}, z^{(3)}) = a_0 s^2 + 2a_1 s + a_2 = 0$$

wo a_0, a_1, a_2 rationale ganze Functionen des dritten Grades von z sind, und zwischen den constanten Coëfficienten in diesen Functionen keinerlei Relationen bestehen. Ein immer endlich bleibendes Integral, auch **Abel**'sches Integral der ersten Gattung genannt, hat dann die Form:

$$w = \int \frac{(A+Bz)\,dz}{\frac{dF}{ds}} = \int \frac{(A+Bz)\,dz}{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}} = c\,.\int \frac{(A+Bz)\,dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_6)}}\,,$$

wo die sechs Wurzeln $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ nothwendig verschieden sein müssen. Wir bemerken sofort, dass man zu einem Integrale immer unendlich viele davon linearunabhängige finden kann, indem der Zähler zwei willkürliche Constante enthält. Jedes beliebige dritte ist dann durch je zwei von solcher Beschaffenheit linear ausdrückbar. Es ist leicht den letzten Ausdruck in eine elegante Form zu transformiren, die wir die **canonische** nennen wollen, indem wir durch eine lineare Substitution eine neue Variable einführen. Wir setzen nämlich

$$x = \frac{z-\alpha_1}{z-\alpha_2}\,.\,\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3-\alpha_1}$$

dann ist für

$$z = \alpha_1 \,:\, x = 0$$

$$z = \alpha_2 \,:\, x = \infty$$

$$z = \alpha_3 \,:\, x = 1$$

und es sei für

$$z = \alpha_4 \,:\, x = \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$z = \alpha_5 \,:\, x = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$z = \alpha_6 \,:\, x = \frac{1}{\mu^2}$$

dann erhält das so transformirte Integral die Form

$$w = \int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}}\,.$$

wobei die Grössen $\varkappa$, λ, μ **ganz beliebige** Werthe haben mögen. Für die Graphik des Problems setzen wir aber die Grössen α, β, $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 reell und positiv voraus und die drei letzten so, dass $1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$, da dadurch die Anschauung bedeutend erleichtert, die Allgemeinheit der analytischen Resultate aber keineswegs beeinträchtigt wird.

§. 2.

Um dem Probleme die möglichste Allgemeinheit zu geben, gestatten wir der Variablen x alle reellen und complexen Werthe anzunehmen. Wir repräsentiren sie nach der **Gauss**'schen Weise in ihrem ganzen Umfange durch die Punkte einer unendlichen Ebene derart, dass dem Werthe

$$x = y + zi$$

der Punkt entspricht, dessen Coordinaten auf ein durch den Nullpunkt gelegtes rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen y und z sind. Statt dessen können wir auch schreiben

$$x = re^{\varphi i}$$

dann bezeichnet r den vom Anfangspunkte nach dem Punkte x gezogenen Leitstrahl und φ den Winkel, den derselbe mit der Y-Axe bildet. Wir machen ferner die Voraussetzung, dass dem Werthe $x = \infty$ **auch nur ein Punkt** entspricht; mit anderen Worten, wir denken uns die Ebene im Unendlichen geschlossen, oder wie eine Kugel mit dem Radius ∞.

Betrachten wir nun die unter dem Integralzeichen vorkommende algebraische Function

$$s = \sqrt{x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2 x)\,(1-\lambda^2 x)\,(1-\mu^2 x)} = \sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}$$

so hat diese Function in der X-Ebene für jeden Punkt zwei entgegengesetzte Werthe. Wenn man von einem festen Punkte x_0 aus, für den man einen der beiden Werthe $\pm\, s_0$ angenommen hat, zu einem beliebigen Punkte x geht, so wird man den Weg immer so einrichten können, dass man durch stetige Fortsetzung der Function s von dem Anfangswerthe s_0 aus sowohl den positiven als den negativen Werth im Punkte x erhält; man braucht nur um einen der Punkte $0, 1, \frac{1}{\varkappa^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}, \infty$ herumzugehen, in denen die beiden Zweige der Function zusammenfallen, und die wir aus dem Grunde „**Verzweigungspunkte**" nennen. **Cauchy** hat dafür den Namen „points critiques"; in ihnen hört nach seinem Ausdrucke die Function auf „monodrome" zu sein.

Man erkennt hieraus, dass man bei der Untersuchung algebraischer Functionen beständig vom Wege abhängig ist, so lange man in **einer** Ebene operirt; und es fragt sich, ob nicht eine Methode angebbar, um sich davon zu befreien? Dieses Problem hat **Riemann** zuerst allgemein gelöst durch seine mehrblättrigen Flächen und Verzweigungsschnitte. In unserm vorliegenden Falle denken wir uns nämlich über die X-Ebene zwei neue Ebenenblätter ausgebreitet, wie sie selbst unendlich und geschlossen, und markiren in beiden die Verzweigungspunkte. Wir bestimmen dann die Function s **einwerthig** im obern Blatte durch stetige Fortsetzung von einem bestimmten Anfangswerthe s_0 aus: in Folge dessen muss sie längs gewissen Linien unstetig werden, denn verbindet man zwei beliebige Verzweigungspunkte z. B. 0 und 1 durch eine Linie, und ist in einem Punkte auf der linken Seite dieser Linie (man steht in der Y-Axe und sieht nach der positiven Seite) der Werth der Function $(+\,s)$.

so ist er in dem entsprechenden Punkte auf der rechten Seite $(-s)$, da die Function durch Umlauf um einen einfachen Verzweigungspunkt, wie bekannt, den Factor (-1) erhält. Verbinden wir ebenso $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$ und ∞ durch Linien, und setzen fest, dass die Function diese Linien nicht überschreiten soll, so ist sie, da dadurch der Umlauf um jeden der sechs Verzweigungspunkte gehindert wird, in der obern Fläche einwerthig aber nicht mehr stetig, denn zu beiden Seiten der Linien hat sie entgegengesetzte Werthe. Wir setzen dann fest, dass im untern Blatte dem Punkte x immer der andere Werth von s entsprechen soll, entgegengesetzt dem, den die Function im obern Blatte hat; sie ist dann auch im untern Blatte einwerthig bestimmt und wird längs derselben Linien unstetig. Diese Doppelfläche repräsentirt uns also einwerthig alle Werthe von s; zu jedem x gehören zwei Punkte: (s, x) in der obern und $(-s, x)$ in der untern Fläche, entsprechend den beiden Werthen der Function im Punkte x.

Da man nun aber **analytisch** durch den Umlauf um die Verzweigungspunkte vom Punkte x aus bis wieder zu ihm zurück die Function s in stetiger Fortsetzung zu dem entgegengesetzten Werthe an demselben Punkte x führen kann, dies aber **graphisch** nichts anders heisst, als man kommt aus einem Blatte in das andere, indem für jedes Blatt die Function einwerthig bestimmt sein soll, so folgt daraus, dass die beiden Blätter an gewissen Stellen zusammenhängen, d. h. in einander übergehen müssen, wenn anders die graphische Repräsentation mit der analytischen Anschauung zusammenfallen soll. Es ist bekannt, dass, wenn man die Function s um einen einfachen Verzweigungswerth herumführt, man am Ausgangspunkte zu dem entgegengesetzten Werthe kommen muss; geht man noch einmal herum, so kommt man wieder zu dem ursprünglichen Werthe. Geht man um zwei Verzweigungswerthe herum bis wieder zu demselben Punkte x, so ist der Werth von s wieder derselbe. Dies erreichen wir, wenn wir die beiden Blätter längs der drei Unstetigkeitslinien durchschneiden und so zusammensetzen, dass links unten $(-s)$ mit rechts oben $(-s)$ und rechts unten $(+s)$ mit links oben $(+s)$ zusammenhängt, dass also **in diesen Schnitten die Flächen sich durch einander durchsetzen.** Fig. 1 zeigt uns dann den Verlauf einer beliebigen in dieser zusammenhangenden Doppelfläche gezogenen Linie, wobei die im untern Blatte verlaufenden Stücke der bessern Anschaulichkeit wegen punktirt sind. Die Function s ist nun in der ganzen Fläche, die wir T nennen wollen, und **die ihre Verzweigungsart darstellt,** einwerthig und stetig, denn durch die Zusammensetzung der beiden Blätter sind die Unstetigkeiten gegenseitig aufgehoben worden; **sie kann demnach als eine völlig bestimmte stetige Function des Ortes in dieser Fläche angesehen werden.** — Man sieht leicht, dass diese Fläche vollständig die analytische Eigenschaft der Function s repräsentirt. Ziehen wir in der obern Fläche eine Linie um die Punkte 0—1, so geht diese nicht in die untere Fläche über: man erhält also für den Werth x wieder denselben Werth s, von dem man ausging; ebenso ist es, wenn man um die Punkte 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$ herumgeht: man kommt dann beim Überschreiten von 0—1 in die untere Fläche, bleibt darin bis zum Schnitte $\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{1}{\lambda^2}$, kommt durch Überschreiten dieses wieder in die obere Fläche, also an demselben Punkte x wieder zum ursprünglichen Werthe von s, wie es ja analytisch verlangt wurde. Geht man nur um einen Verzweigungspunkt herum, so kommt man ersichtlich zu dem Punkte x im andern Blatte, also zu dem entgegengesetzten Werthe von s, da man dann eine der Verzweigungslinien nur einmal schneidet; geht man noch einmal herum, so schneidet man zum zweiten Male, kommt also wieder in das erste Blatt zum ursprünglichen Werthe. Es ist übrigens, wie man bemerken kann, ganz beliebig, welche von den Verzweigungspunkten man zu je zweien verbindet; das leitende Princip ist nur, die Zerschneidung so einzurichten, dass man in der Fläche durch Umlauf um eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten zu demselben Werthe von s, durch Umlauf um eine ungerade Anzahl zu dem entgegengesetzten Werthe kommt. Für unsere Untersuchung halten wir die gemachte Zerschneidung als die einfachste fest, ziehen die Schnittlinien gerade und nennen die Punkte $0—1$, $\frac{1}{\varkappa^2} — \frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2} — \infty$ conjugirte Verzweigungspunkte.

§. 3.

Jede aus s und x rational zusammengesetzte Function $f(s, x)$ ist nun auch in der Fläche T einwerthig und stetig (d. h. nicht längs einer Linie unstetig), da s und x es darin sind; wir nennen sie **gleichverzweigt.** Umgekehrt lässt sich leicht zeigen, dass, wenn eine Function einwerthig und stetig in T, also gleichverzweigt ist, sie sich rational durch s und x ausdrücken lässt. Alle diese Functionen haben die Eigenschaft in ebenso vielen Punkten der Fläche T unendlich gross als unendlich klein von der ersten Ordnung zu werden, und durch die Punkte, wo sie unendlich gross werden, sind sie bis auf Constante bestimmt. Wir nennen dabei eine Function **unendlich klein von der ersten Ordnung im Punkte** a (und bezeichnen dies durch 0^1), wenn ihr Logarithmus bei einem linksherumgehenden Umlaufe der Variablen um ein diesen Punkt umgebendes sehr kleines Flächenstück, in dem keine weitern 0^1 oder ∞^1 Punkte der Function liegen, um $2\pi i$ wächst. Ist also der Punkt a kein Verzweigungspunkt, so ist $(x—a) = 0^1$; ist dagegen a ein Verzweigungspunkt, so ist $(x—a)^{1/2} = 0^1$ in diesem Punkte, denn dann muss man, um das ganze den Punkt a in unmittelbarer Nähe begrenzende Flächenstück einzuschliessen, zwei Umläufe machen und dadurch würde $\log(x—a)$ um $4\pi i$ wachsen. Demnach wird $\sqrt{1 — \varkappa^2 x}$ im Punkte $x = \frac{1}{\varkappa^2}$: 0^1, also $1 — \varkappa^2 x$ dort unendlich klein von der zweiten Ordnung. Dies ergiebt sich auch leicht, wenn man bedenkt, dass in einem Verzweigungspunkte zwei Punkte der Fläche T zusammenfallen. $(x—a)$ wird in zwei Punkten 0^1, von denen der eine im obern, der andere im untern Blatte liegt; wird nun a ein Verzweigungspunkt, so fallen die beiden Nullpunkte aufeinander, $(x—a)$ wird dann in einem Punkte unendlich klein von der zweiten Ordnung. Für den Unendlichkeitspunkt ist $\frac{1}{x} = 0^1$, wenn im Unendlichen kein Verzweigungspunkt liegt, da aber bei der Fläche T der Punkt $x = \infty$ ein Verzweigungspunkt, so wird dort $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0^1$, $x^{\frac{1}{2}} = \infty^1$: x wird also in diesem Punkte unendlich gross von der zweiten Ordnung. Demnach wird eine ganze Function von x vom n^{ten} Grade $f(x^{(n)})$ für $x = \infty : \infty^{2n}$, folglich auch für $2n$-Punkte 0^1: sie wird nämlich für n-Werthe von x gleich 0, und jedem x entsprechen im Allgemeinen zwei Punkte der Fläche; $s = \sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}$ wird für $x = \infty : \infty^5$ und für die fünf im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte 0^1. Bei diesen Untersuchungen wird immer ein Punkt, wo die Function von einer höhern Ordnung unendlich gross oder klein wird, ebenso vielen einfachen ∞^1 und 0^1 Punkten gleich geachtet. Eine solche wie T verzweigte Function lässt sich um einen Punkt a herum, für den sie nicht ∞ wird, nach steigenden Potenzen von $(x—a)$ entwickeln, wenn derselbe keiner der fünf endlichen Verzweigungspunkte ist; für diese nach steigenden Potenzen von $(x—a)^{\frac{1}{2}}$. Um den Unendlichkeitspunkt der Fläche T lässt sie sich, wenn sie dort endlich bleibt, nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ entwicklen, da derselbe auch ein Verzweigungspunkt ist.

Der allgemeinste Ausdruck einer wie die Fläche T verzweigten Function, der sich also rational aus s und x zusammensetzt, ist nun, da s^2 eine rationale Function von x,

$$F = \frac{A_0 + B_0 \cdot s}{A_1 + B_1 \cdot s}$$

wo A_0, B_0, A_1, B_1 ganze rationale Functionen beliebigen Grades von x sind. Es wird uns für die Folge nützlich sein, zu untersuchen, wann und wie wir diesen Ausdruck so bestimmen können, dass er für beliebig zu wählende Punkte ∞ wird, und wie von diesen die Punkte, wo er dann 0 wird, abhängig sind. Um gleich den allgemeinsten Fall dieser Bestimmung zu betrachten, nehmen wir an, dass für $x = \infty$, $s = \infty$ der Ausdruck F einen willkürlichen Werth habe; dann müssen die höchsten Potenzen im Zähler und Nenner dieselben sein, und F wird nur ∞, wenn der Nenner verschwindet, nur 0, wenn der Zähler verschwindet. Wir können in F zwei Formen unterscheiden (die uns beide dasselbe Resultat liefern werden), je nachdem Zähler und Nenner für $x = \infty$ von einer geraden oder ungeraden Ordnung ∞ werden. Sei also

$$(1) \qquad F_1 = \frac{f_0(x^{(n)}) + f_1(x^{(m)}) \cdot s}{\varphi_0(x^{(n)}) + \varphi_1(x^{(m_1)}) \cdot s}$$

wo die eingeklammerten Indices jedesmal die höchste vorkommende Potenz der Variablen bezeichnen, und sei

$$2n > 2m + 5$$
$$2n > 2m_1 + 5$$

dann werden Zähler und Nenner für $x = \infty$: unendlich von der Ordnung $2n$, folglich auch für $2n$ Punkte unendlich klein von der ersten Ordnung. Wir können die Constanten des Nenners so bestimmen, dass er für ρ beliebig zu wählende Punkte 0^1 wird, wo ρ natürlich nicht grösser als die Anzahl der Constanten im Nenner sein darf; dann wird er ausserdem noch für $2n - \rho$ Punkte 0^1. Der Zähler des Ausdrucks F_1 enthält $n + m + 1$ unabhängige Constante; bestimmen wir diese so, dass der Zähler auch für die $2n - \rho$ Punkte verschwindet, wie der Nenner, so bleiben noch

$$(n+m+1) - (2n-\rho) = \rho + m - n + 1$$

Constante willkürlich. Nehmen wir m so gross, als die Relation $2n > 2m + 5$ es erlaubt, so wird $m - n = -3$: und $\rho + m - n + 1 = \rho - 2$. Wir haben so eine Function gewonnen, die für ρ beliebig zu wählende Punkte ∞^1 wird, indem für $2n-\rho$ Punkte Zähler und Nenner gleichzeitig 0^1 werden, und die im Zähler $\rho-2$ willkürliche Constante enthält. Die zweite Form:

$$(2) \qquad F_2 = \frac{f_0(x^{(n)}) + f_1(x^{(m)}) \cdot s}{\varphi_0(x^{(n_1)}) + \varphi_1(x^{(m)}) \cdot s}$$

wo

$$2n < 2m + 5$$
$$2n_1 < 2m + 5$$

wird für $2m + 5$ Punkte ∞^1 und 0^1. Wir bestimmen den Nenner des Ausdrucks so, dass er für ρ beliebig festzusetzende Punkte 0^1 wird, und die $n + m + 1$ Constanten des Zählers so, dass er für die $2m + 5 - \rho$ Punkte, für die der Nenner noch verschwindet, auch verschwindet; dann bleiben

$$(n+m+1) - (2m+5-\rho) = \rho + n - m - 4$$

Constante willkürlich. Nehmen wir n möglichst gross, so wird $n - m = 2$: und $\rho + n - m - 4 = \rho - 2$, wie im ersten Falle.

Wir können also, wenn $\rho > 2$, den Ausdruck F immer so bestimmen in seinen Constanten, dass er **für ρ ganz beliebig zu wählende Punkte** der Fläche $T \infty^1$ wird. Von den ρ-Punkten, für die er dann 0^1 wird, können wir $\rho-2$ beliebig wählen, da der Zähler $\rho-2$ unabhängige willkürliche Constante enthält, von denen er eine lineare Function ist.

Ist aber $\rho = 2$, so enthält der Zähler keine willkürliche Constante mehr, d. h. er ist **vollkommen** bestimmt dadurch, dass er für die Punkte verschwindet, für die ausser den ρ noch der Nenner verschwindet. Er kann sich folglich von dem Nenner nur um eine multiplicative Constante unterscheiden, und F selbst wird eine Constante. Es giebt also keine wie T verzweigte Functionen, die für **zwei beliebig zu wählende** Punkte der Fläche ∞^1 werden. Nur wenn die beiden Punkte demselben Werthe x entsprechen, existiren solche Functionen und ihr allgemeinster Ausdruck ist

$$\frac{m + nx}{m' + n'x};$$

sie werden in zwei wie (s, x) und $(-s, x)$ über einander liegenden Punkten ∞^1 und in zwei ebenso gelegenen von den ersteren unabhängigen 0^1. Dass es endlich keine wie T verzweigte Functionen giebt, die nur für einen Punkt ∞^1 und 0^1 werden, ist klar, denn dann enthielte F eine negative Anzahl von Constanten, was keinen Sinn hat.

§. 4.

In der Fläche T betrachten wir jetzt die Integralfunction

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}}.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Function hat in der Fläche allenthalben einen bestimmten Werth und ändert sich stetig; sie wird unendlich für die fünf im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte wie $\lim\limits_{x=a} \frac{c}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$: für $x = \infty$ wird sie 0 wie $\lim\limits_{x=\infty} \frac{c}{x^{\frac{3}{2}}}$. Die Integralfunction bleibt demnach allenthalben in der Fläche endlich; sie ist **ein immer endlich bleibendes Integral.** Gehen wir von dem Anfangspunkte der Integration, den wir einstweilen als 0 nehmen wollen, zu einem Punkte $x.s$ der Fläche, so wird bekanntlich das Integral einen verschiedenen Werth erhalten, je nach dem Wege, den wir die Integrationscurve durchlaufen lassen. Liegt z. B. der Punkt x,s in dem obern Blatte, so kann man die Integrationscurve ganz in demselben verlaufen lassen oder auch theilweise in dem untern; man kann ein oder mehrere Male um conjugirte Verzweigungspunkte gehen etc. und jedesmal wird die Integralfunction im Punkte x,s einen von den frühern verschiedenen Werth erhalten. Es ist aus der allgemeinen Theorie bekannt, dass zu einem Werthe von x unzählige Werthe von u gehören;

es findet dies analog schon bei den einfacheren Integralen, den elliptischen und circularen. Statt. Es fragt sich, ob wir uns bei dieser Classe von Functionen nicht auch vom Wege unabhängig machen können, wie es uns mit den algebraischen Functionen in dem vorigen Paragraphen gelungen ist. Dieselbe Methode wie vorher können wir natürlich nicht anwenden, denn wir müssten dann, da die Integralfunction unendlich viele Zweige hat, die Fläche T noch mit unendlich vielen Blättern bedecken, so dass in jedem Blatte ein Zweig der Function läge. Allein das eigenthümliche Verhältniss der Zweige zu einander, was wir bald näher feststellen werden, gestattet, einen Zweig durch passend angebrachte Linien (Querschnitte) von den übrigen zu trennen und für sich in der Ausdehnung der ganzen Fläche zu betrachten. Wir verdanken **Riemann** auch diese sinnreiche graphische Methode; sie ist eine natürliche Folge des bekannten Cardinalsatzes über die Integration durch das Imaginäre, von dem wir hier ausgehen wollen. Er lautet:

„Ist in einer die X-Ebene einfach oder mehrfach bedeckenden Fläche w eine einwerthige stetige Function des Ortes von x, so hat $\int w\,.\,dx$ durch eine geschlossene Curve ausgedehnt, innerhalb deren w nicht unendlich wird wie $\lim\limits_{x=a} \dfrac{c}{x-a}$, den Werth 0, **wenn die Curve die ganze Begrenzung eines Theiles der Fläche ausmacht.**"

Der Beweis dieses Satzes von **Cauchy**[1] ist nicht allgemein genug, da er für **eine** Ebene geführt ist und in Folge dessen innerhalb des betreffenden Flächentheils keine Verzweigungspunkte liegen dürfen; wir geben desshalb in Kürze den von **Riemann**, der sich in etwas anderer Weise in seiner Dissertation (Seite 9 u. ff.) findet. Es war $x = y + zi$, und es mögen Y und Z zwei einwerthige Functionen des Ortes y, z bezeichnen, die in dem betrachteten Theile der Fläche sammt ihren Derivirten endlich bleiben; wir ziehen dann eine geschlossene Curve die einen Theil der Fläche **vollständig begrenzt,** und dehnen das Integral

$$\iint \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \partial y\,.\,\partial z$$

über die ganze von der Curve umschlossene Fläche aus. Durch Integration des ersten Theiles nach y, des zweiten nach z findet man leicht, dass der Werth des Flächenintegrals gleich ist, dem Werthe des Curvenintegrals

$$\int (Z\,.\,dz + Y\,.\,dy)$$

über die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt. Hierbei sind dy, dz zum Unterschiede von ∂y, ∂z die Änderungen von y und z, die entstehen, wenn man in der Begrenzung von einem Punkte zu einem benachbarten übergeht. Unter positiver Richtung beim Durchlaufen verstehen wir diejenige, bei der man den Flächentheil, den die Curve begrenzt, immer auf der linken Seite liegen hat. Wir setzen $Y = w$, $Z = wi$, und sei $w = f(x) = f(y + zi)$, so dass $i\,\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$; so folgt, wenn wir diese Werthe in die gefundene Gleichung einsetzen,

$$\iint \left(i\,\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \partial y\,.\,\partial z = \int w\,(dy + i\,.\,dz) = \int w\,.\,dx.$$

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences 1846.

Ein jedes Element des ersten Integrals verschwindet, weil die Gleichung $i\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ für **jeden** Punkt des betrachteten Flächentheiles gilt, indem durch die Bestimmung, dass die Derivirten endlich sein sollen, die linke Seite nie unter der unbestimmten Form $\infty - \infty$ erscheinen kann: **für diesen Fall ist also**

$$\int w\,.\,dx = 0.$$

Aus diesem Falle ergiebt sich sofort der allgemeinere, wo innerhalb des begrenzten Flächenstückes Punkte a liegen, für die w oder $\frac{\partial w}{\partial x}$ unendlich werden. Der Werth des obigen Integrals ist alsdann gleich der Summe der Integrale $\int w\,.\,dx$ in kleinen Kreisen und in positiver Richtung um die Punkte a erstreckt, da wir vermöge des bewiesenen Falles alle die Flächentheile ausscheiden können, für die w und $\frac{\partial w}{\partial x}$ endlich sind, indem das Integral $\int w\,.\,dx$ um sie herum erstreckt den Werth 0 hat. Für einen solchen Punkt a hat nun w nothwendig den Charakter einer Function $\Sigma c_m (x-a)^m$, wo die $m < 1$ sind; denn man kann immer die Constanten c und m so bestimmen, dass $w - \Sigma c_m (x-a)^m$ und $\frac{\partial w}{\partial x} - \Sigma c_m m\,(x-a)^{m-1}$ in dem betreffenden Punkte a den Werth 0 haben, da w als einwerthige Function des Ortes nur algebraisch, nicht logarithmisch unendlich werden soll. Ist a kein Verzweigungspunkt, so müssen die m negative ganze Zahlen sein ($m = 0$ betrachten wir sowohl als negative, wie als positive ganze Zahl), denn sonst wäre w nicht einwerthig in der Fläche, wenn einige m Brüche wären; integrirt man in einem kleinen Kreise um einen solchen Punkt herum, indem man

$$x - a = re^{\varphi i},\; dx = re^{\varphi i}\,.\,d\varphi\,.\,i$$

setzt, so resultirt für das allgemeine Glied der obigen Summe:

$$\int \frac{c\,.\,dx}{(x-a)^n} = \frac{c}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\,.\,i}{e^{(n-1)\varphi i}}$$

und dieser Ausdruck ist, da n eine positive ganze Zahl sein soll, immer 0, ausser wenn $n = 1$: dann ist sein Werth $c\,.\,2\pi i = \int \frac{c\,.\,dx}{x-a}$. Ist dagegen a ein ν-facher Verzweigungspunkt, um den herum also ν-Blätter der Fläche zusammenhangend sich winden, so können einige m auch gebrochene Zahlen sein, und sie lassen sich dann, da w einwerthig in der Fläche sein soll, alle nothwendig in die Form $\frac{\mu}{\nu}$ bringen, wo μ eine positive oder negative ganze Zahl. Um einen solchen ν-fachen Verzweigungspunkt vollständig abzugrenzen, müssen wir ν-Umläufe um ihn machen, in jedem Blatte einen; dann folgt

$$\int c\,(x-a)^{\frac{\mu}{\nu}}\,dx = cr^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} \int_0^{2\nu\pi} e^{\frac{(\mu+\nu)}{\nu}\varphi i}\,.\,d\varphi\,.\,i$$

und dieser Ausdruck ist immer 0, ausser wenn $\mu + \nu = 0$: dann ist sein Werth $c\,.\,\nu\,.\,2\pi i = \int \frac{c\,.\,dx}{x-a}$ für den ν-fachen Verzweigungspunkt a. Somit ist der aufgestellte Satz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen und er lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

„Ist w in einer ein- oder mehrblättrigen Fläche eine einwerthige und stetige Function des Ortes von x, die für keinen Punkt unendlich wird wie $\lim\limits_{x=a} \frac{c}{x-a}$ (zu welchen Functionen $\frac{du}{dx}$ auch gehört), so hat $\int w . dx$ auf zwei verschiedenen Wegen zwischen zwei beliebigen festen Punkten erstreckt immer **denselben Werth, wenn diese beiden Wege zusammengenommen die ganze Begrenzung eines Theiles der Fläche ausmachen.**“ Denn es ist nach dem bewiesenen Lehrsatze unter den festgesetzten Bedingungen (s. Fig. 1^a):

$$\int_a^{x,s} w \, . \, dx \text{ (über } a') + \int_{x,s}^{a} w . dx \text{ (über } a'') = 0.$$

daher auch:

$$\int_a^{x,s} w \, . \, dx \text{ (über } a') = \int_a^{x,s} w . dx \text{ (über } a'').$$

Dieser Cardinalsatz giebt uns ein Mittel zur Classification solcher Flächen, die die Verzweigung algebraischer Functionen repräsentiren. Wir nennen eine Fläche **einfach zusammenhangend**, wenn eine **jede** in ihr gezogene in sich zurücklaufende Curve **die ganze Begrenzung eines Stückes der Fläche** ausmacht, durch sie die Fläche also in getrennte Theile zerlegt wird. Eine solche ist z. B. jede unendliche Ebene; zieht man in ihr eine geschlossene Curve, so wird dadurch gleichsam ein Stück aus ihr herausgeschnitten. Anders verhält es sich bei mehrblättrigen Flächen, wozu unsere T gehört. Ziehen wir z. B. um die conjugirten Verzweigungspunkte $0 - 1$ im obern Blatte eine geschlossene Curve, so wird die Fläche keineswegs in getrennte Theile zerspalten, eben weil man durch die Verzweigungsschnitte gehend von der innern Seite der Curve zur äussern kommen kann. Eine solche Fläche heisst **mehrfach zusammenhangend**; sie heisst $(n+1)$-fach zusammenhangend, wenn man sie durch ein System von n geschlossenen Linien, die wir Querschnitte nennen wollen, und die ihre Begrenzung bilden, in eine einfach zusammenhangende zerlegen kann. Das Gesagte wird in dem Folgenden klare und anschauliche Gestalt gewinnen.

In unserer Fläche T hat nach dem ausgesprochenen Lehrsatze die Integralfunction u (die nirgendwo logarithmisch unendlich wird, da in keinem Punkte $\frac{du}{dx}$ unendlich wie $\lim\limits_{x=a} \frac{c}{x-a}$) von einem festen Anfangspunkte bis zu einem Punkte x,s auf einem Wege erstreckt nur dann **denselben Werth** wie auf einem andern, wenn beide Wege zusammen **die ganze Begrenzung eines Theiles der Fläche** ausmachen. Wäre die Fläche T einfach zusammenhangend, so würde dies **immer** der Fall sein, und der Werth des Integrals wäre alsdann von dem Integrationswege vollkommen unabhängig. Wir zerlegen also durch Querschnitte die mehrfach zusammenhangende Fläche T in eine einfach zusammenhangende T'; dies kann auf die verschiedenste Weise geschehen, immer aber ist die Anzahl der Querschnitte dieselbe, wie wir weiter unten sehen werden.

Die vorliegende Fläche T hat keinerlei Begrenzung, da wir sie als ein System zweier im Unendlichen geschlossener Ebenen auffassen, die längs den Verzweigungsschnitten zusammenhängen. Wir ziehen eine beliebige geschlossene Curve im obern Blatte, durch die die Fläche nicht in getrennte Theile zerlegt wird, z. B. um die conjugirten Verzweigungspunkte $0 - 1$ (siehe Fig. 2), und betrachten **ihre beiden Seiten als zur Begrenzung gehörig;**

dann besteht die Begrenzung aus zwei getrennten Linien, nämlich der innern und der äussern Seite der Curve. Die weitere Zerlegung der Fläche geschieht dann so, dass jeder folgende Schnitt von einem Punkte eines frühern nach demselben Punkte auf der andern Seite geht, oder in sich selbst zurückläuft, wenn in dem frühern schon ein anderer Schnitt mündet; dies wird so lange fortgesetzt wie möglich, bis die Fläche in eine einfach zusammenhangende zerlegt ist. Wir gehen folglich von einem Punkte $\hat{a}$ auf der innern Seite des Querschnittes I aus, kommen durch den Verzweigungsschnitt $0 - 1$ in die untere Fläche und durch den Verzweigungsschnitt $\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{1}{\lambda^2}$ wieder in die obere bis zum Punkte $\hat{a}$ auf der äussern Seite; wobei wir, und auch in der Folge, die im untern Blatte liegenden Theile der Querschnitte punktiren. Durch diesen Querschnitt II, dessen beide Seiten wir als zur Begrenzung gehörig betrachten, sind nun die beiden getrennten Begrenzungen, die durch den Querschnitt I gebildet wurden, verbunden, und die Begrenzung der Fläche besteht aus einem Stücke. Die Fläche ist aber noch nicht einfach zusammenhangend, wir ziehen desshalb einen Querschnitt III von einem Punkte des Querschnittes II im obern Blatte aus um die Verzweigungspunkte $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ und lassen ihn in einem seiner früheren Punkte enden. Die Begrenzung besteht wieder aus zwei getrennten Theilen, nämlich der innern Seite des Querschnittes III und der äussern, welche letztere mit den beiden Seiten des vorigen Querschnittpaares eine in sich zurücklaufende Curve bildet. Verbinden wir nun noch diese getrennten Theile durch einen Querschnitt IV, der um die conjugirten Verzweigungspunkte $\frac{1}{\mu^2} - \infty$ gehend von einem Punkte $\hat{b}$ der innern Seite des Querschnittes III zum entsprechenden Punkte auf der äussern Seite gezogen ist, so besteht die Begrenzung aus **einem** zusammenhangenden Stücke, und die dadurch begrenzte Fläche T, die wir als solche T'' nennen wollen, ist **einfach zusammenhangend**, denn man kann keine, die Begrenzung natürlich nicht schneidende, geschlossene Curve mehr ziehen, durch die die Fläche T'' nicht in getrennte Theile zerlegt wird. Da unsere Fläche T durch vier Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T'' zerlegbar, so war sie demnach **fünffach zusammenhangend.** Wie schon bemerkt, haben die Querschnitte eine ganz willkürliche Gestalt und eben so die Punkte, wo zwei Querschnitte in einander münden, wie z. B. $\hat{a}$, eine ganz beliebige Lage. Jede Seite eines Querschnittes dient dem resp. anliegenden Theile der Fläche als Begrenzung, und diese wird positiv durchlaufen (welche Richtung in Fig. 2 die Pfeile andeuten), wenn wir dabei die von ihr begrenzte Fläche immer auf der linken Seite haben.

§. 5.

Nachdem wir so unsere vorgelegte Fläche T, indem wir ihr eine Begrenzung gaben, in eine einfach zusammenhangende T'' zerlegt, deren Kriterium darin besteht, dass wenn man **in ihr** auf zwei verschiedenen Wegen von einem Punkte zum andern geht, diese beiden zusammengenommen immer die ganze Begrenzung eines Theiles der Fläche bilden: können wir den Lehrsatz, von dem wir ausgingen, anwenden, und es folgt daraus, dass unser Integral u zwischen zwei festen Endpunkten in der Fläche T'' beliebig erstreckt immer ein und denselben Werth hat; es ist daher in der Ausdehnung der ganzen Fläche T'' **eine einwerthige endliche und stetige Function des Ortes, d. h. unabhängig von dem Integrationswege,** der selbstverständlich die Begrenzung von T'' nicht schneiden darf. Eine weitere Frage ist jetzt, wie sich die Werthe der so allenthalben in T'' bestimmten Function u zu beiden Seiten der Querschnitte verhalten, oder, um einfacher zu reden, wie sich die Function u **beim Überschreiten der Querschnitte** ändert? Um dies zu untersuchen, müssen wir eine positive und negative Seite unterscheiden, und wir nehmen für die Folge bei allen Querschnitten die innere als die positive, die äussere als die negative an. Wir bezeichnen die Querschnitte der Reihe nach von links nach rechts mit a_1, b_1 : a_2, b_2; dann münden a_1, b_1 so wie a_2, b_2 in einander resp. in den Punkten $\hat{a}$ und $\hat{b}$. Jeden dieser beiden Mündungspunkte wollen wir vierfach bezeichnen, je nachdem wir ihn auf der einen oder andern Seite der Querschnitte a oder b liegend denken. Die a_2 mit b_1 verbindende Linie, die eigentlich zum Querschnitte a_2 gehört, nennen wir c (s. Fig. 2). Wir können für's Erste bemerken, dass die Function u **beim Überschreiten der Linie** c **stetig** bleibt; gehen wir nämlich in der Fläche T' von einem Punkte auf der einen Seite von c bis zu demselben Punkte auf der andern, indem wir längs der Begrenzung, die durch das Querschnittsystem a_1, b_1 gebildet wird, in der Richtung der Pfeile integriren, so wird jeder dieser beiden Querschnitte und ein Stück von c zweimal, das zweite Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, die Elemente des Integrals $\int du$ heben sich also gegenseitig auf und sein Werth, der die Differenz der Werthe von u auf der einen und andern Seite von c angiebt, ist 0. Die Function hat demnach in einem Punkte auf der einen Seite denselben Werth wie in demselben Punkte auf der andern Seite; man kann folglich bei Integrationen immer die Linie c überschreiten, ohne dass dies den Werth des Integrals $\int du$ in T' beeinflusst. — Gehen wir nun von dem Punkte a''' auf der negativen Seite von a_1 zum entsprechenden Punkte a auf der positiven, indem wir die äussere Seite des Querschnittes b_1 durchlaufen, so ist die Differenz der Werthe von u in diesen beiden Punkten, die wir mit $u^{+1} - u^{-1}$ bezeichnen wollen, gleich dem Integrale $\int du$ längs des Querschnittes b_1 von a''' bis a erstreckt: also gleich dem Integrale $\int du$ rechtsherum um die Verzweigungspunkte 1 und $\frac{1}{x^2}$ erstreckt. Der Werth dieses Integrals bleibt ungeändert, wenn man den Punkt, wo die Integrationscurve den Querschnitt a_1 trifft, vom Punkte $\hat{a}$ ab auf der Linie a_1 beliebig verschiebt, da man bei der Integration durch eine geschlossene Curve beliebige Flächenstücke, in denen die Function $\frac{du}{dx}$ endlich und stetig bleibt, ein- und austreten lassen kann. Man erkennt daraus, dass **für jeden Punkt des Querschnittes** a_1 **die Differenz der Werthe von** u **auf der positiven und negativen Seite eine constante ist.** Diese in der ganzen Ausdehnung des Querschnittes constante Grösse nennt man den **Periodicitätsmodul der Function** u **für den Querschnitt** a_1. Eben so findet man durch ähnliches Raisonnement, dass die Periodicitätsmodulen für die übrigen Querschnitte constante Grössen sind, unabhängig von der Gestalt der Schnitte; ihr Werth ist gleich dem Integrale $\int du$ erstreckt durch die resp. Querschnitte, die von der negativen auf die positive Seite der betrachteten führen; sie sind demnach **bestimmte Integrale, die um zwei Verzweigungspunkte herumgehen.**

Wir wollen jetzt die Periodicitätsmodulen für die Querschnitte a_1, b_1, a_2, b_2, die wir resp. mit $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ bezeichnen, auswerthen. Für die Linie c ist nach dem Vorigen der Periodicitätsmodul gleich 0. Zu dem Ende ziehen wir die Integrationscurven der bestimmten, die Periodicitätsmodulen repräsentirenden Integrale nach jeder Richtung möglichst zusammen und machen sie geradlinig, so dass sie sich ganz an die Abscissenaxe anlegen. Dies ist erlaubt, da dadurch nur Flächenstücke, in denen $\frac{du}{dx}$ endlich bleibt, ein- und austreten, womit keine Änderung der Werthe der durch geschlossene Curven erstreckten Integrale verbunden ist. Wir erhalten dann:

$$1.\quad u^{+1} - u^{-1} = A^{(1)} = \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du + \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^1 - du = \quad 2\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = \quad 2K'i$$

$$2.\quad u^{+2} - u^{-2} = B^{(1)} = \int_1^0 du + \int_0^1 - du = -2\int_0^1 du = -2K$$

$$3.\quad u^{+3} - u^{-3} = A^{(2)} = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du + \int_{\infty}^{\frac{1}{\mu^2}} - du = \quad 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = \quad 2L$$

$$4.\quad u^{+4} - u^{-4} = B^{(2)} = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} - du = -2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = -2L'i.$$

Bei dem zweiten Integrale in jeder Formel hat du das entgegengesetzte Vorzeichen wie beim ersten, weil dort die Integrationscurve entweder auf der andern (rechten) Seite eines Verzweigungsschnittes (wie bei 2. und 3.) oder in der untern Fläche (wie bei 1. und 4.) verläuft, in welchen beiden Fällen s, und folglich auch du, einen dem ursprünglichen entgegengesetzten Werth hat. Die Integrationscurven der Integrale 1. und 3. gehen rechts, diejenigen der Integrale 2. und 4. links um die betreffenden Verzweigungspunkte herum: eben weil dieselben von der negativen auf die positive Seite der Querschnitte, deren Periodicitätsmodulen sie repräsentiren, führen müssen. Unter den im §. 1 über die Grössen $\alpha, \beta, \varkappa, \lambda, \mu$ gemachten Voraussetzungen haben die Grössen K, K', L, L' reelle Werthe, wie sich leicht durch Betrachtung der Wurzelgrösse $\frac{du}{dx} = \frac{(\alpha + \beta x)}{\sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}}$ ergiebt.

Unsere durch Beschränkung des Integrationsweges des Integrales u auf die Fläche T' entstandene Integralfunction u, die in Folge dessen allenthalben in der Fläche T' einwerthige und stetige Bestimmtheit hat, ist demnach so in der Begrenzung dieser Fläche beschaffen, dass ihre Werthe zu beiden Seiten eines Querschnittes in den entsprechenden Punkten nur um eine Constante verschieden sind: mit anderen Worten, **sie ändert sich beim Überschreiten der Querschnitte um constante Modulen**, und zwar giebt es deren, den vier Querschnitten entsprechend, vier verschiedene, die als incommensurable Grössen insofern von einander unabhängig sind, als nicht einer von ihnen sich aus endlichen Vielfachen der übrigen drei zusammensetzen lässt. Hätten wir die Fläche T auf andere Weise durch vier Querschnitte zerlegt, so wären auch andere Periodicitätsmodulen gekommen, die sich aber linear durch die vorliegenden vier ausdrücken lassen würden. Dies ist leicht zu zeigen, denn da die Periodicitätsmodulen bei jeder Zerlegung der Fläche nichts anderes sind als Integrale durch eine geschlossene Curve um zwei Verzweigungspunkte erstreckt, so ist der Beweis geliefert, wenn man das in der Reihe noch fehlende Integral $\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du$ durch die übrigen ausdrücken könnte. Zu dem Ende ziehen wir in der obern Fläche T' eine geschlossene Curve um sämmtliche Verzweigungsschnitte (s. Fig. 3): da ausserhalb ihrer keine Verzweigungspunkte mehr liegen, so kann man nicht von der einen Seite auf die andere kommen, sie bildet also die ganze Begrenzung eines Theiles der Fläche.

und folglich ist $\int du$ durch sie erstreckt gleich 0. Zieht man sie bis an die Verzweigungsschnitte zusammen und macht sie geradlinig, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \int_0^1 du + \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du + \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du \; + \\ \int_1^0 - du + \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{1} du + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\varkappa^2}} - du + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du + \int_{\infty}^{\frac{1}{\mu^2}} - du \end{aligned}\right\}$$

denn nur zu beiden Seiten der Verzweigungsschnitte hat du in einem Blatte entgegengesetzte Werthe. Es folgt die wichtige Relation:

$$\left\{ 0 = \int_0^1 du + \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du \right\}$$

die für jedes $\varkappa$, λ, μ gilt. Jetzt sind uns die Werthe der Integrale, zwischen je zwei beliebigen Verzweigungspunkten auf der linken Seite der Abscissenaxe in der obern Fläche erstreckt, bekannt, denn man hat

$$\int_0^1 du = K, \quad \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = K'i, \quad \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = -\int_0^1 du - \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = -K - L, \quad \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = L'i, \quad \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = L,$$

und daraus ergeben sich durch einfache Zusammensetzung alle übrigen, z. B. $\int_0^{\infty} du = K'i + L'i$ etc. Entsprechend finden wir die Werthe derselben einfachen Integrale, auf geradem Wege zwischen zwei Verzweigungspunkten erstreckt, für die untere Fläche auf den Strecken, wo dieselbe nicht mit der obern zusammenhängt, oder für die rechten Seiten der Verzweigungsschnitte, wo solche das obere Blatt trennen, indem wir zwischen diesen Stellen dem du das negative Vorzeichen geben, wodurch die betreffenden Integralwerthe auch nur bezüglich des Vorzeichens geändert werden. Man sieht, dass eine andere Zerlegung der Fläche analytisch dasselbe ist, als wenn man durch Addition der vier vorliegenden Modulen vier neue von einander unabhängige bildete: eine Erscheinung, die sich analog bei der Theorie der elliptischen Functionen findet. Hierin liegt auch der leicht auszuführende Beweis, dass die Anzahl der Querschnitte, durch die T in eine einfach zusammenhangende Fläche zerlegt wird, immer constant gleich vier ist.

Das Resultat unserer Untersuchung ist jetzt, dass wir durch die Zerlegung der Fläche T in die einfach zusammenhangende T' und durch Beschränkung des Integrationsweges des Integrales $\int du$ auf diese letztere **einen der unendlich vielen Zweige der Function** u **abgesondert haben;** welcher dies ist hängt von dem Anfangswerthe u_0 ab, den man der Function für $x = 0$ giebt. Die Function ist einwerthig in T bestimmt, wird dafür aber beim Überschreiten der Querschnitte unstetig; wir haben also dieselbe Erscheinung wie bei den mehrwerthigen algebraischen Functionen, die auch, wenn wir sie in **einer** Ebene einwerthig bestimmten, längs gewissen Linien unstetig werden mussten. Die verschiedenen Zweige der Function u unterscheiden sich nur um Vielfache der Periodicitätsmodulen; längs eines Querschnittes stossen gleichsam zwei Zweige an einander, die sich um den betreffenden Periodicitätsmodul unterscheiden. Wenn man demgemäss **nur einen** Zweig betrachtet, mit anderen Worten sich vollkommen in der Fläche T' hält, so kann man u **als vollkommen bestimmte Function des Ortes in dieser Fläche** ansehen, denn einem jeden Punkte x,s entspricht dann, wenn u_0 bestimmt ist, nur ein Werth von u. Die Natur dieser Function werden wir bald durch die Inversion näher kennen lernen. Operirt man dagegen in der Fläche T, so sind Umgänge um die Verzweigungspunkte, die in T' durch die Querschnitte gehindert werden, in beliebiger Anzahl gestattet: und da der Werth eines jeden Integrals $\int du$, das in T durch eine geschlossene Curve ausgedehnt wird, sich durch Ganze der Periodicitätsmodulen, wie eben bewiesen, ausdrücken lässt, so folgt, dass man durch Integrationen um die Verzweigungspunkte noch immer beliebige Vielfache der Perioden zu dem ursprünglichen Werthe von u im Punkte x,s zuaddiren kann. Bezeichnen nun m, n, o, p vier ganze, positive oder negative Zahlen, so lassen sich (da K und L, so wie K' und L' incommensurable Grössen sein müssen, wenn anders nicht zwei Perioden in eine einzige zusammenfallen sollen) dieselben immer so bestimmen, dass

$$\lim (mK + nL) = P$$
$$\lim (o\,K'i + pL'i) = Qi$$

wo $P + Qi$, **eine ganz beliebige Grösse**, zu u addirbar ist. Da man nun diese Grösse auch beliebig klein werden lassen kann, die Function u also, während x dasselbe bleibt, durch Stufen fortschreiten kann, die kleiner sind als jede noch so kleine Grösse, so kann ohne Voraussetzung eines bestimmten Weges in T von einem eigentlichen Functionalzusammenhange zwischen x und u nicht mehr die Rede sein. In Folge dessen ist auch der Anfangswerth u_0 eine ganz willkürliche Grösse, die man beliebig festsetzen kann.

§ 6.

Denken wir uns alle die Werthe, die u bei gegebenem Anfangswerthe in der Fläche T' hat, als Punkte auf einer Ebene U abgebildet, so erhalten wir, da u in T' stetig und endlich ist, eine die U-Ebene einfach oder mehrfach bedeckende Fläche, die der T' **in den kleinsten Theilen ähnlich** ist. In Folge dessen ist sie auch einfach zusammenhangend, und einem Punkte in der einen Fläche entspricht nur ein Punkt in der andern, einer geschlossenen Curve in der einen auch eine geschlossene in der andern. Wie uns nun T' den Charakter von u als Function von x in der Ausdehnung eines Zweiges repräsentirte, so wird uns umgekehrt U die Variable x als Function von u darstellen; wir können sie desshalb füglich **die inverse Fläche** nennen. Da u in T' niemals unendlich wird, so wird die inverse Fläche die U-Ebene nur theilweise bedecken; sie wird also eine vollkommene Begrenzung haben, die den Querschnittlinien in den kleinsten Theilen ähnlich ist. Wir brauchen demnach nur die Begrenzung von T' abzubilden, um alle Punkte, die abzubilden sind, einzufassen. Zu diesem Ende gehen wir vom Punkte a''' aus, der auf der negativen Seite von a_1 und b_1 liegt, und es habe für diesen Punkt die Function den Werth u', den man beliebig annehmen kann. Wir durchlaufen in der Richtung der Pfeile zuerst die äussere Seite von b_1 bis zurück zum Punkte a, wobei wir die Linie c, da ihr Periodicitätsmodul gleich 0, überschreiten dürfen, dann sind wir von der negativen Seite von a_1 auf die positive gekommen, und u' ist um den Periodicitätsmodul grösser geworden; diesem Wege entspricht also in der U-Ebene eine Curve (1) vom Punkte u' bis zum Punkte $u' + A^{(1)}$ (s. Fig. 1). Zweitens durchlaufen wir weitergehend die innere Seite von a_1, von a bis a', dann kommen wir von der negativen Seite von b_1 auf die positive, also zu einem um $B^{(1)}$ grössern Werthe von u: diesem Wege entspricht eine Curve (2) vom Punkte $u' + A^{(1)}$

bis zum Punkte $u'+A^{(1)}+B^{(1)}$. Drittens durchlaufen wir die innere Seite von b_1, von a' bis a'', kommen dadurch von der positiven Seite von a_1 auf die negative, also zu einem um $A^{(1)}$ kleinern Werthe; diesem Wege entspricht eine Curve (3) von $u'+A^{(1)}+B^{(1)}$ bis $u'+B^{(1)}$. Endlich viertens durchlaufen wir die äussere Seite von a_1, von a'' bis zurück zu dem Punkte a''', von dem wir ausgingen, kommen dadurch von der positiven Seite von b_1 auf die negative, also zu einem um $B^{(1)}$ kleinern Werthe; diesem Wege entspricht eine Curve (4), die uns eben so zu dem Ausgangspunkte in U zurückführt, von $u'+B^{(1)}$ bis u'. Diese vier Curven sind die Bilder der Querschnitte in der U-Ebene, sie ändern sich also mit diesen und umgekehrt. Die Curve (1) ist mit (3), die Curve (2) mit (4) parallel und congruent, da sie resp. den beiden Seiten ein und desselben Querschnittes entsprechen. Der Mündungspunkt $\hat{a}$ hat sich vermöge seiner vierfachen Lage auf der einen oder andern Seite der Querschnitte auch vierfach abgebildet als die Ecken der Figur.

Dem Querschnittsysteme a_2, b_2 entspricht ein ähnlich gebautes Parallelogramm. Sei der Werth von u im Punkte b''' gleich u'', welcher natürlich von u' abhängt, $\left\{u''=u'+\int_{a'''}^{b'''}du\right\}$ so findet man eben so verfahrend als Bild der Querschnitte a_2, b_2 eine geschlossene Figur mit den Ecken u'', $u''+A^{(2)}$, $u''+A^{(2)}+B^{(2)}$, $u''+B^{(2)}$.

Diese Parallelogramme sind beide geschlossen, sie können folglich nicht in derselben Ebene liegen, da dann die Flächen getrennt wären und man aus der einen nicht zu jedem Punkte der andern kommen könnte. Die die U-Ebene bedeckende inverse Fläche ist also zweiblättrig, und es liege das erste Parallelogramm im obern, das zweite im untern Blatte. Diese beiden Parallelogramme müssen zusammenhängen, da sie die Abbildung der zusammenhangenden Fläche T' sein sollen; wir haben also zu untersuchen, ob Verzweigungspunkte existiren. Um einen Verzweigungspunkt $u=m$, für den $\lim (u-m)^{\frac{1}{2}}$ unendlich klein von der ersten Ordnung ist, lässt sich ein endliches x nach steigenden Potenzen von $(u-m)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln, und es muss dort $\frac{dx}{du}$ ∞^1 werden wie $\frac{c}{(u-m)^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{dx}{du}=\frac{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}{\alpha+\beta x}$ wird aber ∞^1, wenn $\alpha+\beta x=0$, also hat die Fläche U zwei Verzweigungspunkte, die die Bilder der beiden dem Werthe $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ entsprechenden Punkte im obern und untern Blatte von T' sind. Dem Werthe $x=\infty$, für den $\frac{dx}{du}$ auch unendlich wird wie $c.x^{\frac{3}{2}}$, entspricht kein Verzweigungspunkt; denn angenommen ihm entspräche ein Verzweigungspunkt n, so wäre um diesen entwickelt

$$x=\frac{c_1}{(u-n)}+\frac{c_2}{(u-n)^{\frac{1}{2}}}+c_3+c_4\,(u-n)^{\frac{1}{2}}+\ldots.$$

da $\lim\limits_{x=\infty} x^{\frac{1}{2}}$ und $\lim\limits_{u=n}\frac{1}{(u-n)^{\frac{1}{2}}}$ als ∞^1 angesehen werden, indem $x=\infty$ in T ein Verzweigungspunkt ist und $u=n$ als ein solcher angenommen wird in U. Dann würde aber für den Punkt n

$$\frac{dx}{du}=-\frac{c_1}{(u-n)^2}-\frac{c_2}{2\,(u-n)^{\frac{3}{2}}}+\frac{c_4}{2\,(u-n)^{\frac{1}{2}}}+\ldots.$$

unendlich gross von der vierten Ordnung werden wie x^2, und nicht wie $x^{\frac{3}{2}}$ unendlich von der dritten.

Die über die U-Ebene ausgebreitete endliche Doppelfläche hat also nur diese beiden Verzweigungspunkte, und zwischen ihnen setzt sich das obere Blatt in das untere und umgekehrt das untere in das obere fort, so dass x allenthalben eine stetige (einwerthige) Function des Ortes in der Fläche ist. Die Begrenzungen dieser beiden Parallelogramme liegen nun auch nicht getrennt, sondern wie in T' die Linie c mit den beiden Querschnittssystemen eine in sich zurücklaufende Curve bildet, die die Fläche T'' begrenzt, so wird das Bild von c auch die getrennten Begrenzungen in der U-Fläche verbinden. Zu beiden Seiten der Linie c hat die Function u denselben Werth, daher geben sie in der Abbildung eine und dieselbe Curve, deren beide Seiten mit den übrigen paarweise parallelen Stücken eine in sich zurücklaufende Curve als die ganze Begrenzung der Fläche U bilden. Die Linie c verbindet die äussere Seite von b_1 mit der äussern Seite von a_2; der erstern entspricht in U die Curve von u' bis $u' + A^{(1)}$, der zweiten die Curve von u'' bis $u'' + B^{(2)}$. Das Bild von c wird also diese beiden Curven verbinden, und demnach wird die ganze Begrenzung ein Bild wie Fig. 4' geben, wobei die in der untern Fläche verlaufenden Linien punktirt sind.

§. 7.

Nachdem wir so die Abbildung der Fläche T'' in ihren allgemeinen Umrissen skizzirt haben, soll unsere speciellere Aufgabe jetzt sein, unter Voraussetzung einer bestimmten Gestalt der Querschnitte die vier Halbebenen, aus denen die Fläche T'' besteht, jede für sich auf der U-Ebene abzubilden. Die Gestalt der Querschnitte in der Fläche T ist wie schon oft bemerkt innerhalb gewisser Grenzen ganz willkürlich: mit ihrer Änderung ändert sich aber auch nothwendig die Begrenzung von U, da diese ihnen in den kleinsten Theilen ähnlich ist. Machen wir die Querschnitte geradlinig, so wird auch die Begrenzung von U aus geraden Linien bestehen. Dies erreichen wir, wenn wir die Querschnitte möglichst zusammenziehen, so dass sie sich an die Abscissenaxe geradlinig anlegen und wir uns frei, d. h. ohne auf einen Querschnitt zu stossen, in den ganzen Halbebenen bewegen können. Haben wir sie möglichst zusammengezogen nach jeder Richtung hin, so dass sie auf der Abscissenaxe gemessen **auch** den kleinsten Raum annehmen, und z. B. der Querschnitt a_1 sich mit allen seinen Punkten an den Verzweigungsschnitt 0—1 anlegt, so kommt der Punkt $\hat{a}$ in die unmittelbare Nähe des Punktes 1, der Punkt $\hat{b}$ in die unmittelbare Nähe des Punktes $\frac{1}{\mu^2}$, und die Linie c geht geradlinig vom Punkte $\frac{1}{\varkappa^2}$ bis zum Punkte $\frac{1}{\lambda^2}$; wir können also immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verzweigungspunkten integriren, ohne auf einen Querschnitt, der mündet, zu stossen. Wir nennen die Halbebene links von der Abscissenaxe oben (I), die Halbebene rechts oben (II), die links unten (III), die rechts unten (IV). Wir werden sehen, dass diesen vier Halbebenen, die unter sich vollkommen gleich sind, auch vier symmetrische Bilder in der U-Ebene entsprechen, die zusammengenommen die ganze Abbildung von T'' geben.

Ad I. Die Halbebene I wird von der linken Seite der Abscissenaxe begrenzt, und wir befinden uns dabei auf der negativen Seite sämmtlicher Querschnitte. Für den Anfangswerth $x = 0$ sei $u = 0$, dann ist:

1. $\int_0^1 du = K$ $\quad\begin{cases} x = 0 & \text{bis } x = 1 \\ u = 0 & \text{„ } u = K \end{cases}$

2. $\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = K'i$ $\quad\begin{cases} x = 1 & \text{bis } x = \frac{1}{\varkappa^2} \\ u = K & \text{„ } u = K + K'i \end{cases}$

$$3.\quad \int\limits_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = -K - L \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{1}{\varkappa^2} & \text{bis} & x = \frac{1}{\lambda^2} \\ u = K + K'i & ,, & u = K'i - L \end{array}\right.$$

$$4.\quad \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = L'i \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{1}{\lambda^2} & \text{bis} & x = \frac{1}{\mu^2} \\ u = K'i - L & ,, & u = K'i - L + L'i \end{array}\right.$$

$$5.\quad \int\limits_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = L \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{1}{\mu^2} & \text{bis} & x = \infty \\ u = K'i - L + L'i & ,, & u = K'i + L'i \end{array}\right.$$

$$6.\quad \int\limits_{-\infty}^{0} du = -K'i - L'i \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = -\infty & \text{bis} & x = 0 \\ u = K'i + L'i & ,, & u = 0 \end{array}\right.$$

Die Integrale haben hier die im §. 5 aufgestellten Werthe, weil wir uns bei der Integration in der obern Fläche auf der linken Seite der Abscissenaxe befinden. Es bedarf noch einer Erklärung, ob der Werth von u derselbe bleibt, wenn wir von $+\infty$ zu $-\infty$ gehen. Nach unserer Annahme, dass die Fläche im Unendlichen geschlossen sein, also dem Werthe ∞ überhaupt nur ein Punkt entsprechen soll, versteht sich dies eigentlich von selbst, da u in der ganzen Fläche T' endlich und stetig ist. Dasselbe lässt sich aber auch leicht beweisen, wenn wir die Halbebenen nicht als geschlossen und von der in sich zurücklaufenden Abscissenaxe begrenzt, sondern von einem unendlich grossen ebenen Halbkreise im Unendlichen begrenzt denken, dessen Durchmesser die Abscissenaxe von $-\infty$ bis $+\infty$ ist. Dann müssen wir, um von $+\infty$ zu $-\infty$ zu gelangen, das Integral $\int du$ durch diesen unendlichen Halbkreis erstrecken, setzen also darin $x = re^{\theta i}$, $dx = re^{\theta i}.d\theta.i$, lassen r gegen ∞ convergiren und integriren von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$. Der Werth des Integrals ergiebt sich dann gleich 0, so dass auch auf diese Weise unsere Annahme der Identität der Punkte $-\infty$ und $+\infty$ gerechtfertigt ist, in Folge deren $\int\limits_0^{-\infty} du = \int\limits_0^{\infty} du = K'i + L'i$. —. Das Bild von I ist demnach die Figur I_u.

Ad II. Die Halbebene II hängt mit I in der Fläche T zusammen längs

$$(-\infty \text{ und } 0) \quad (1 \text{ und } \tfrac{1}{\varkappa^2}) \quad (\tfrac{1}{\lambda^2} \text{ und } \tfrac{1}{\mu^2}),$$

zwischen diesen Grenzen hat also du und folglich auch $\int du$ denselben Werth wie sub I, für die übrigen den entgegengesetzten, da wir uns dort auf der andern Seite der Verzweigungsschnitte befinden. Es folgt:

$$1.\quad \int\limits_{0}^{1} du = -K \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = 0 & \text{bis} & x = 1 \\ u = 0 & ,, & u = -K \end{array}\right.$$

$$2.\quad \int\limits_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = K'i \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = 1 & \text{bis} & x = \frac{1}{\varkappa^2} \\ u = -K & ,, & u = -K + K'i \end{array}\right.$$

$$3.\quad \int\limits_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = K + L \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{1}{\varkappa^2} & \text{bis} & x = \frac{1}{\lambda^2} \\ u = -K + K'i & ,, & u = K'i + L \end{array}\right.$$

$$4.\quad \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = L'i \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda^2} & \text{bis} \quad x = \frac{1}{\mu^2} \\ u = K'i + L & \text{„} \quad u = K'i + L + L'i \end{cases}$$

$$5.\quad \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = -L \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\mu^2} & \text{bis} \quad x = \infty \\ u = K'i + L + L'i & \text{„} \quad u = K'i + L'i \end{cases}$$

$$6.\quad \int_{-\infty}^{0} du = -K'i - L'i \qquad \begin{cases} x = -\infty & \text{bis} \quad x = 0 \\ u = K'i + L'i & \text{„} \quad u = 0 \end{cases}$$

Der Halbebene II entspricht die Abbildung II_u. Wir bemerken, dass wie I und II in T' nur die Strecke $-\infty$ bis 0 gemeinsam haben, so auch I_u und II_u nur das Bild dieser Strecke gemeinsam haben, nämlich die Linie von 0 bis $K'i + L'i$.

Ad III. Die Halbebene III hängt in T mit I gar nicht zusammen, die du haben folglich dort beständig den entgegengesetzten Werth wie sub I, also auch die Integrale. Der Punkt $x = 0$ in der obern Fläche, von dem wir ausgingen, ist, wenn die Querschnitte wie verlangt möglichst zusammengezogen sind, vom Punkte $x = 0$ in der untern Fläche durch den Querschnitt a_1 getrennt, und zwar liegt ersterer auf der negativen, letzterer auf der positiven Seite desselben. Demnach ist im letztern der Werth von u um $2K'i$ grösser als im erstern, und da wir den Anfangswerth $u = 0$ für $x = 0$ im obern Blatte wählten, so ist der dem Punkte $x = 0$ im untern Blatte entsprechende Werth $u = 2K'i$. Es folgt:

$$1.\quad \int_{0}^{1} du = -K \qquad \begin{cases} x = 0 & \text{bis} \quad x = 1 \\ u = 2K'i & \text{„} \quad u = -K + 2K'i \end{cases}$$

$$2.\quad \int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = -K'i \qquad \begin{cases} x = 1 & \text{bis} \quad x = \frac{1}{\varkappa^2} \\ u = -K + 2K'i & \text{„} \quad u = -K + K'i \end{cases}$$

$$3.\quad \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = K + L \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\varkappa^2} & \text{bis} \quad x = \frac{1}{\lambda^2} \\ u = -K + K'i & \text{„} \quad u = K'i + L \end{cases}$$

$$4.\quad \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = -L'i \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda^2} & \text{bis} \quad x = \frac{1}{\mu^2} \\ u = K'i + L & \text{„} \quad u = K'i + L - L'i \end{cases}$$

$$5.\quad \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = -L \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\mu^2} & \text{bis} \quad x = \infty \\ u = K'i + L - L'i & \text{„} \quad u = K'i - L'i \end{cases}$$

$$6.\quad \int_{-\infty}^{0} du = K'i + L'i \qquad \begin{cases} x = -\infty & \text{bis} \quad x = 0 \\ u = K'i - L'i & \text{„} \quad u = 2K'i \end{cases}$$

Die Abbildung der Halbebene III ist die Figur III_u: I_u hängt mit III_u gar nicht zusammen, indem I mit III auch nicht zusammenhängt.

Ad IV. Die Halbebene IV hängt mit II gar nicht zusammen, die Integrale haben den entgegengesetzten Werth wie dort. Dem Punkte $x = 0$ entspricht $u = 2K'i$, da dieser Punkt derselbe wie sub III; man hat also:

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \displaystyle\int_0^1 du = K & \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ u = 2K'i \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{bis}\ \ x = 1 \\ \ \ ,,\ \ \ u = K + 2K'i \end{array} \\[2ex]
2.\ \displaystyle\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = -K'i & \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ u = K + 2K'i \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{bis}\ \ x = \frac{1}{\varkappa^2} \\ \ \ ,,\ \ \ u = K + K'i \end{array} \\[2ex]
3.\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = -K - L & \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\varkappa^2} \\ u = K + K'i \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{bis}\ \ x = \frac{1}{\lambda^2} \\ \ \ ,,\ \ \ u = K'i - L \end{array} \\[2ex]
4.\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = -L'i & \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\lambda^2} \\ u = K'i - L \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{bis}\ \ x = \frac{1}{\mu^2} \\ \ \ ,,\ \ \ u = K'i - L - L'i \end{array} \\[2ex]
5.\ \displaystyle\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = L & \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\mu^2} \\ u = K'i - L - L'i \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{bis}\ \ x = \infty \\ \ \ ,,\ \ \ u = K'i - L'i \end{array} \\[2ex]
6.\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} du = K'i + L'i & \left\{\begin{array}{l} x = -\infty \\ u = K'i - L'i \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{bis}\ \ x = 0 \\ \ \ ,,\ \ \ u = 2K'i \end{array}
\end{array}
$$

Dieser Halbebene entspricht die Abbildung IV_u, die mit II_u keine Strecke gemeinsam hat.

Setzen wir diese vier Abbildungen zusammen (s. Fig. 5), so erhalten wir ein naturgetreues Bild der Fläche T', ganz wie unsere Skizzirung es auch erheischte. Aus dieser Abbildung ist leicht zu sehen, wie sich x als Function von u **in der Ausdehnung eines Zweiges** u, den die Fläche T' von den übrigen trennt, verhält. x als Function von u hat zwei Zweige, die wir mit $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ bezeichnen, entsprechend den beiden Parallelogrammen im obern und untern Blatte. Im ersten Zweige ist sie einwerthig bestimmt innerhalb eines Parallelogrammes mit den Perioden $2K$ und $2K'i$ unter Voraussetzung des Anfangswerthes $\varphi_1(0) = 0$; im zweiten einwerthig innerhalb eines Parallelogrammes mit den Perioden $2L$ und $2L'i$. Ein jeder Zweig ist **für sich doppelt periodisch,** von einer vierfachen Periodicität kann also bei dieser Betrachtung keine Rede sein. Die beiden Seiten eines Querschnittes stellen sich in der Abbildung dar als zwei parallele und congruente Linien, deren entsprechende Punkte um den Periodicitätsmodul des betreffenden Querschnittes auseinander liegen. Alle Functionen, die rational aus x und s zusammengesetzt sind, haben zu beiden Seiten der Querschnitte denselben Werth, da sie in T einwerthig und stetig sind; sie haben demnach in derselben Ausdehnung wie x als Functionen von u betrachtet auch in den entsprechenden Punkten paralleler und congruenter Begrenzungsstücke der Abbildung U denselben Werth. Man hat also, je nachdem u auf einer Begrenzungslinie liegt, die der imaginären oder der reellen Axe parallel läuft und in der Fig. 5 resp. am meisten nach links oder am meisten nach unten liegt:

$$\varphi_1(u+2K) = \varphi_1(u) \quad , \quad \varphi_1(u+2K'i) = \varphi_1(u);$$
$$\varphi_2(u+2L) = \varphi_2(u) \quad . \quad \varphi_2(u+2L'i) = \varphi_2(u);$$

ähnlich wie bei einer doppelt periodischen Function in dem Werthumfange eines Parallelogrammes: nicht aber gelten diese Gleichungen für Punkte im Innern der Fläche, da dann $u+2K$, $u+2K'i$ etc. ausserhalb des Flächenstückes fallen, **für das nur** die Functionen φ bestimmt sind. Wir erkennen hieraus, dass so lange man **nur einen Zweig von** u betrachtet, sich also in T' hält, man u als vollkommen bestimmte Function von x, so wie x **als vollkommen bestimmte Function von** u ansehen kann, ohne dass dieselbe darum einen analytischen Ausdruck zu haben braucht, der sie in ihrem ganzen Werthumfange repräsentirt. Ebenso können wir, wenn wir mehrere Zweige von u betrachten und abbilden, deren Anfangswerthe endlich verschieden sind, im Umfange derselben u als Function von x und x als Function von u betrachten; setzen wir z. B. in der obern Fläche U an alle Seiten des dort liegenden Parallelogrammes ähnliche an mit den entsprechenden kleineren Parallelogrammen in der untern Fläche und füllen auf diese Weise das ganze obere Blatt aus, so wird durch diese Figur x als einwerthige Function von u repräsentirt im Umfange all' der Zweige, die von dem ursprünglichen nur um Vielfache der beiden Periodicitätsmodulen $2K$ und $2K'i$ sich unterscheiden. Anders verhält es sich aber, wenn wir alle Zweige, also den ganzen Werthumfang von u in T in Betracht ziehen; einem jeden Zweige von u entspricht nämlich ein solches Doppelparallelogramm, und da man als dem Punkte $x=0$ entsprechend jeden beliebigen Punkt $u=u_0$ annehmen kann, der als Anfangswerth die Lage des Doppelparallelogramms bestimmt, so werden nach Abbildung aller Zweige auf jedem Punkte u unzählig viele Parallelogramme übereinander liegen, so dass **zu einem Werthe von** u **unzählige nur um unendlich kleine Grössen verschiedene Werthe von** x **gehören, wie ja auch umgekehrt zu einem Werthe von** x **unzählige Werthe von** u.

Man kann hier noch eine Bemerkung, die elliptischen Functionen betreffend, machen. Setzen wir nämlich $\beta=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$, so wird u ein immer endlich bleibendes elliptisches Integral, und die Begrenzung der Fläche T' reducirt sich auf **ein** Querschnittsystem a_1, b_1, da zwei Verzweigungspunkte ausgefallen sind. Als Abbildung dieses Querschnittsystems ergiebt sich nur ein Parallelogramm, und die Fläche U ist einblättrig; zu einem Werthe von u gehört nur ein Werth von x. Man kann nun alle Zweige abbilden, indem man die ganze U-Ebene mit diesen Parallelogrammen ausfüllt, und in der ganzen Ausdehnung bleibt x eine einwerthige doppelt periodische Function von u, wie es ja auch die Theorie der elliptischen Functionen lehrt.

§. 8.

Wir haben durch unsere bisherige Untersuchung gefunden:

1. wie sich u als Function von x verhält, wenn man nur einen Zweig betrachtet;

2. wie sich unter denselben Verhältnissen x als Function von u verhält;

3. dass man allgemein u weder als Function von x, noch umgekehrt x als Function von u betrachten kann.

Seien nun u_1 und u_2 zwei immer endliche Integrale von der Form wie u, die nicht linear von einander abhängen, also

$$u_1 = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}} \quad . \quad u_2 = \int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}};$$

wir setzen fest, dass die Integrationswege bei beiden dieselben seien, und bezeichnen die den vier Querschnitten entsprechenden correspondirenden Modulen resp. mit

$$A_1^{(1)},\ B_1^{(1)},\ A_1^{(2)},\ B_1^{(2)} \quad , \quad A_2^{(1)},\ B_2^{(1)},\ A_2^{(2)},\ B_2^{(2)},$$

so sind, wenn der Werth von $x.s$ bestimmt ist, die Werthe dieser Integrale in der Fläche T' bei gegebenen Anfangswerthen auch bestimmt als

$$u_1^{(x)} \quad : \quad u_2^{(x)}$$

es sind dies die directen Integrale, deren Wege keine Querschnitte schneiden. In der Fläche T dagegen sind sie ohne Voraussetzungen über den Integrationsweg völlig unbestimmt, indem durch Integrationen um die Verzweigungspunkte beliebige Vielfache der Periodicitätsmodulen addirt werden können. Allein da die Integrationswege der beiden Integralen **dieselben** sein sollen, so ist, wenn die Änderung φ von $u_1^{(x)}$ definirt, dadurch auch die gleichzeitige Änderung ψ von $u_2^{(x)}$ fest bestimmt, denn ist:

$$u_1 = u_1^{(x)} + mA_1^{(1)} + nB_1^{(1)} + oA_1^{(2)} + pB_1^{(2)},$$

wo m, n, o, p beliebige ganze Zahlen bezeichnen, **so ist nothwendig:**

$$u_2 = u_2^{(x)} + mA_2^{(1)} + nB_2^{(1)} + oA_2^{(2)} + pB_2^{(2)},$$

da die beiden Integrale durch gleichzeitige Umläufe um die Verzweigungspunkte sich auch gleichzeitig um die correspondirenden Modulen ändern müssen.

Es gehören also zu **einem** Werthe von x,s unzählig viele correspondirende Werthsysteme $u_1 \mid u_2$. Ist nun der Werth $x.s$ und der Werth u_1 gegeben, **so ist dadurch der Werth von u_2, wenn er überhaupt ein endlicher ist, eindeutig bestimmt,** d. h. zu einem Werthe von x,s und von u_1 kann nur **ein** endlicher Werth von u_2 gehören, nicht mehrere. Denn dann ist

$$u_1 = u_1^{(x)} + \varphi,$$

und φ, was uns bekannt ist, da x und u_1 gegebene Werthe haben sollen, ist in die Form zu bringen:

$$\varphi = mA_1^{(1)} + nB_1^{(1)} + oA_1^{(2)} + pB_1^{(2)}.$$

Angenommen, dies könnte noch auf eine andere Weise geschehen, so dass

$$\varphi = m'A_1^{(1)} + n'B_1^{(1)} + o'A_1^{(2)} + p'B_1^{(2)}$$

wäre, so folgte daraus:

$$\left\{0 = (m-m')\,A_1^{(1)} + (n-n')\,B_1^{(1)} + (o-o')\,A_1^{(2)} + (p-p')\,B_1^{(2)}\right\}$$

Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Grössen m, m' etc., die ja ganze Zahlen bedeuten, seien endlich, dann kann die letzte Gleichung nur bestehen, wenn $m = m'$, $n = n'$ etc., denn anders würde sie uns eine lineare Relation zwischen den vier unabhängigen Periodicitätsmodulen ergeben, vermöge deren sie sich auf drei reducirten, was allgemein nicht stattfindet. Demnach sind die Grössen m, n, o, p nur einwerthig als ganze Zahlen bestimmbar, d. h. durch den Werth von φ ist auch die Zunahme von $u_2^{(x)}$

$$\psi = mA_2^{(1)} + nB_2^{(1)} + o\,A_2^{(2)} + p\,B_2^{(2)}$$

einwerthig bestimmt, also auch der Werth $u_2 = u_2^{(x)} + \psi$.

2. Sind die Grössen m, m' etc. aber unendlich, so ist die letzte Gleichung wohl möglich, dann ist aber der Werth von ψ, folglich auch der von u_2 unendlich und als solcher vollkommen unbestimmt.

In diesem Sinne ist es gerechtfertigt, wenn wir in unserer Einleitung setzten:

$$u_2 = f_2(u_1 \mid x)$$
$$u_1 = f_1(u_2 \mid x)$$

wo f_2 und f_1 **Einwerthigkeiten** bezeichnen, so lange sie überhaupt endlich sind. Diese Beziehungen fordern uns auf, den Werth von x als abhängig zu betrachten von den correspondirenden Werthen $u_1 \mid u_2$ und zu untersuchen, ob der Ausdruck $x = \varphi(u_1 \mid u_2)$ eine Berechtigung hat. Da x beim Überschreiten der Querschnitte ungeändert bleibt, so muss die Function φ, wie sie auch sonst beschaffen sein mag, ungeändert bleiben, wenn wir $u_1 \mid u_2$ um zusammengehörige, d. h. an demselben Querschnitte stattfindende Periodicitätsmodulen ändern, sie wird folglich, ihre Existenz einmal angenommen, **vierfach periodisch** sein. Ob φ eine einwerthige Function ist, und ob dadurch der Werth von x ganz allgemein bestimmbar, hängt davon ab, ob wir $u_1 \mid u_2$ durch Abschreibung gleicher Vielfacher der correspondirenden Periodicitätsmodulen auf eine oder mehrere Weisen in die Form $u_1^{(x)} \mid u_2^{(x)}$ setzen können, so dass die Gleichung $x = \varphi(u_1 \mid u_2) = \varphi(u_1^{(x)} \mid u_2^{(x)})$ stattfindet. Diese Frage ist rein graphisch nicht zu lösen und sie wird ihre Beantwortung erst im analytischen Theile erhalten: wir werden finden, dass die Werthe $u_1 \mid u_2$ bestimmten Bedingungen genügen, in Folge deren x einwerthig durch sie bestimmbar ist.

Somit ist der graphische Theil erledigt. Seiner mehr hodegetischen Natur gemäss ist Manches weniger allgemein, dafür aber anschaulicher dargestellt worden. Die Beschränkungen betreffend die Grössen α, β, $\varkappa$, λ, μ waren uns nur zur bessern geometrischen Darstellung der Inversion nöthig; die übrigen Resultate bleiben ohne diese Bedingungen dieselben, und für die Folge heben wir sie auf, da sie auf dem rein analytischen Felde keinen Einfluss haben.

§. 9.

Es bleibt noch übrig, den Charakter der fünf als Functionen von $u_1 \mid u_2$ darzustellenden Formen:

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{1-x}, \quad \sqrt{1-\varkappa^2 x}, \quad \sqrt{1-\lambda^2 x}, \quad \sqrt{1-\mu^2 x}$$

zu untersuchen, der in vielen Beziehungen ein merkwürdiger ist. Wir legen dabei die allgemeinere Figur 6 zu Grunde (mit Weglassung der Linien l, die von $\hat{a}$ und $\hat{b}$ ausgehen), in der die Verzweigungspunkte eine ganz beliebige Lage haben. Eine jede dieser Functionen wird in einem Verzweigungspunkte der Fläche T 0^1, und alle werden sie im Punkte $x = \infty : \infty^1$ von der ersten Ordnung (s. §. 3). Da einem Verzweigungswerthe x in der Fläche T **nur ein** Punkt entspricht, der den beiden Blättern gemeinsam ist, so werden die fünf Functionen jede **nur einmal** 0^1 und ∞^1, und die beiden Punkte, wo dies geschieht, sind zugleich für sie Verzweigungspunkte. Sie sind nicht wie die Fläche T verzweigt, da sie sich sonst rational durch x und s würden ausdrücken lassen, was unmöglich ist; in Folge dessen sind sie keine einwerthigen Functionen des Ortes in der Fläche, sondern in einem jeden Punkte derselben kann man die beiden Werthe, die die Functionen für denselben Werth von x dort haben können, hervorbringen je nach dem Wege, den man einschlägt. Geht man z. B. in der obern Fläche T in einer geschlossenen Curve um die Punkte $0 - 1$, $\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{1}{\lambda^2}$, so kommt man wieder zum Anfangspunkte x,s zurück: allein die vier ersten Functionen haben dann den entgegengesetzten Werth erhalten, da man für jede um einen Punkt, wo sie sich verzweigt, herumgegangen ist, die fünfte nur kehrt zu ihrem Anfangswerthe zurück. Geht man in einer geschlossenen Curve um alle drei Verzweigungsschnitte (Fig. 3), so kehren alle Functionen zu ihrem Anfangswerthe zurück, eben weil von jeder die beiden Verzweigungspunkte, der endliche und der unendliche, innerhalb der Curve liegen. Der Werth der Functionen ist also vom Wege abhängig und er ändert sich beim Umlaufe um eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten der Fläche T, da nur ein solcher Umlauf zu demselben Punkte x,s zurückführt, und dabei an dem Ausgangspunkte diejenigen Functionen entgegengesetzte Werthe erlangen, von denen **ein** Verzweigungspunkt innerhalb der durchlaufenen Curve liegt. Daraus folgt, dass wenn wir durch gewisse Linien die Umläufe um je zwei Verzweigungspunkte verhindern, indem wir festsetzen, dass die Wege der Functionen diese Linien nicht überschreiten dürfen, in der so entstehenden Fläche die Functionen einwerthig bestimmt sein und längs der Linien gewisse Unstetigkeiten annehmen werden. Eine Fläche derart ist aber T', denn u ist in T auch nur durch die Möglichkeit des Umganges um eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten mehrwerthig, und wird diese entfernt durch die Querschnitte, so ist in der dadurch entstandenen Fläche u allenthalben einwerthig bestimmt.

Eine weitere Frage ist demnach, wie sich unsere fünf Functionen bei Beschränkung ihrer Wege auf die einfach zusammenhangende Fläche T' verhalten, und in welchem Verhältnisse die Werthe der dadurch allenthalben einwerthig bestimmten Functionen zu beiden Seiten der Querschnitte zu einander stehen. Überschreitet man einen Querschnitt, d. h. geht man von einem Punkte auf der einen Seite zu demselben Punkte auf der andern, indem man den in ihn mündenden Querschnitt durchläuft, so bleiben **diejenigen** von den fünf Functionen **ungeändert,** von denen **kein oder beide** Verzweigungswerthe innerhalb des durchlaufenen zweiten liegen: ihr Werth ist demnach in einem Punkte auf der einen Seite derselbe wie in dem entsprechenden Punkte auf der andern Seite, mit anderen Worten, sie erlangen beim Überschreiten des ersten Querschnittes **den Factor $+$ 1. Diejenigen** von den fünf Functionen aber, von denen **ein** Verzweigungswerth innerhalb des zu durchlaufenden in den ersten mündenden Querschnittes liegt, haben auf der einen Seite des ersten Querschnittes **den entgegengesetzten Werth** wie auf der andern, d. h. sie erlangen beim Überschreiten von ihm **den Factor — 1.** So haben z. B. die vier ersten Functionen am Querschnitte a_2 alle den Factor -1, eben weil der Querschnitt b_2 um **einen** allen vier gemeinsamen Verzweigungspunkt $x = \infty$ herumführt; die Function $\sqrt{1 - \mu^2 x}$ dagegen ist am Querschnitte a_2 stetig, d. h. erlangt den Factor $+1$, weil der Querschnitt b_2 um ihre beiden Verzweigungspunkte $\frac{1}{\mu^2}$ und ∞ führt. Diese Factoren bleiben **dieselben, auf welchem Wege** man auch in T' von der einen Seite eines Querschnittes auf die andere gehen mag, denn die Functionen können auf einem Wege erstreckt nur dann in einem Punkte den entgegengesetzten Werth erhalten wie auf einem andern, wenn sie Umläufe um eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten machen. Solche Umläufe sind aber sowohl im obern wie im untern Blatte von T' unmöglich; man stösst dabei immer auf Querschnitte. Daraus folgt, dass wenn wir einmal für einen Punkt der Begrenzung von T' die Werthe der Functionen festgesetzt haben, (z. B. für $x = a$ im obern Blatte den

Werth von $\sqrt{x} = +\sqrt{a}$) sie längs der ganzen Begrenzung einwerthig und stetig bestimmt sind und **nur auf eine Weise** in das Innere der Fläche T'' einwerthig und stetig fortgesetzt werden können, da ihr Werth in T'' von dem Wege unabhängig ist. Ihr Charakter lässt sich demnach so definiren:

„**Sie sind in T'' einwerthige und stetige Functionen des Ortes, die nur für einen Punkt ∞^1 und 0^1 werden, und an den Querschnitten Factoren annehmen, die Quadratwurzeln der Einheit sind.**" Diese Factoren werden durch folgendes Schema gegeben:

	a_1	b_1	a_2	b_2
$\sqrt{x}$	$+1$	-1	-1	$+1$
$\sqrt{1-x}$	-1	-1	-1	$+1$
$\sqrt{1-\varkappa^2 x}$	-1	$+1$	-1	$+1$
$\sqrt{1-\lambda^2 x}$	$+1$	$+1$	-1	-1
$\sqrt{1-\mu^2 x}$	$+1$	$+1$	$+1$	-1

wie sich leicht aus Fig. 2 oder Fig. 6 ergiebt.

Der einfache Charakter dieser Functionen besteht darin, dass sie nur für **einen** Punkt ∞^1 werden. Hieraus folgt schon, dass sie nicht wie T verzweigt sein können, denn die einfachsten wie T verzweigten Functionen $\alpha + \beta x$ und $\alpha + \frac{\beta}{x}$ werden in zwei Punkten ∞^1 und 0^1, oder, was gleichbedeutend ist, in einem Punkte ∞^2 und 0^2 bei geeigneter Wahl der Constanten.

ZWEITER THEIL.

Analytik des Problems.

1.

Die ϑ-Function und ihre Eigenschaften.

§. 10.

Ehe wir dazu übergehen, die Ausdrücke für die fünf darzustellenden Functionen zu bilden, müssen wir eine eigenthümliche Function betrachten, die wir **als den Keim** der darzustellenden ansehen können, und deren genaue Kenntniss uns mit Sicherheit zur vollkommenen Lösung des vorgelegten Problems führen wird. Zu jeder Classe transcendenter Integrale gehört eine solche Function, und sie alle begreift man unter dem gemeinsamen Namen der ϑ-Functionen wegen der Ähnlichkeit des Baues und der Eigenschaften mit der zuerst von **Jacobi** so benannten Transcendenten auf dem Gebiete der elliptischen Functionen. Die Theorie dieser Functionen vom allgemeinsten Gesichtspunkte aus hat **Riemann** gegeben (Theorie d. Ab. F., pag. 41 u. ff.); wir wiederholen im Folgenden mit wenigen Zusätzen seine Theorie, specialisirt für den vorliegenden Fall.

Wir betrachten zunächst eine zweifach unendliche ϑ-Reihe: es ist dies eine zweifach unendliche Reihe, in welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze Function zweiten Grades der Stellenzeiger ist. Sie hat die Form:

$$\vartheta\,(v_1|v_2) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a_{1,1}m^2 + 2a_{1,2}mn + a_{2,2}n^2 + 2mv_1 + 2nv_2}$$

mit Weglassung eines beliebigen constanten Factors. Die drei Grössen $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ bezeichnen beliebige Constante, die Summation ist über alle ganzzahligen Werthe der Stellenzeiger m und n auszudehnen, und die Summe der Reihe wird als Function der Grössen v betrachtet. Diese Reihe convergirt, so lange v_1 und v_2 endlich bleiben, wenn der reelle Theil von $a_{1,1}m^2 + 2a_{1,2}mn + a_{2,2}n^2$ **für jeden Werth** der Zahlen m und n wesentlich negativ ist. Diese einwerthige Function von v_1 und v_2 hat nun die folgenden Eigenschaften:

1) Schreibt man statt m: $-m$, statt n: $-n$ im allgemeinen Gliede, so bleibt der Werth der Reihe ungeändert, da man dadurch nur die Ordnung der Summation umkehrt. Sie hat dann aber dieselbe Form, als wenn man in der ursprünglichen statt $v_1 \mid v_2$: $-v_1 \mid -v_2$ geschrieben. Man sieht, die ϑ ist **eine gerade Function der beiden Variablen:**

$$(1.) \qquad \vartheta\,(v_1|v_2) = \vartheta\,(-v_1|-v_2).$$

2. Die Function ist in Bezug auf jede der Variablen **periodisch mit der Periode** πi, da durch Zunahme von v_1 oder von v_2 um πi das allgemeine Glied der obigen Reihe resp. den

Factor $e^{2m\pi i}$ oder den Factor $e^{2n\pi i}$ erlangt, der, da m und n nur ganze Zahlen sein dürfen, beständig den Werth 1 hat. Daher ist:

$$(2.) \qquad \vartheta\,(v_1|v_2) = \vartheta\,(v_1+\pi i|v_2) = \vartheta\,(v_1|v_2+\pi i).$$

3. Lässt man m um 1 wachsen, schreibt statt m: $(m+1)$ in dem allgemeinen Gliede, so erhält man, da dadurch der Werth von ϑ ungeändert bleibt, indem die Grenzen der Summation: $-\infty$ und $+\infty$: sich nicht ändern, die Relation:

$$(3^a) \qquad \vartheta\,(v_1|v_2) = e^{2v_1+a_{1,1}}\vartheta\,(v_1+a_{1,1}|v_2+a_{1,2})$$

schreibt man eben so, während man m ungeändert lässt, statt n: $(n+1)$, so erhält man eine ähnliche Relation:

$$(3^b) \qquad \vartheta\,(v_1|v_2) = e^{2v_2+a_{2,2}}\vartheta\,(v_1+a_{1,2}|v_2+a_{2,2}).$$

Es giebt also Systeme **gleichzeitiger Änderungen** der beiden Variablen, durch welche sich $\log\,\vartheta$ nur um eine lineare Function von ihnen ändert, (die auch 0 sein kann wie sub 2). Diese sollen **Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmodulen der Variablen** genannt werden. Durch diese Eigenschaften ist die ϑ-Reihe vollkommen bestimmt bis auf einen constanten Factor, denn wir erhalten umgekehrt von den Eigenschaften ausgehend wieder dieselbe Reihe.

Substitution. Wir substituiren nun für v_1 und v_2 zwei linearunabhängige Integralfunctionen u_1 und u_2 mit gemeinschaftlichem Integrationswege, und für die zusammengehörigen Periodicitätsmodulen der Grössen v zusammengehörige, d. h. an denselben Querschnitten stattfindende Periodicitätsmodulen dieser Integrale. Dann müssen sich die Constanten α und β in den Integralen so bestimmen lassen, dass die Periodicitätsmodulen die folgenden werden:

	a_1	a_2	b_1	b_2
u_1	πi	0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$
u_2	0	πi	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$

und es braucht sonst zur vollkommenen Übereinstimmung mit den Systemen der Periodicitätsmodulen von v_1, v_2 nur die Relation $a_{1,2} = a_{2,1}$ zu existiren. In welcher Reihenfolge wir die zusammengehörigen Periodicitätsmodulen den Querschnitten zutheilen, ist einerlei; die obige Gruppirung empfiehlt sich durch ihre Übersichtlichkeit.

Um nun die Functionen u_1, u_2 zu bilden, gehen wir von **zwei beliebigen** linearunabhängigen endlichen Integralen aus, da wir wissen, dass jedes dritte linear dadurch ausdrückbar ist; es seien diese:

$$w_1 = \int^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} \quad , \quad w_2 = \int^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}},$$

und ihre Periodicitätsmodulen:

	a_1	a_2	b_1	b_2
w_1	$A_1^{(1)}$	$A_1^{(2)}$	$B_1^{(1)}$	$B_1^{(2)}$
w_2	$A_2^{(1)}$	$A_2^{(2)}$	$B_2^{(1)}$	$B_2^{(2)}$.

Diese vier Systeme gleichzeitiger Perioden sind aber nicht von einander unabhängig, sondern es existirt zwischen ihnen eine interessante Relation, die wir zunächst aufstellen.

Wir betrachten

$$\int w_1 . dw_2$$

und dehnen dieses Integral positiv, also in der Richtung der Pfeile, durch die ganze Begrenzung der Fläche T' aus. Da innerhalb derselben w_1 und w_2 allenthalben endliche und stetige Functionen des Ortes sind, so ist nach früherm Satze der Werth des Integrals $= 0$, da es durch eine geschlossene Curve, die eine vollkommene Begrenzung bildet, geführt wird. Es wird nun jede Linie a, b, c, **zweimal**, das zweite Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, da die **beiden** Seiten dieser Linien zur Begrenzung gehören, und wenn man das erste Mal auf der positiven Seite sich befand, so ist man, wenn man in entgegengesetzter Richtung durchläuft, auf der negativen. Man hat also:

$$\int w_1 . dw_2 = 0 = \int w_1^+ . dw_2^+ - \int w_1^- . dw_2^-$$

oder da dw_2 zu beiden Seiten der Querschnitte denselben Werth hat, indem $\frac{dw_2}{dx}$ eine wie T verzweigte Function ist, so hat man $dw_2^+ = dw_2^-$, folglich:

$$0 = \int (w_1^+ - w_1^-)\, dw_2$$

wo das Integral eben so wie die beiden vorigen rechtsstehenden **einmal** durch alle Querschnitte von Anfang bis zu Ende auf der positiven Seite in der Richtung der Pfeile zu erstrecken ist. Die Differenz $(w_1^+ - w_1^-)$ ist längs eines Querschnittes a und b constant, sie ist der Periodicitätsmodul von w_1 für den betreffenden Querschnitt, für die Linie c aber $= 0$, weil dort w überhaupt stetig; daher

$$0 = \int (w_1^+ - w_1^-)\, dw_2 = A_1^{(1)} \int^{a_1} dw_2 + A_1^{(2)} \int^{a_2} dw_2 + B_1^{(1)} \int^{b_1} dw_2 + B_1^{(2)} \int^{b_2} dw_2$$

und die Integrale sind auf der positiven Seite in der Richtung der Pfeile durch den Querschnitt von Anfang bis zu Ende auszudehnen, der oben am Integralzeichen steht. Es ist nun

$$\int^{a_1} dw_2 = B_2^{(1)}\,, \quad \int^{a_2} dw_2 = B_2^{(2)}\,, \quad \int^{b_1} dw_2 = -A_2^{(1)}\,, \quad \int^{b_2} dw_2 = -A_2^{(2)},$$

denn so durchlaufen führen die Querschnitte a von der negativen auf die positive Seite der b, die b dagegen von der positiven auf die negative der a. Substituirt man diese Grössen so erhält man die verlangte Relation:

$$(M). \qquad 0 = A_1^{(1)} B_2^{(1)} + A_1^{(2)} B_2^{(2)} - A_2^{(1)} B_1^{(1)} - A_2^{(2)} B_1^{(2)},$$

die überhaupt für je zwei ganz beliebige immer endliche Integrale gilt.

Setzen wir nun

$$u_1 = m_1 w_1 + m_2 w_2 + c_1,$$
$$u_2 = n_1 w_1 + n_2 w_2 + c_2,$$

so fragt sich, ob wir die Grössen m_1, m_2, n_1, n_2 so bestimmen können, dass das aufgestellte Schema der Periodicitätsmodulen für u_1, u_2 erfüllt wird. Dazu muss sein:

1. für den Querschnitt a_1:

$$\pi i = m_1 A_1^{(1)} + m_2 A_2^{(1)},$$
$$0 = n_1 A_1^{(1)} + n_2 A_2^{(1)};$$

2. für den Querschnitt a_2:

$$0 = m_1 A_1^{(2)} + m_2 A_2^{(2)},$$
$$\pi i = n_1 A_1^{(2)} + n_2 A_2^{(2)};$$

und durch diese Gleichungen sind die Grössen m und n, folglich auch u_1 und u_2 bis auf additive Constante **vollkommen** bestimmt, demgemäss auch die zwei noch übrigen Systeme der Periodicitätsmodulen für die Querschnitte b, die wir mit $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ und $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ bezeichnet haben. Sollen nun diese letzten Systeme auch mit denen von v_1, v_2 stimmen, so müsste sein: $\underline{a_{1,2} = a_{2,1}}$, da die a in der ϑ-Reihe als ganz beliebige Constante weiter keinen Bedingungen mehr unterworfen sind. Diese Relation ergiebt sich aber sofort aus unserer Modulgleichung (M), wenn wir darin statt der Periodicitätsmodulen von $w_1|w_2$ die betreffenden von $u_1|u_2$ einsetzen, da sie für je zwei beliebige Integrale gilt; sie liefert uns

$$0 = \pi i \,.\, a_{2,1} - \pi i \,.\, a_{1,2} \quad , \quad \underline{a_{1,2} = a_{2,1}},$$

so dass damit die Möglichkeit der Substitution, so weit sie die Übereinstimmung der gleichzeitigen Änderungen der Variablen betrifft, bewiesen ist.

§. 11.

Substituirt man die Integrale $u_1 | u_2$ in die ϑ-Reihe, so convergirt sie, indem, wie **Riemann** allgemein gezeigt, dann der reelle Theil von $a_{1,1}m^2 + 2a_{1,2}mn + a_{2,2}n^2$ **stets negativ ist,** wenn (wie in unserer Fig. 2 oder 6) die inneren Seiten der Querschnitte als die positiven, die äusseren als die negativen betrachtet werden, nach welcher Annahme sich ja die Werthe der Periodicitätsmodulen richten. Den Beweis wiederholen wir nicht, da auch ohne ihn das Verständniss des Zusammenhanges nicht erschwert wird, und wir nur das Nöthigste aus der Theorie der ϑ-Functionen vorführen wollen.

Die Functionen $u_1 | u_2$ sind bis auf additive Constante bestimmt, geben wir also den Integralen feste, bald zu bestimmende untere Grenzen, so können wir setzen:

$$v_1 = u_1 - e_1 \quad , \quad v_2 = u_2 - e_2 \,,$$

wo $e_1 | e_2$ beliebige Constante bedeuten. Wir betrachten dann die Eigenschaften der Function

$\vartheta\,(u_1 - e_1 | u_2 - e_2)$ in der Fläche T'.

Da $u_1 | u_2$ immer endliche stetige Functionen des Ortes in der Fläche T' sind, **so ist auch** $\vartheta\,(u_1 - e_1 \,|\, u_2 - e_2)$ **eine in der ganzen Ausdehnung von** T' **endliche, stetige und eindeutig bestimmte Function von** x. Es fragt sich, wie verhält sie sich beim Überschreiten der Querschnitte?

Überschreitet man einen Querschnitt a, so ändert sich eine der Grössen u um πi; dadurch wird aber der Werth der ϑ nicht geändert, sie bleibt stetig beim Überschreiten dieser Querschnitte. Anders verhält es sich dagegen, wenn wir eine Linie b überschreiten. Für eine Linie b_ν $(\nu = 1, 2)$ ist, wenn wir von der negativen auf die positive Seite gehen:

$$\left.\begin{aligned} u_1^+ &= u_1^- + a_{1,\nu} \\ u_2^+ &= u_2^- + a_{2,\nu} \end{aligned}\right\} a_{1,2} = a_{2,1}$$

$$\vartheta\,(u_1^+ - e_1 | u_2^+ - e_2) = \vartheta\,(u_1^- - e_1 + a_{1,\nu} | u_2^- - e_2 + a_{2,\nu})$$
$$= \vartheta\,(u_1^- - e_1 | u_2^- - e_2)\; e^{-2\,(u_\nu^- - e_\nu) - a_{\nu,\nu}}$$

gemäss der Relationen (3^a) und (3^b) des vorigen Paragraphen; wir erhalten also für den Querschnitt b_ν, indem wir die Werthe von ϑ (ϑ im Folgenden immer Abkürzung für $\vartheta\,(u_1 - e_1 | u_2 - e_2)$) auf der positiven und negativen Seite mit ϑ^+ und ϑ^- bezeichnen, die Gleichung:

$$(B) \qquad \vartheta^+ = \vartheta^- . e^{-2\,(u^- - e_\nu) - a_{\nu,\nu}}.$$

Demnach ist die ϑ-Function in der ganzen Fläche T endlich und stetig mit Ausnahme der beiden Querschnitte b. Beim Überschreiten der Linie b_ν erlangt sie den Factor $e^{-2\,(u_\nu^- - e_\nu) - a_{\nu,\nu}}$, der aber keineswegs constant ist, sondern sich mit der Lage des Querschnittes und längs desselben von Punkt zu Punkt ändert.

Da die ϑ-Reihe convergirt, so lange $u_1 - e_1 | u_2 - e_2$ endlich sind, so folgt, dass die ϑ-Function nicht unendlich wird. Es fragt sich, **wie oft sie in T' 0^1 wird? und in welchen Punkten?** Um die erste Frage zu entscheiden, bedürfen wir eines Hilfsatzes, der wie folgt lautet:

„Hat man eine stetige einwerthige Function des Ortes von x : $f(x)$, die innerhalb eines begrenzten einfach zusammenhangenden Flächenstückes **nur** 0 wird und nicht ∞, so ist die Anzahl der einfachen Nullpunkte der Function innerhalb dieses Flächenstückes gleich dem Werthe des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$$

positiv durch die Begrenzung des Flächenstückes erstreckt. Es wird dabei ein Punkt a, wo die Function von einer höhern Ordnung 0 wird, z. B. von der n^{ten} wie $(x-a)^n$, ebenso vielen einfachen Nullpunkten gleichgeachtet."

Beweis: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ wird in dem Flächenstücke nur ∞, wenn $f(x) = 0$; wird $f(x)$ im Punkte a, der kein Verzweigungspunkt sei, gleich 0 wie $c\,(x-a)^n$, so wird $\frac{f'(x)}{f(x)}$ dort ∞ wie $\frac{n}{x-a}$. Nun ist aber das obige Integral auch gleich der Summe der Integrale in kleinen Kreisen und in positiver Richtung um die Unstetigkeitspunkte der unter dem Integralzeichen stehenden Function erstreckt, da wir alle Flächentheile, wo $\frac{f'(x)}{f(x)}$ endlich bleibt, ausscheiden können. Um den Punkt a, wo $f(x)$ von der n^{ten} Ordnung 0 wird, erstreckt ist aber der Werth des Integrals gleich: $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{n.dx}{x-a} = n$. Wäre a ein Verzweigungspunkt, z. B. ein ν-facher, so wäre dort $(x-a)^{\frac{1}{\nu}} = 0^1$, also $(x-a)^{\frac{n}{\nu}} = 0$ von der n^{ten} Ordnung; unser Integral müsste, um das ganze den Punkt a in unmittelbarster Nähe einschliessende Flächenstück zu umfassen, ν-Umläufe machen, und sein Werth wäre wieder n. Eben so verhält es sich für die übrigen Punkte, wo $f(x) = 0$ wird, so dass **der Werth des Gesammtintegrals gleich ist der Anzahl der einfachen Nullpunkte innerhalb des betrachteten Flächenstückes** . $q.e.d.$

Wenden wir dies auf unsere ϑ-Function an, so folgt, dass die Anzahl n der Punkte, wo sie in T' 0^1 wird, gleich ist dem Werthe des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\vartheta'.dx}{\vartheta} = \frac{1}{2\pi i}\int d\,(\log\vartheta)$$

durch die ganze Begrenzung von T' positiv erstreckt, oder nach bekannter Weise:

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int (d\log\vartheta^+ - d\log\vartheta^-),$$

wo dieses Integral **einmal** durch jede Begrenzungslinie von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile auf der positiven Seite zu erstrecken ist. Für die Linien a und c ist ϑ stetig und demgemäss $(d \log \vartheta^{+} - d \log \vartheta^{-}) = 0$; für eine Linie b_ν dagegen ist $(d \log \vartheta^{+} - d \log \vartheta^{-}) = -2 du_\nu$, wie leicht aus der Formel (B) erhellt. Wir brauchen also nur durch die Linien b zu integriren, und finden, da die Integrale

$$\int^{b_1} du_1 = -\pi i, \int^{b_2} du_2 = -\pi i,$$

gleich sind den negativen Periodicitätsmodulen für die zugehörigen Querschnitte a, dass

$$\underline{\underline{n}} = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int^{b_1} - 2du_1 + \int^{b_2} - 2du_2\right\} = \underline{\underline{2}}.$$

Unsere Function $\vartheta\ (u_1 - e_1 | u_2 - e_2)$ wird also in der Fläche T' für zwei Punkte 0^1, die wir mit η_1, η_2 bezeichnen wollen.

§. 12.

Die zweite zu beantwortende Frage betraf **die Lage der beiden Punkte**, für die die $\vartheta = 0^1$ wird. Sind die unteren Grenzen der Integrale $u_1 | u_2$ bestimmt, so hängt dieselbe offenbar nur von den Grössen $e_1 | e_2$ ab, denn diese sind alsdann die einzigen noch willkürlichen Grössen in der ϑ-Function. Bezeichnen wir die Werthe von $u_1 | u_2$ in den Punkten η_1 und η_2 resp. durch $\alpha_1^{(1)} | \alpha_2^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)} | \alpha_2^{(2)}$, so ist die Aufgabe, die Abhängigkeit dieser Grössenpaare von dem Grössensysteme $e_1 | e_2$ aufzufinden. Die Beantwortung dieser Frage wird uns zugleich zeigen, **wie wir die unteren Grenzen $\alpha | \beta$ der Integrale** $u_1 | u_2$, über die wir noch nichts festgesetzt, **zu bestimmen haben**, damit das Operiren mit der ϑ-Function möglichst erleichtert werde.

Zu diesem Zwecke betrachten wir in der Fläche T' eine neue Function:

$$\Xi = \log \vartheta\ (u_1 - e_1 | u_2 - e_2).$$

Für die beiden Punkte, wo $\vartheta = 0^1$, wird $\Xi = -\infty$ wie $c \log (x - a)$ für den Punkt a, und durch Umlauf von x um einen solchen Punkt ändert sich Ξ um $\pm 2\pi i$, je nachdem man positiv oder negativ herumgeht. Die Function $\log \vartheta$ ist also in der Fläche T' nicht mehr einwerthig bestimmt, da wir in jedem Punkte durch Umläufe um die Unstetigkeitspunkte beliebige Vielfache von $\pm 2\pi i$ hinzufügen können. Um sie aber allenthalben eindeutig zu bestimmen, müssen wir durch unendlich kleine Kreise die beiden Unstetigkeitspunkte ausschliessen und diese mit der Begrenzung von T' verbinden. Zu dem Ende führen wir von dem kleinen Kreise, der den Punkt η_1 umgiebt, eine Linie l_1 nach dem gemeinschaftlichen Mündungspunkte $\hat{a}$ der Querschnitte a_1 und b_1; eben so von η_2 eine Linie l_2 nach dem gemeinschaftlichen Mündungspunkte $\hat{b}$ der Querschnitte a_2 und b_2, und betrachten beide Seiten der Linien l so wie die äusseren der kleinen Kreise als zur Begrenzung gehörig. (Siehe Fig. 6, die Punkte η sind der bessern Zeichnung wegen im obern Blatte liegend angenommen.) Die so entstandene Fläche nennen wir T'', und da sie die Unstetigkeitspunkte nicht mehr enthält, so ist in ihr die Function $\log \vartheta$ allenthalben eindeutig und endlich bestimmt.

In den Punkten auf der positiven (linken von den Punkten η aus gesehen) Seite einer Linie l ist dann $\log \vartheta$ um $+2\pi i$ kleiner als in den entsprechenden Punkten auf der negativen, da man, um von der positiven Seite auf die negative zu gelangen, einen Umlauf um den betreffenden Punkt η machen muss. Durchläuft man l_1 als Theil der Begrenzung aufgefasst positiv (so dass der anstossende Flächentheil immer zur linken Hand liegt), vom Punkte $\hat{a}$ auf der negativen Seite von l_1 bis zu demselben Punkte $\hat{a}$ auf der andern Seite, so nimmt $\log \vartheta$ um $2\pi i$ ab, da wir von der negativen auf die positive Seite von l_1 gekommen sind. Durchläuft man, ohne die Linie c zu berücksichtigen, das zu l_1 gehörige Querschnittsystem a_1, b_1 in positiver Richtung von $\hat{a}$ aus, so kommt man von der positiven Seite von l_1 auf die negative, und $\log \vartheta$ nimmt nach dem vorigen Paragraphen um $2\pi i$ zu, da $\int d(\log \vartheta)$ positiv durch ein System a, b erstreckt den Werth $2\pi i$ hat. Folglich bleibt $\log \vartheta$ beim Durchlaufen eines Begrenzungssystems a, b, l ungeändert, oder da ein solcher Umlauf von der einen Seite der Linie c auf die andere führt, **so bleibt $\log \vartheta$ in der Fläche T'' beim Überschreiten der Linie c stetig.** Somit ist die Function $\log \vartheta$ in T'' eindeutig bestimmt, und die Änderungen beim Überschreiten der Begrenzungslinien lassen sich folgendermassen geben:

für eine Linie l ist $\{\log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = -2\pi i$

„ „ „ c „ $\{\log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = 0$

„ „ „ a_ν „ $\{\log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = g_\nu 2\pi i$

„ „ „ b_ν „ $\{\log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = -2(u_\nu - e_\nu) - a_{\nu,\nu} - h_\nu 2\pi i$

(nach Formel B). ($\nu = 1, 2$). Die Grössen g und h bezeichnen ganze Zahlen, da aus den Formeln für die ϑ die Differenzen von $\log \vartheta$ nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt sind.

Es hängen nun offenbar die Grössen g und h und die Lagen der Punkte η von den Grössen $e_1 | e_2$ ab. Um diese Abhängigkeit zu erforschen, betrachten wir

$$\int \log \vartheta \, . \, du_1$$

und dehnen dieses Integral **positiv** durch die ganze Begrenzung von T'' aus. Der Werth dieses Integrals ist 0, da $\log \vartheta$ und u_1 in der ganzen Fläche endlich und stetig sind; die Unstetigkeitspunkte η_1, η_2 sind durch die kleinen Kreise ausgeschlossen. Bei der Integration wird jede Linie a, b, c, l **zweimal**, das zweite Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; man kann also auch das obige Integral **einmal** durch jede Linie von Anfang bis zu Ende auf der positiven Seite in der Richtung der Pfeile erstrecken, muss dann aber unter dem Integralzeichen die Differenz der Werthe der Function auf der positiven und negativen Seite nehmen. Man hat also, da für jede Linie $du_1^+ = du_1^-$ ist,

$$0 = \int \log \vartheta \, . \, du_1 = \int (\log \vartheta^+ - \log \vartheta^-) \, du_1,$$

wo das letzte Integral einmal durch jede Begrenzungslinie in der Richtung der Pfeile auf der positiven Seite zu erstrecken ist. Die Werthe der Differenz $log\, \vartheta^+ - log\, \vartheta^-$ sind für jede Linie a, b, c, l oben aufgestellt, und für das Integral, durch die einzelnen Linien erstreckt, ergeben sich die Werthe wie folgt:

1. für die Linien l erhalten wir als Werth des Integrals: $-2\pi i \left\{ \int_{\eta_1}^{\hat{a}} du_1 + \int_{\eta_2}^{\hat{b}} du_1 \right\}$ oder wenn wir den Werth von u_1 im Punkte $\hat{a}$ mit $a_1^{(1)}$, im Punkt $\hat{b}$ mit $a_1^{(2)}$ bezeichnen, so resultirt: $2\pi i \,|\, \sum_\nu \alpha_1^{(\nu)} - \sum_\nu a_1^{(\nu)} |$;

2. für die Linie c ist der Werth des Integrals 0, da für sie $\log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = 0$;

3. für eine Linie a_ν ist der Werth des Integrals $g_\nu\, 2\pi i \int^{a_\nu} du_1$, oder da $\int^{a_\nu} du_1 = a_{1,\nu}$, so ist der Werth des Integrals für die beiden Linien a_1 und a_2 gleich $2\pi i \sum\limits_\nu g_\nu\, a_{1,\nu}$;

4. für eine Linie b_ν ist unser Integral:

$$\int^{b_\nu} \left\{-2(u_\nu^- - e_\nu) - a_{\nu,\nu} - h_\nu\, 2\pi i\right\} du_1 = \int^{b_\nu} (-2u_\nu^- - a_{\nu,\nu})\, du_1 + (2e_\nu - h_\nu\, 2\pi i) \int^{b_\nu} du_1,$$

nun ist aber $\int^{b_1} du_1 = -\pi i$, $\int^{b_2} du_1 = 0$, also, wie leicht zu sehen, der Werth unseres Integrals für sämmtliche Linien b gleich

$$\sum_\nu \int^{b_\nu} (-2u_\nu^- - a_{\nu,\nu})\, du_1 - (2e_1 - h_1\, 2\pi i)\, \pi i.$$

Fassen wir alle diese Integrale zusammen, so erhalten wir als Werth des Totalintegrals:

$$\text{I. } 0 = 2\pi i \left\{\sum_\nu \alpha_1^{(\nu)} - e_1 + h_1 \pi i + \sum_\nu g_\nu\, a_{1,\nu}\right\} + \sum_\nu \int^{b_\nu} (-2u_\nu^- - a_{\nu,\nu})\, du_1 - 2\pi i \sum_\nu a_1^{(\nu)}.$$

Schreiben wir in dem Integrale, von dem wir ausgingen, statt du_1: du_2 und verfahren ebenso, so erhalten wir eine ähnliche Formel:

$$\text{II. } 0 = 2\pi i \left\{\sum \alpha_2^{(\nu)} - e_2 + h_2 \pi i + \sum_\nu g_\nu\, a_{2,\nu}\right\} + \sum_\nu \int^{b_\nu} (-2u_\nu^- - a_{\nu,\nu})\, du_2 - 2\pi i \sum_\nu a_2^{(\nu)},$$

wo $a_2^{(1)}, a_2^{(2)}$, entsprechend den $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ in I., die Werthe der Function u_2 für die Punkte $\hat{a}$ und $\hat{b}$ resp. bezeichnen.

In diesen beiden Formeln ist jedesmal die zweite, nicht in $\{\}$ stehende Hälfte unabhängig von den Grössen e, g, h und der Lage der Punkte η, und **hängt nur von den Anfangswerthen der Integrale $u_1|u_2$ ab.** Setzen wir den Werth dieser zweiten Hälfte in I. gleich $2\pi i\, k_1$, in II. gleich $2\pi i\, k_2$, so folgen die verlangten Relationen:

$$\text{I. } e_1 = \sum_\nu \alpha_1^{(\nu)} + h_1 \pi i + \sum_\nu g_\nu\, a_{1,\nu} + k_1,$$

$$\text{II. } e_2 = \sum_\nu \alpha_2^{(\nu)} + h_2 \pi i + \sum_\nu g_\nu\, a_{2,\nu} + k_2.$$

Die Grössen k_1 und k_2 sind unabhängig von der Gestalt der Querschnitte und der Lage der Mündungspunkte $\hat{a}$ und $\hat{b}$: denn da die beiden Formeln für eine ganz beliebige Gestalt der Querschnitte gelten, so müsste eine Veränderung dieser Gestalt, wenn sie die Grössen k änderte, auch die übrigen Grössen in den Formeln ändern, was nicht der Fall ist. Demnach hängen die Constanten k nur von den Anfangswerthen der Integrale ab, und es fragt sich, ob wir diese letzteren nicht so wählen können, dass die Grössen k den Werth 0 erhalten. Gehen wir zurück auf unsere Function $\vartheta(u_1 - e_1 | u_2 - e_2)$ und setzen darin

$$\text{statt } u_1|u_2:\ u_1 + c_1 | u_2 + c_2,$$

$$\text{„ } e_1|e_2:\ e_1 + c_1 | e_2 + c_2,$$

so bleibt der Werth der ϑ-Function ungeändert, da dadurch nur die Form, nicht der Werth der Argumente geändert wird. In Folge dessen bleiben auch die Punkte η und die Grössen g und h dieselben; geändert werden von den in den obigen Endformeln vorkommenden Werthen, ausser den Grössen $e_1|e_2$, die in $e_1 + c_1 | e_2 + c_2$ übergegangen sind, nur die Grössen k, da sie von den Anfangswerthen der Integrale abhängen, und die eben davon abhängigen Werthe der in $u_1 + c_1 \mid u_2 + c_2$ übergegangenen $u_1 \mid u_2$ in den Punkten η, und zwar wird aus $k_1 \mid k_2 : k'_1 \mid k'_2$ und aus $\alpha_1^{(\nu)} \mid \alpha_2^{(\nu)} : \alpha_1^{(\nu)} + c_1 \mid \alpha_2^{(\nu)} + c_2$. Setzen wir diese geänderten Werthe in den beiden obigen Gleichungen ein, die ja allgemeine Giltigkeit haben, so folgt durch Vergleichung mit den ursprünglichen:

$$k_1 = k'_1 + c_1\ ,\ k_2 = k'_2 + c_2,$$

nehmen wir also $c_1 = k_1, c_2 = k_2$ an, d. h. geben wir den Integralen $u_1 \mid u_2$ um $k_1 \mid k_2$ grössere Anfangswerthe, so dass u_1 um k_1 und u_2 um k_2 grösser wird, so folgt $k'_1 = k'_2 = 0$. Wir können also immer, aber nur auf eine Weise die unteren Grenzen $\alpha \mid \beta$ der Integrale $u_1 \mid u_2$ so bestimmen, dass in den darauf bezüglichen Gleichungen I. und II. die Grössen k den Werth 0 haben, und diese Grenzen $\alpha \mid \beta$ sollen für die Folge angenommen werden.

Das Abhängigkeitsgesetz, welches zwischen den Grössen $e_1 \mid e_2$ und den Punkten, wo $\vartheta(u_1 - e_1 \mid u_2 - e_2)$ verschwindet, herrscht, lässt sich nun, da die Grössen k in den obigen Formeln gleich 0 bestimmt sind, einfach geben, wenn man bedenkt, dass das Grössensystem $e_1 \mid e_2$ sich von dem Grössensysteme

$$\sum_\nu \alpha_1^{(\nu)} \mid \sum_\nu \alpha_2^{(\nu)} = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} \mid \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}\ ^{1})$$

nur um ganze Vielfache der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen unterscheidet, indem g und h ganze Zahlen sind. Nennen wir also **ein Grössensystem $P \mid Q$ congruent einem Grössensysteme $p \mid q$ in Bezug auf die Periodicitätsmodulen der Functionen $u_1 \mid u_2$**, wenn

$$P = p + \gamma_1 . \pi i + \gamma_2 .\ 0 + \gamma_3 . a_{1,1} + \gamma_4 . a_{1,2}\ ,$$
$$Q = q + \gamma_1 .\ 0 + \gamma_2 . \pi i + \gamma_3 . a_{1,2} + \gamma_4 . a_{2,2}\ ,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ beliebige ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, und bezeichnen dies: $P \mid Q \equiv p \mid q$, so folgt:

$$e_1 \mid e_2 \equiv \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} \mid \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)},$$

in Worten:

„**Bei den hier gewählten unteren Grenzen $\alpha \mid \beta$ der Integrale $u_1 \mid u_2$ sind die Grössen $e_1 \mid e_2$ congruent Summen von je zwei Integralen $\sum_\nu \alpha_1^{(\nu)} \mid \sum_\nu \alpha_2^{(\nu)}$ über die beiden Punkte η ausgedehnt, für die die Function $\vartheta(u_1 - e_1 \mid u_2 - e_2)$ verschwindet.**"

2.

Beweis der Möglichkeit der Lösung des vorgelegten Problems: x als eindeutige Function von $u_1 \mid u_2$ zu bestimmen.

§. 13.

Nachdem wir im Vorigen die Eigenschaften der ϑ-Function kennen gelernt, ergeben sich leicht daraus die folgenden Sätze, die uns zur vollständigen Lösung des am Ende der Graphik vorgelegten Problems führen werden. Im Folgenden bezeichnen also immer

---

[1]) Um das Operiren mit Systemen solcher zusammengehöriger Grössen wie $e_1 \mid e_2$ oder $f_1 \mid f_2$ bezüglich des Wortausdruckes zu vereinfachen, notiren wir die folgenden symbolischen Bezeichnungen:

$$e_1 \mid e_2 = f_1 \mid f_2 \text{ identisch mit } e_1 = f_1\ ,\ e_2 = f_2\ ; \qquad e_1 \mid e_2 \pm f_1 \mid f_2 = e_1 \pm f_1 \mid e_2 \pm f_2\ ; \qquad m . e_1 \mid e_2 = me_1 \mid me_2.$$

$$u_1 = \int_\alpha^{x,s} \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} \quad , \quad u_2 = \int_\beta^{x,s} \frac{(a'+b'x)\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} \; ;$$

zwei Integrale mit gemeinschaftlichem Integrationswege, bei denen die Grössen a und b so bestimmt sind, dass das aufgestellte System der Periodicitätsmodulen erfüllt wird, und die unteren Grenzen α und β so, dass die Grössen k den Werth 0 annehmen.

1. Wenn eine ϑ-Function nicht **identisch** als Function von x, **d. h. für jedes** x verschwindet (ein Fall, den wir unten näher discutiren werden), so wird sie **nur** für zwei Punkte in T'' 0^1. Sind $e_1|e_2$ die gegebenen Constanten und η_1, η_2 die beiden Punkte, wo $\vartheta = 0^1$, und man setzt

$$\int_\alpha^{\eta_1} du_1 = \alpha_1^{(1)} \quad , \quad \int_\alpha^{\eta_2} du_1 = \alpha_1^{(2)} \,,$$

$$\int_\beta^{\eta_1} du_2 = \alpha_2^{(1)} \quad , \quad \int_\beta^{\eta_2} du_2 = \alpha_2^{(2)} \,,$$

so existirt die Relation:

$$e_1|e_2 \equiv \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}|\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}.$$

Daraus folgt, dass wenn man überhaupt für die Argumente in $\vartheta(v_1|v_2)$ substituirt:

$$v_1|v_2 \equiv u_1 - \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}|u_2 - \alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}$$

die ϑ-Function, wie auch die letzte Congruenz beschaffen sein mag, immer für die beiden Punkte η_1, η_2 verschwindet. Denn dieses letzte System unterscheidet sich von $u_1 - e_1|u_2 - e_2$ nur um Vielfache der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen: ist die ϑ-Function aber für einen gewissen Werth der Argumente einmal 0, so bleibt sie es auch, wenn man diese um zusammengehörige Periodicitätsmodulen ändert, da sie durch eine solche Änderung nur einen endlichen Factor erlangt.

2. Da die ϑ verschwindet, wenn

$$u_1|u_2 = \alpha_1^{(1)}|\alpha_2^{(1)}, \text{ im Punkte } \eta_1,$$

und wenn

$$u_1|u_2 = \alpha_1^{(2)}|\alpha_2^{(2)}, \text{ im Punkte } \eta_2,$$

so folgt, wenn wir diese Werthe in die obige Congruenz einsetzen, dass die ϑ-Function verschwindet, wenn

$$v_1|v_2 \equiv -\alpha_1^{(2)}|-\alpha_2^{(2)},$$

und wenn

$$v_1|v_2 \equiv -\alpha_1^{(1)}|-\alpha_2^{(1)}.$$

Die $\vartheta(v_1|v_2)$ verschwindet also, wenn man darin für die Argumente zwei Integrale $u_1|u_2$ substituirt, deren obere Grenze einer der Punkte ist, für die eine beliebige Function $\vartheta(u_1 - e_1|u_2 - e_2)$ verschwindet, und zwar kann man, da $\vartheta(v_1|v_2) = \vartheta(-v_1|-v_2)$, den Integralen das positive oder negative Vorzeichen geben.

3. Ich behaupte nun, dass wenn man ein Grössensystem $r_1|r_2$ hat, für das die ϑ-Reihe verschwindet, das also der Gleichung

$$\vartheta(r_1|r_2) = 0$$

genügt, **man dieses immer, aber nur auf eine Weise congruent setzen kann einem Systeme von der Form:** $-\int_{\alpha}^{x,s} du_1 \,|\, -\int_{\beta}^{x,s} du_2$, also zwei negativen Integralen $u_1|u_2$ mit derselben obern Grenze.

Beweis. Zu diesem Ende betrachten wir

$$\vartheta(u_1-u_1'+r_1|u_2-u_2'+r_2),$$

und es bezeichnen $u_1'|u_2'$ die Werthe von $u_1|u_2$ in einem beliebigen Punkte x',s'; dann wird die betrachtete ϑ-Function in diesem Punkte x',s' gleich 0, weil für ihn die Argumente sich auf $r_1|r_2$ reduciren. Die ϑ muss aber auch noch in einem zweiten Punkte verschwinden, und bezeichnen wir diesen durch x_1, s_1, so folgt nach 1:

$$e_1|e_2 = u_1'-r_1|u_2'-r_2 = u_1'+\int_{\alpha}^{x_1,s_1} du_1 \,|\, u_2'+\int_{\beta}^{x_1,s_1} du_2,$$

$$r_1|r_2 = -\int_{\alpha}^{x_1,s_1} du_1 \,|\, -\int_{\beta}^{x_1,s_1} du_2.$$

Angenommen, es sei noch eine zweite Zerlegung möglich:

$$r_1|r_2 = -\int_{\alpha}^{x_2,s_2} du_1 \,|\, -\int_{\beta}^{x_2,s_2} du_2:$$

so folgt, wenn wir dies in unserer $\vartheta(u_1-u_1'+r_1|u_2-u_2'+r_2)$ substituiren, die für $x,s=x',s'$ und $x,s=x_1,s_1$ verschwindet, dass sie auch noch für $x,s=x_2,s_2$, also für einen dritten Punkt verschwinden muss. Dies ist aber unmöglich, da sie wegen der willkürlichen Wahl von $u_1'|u_2'$ nicht identisch verschwindet. **Somit ist der Beweis geliefert, dass wenn** $\vartheta(r_1|r_2)=0$, **nur ein Punkt** x_1,s_1 **existirt derart, dass**

$$\left\{ r_1|r_2 = -\int_{\alpha}^{x_1,s_1} du_1 \,|\, -\int_{\beta}^{x_1,s_1} du_2. \right\}$$

Die betrachtete ϑ-Function wird nun 0, wenn wir $x,s=x_1,s_1$ setzen: dann resultirt, da

$$\int_{\alpha}^{x_1,s_1} du_1 - u_1' + r_1 \,|\, \int_{\beta}^{x_1,s_1} du_2 - u_2' + r_2 = -u_1' \,|\, -u_2',$$

$$\left\{ \vartheta(\pm u_1' \,|\, \pm u_2') = 0 \right\}$$

und da der Punkt x',s' dem diese Integrale entsprechen, **ein ganz beliebiger** x,s **ist**, so folgt der wichtige Satz, der die Umkehrung des vorhergehenden ist:

„**Die Function** $\vartheta(v_1|v_2)$ **verschwindet als Function von** x **identisch, wenn man für die Argumente** $v_1|v_2$ **zwei Integrale** $u_1|u_2$ **mit derselben obern Grenze oder ein diesen congruentes System substituirt.**"

Jetzt können wir auch einen Fall entscheiden (ob dies der einzige ist, werden wir im Folgenden sehen), wo $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ identisch, d. h. für jeden Werth von x verschwindet. Dies geschieht, wenn

$$e_1|e_2 = 0|0,$$

da dann $u_1-e_1|u_2-e_2$ sich auf ein $u_1|u_2$ congruentes System reducirt und, wie eben bewiesen, $\vartheta(v_1|v_2)=0$ ist, wenn $v_1|v_2 = u_1|u_2$. **Lässt sich also das System** $e_1|e_2$ **aus Vielfachen**

der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen zusammensetzen, so verschwindet die ϑ durch Substitution von $u_1-e_1|u_2-e_2$ identisch.

4. „**Ein beliebiges Grössensystem $e_2|e_2$, für das $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ nicht identisch verschwindet, kann immer, aber nur auf eine Weise Summen von je zwei Integralen congruent gesetzt werden, so dass**

$$e_1|e_2 \equiv \int_\alpha^{x_1,s_1} du_1 + \int_\alpha^{x_2,s_2} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_1,s_1} du_2 + \int_\beta^{x_2,s_2} du_2.\text{“}$$

Denn dann sind nach Vorigem x_1, s_1 und x_2, s_2 die beiden Punkte, für die $\vartheta(u_1-e_1\,|\,u_2-e_2)$ verschwindet, und könnte man $e_1|e_2$ noch auf eine andere Weise congruent setzen, z. B.,

$$e_1|e_2 \equiv \int_\alpha^{x_3,s_3} du_1 + \int_\alpha^{x_4,s_4} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_3,s_3} du_2 + \int_\beta^{x_4,s_4} du_2,$$

so würde $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ auch noch für $x, s = x_3, s_3$ und $x, s = x_1, s_1$ verschwinden, was unmöglich ist, da diese Function, wenn sie nicht identisch verschwindet, nur für zwei Punkte bewiesenermassen verschwinden kann.

Verschwindet aber $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ identisch, d. h. für jeden Werth von x, was einmal der Fall ist, wenn $e_1|e_2 \equiv 0|0$, so muss sich das Grössensystem $e_1|e_2$ auf unzählige Weisen congruent setzen lassen Summen von je zwei Integralen, so dass

$$e_1|e_2 \equiv \int_\alpha^{x,s} du_1 + \int_\alpha^{\xi,\sigma} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x,s} du_2 + \int_\beta^{\xi,\sigma} du_2,$$

wo dem x, s jeder beliebige Werth genügt. Die Lage des Punktes ξ, σ ist dann von der Lage des Punktes x, s abhängig und ändert sich stetig mit ihr. Um dieses Abhängigkeitsgesetz zu erforschen, differenziren wir die Congruenz, was erlaubt ist, da x vollkommen variabel. Sie ist gleichbedeutend mit dem folgenden Systeme zweier Gleichungen:

$$\varepsilon_1 = \int_\alpha^{x,s} du_1 + \int_\alpha^{\xi,\sigma} du_1 \quad , \quad \varepsilon_2 = \int_\beta^{x,s} du_2 + \int_\beta^{\xi,\sigma} du_2,$$

wo $\varepsilon_1|\varepsilon_2$ Constante sind congruent $e_1|e_2$. Es folgt also durch Differenziation:

$$0 = \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} + \frac{(a+b\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi,\varkappa,\lambda,\mu)}}, \quad 0 = \frac{(a'+b'x)\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} + \frac{(a'+b'\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi,\varkappa,\lambda,\mu)}}.$$

Eliminiren wir die Differentiale, so folgt als einzige Auflösung: $\xi = x$, und die Gleichungen zeigen, dass dann die beiden Wurzeln $\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}$ und $\sqrt{(\xi,\varkappa,\lambda,\mu)}$ dieselben absoluten Werthe, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, so dass, wenn zum Punkte $x = x$ der Werth $(+s)$ gehört, zum Punkte $\xi = x$ der Werth $(-s)$ gehören muss. Demnach haben die Punkte x, s und ξ, σ eine solche Lage wie x, s und $x, -s$.

Ist also $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ identisch 0, so ist

$$e_1|e_2 \equiv \int_\alpha^{x,s} du_1 + \int_\alpha^{x,-s} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x,s} du_2 + \int_\beta^{x,-s} du_2$$

für jeden Werth von x; in Folge dieser Eigenschaft müssen alle Systeme $e_1|e_2$, für die $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ identisch verschwindet, unter einander congruent sein, und da $0|0$ ein solches

System ist, indem $\vartheta(u_1|u_2) = 0$, so folgt, **dass** $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$ **nur identisch verschwindet, wenn** $e_1|e_2 \equiv 0|0$, **und es ist dann das System** $e_1|e_2$ **congruent Summen von je zwei Integralen ausgedehnt über die beiden Punkte** x, s **und** $x, -s$, **die einem beliebigen Werthe von** x **im obern und untern Blatte der Fläche entsprechen.** Man hat also für jeden Werth von x die Congruenz:

$$0|0 \equiv \int_\alpha^{x,s} du_1 + \int_\alpha^{x,-s} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x,s} du_2 + \int_\beta^{x,-s} du_2,$$

oder auch

$$\int_\alpha^{x,-s} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x,-s} du_2 \equiv -\int_\alpha^{x,s} du_1 \Big| -\int_\beta^{x,s} du_2.$$

Anmerkung. Es bedarf noch einer Erklärung, wesshalb, selbst wenn $e_1|e_2 \equiv 0|0$, das Endresultat des §. 11 scheinbar $n = 2$ ist. Dies beruht auf der Formel (B), die nur dann Giltigkeit hat, wenn die ϑ in einigen Punkten verschwindet, und dann giebt der Werth $n = 2$ nothwendig die Zahl dieser Punkte an. Ist aber ϑ in allen Punkten identisch 0, so verliert die Formel (B) jegliche Bedeutung, indem dann allenthalben $\vartheta^+ = \vartheta^- = 0$ ist, und wenn wir sie doch anwenden, müssen wir natürlich ein falsches Resultat erhalten.

Wir kommen jetzt zum Kernpunkte der ganzen Untersuchung. In der Graphik hatten wir gefunden, dass zu einem Werthe von x, s unzählig viele correspondirende Systeme $u_1|u_2$ gehören, die alle unter einander congruent sind, d. h. sich nur um zusammengehörige Periodicitätsmodulen unterscheiden. Die Frage, die die Graphik nicht lösen konnte, war, ob wenn ein System $u_1|u_2$ gegeben und in Folge dessen auch alle congruenten, dadurch der Werth von x eindeutig bestimmt sei, ob man also

$$x = \varphi(u_1|u_2)$$

setzen dürfe. Diese lässt sich jetzt sofort beantworten. Sind nämlich $u_1|u_2$ überhaupt die Werthe zweier demselben Punkte in T' entsprechender Integrale, so muss für jeden Werth dieses Punktes

$$\vartheta(-u_1|-u_2) = 0$$

sein, also nach 3:

$$u_1|u_2 \equiv \int_\alpha^{x,s} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x,s} du_2;$$

und nur auf eine Weise ist diese Congruenz möglich, indem ein Grössensystem, für das die ϑ-Reihe verschwindet, nur auf eine Weise zwei Integralen mit derselben obern Grenze congruent gesetzt werden kann. Demnach ist durch die Werthe des Systems $u_1|u_2$, wenn sie numerisch für einen Punkt gegeben sind, dieser Punkt selbst eindeutig bestimmt. Ändert sich $u_1|u_2$ stetig, indem wir von einem Punkte zu benachbarten übergehen, so ändert sich auch x stetig. **Demnach ist** x **eindeutig als Function von** $u_1|u_2$ **bestimmbar, muss sich also rational durch diese Grössen ausdrücken lassen.** Dieselbe Eigenschaft muss den fünf darzustellenden Functionen zukommen, da sie in T' auch einwerthig als Functionen von x bestimmt sind. Sie müssen sich also, so lange man in T' operirt, **rational** durch $u_1|u_2$ ausdrücken lassen. Hiermit ist die Möglichkeit der Lösung des Problems bewiesen, und es kommt nur noch darauf an, die Ausdrücke für die Functionen zu bilden.

Eine andere Auffassung des Problems der Inversion für diese Classe von Transcendenten hat **Jacobi** versucht in der schon citirten Abhandlung, und haben nach ihm ausgeführt **Göpel** [1]) und **Rosenhain** [2]). Sie ergiebt sich leicht aus dem Lehrsatze sub 4. Setzen wir nämlich mit **Jacobi** bis auf Vielfache der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen

$$\int_\alpha^x du_1 + \int_\alpha^y du_1 = u,$$

$$\int_\beta^x du_2 + \int_\beta^y du_2 = u',$$

so folgt aus dem angeführten Lehrsatze, dass wenn die Werthe von u und u' beliebig numerisch gegeben sind (so dass nicht $u|u' \equiv 0|0$), die Werthe von x und y nur auf eine Weise so bestimmt werden können, dass die Congruenzgleichung:

$$u\,|\,u' \equiv \int_\alpha^x du_1 + \int_\alpha^y du_1 \;\Big|\; \int_\beta^x du_2 + \int_\beta^y du_2$$

erfüllt wird. Lässt man u und u' stetig variiren, so ändern sich auch x und y stetig. **Demnach sind x und y eindeutig als Functionen von u und u' bestimmbar, müssen sich also rational durch diese Grössen ausdrücken lassen.** Man kann also mit **Jacobi** setzen:

$$x = \lambda(u, u') \quad , \quad y = \lambda'(u, u'),$$

wo λ und λ' rationale Functionen von u und u' bezeichnen.

Diese Auffassung ist in gewissen Beziehungen allgemeiner als die unsrige, hat dafür aber den Nachtheil, dass durch sie der einfache Zusammenhang, welcher zwischen den drei Grössen x, $u_1|u_2$ herrscht, verwischt wird. Die Functionen λ und λ' sind gewissermassen Functionen zweier Variablen, indem die Werthe von u und u' ganz beliebig angenommen werden können und immer aus ihnen x und y sich eindeutig bestimmen. Dagegen bei unserer $\varphi(u_1|u_2)$ sind die Grössen $u_1|u_2$ ihrer Natur nach immer an die Bedingung $\vartheta(u_1|u_2) = 0$ geknüpft, so dass eine Änderung von u_1 auch eine von u_2 bedingt und umgekehrt. **Die Function φ ist demnach nur eine Function zweier Symbole, aber einer Variable.** Die Functionen φ und λ haben das mit einander gemein, dass sie vierfach periodisch sind in Bezug auf gleichzeitige Änderungen der Argumente. Von dieser Eigenschaft sind **Göpel** und **Rosenhain** in ihren ausgezeichneten Arbeiten ausgegangen, indem sie Reihen bildeten, die Functionen von zwei Variablen mit vierfacher Periodicität darstellten, die algebraischen Beziehungen zwischen ihnen untereinander und ihren Differentialquotienten ermittelten und dann durch passende Substitutionen ultraëlliptischer Integrale zu den inversen Functionen gelangten. Wir sind den directen Weg gegangen, indem unsere ϑ-Function gleich schon als Function von x eingeführt wurde, und daraus im Folgenden sich unmittelbar die darzustellenden Functionen ergeben werden, ohne dass wir, wie die Vorgänger, nöthig haben, vorher die Relationen, welche zwischen den ϑ-Reihen bestehen, aufzusuchen.

---

[1]) Crelle's Journal Bd. 35: Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis.

[2]) Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, tome XI du Recueil des savants étrangers de l'académie des sciences de Paris.

3.

Bildung der Ausdrücke für die darzustellenden fünf Functionen.

§. 14.

Die ϑ-Function können wir **als den Keim** der algebraischen Functionen ansehen und wir wollen jetzt dazu übergehen letztere darzustellen. Da algebraische Functionen in der Fläche T oder T' für gleich viel Punkte ∞^1 und 0^1 werden, so nähern wir uns ihnen, wenn wir den Quotienten von zwei ϑ-Functionen betrachten: derselbe hat wieder eine Eigenschaft mehr mit den algebraischen Functionen gemein und wird uns leicht zu weiteren Resultaten führen. Setzen also:

$$R = \frac{\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)}{\vartheta(u_1-f_1|u_2-f_2)},$$

so hat dieser Ausdruck folgende Eigenschaften: er wird für zwei Punkte in T' ∞^1 und 0^1, an den Linien a und c bleibt er ungeändert, denn die ϑ sind dort stetig, beim Überschreiten einer Linie b_ν ($\nu = 1, 2$) von der negativen auf die positive Seite erlangt

$$\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2) \text{ den Factor } e^{-2(u_\nu-e_\nu)-a_{\nu,\nu}},$$
$$\vartheta(u_1-f_1|u_2-f_2) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad e^{-2(u_\nu-f_\nu)-a_{\nu,\nu}},$$

daher erlangt

$$R \begin{cases} \text{am Querschnitte } b_1 \text{ den Factor } e^{2(e_1-f_1)} \\ \text{„} \qquad \text{„} \qquad b_2 \text{ „} \quad \text{„} \quad e^{2(e_2-f_2)}. \end{cases}$$

R **ist demnach in** T' **eine einwerthige und stetige Function des Ortes von** x, **die für zwei Punkte** ∞^1 **und** 0^1 **wird und an den Querschnitten constante Factoren erlangt.** Könnten wir nun diesem Ausdrucke Factoren an den Querschnitten beibringen, die Quadratwurzeln der Einheit wären, und suchten alle möglichen Formen, so müssten unter diesen die fünf vorgelegten: $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$ etc. einbegriffen sein. Um an allen Querschnitten die Factoren beliebig zu erhalten, müssen wir noch eine Exponentialgrösse hinzufügen, schreiben also, indem A eine willkürliche Constante bedeutet,

$$R = A\,\frac{\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)}{\vartheta(u_1-f_1|u_2-f_2)}\,e^{\varepsilon_1 u_1+\varepsilon_2 u_2},$$

dann bleiben die Punkte, wo R ∞^1 und 0^1 wird, ungeändert, und

$$R \text{ erlangt} \begin{cases} \text{am Querschnitte } a_\nu \text{ den Factor } e^{\varepsilon_\nu \pi i} \\ \text{„} \qquad \text{„} \qquad b_\nu \text{ „} \quad \text{„} \quad e^{2(e_\nu-f_\nu)+\varepsilon_1 a_{1,\nu}+\varepsilon_2 a_{2,\nu}}. \end{cases}$$

Es erlangt also R am Querschnitte a_ν den Factor ± 1, je nachdem wir $\varepsilon_\nu = 0$ oder $= 1$ setzen. Soll R am Querschnitte b_ν den Factor ± 1 erlangen, so haben wir nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ zu bestimmen:

$$2(e_\nu-f_\nu) + \varepsilon_1 a_{1,\nu} + \varepsilon_2 a_{2,\nu} = \varepsilon'_\nu \pi i \;.\; \varepsilon'_\nu = 0 \text{ oder } = 1.$$

Dies giebt uns eine Relation zwischen den Constanten e_ν und f_ν der beiden ϑ, nämlich:

$$\left\{ e_\nu = f_\nu + \frac{\varepsilon'_\nu}{2}\pi i - \frac{\varepsilon_1}{2} a_{1,\nu} - \frac{\varepsilon_2}{2} a_{2,\nu} \right\} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Führen wir die hieraus sich ergebenden Werthe für e_1 und e_2 in R ein, so wird

$$R = A \frac{\vartheta\left(u_1 - f_1 - \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i + \sum\limits_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{1,\nu} \,\middle|\, u_2 - f_2 - \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i + \sum\limits_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{2,\nu}\right)}{\vartheta(u_1 - f_1 \,|\, u_2 - f_2)} e^{\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2}$$

und dieser Endausdruck hat folgende Eigenschaften:

„Er wird, da $f_1 \,|\, f_2$ willkürlich, für zwei beliebig zu wählende Punkte ∞^1 und für zwei andere davon abhängige 0^1, ist in der ganzen Fläche T' einwerthig und stetig als Function des Ortes von x bestimmt und erlangt

am Querschnitte a_ν den Factor $e^{\varepsilon_\nu \pi i} = (-1)^{\varepsilon_\nu} = \pm 1$, je nachdem $\varepsilon_\nu = 0$ oder $= 1$,
„ „ b_ν „ „ $e^{\varepsilon'_\nu \pi i} = (-1)^{\varepsilon'_\nu} = \pm 1$, je nachdem $\varepsilon'_\nu = 0$ oder $= 1$.

R^2 erlangt also, wenn die Grössen $\varepsilon, \varepsilon'$ so gewählt werden (0 oder 1), an allen Querschnitten den Factor $+1$, ist demnach nicht nur in T', sondern auch in der ganzen Fläche T einwerthig und stetig, also **eine wie die Fläche T verzweigte algebraische Function.** Da wir nun die Grössen $\varepsilon, \varepsilon'$ beliebig 0 oder 1 setzen können, **so liegen in dem Ausdrucke R alle die algebraischen Functionen, die in T' einwerthig, für zwei beliebige Punkte x, s ∞^1 werden und beim Überschreiten der Querschnitte Factoren ± 1 erlangen, in Folge der letztern Eigenschaft aber Quadratwurzeln aus algebraischen wie die Fläche T verzweigten Functionen sind.**"

§. 15.

Den Zähler des Ausdruckes R wollen wir gesondert untersuchen und setzen

$$u_1 - f_1 \,|\, u_2 - f_2 = v_1 \,|\, v_2,$$

so wird:

$$R = A_1 \frac{\vartheta\left(v_1 - \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2} a_{1,1} + \frac{\varepsilon_2}{2} a_{1,2} \,\middle|\, v_2 - \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2} a_{1,2} + \frac{\varepsilon_2}{2} a_{2,2}\right)}{\vartheta(v_1 \,|\, v_2)} e^{\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2}.$$

Setzen wir nun statt des Ausdruckes im Zähler die ihm entsprechende zweifach unendliche Reihe, so wird der Exponent des allgemeinen Gliedes, wenn $A_1 = e^c$:

$$a_{1,1}m^2 + 2a_{1,2}mn + a_{2,2}n^2 + 2m\left(v_1 - \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{1,1} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{1,2}\right) + 2n\left(v_2 - \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{1,2} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{2,2}\right) + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + c$$

$$= a_{1,1}\left(m + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + 2a_{1,2}\left(m + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(n + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) + a_{2,2}\left(n + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + 2\left(m + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1 - \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i\right) + 2\left(n + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2 - \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i\right),$$

wenn wir $A_1 = e^c$ so bestimmen, dass die Constante c den Werth annimmt:

$$c = a_{1,1}\frac{\varepsilon_1^2}{4} + a_{1,2}\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} + a_{2,2}\frac{\varepsilon_2^2}{4} - \pi i\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon'_1}{2} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon'_2}{2}\right).$$

Wir erkennen daraus, dass der Gesammtzähler des Ausdruckes R eine der ursprünglichen ähnlich gebaute ϑ-Reihe ist, nur mit dem Unterschiede, dass statt m und n: $m+\frac{\varepsilon_1}{2}$ und $n+\frac{\varepsilon_2}{2}$ und statt $v_1|v_2$: $v_1-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i|v_2-\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i$ gesetzt sind. Diese ϑ-Reihen wollen wir nach dem Vorgange von **Riemann** zur Unterscheidung von der ursprünglichen durch das Symbol $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)$ bezeichnen, welches wir die Charakteristik nennen, indem es sämmtliche Bestimmungsstücke enthält. Dann ist also:

$$\text{(I)}\qquad \underline{\underline{R}} = \frac{\vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2)}{\vartheta(v_1|v_2)}$$

und die Factoren an den Querschnitten a_1, b_1, a_2, b_2 sind in derselben Reihenfolge: $(-1)^{\varepsilon_1}$, $(-1)^{\varepsilon_1'}$, $(-1)^{\varepsilon_2}$, $(-1)^{\varepsilon_2'}$. Es ist ferner

$$\text{(II)}\qquad \vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2) = A_1\,\vartheta\Big(v_1-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i+\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu}{2}a_{1,\nu}\,\Big|\,v_2-\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i+\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu}{2}a_{2,\nu}\Big)\,e^{\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{a_{1,1}\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2+2a_{1,2}\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)+a_{2,2}\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2+2\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i\right)+2\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2-\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i\right)}$$

und in dieser allgemeinen Form ist auch unsere gewöhnliche ϑ-Reihe einbegriffen, indem

$$\vartheta(v_1|v_2) = \vartheta\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2).$$

Da die Grössen ε, ε' entweder $=0$ oder $=1$ sein können, man aber aus 0 und 1 auf $2^4=16$ Weisen Variationen zu vier Elementen mit Wiederholung bilden kann, so folgt, dass in $\vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2)$ überhaupt sechszehn Formen enthalten sind, und es fragt sich jetzt, wie viele von diesen ϑ-Reihen gerade, wie viele ungerade Functionen der Grössen $v_1|v_2$ sind. Bedenkt man nun, dass der Werth der Reihe sub (II) nicht geändert wird, wenn man darin statt $\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ und $\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$: $-\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ und $-\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$ schreibt, indem diese Grössen **auch so** alle ganzen oder halben Zahlen durchlaufen, wenn m und n alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen: dadurch also nur die Ordnung der Summation umgekehrt wird: diese Umschreibung aber in dem allgemeinen Gliede dieselbe Änderung bewirkt, als wenn man statt $v_1|v_2$: $-v_1|-v_2$ geschrieben und dann mit

$$e^{4\left(m+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i+4\left(n+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i} = e^{(\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2')\pi i} = (-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'},$$

also mit einem constanten Factor multiplicirt hätte, da $e^{2m\varepsilon_1'\pi i}=1=e^{2n\varepsilon_2'\pi i}$, so folgt:

$$\text{(III)}\qquad \vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2) = (-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'}\,\vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(-v_1|-v_2).$$

Demnach ist die ϑ-Reihe gerade, wenn $\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'\left\{\begin{smallmatrix}=0\\=2\end{smallmatrix}\right\}$, ungerade, wenn $\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'=1$. **Unter den sechszehn Formen sind sechs ungerade Functionen**, und ihre Charakteristiken sind:

$$\left(\begin{smallmatrix}01\\01\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}01\\11\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}11\\01\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}10\\10\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}10\\11\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right).$$

Die übrigen zehn sind gerade Functionen, mit den Charakteristiken:

$$\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}00\\01\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}01\\00\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}00\\11\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}01\\10\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}10\\01\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}11\\00\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}11\\11\end{smallmatrix}\right).$$

Die ungeraden ϑ-Functionen verschwinden, wie alle ungeraden Functionen, wenn man die Argumente gleich 0 setzt, denn ist (die Charakteristik werde durch einen Buchstaben bezeichnet)

$$\text{(IV)} \left\{ \begin{aligned} & \vartheta(\varepsilon)(v_1|v_2) = -\vartheta(\varepsilon)(-v_1|-v_2), \\ \text{so ist} \quad & \vartheta(\varepsilon)(0|0) = -\vartheta(\varepsilon)(0|0) = 0. \end{aligned} \right.$$

§. 16.

Die den sechs ungeraden ϑ-Functionen gemeinsame Eigenschaft, zu verschwinden, wenn die Argumente $v_1|v_2 = 0|0$ (ob von den geraden auch welche für diese Werthe verschwinden, bleibe einstweilen dahingestellt) macht es uns möglich, Functionen zu bilden, **die in T' einwerthig, nur für einen Punkt ∞^1 und 0^1 werden und an den Querschnitten Factoren ± 1 erlangen.** Da nun $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}, \ldots \sqrt{1-\mu^2 x}$ und Quotienten von je zweien dieser fünf Functionen die einzigen sind, die diese Eigenschaft haben, so müssen sie wenigstens theilweise in den zu bildenden Formen enthalten sein, ob alle, wird die folgende Untersuchung lehren.

Wir hatten nämlich gesetzt: $v_1|v_2 = u_1 - f_1|u_2 - f_2$, wo f_1, f_2 ganz beliebige Grössen waren; wir können demnach auch setzen:

$$v_1|v_2 = u_1 - u_1'|u_1 - u_2',$$

wo $u_1'|u_2'$ die Werthe von $u_1|u_2$ in einem beliebigen festen Punkte x', s' bezeichnen sollen. Substituiren wir dies in den ϑ-Functionen, **so verschwinden sämmtliche sechs ungerade ϑ-Functionen für denselben Punkt** $x, s = x', s'$, da dafür $v_1|v_2 = 0|0$.

Aus $\vartheta(\varepsilon)(0|0) = 0$ folgt aber aus (II) des vorigen Paragraphen:

$$(a) \qquad \vartheta\Big(-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{1,\nu} \Big| -\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{2,\nu}\Big) = 0,$$

da der Factor $A_1 e^{\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2}$ endlich bleibt, wenn $v_1 | v_2 = 0 | 0$. Wir finden also den zweiten Punkt x_1, s_1, für den eine ungerade $\vartheta(\varepsilon)(u_1 - u_1'|u_2 - u_2')$ ausser für $x, s = x', s'$ noch verschwindet, indem wir

$$(b) \qquad -\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{1,\nu} \Big| -\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{2,\nu} \equiv -\int_\alpha^{x_1, s_1} du_1 \Big| -\int_\beta^{x_1, s_1} du_2$$

setzen, was ja nur auf eine Weise möglich ist. Ich behaupte nun, dass ein Punkt x_1, s_1, der dieser Congruenz genügt, nothwendig einer der sechs Verzweigungspunkte der Fläche T ist. Denn da die Grössen ε, ε' nur 0 oder 1 sein können, so folgt aus der obigen Congruenz durch Multiplication mit der Zahl 2:

$$0 | 0 \equiv 2\int_\alpha^{x_1, s_1} du_1 \Big| 2\int_\beta^{x_1, s_1} du_2.$$

Aus Früherm ist aber bekannt, dass für jeden Werth von x die Congruenz

$$0 | 0 \equiv \int_\alpha^{x, s} du_1 + \int_\alpha^{x, -s} du_1 \Big| \int_\beta^{x, s} du_2 + \int_\beta^{x, -s} du_2$$

stattfindet, und diese Congruenz kann für $x, s = x_1, s_1$ nur die Form der vorhergehenden annehmen, wenn die beiden Punkte x, s und $x, -s$ zusammenfallen, d. h. wenn x_1 ein Verzweigungspunkt ist. Da es sechs Verzweigungspunkte giebt, so werden demnach von den sechszehn Systemen, die sich aus Halben der correspondirenden Periodicitätsmodulen bilden, sechs sich in die Form (b) bringen lassen und in Folge dessen die Gleichung (a) erfüllen. Gäbe es mehr Verzweigungspunkte, so würde die Gleichung (a) für mehr als sechs Systeme stattfinden, d. h. es müssten auch von den geraden ϑ-Functionen einige für $v_1|v_2 = 0|0$ verschwinden, und umgekehrt, verschwänden von den geraden ϑ-Functionen einige, so müssten mehr als sechs Systeme sich in die Form (b) bringen lassen, was unmöglich ist, da nur die sechs Verzweigungspunkte dieser Congruenz genügen können. Daraus folgt, **dass die Punkte, für die die ungeraden ϑ-Functionen ausser für den gemeinsamen Punkt $x, s = x', s'$ noch verschwinden, die sechs Verzweigungspunkte sind,** d. h. wenn man in einer ungeraden ϑ-Function für die Argumente $v_1|v_2$ die Integrale $u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2$ substituirt, so verschwindet dieselbe für den Punkt x', s' und ausserdem noch für einen bestimmten der sechs Verzweigungspunkte $0, 1, \frac{1}{\varkappa^2} \ldots \infty$.

Zu demselben Resultate können wir auch durch rein algebraische Betrachtungen gelangen. **Bilden wir nämlich den Quotienten von zwei ungeraden ϑ-Functionen:**

$$r = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon'_1\ \varepsilon'_2}(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)}{\vartheta\binom{\eta_1\ \eta_2}{\eta'_1\ \eta'_2}(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)}, \quad \begin{matrix} \varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 \varepsilon'_2 = 1, \\ \eta_1 \eta'_1 + \eta_2 \eta'_2 = 1, \end{matrix}$$

so hat derselbe folgende Eigenschaften. Für $x, s = x', s'$ werden Zähler und Nenner des Ausdruckes zugleich 0^1, r bleibt also in diesem Punkte endlich und wird demnach nur für den einen Punkt 0^1, für den die ϑ im Zähler noch verschwindet, und für den einen Punkt ∞^1, für den die ϑ im Nenner noch verschwindet. Um die Factoren zu finden, die die Function beim Überschreiten der Querschnitte erlangt, so wissen wir, dass die Factoren

$$\begin{array}{llcccc} & & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ \text{von } R = \dfrac{\vartheta(\varepsilon)(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)}{\vartheta(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)} & \Big\} & (-1)^{\varepsilon_1}, & (-1)^{\varepsilon'_1}, & (-1)^{\varepsilon_2}, & (-1)^{\varepsilon'_2}, \\ \text{von } R' = \dfrac{\vartheta(\eta)(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)}{\vartheta(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)} & \Big\} & (-1)^{\eta_1}, & (-1)^{\eta'_1}, & (-1)^{\eta_2}, & (-1)^{\eta'_2}, \end{array}$$

sind, daher sind die Factoren

$$\text{von } r = \frac{R}{R'} = \frac{\vartheta(\varepsilon)(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)}{\vartheta(\eta)(u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2)} \Big\} \ (-1)^{\varepsilon_1 + \eta_1}, \ (-1)^{\varepsilon'_1 + \eta'_1}, \ (-1)^{\varepsilon_2 + \eta_2}, \ (-1)^{\varepsilon'_2 + \eta'_2},$$

indem wir allgemein statt $(-1)^{\varepsilon - \eta}$ das gleichwerthige (da ε, η nur 0 oder 1) $(-1)^{\varepsilon + \eta}$ schreiben.

Demnach ist r eine algebraische Function, die in T' einwerthig, nur für einen Punkt ∞ und 0^1 wird und an den Querschnitten Factoren ± 1 annimmt. Es erlangt also r^2 an allen Querschnitten den Factor $+1$, ist demnach eine wie die Fläche T verzweigte algebraische Function, die für einen Punkt ∞^2 und für einen Punkt 0^2 wird.

Der allgemeine Ausdruck einer wie die Fläche T verzweigten Function, die nur für zwei Punkte ∞^1 und 0^1 wird, ist aber (nach §. 3)

$$\frac{m + nx}{m' + n'x}$$

wo m, m', n, n' beliebige Constante bezeichnen, die theilweise auch 0 sein können, wenn z. B. der Ausdruck für $x = \infty$ keinen endlichen Werth haben soll. In dieser Form muss also die Function r^2 enthalten sein, und da dieser Ausdruck nur dann in **einem** Punkte ∞^2 und 0^2 wird, wenn wir die Constanten so bestimmen, dass die beiden Punkte, wo er ∞^1, so wie die, wo er 0^1 wird, zusammenfallen, er also nur in Verzweigungspunkten ∞ und 0 wird, so folgt daraus, dass der Quotient r zweier ϑ-Functionen, die für $x, s = x', s'$ beide verschwinden, in einem Verzweigungspunkte ∞^1 und in einem andern 0^1 wird, und da es nur sechs Verzweigungspunkte giebt, so verschwinden auch nur sechs von den sechszehn ϑ-Functionen, wenn man die Argumente $v_1 | v_2 = 0 | 0$ setzt.

Hat man nun $\dfrac{m + nx}{m' + n'x}$ so bestimmt, dass dieser Ausdruck für den Verzweigungspunkt, wo die ϑ im Zähler verschwindet, 0^2 und für den andern, wo die ϑ im Nenner verschwindet, ∞^2 wird, so kann sich r^2 von diesem Ausdrucke nur um eine Constante unterscheiden, und man hat:

$$r = \text{Const.} \sqrt{\frac{m + nx}{m' + n'x}}.$$

Der Werth dieser Constante ist offenbar von dem Punkte x', s' abhängig, für den der ϑ-Quotient unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Da der Werth des Quotienten nicht geändert wird, wenn wir x, s mit x', s' vertauschen, indem dann Zähler und Nenner als ungerade Functionen den Factor -1 erhalten, so darf durch diese Vertauschung auch die rechte Seite der vorstehenden Gleichung sich nicht ändern, d. h. es muss sein:

$$r = \text{Const}_1 . \sqrt{\frac{m + nx'}{m' + n'x'}} \cdot \sqrt{\frac{m + nx}{m' + n'x}},$$

wo jetzt Const_1 von x und x' vollkommen unabhängig ist. **In dem Ausdrucke r sind demnach alle algebraischen Functionen enthalten, die für einen Verzweigungspunkt ∞^1 und für einen andern 0^1 werden, und an den Querschnitten Factoren ± 1 annehmen, demnach auch die fünf darzustellenden Functionen: $\sqrt{x}, \sqrt{1-x}$ etc.:** die Aufgabe ist nur noch, für jede der sechs ϑ-Functionen den ihr zugehörigen Verzweigungspunkt zu finden, für den sie ausser für $x, s = x', s'$ noch verschwindet.

§. 17.

Die sechs ungeraden ϑ-Functionen sind nun, wenn wir $u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2'$ mit $v_1 \,|\, v_2$ bezeichnen:

$$1.\quad \vartheta\left(\begin{smallmatrix}11\\01\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2) = \text{Const.}\,\vartheta\left(v_1 + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\Big|\, v_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right) e^{v_1 + v_2}$$

$$2.\quad \vartheta\left(\begin{smallmatrix}01\\01\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2) = \text{Const.}\,\vartheta\left(v_1 + \frac{a_{1,2}}{2} \,\Big|\, v_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right) e^{v_2}$$

$$3.\quad \vartheta\left(\begin{smallmatrix}01\\11\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2) = \text{Const.}\,\vartheta\left(v_1 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\Big|\, v_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right) e^{v_2}$$

$$4.\quad \vartheta\left(\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right)(v_1|v_2) = \text{Const.}\,\vartheta\left(v_1 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\Big|\, v_2 + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right) e^{v_1 + v_2}$$

$$5.\ \vartheta\binom{10}{10}(v_1|v_2) = \text{Const.}\,\vartheta\Big(v_1 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2}\,\Big|\,v_2 + \frac{a_{1,2}}{2}\Big)e^{v_1}$$

$$6.\ \vartheta\binom{10}{11}(v_1|v_2) = \text{Const.}\,\vartheta\Big(v_1 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2}\,\Big|\,v_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}\Big)e^{v_1}.$$

Um für jede dieser Functionen den zugehörigen Verzweigungspunkt zu finden, für den sie ausser für den Punkt $x, s = x', s'$ noch verschwindet, müssen wir die Werthe des Integralsystems

$$-\int_\alpha^x du_1 \,\Big|\, -\int_\beta^x du_2$$

für sämmtliche sechs Verzweigungspunkte, als obere Grenzen, bilden, und dann untersuchen, welchem von den sechs Systemen, in die die Argumente der rechts stehenden einfachen ϑ-Functionen übergehen, wenn man, der Gleichung $x, s = x', s'$ entsprechend, die Grössen $v = 0$ setzt, ein jedes Integralsystem congruent gesetzt werden kann; denn es ist

$$-\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2}a_{1,\nu} \,\Big|\, -\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2}a_{2,\nu} \equiv -\int_\alpha^{x_1} du_1 \,\Big|\, -\int_\beta^{x_1} du_2,$$

wenn x_1 den Verzweigungspunkt bezeichnet, für den die ungerade Function $\vartheta(\varepsilon)(u_1 - u_1' | u_2 - u_2')$ noch verschwindet, ausser für $x, s = x', s'$.

Es sei nun: $-\int_\alpha^0 du_1 = u_\alpha$; $-\int_\beta^0 du_2 = u_\beta$: Werthe, die wir einstweilen noch nicht kennen, indem wir die unteren Grenzen α und β zwar so angenommen, dass die ϑ bestimmte Eigenschaften erlangte, sie aber noch nicht ausgewerthet haben. Das nur wissen wir, dass die Grenzen α und β und folglich auch die Grössen u_α und u_β immer, aber nur auf eine Weise, d. h. einwerthig so bestimmbar sind, dass sie den aufgestellten Bedingungen genügen. Die Werthe der übrigen Integrale zwischen den Verzweigungspunkten, auf bestimmten Wegen in der Fläche T erstreckt, kennen wir, da sie sich, wie wir früher gesehen (vergleiche §. 5), durch Halbe der Periodicitätsmodulen ausdrücken lassen. Es ist nämlich:

$$a_{1,1} = -2\int_0^1 du_1, \quad \pi i = 2\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du_1, \quad a_{1,2} = -2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du_1, \quad 0 = 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du_1;$$

$$a_{1,2} = -2\int_0^1 du_2, \quad 0 = 2\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du_2, \quad a_{2,2} = -2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du_2, \quad \pi i = 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du_2;$$

wodurch zuzüglich der Relation: $\int_0^1 du + \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du = 0$ alle Werthe bestimmt sind. Allein diese Integralwerthe entsprechen einem bestimmten Wege in der Fläche T, nämlich im obern Blatte in der Richtung der Abscissenaxe, auf der linken Seite der Verzweigungsschnitte, wo solche zwei Verzweigungspunkte verbinden. Da wir aber hier in der Fläche T' operiren, so kommt es darauf an, die Werthe in T auf die Werthe in T' zu reduciren, denn die Integrale sind in T wegen der verschiedenen möglichen Wege nur bis auf ganze Vielfache der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen bestimmt, in T' sind ihre Werthe aber vollkommen vom

Wege unabhängig. Man hat bei dieser Reduction nur zu beobachten, dass wenn man bei der Integration einen Querschnitt überschreitet, man den Werth des Integrals um den betreffenden Periodicitätsmodul zu- oder abnehmen lässt, je nachdem man von der negativen auf die positive oder von der positiven auf die negative Seite kommt, und dann sind die so erhaltenen Resultate die Werthe der Integrale für die Fläche T'. Die Wege der obigen Integrale in T überschreiten nun immer Querschnitte, und zwar zwischen 0 und 1 den Querschnitt b_1, zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$ den Querschnitt a_1, zwischen $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$ die Querschnitte b_1 und a_2, zwischen $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ den Querschnitt b_2, zwischen $\frac{1}{\mu^2}$ und ∞ den Querschnitt a_2. Wir erhalten demnach:

$$\int_0^1 du \text{ in } T' = \int_0^1 du_1 + a_{1,1} = \frac{a_{1,1}}{2}, \text{ eben so } \int_0^1 du_2 \text{ in } T' = \frac{a_{1,2}}{2},$$

und ähnlich für die übrigen, so dass als Werthe der Integrale in T' sich die folgenden ergeben:

$$(T')\begin{cases} \int_0^1 du_1 = \frac{a_{1,1}}{2}, \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du_1 = -\frac{\pi i}{2}, \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du_1 = -\frac{a_{2,1}}{2}, \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du_1 = \frac{a_{1,2}}{2}, \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du_1 = 0; \\ \int_0^1 du_2 = \frac{a_{1,2}}{2}, \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} du_2 = 0, \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du_2 = -\frac{a_{1,2}}{2} + \frac{\pi i}{2}, \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du_2 = \frac{a_{2,2}}{2}, \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du_2 = -\frac{\pi i}{2}. \end{cases}$$

Jetzt können wir für sämmtliche Verzweigungspunkte das verlangte Integralsystem bilden, und es findet sich:

$$1.\ \text{für } x = 0 : -\int_\alpha^0 du_1 \mid -\int_\beta^0 du_2 = u_\alpha \mid u_\beta$$

$$2.\ \text{„}\ x = 1 : -\int_\alpha^1 du_1 \mid -\int_\beta^1 du_2 = u_\alpha - \frac{a_{1,1}}{2} \mid u_\beta - \frac{a_{1,2}}{2}$$

$$3.\ \text{„}\ x = \frac{1}{\varkappa^2} : -\int_\alpha^{\frac{1}{\varkappa^2}} du_1 \mid -\int_\beta^{\frac{1}{\varkappa^2}} du_2 = u_\alpha + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{1,1}}{2} \mid u_\beta - \frac{a_{1,2}}{2}$$

$$4.\ \text{„}\ x = \frac{1}{\lambda^2} : -\int_\alpha^{\frac{1}{\lambda^2}} du_1 \mid -\int_\beta^{\frac{1}{\lambda^2}} du_2 = u_\alpha + \frac{\pi i}{2} \mid u_\beta - \frac{\pi i}{2}$$

$$5.\ \text{„}\ x = \frac{1}{\mu^2} : -\int_\alpha^{\frac{1}{\mu^2}} du_1 \mid -\int_\beta^{\frac{1}{\mu^2}} du_2 = u_\alpha + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{1,2}}{2} \mid u_\beta - \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{2,2}}{2}$$

$$6.\ \text{„}\ x = \infty : -\int_\alpha^{\infty} du_1 \mid -\int_\beta^{\infty} du_2 = u_\alpha + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{1,2}}{2} \mid u_\beta - \frac{a_{2,2}}{2}.$$

Diese Werthe der correspondirenden Integrale müssen nun congruent mit den sechs Systemen von Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen übereinstimmen, für die die einfache ϑ-Function verschwindet. Eines dieser letzteren muss dem Systeme $u_\alpha | u_\beta$ congruent sein, und wenn wir seinen Werth statt $u_\alpha | u_\beta$ in den letzten Formeln einsetzen, so müssen die Integralwerthe vollkommen congruent mit den sechs Systemen im Anfange dieses Paragraphen übereinstimmen. Dass diese Übereinstimmung **nur auf eine Weise** möglich gemacht werden kann, ist klar, da bis auf Ganze der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen $u_\alpha | u_\beta$ wie α und β einwerthige Bestimmtheit haben; wir erreichen sie, wenn wir setzen:

$$u_\alpha = \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}, \quad u_\beta = -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2},$$

dann stimmen die Werthe des Integralsystems für die sechs Verzweigungspunkte vollständig congruent mit den sechs Systemen, für die die ϑ verschwindet, überein, und zwar so, dass in der Reihenfolge, wie wir die ϑ-Functionen geschrieben, sie auch verschwinden für die Punkte:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\quad \frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{1}{\mu^2},\ \infty.$$

Dividiren wir demnach die ersten fünf ϑ-Functionen durch die sechste, die für $x = \infty$ verschwindet, so erhalten wir die folgenden Formen:

$$\text{I.}\quad \frac{\vartheta\binom{11}{01}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')} \begin{cases} = 0^1 & \text{wenn } x = 0 \\ = \infty^1 & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$$

	a_1	b_1	a_2	b_2
Factorensystem:	$(-1)^{\varepsilon_1 + \eta_1} = +1.$	$(-1)^{\varepsilon_1' + \eta_1'} = -1,$	$(-1)^{\varepsilon_2 + \eta_2} = -1,$	$(-1)^{\varepsilon_2' + \eta_2'} = +1;$

$$\text{II.}\quad \frac{\vartheta\binom{01}{01}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')} \begin{cases} = 0^1 & \text{wenn } x = 1 \\ = \infty^1 & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$$

Factorensystem:	$-1,$	$-1,$	$-1,$	$+1;$

$$\text{III.}\quad \frac{\vartheta\binom{01}{11}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')}{\vartheta\binom{10}{11}(u - u_1' \,|\, u_2 - u_2')} \begin{cases} = 0^1 & \text{wenn } x = \dfrac{1}{\varkappa^2} \\ = \infty^1 & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$$

Factorensystem:	$-1,$	$+1,$	$-1.$	$+1;$

$$\text{IV.}\quad \frac{\vartheta\binom{11}{10}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')} \begin{cases} = 0^1 & \text{wenn } x = \dfrac{1}{\lambda^2} \\ = \infty^1 & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$$

Factorensystem:	$+1,$	$+1,$	$-1,$	$-1;$

$$\text{V.}\quad \frac{\vartheta\binom{10}{10}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1 - u_1' \,|\, u_2 - u_2')} \begin{cases} = 0^1 & \text{wenn } x = \dfrac{1}{\mu^2} \\ = \infty^1 & \text{wenn } x = \infty \end{cases}$$

Factorensystem:	$+1,$	$+1,$	$+1,$	$-1.$

Man erkennt, dass diese fünf Formen mit den fünf darzustellenden Functionen sämmtliche bestimmende Eigenschaften gemein haben; sie werden für dieselben Punkte ∞^1 und 0^1 und erlangen an den Querschnitten dieselben Factoren (vergl. die Tab. §. 9), so dass sie sich von ihnen nur um multiplicative Constante unterscheiden können. Denn bezeichnen wir z. B.

die erste Form, die in ihren Eigenschaften mit $\sqrt{x}$ übereinstimmt, durch r_1, so ist $\frac{r_1}{\sqrt{x}}$ eine stetige Function des Ortes in T', die für keinen Punkt ∞ und 0 wird und an allen Querschnitten den Factor $+1$ erlangt: demnach ist sie wie T algebraisch verzweigt und muss, da sie nicht ∞ wird, eine Constante sein. Wie diese Constanten in jedem speciellen Falle von x' abhängen, haben wir oben discutirt; wie nämlich die ϑ-Quotienten so müssen auch die ihnen äquivalenten algebraischen Ausdrücke symmetrische Functionen der Grössen x' und x sein. Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$u_1 - u_1' = \int_{x',s'}^{x,s} du_1 = u_{1x'}^{x}, \quad u_2 - u_2' = \int_{x',s'}^{x,s} du_2 = u_{2x'}^{x},$$

und schreiben statt der ϑ-Functionen mit den Charakteristiken die ihnen entsprechenden einfachen, um übersichtlicher die Constanten bestimmen zu können, **so folgen die Endresultate:**

$$\text{I.} \quad \frac{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}\right)} e^{u_{2x'}^{x}} = c_1 \sqrt{x'} \sqrt{x}$$

$$\text{II.} \quad \frac{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}\right)} e^{u_{2x'}^{x} - u_{1x'}^{x}} = c_2 \sqrt{1-x'} \sqrt{1-x}$$

$$\text{III.} \quad \frac{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}\right)} e^{u_{2x'}^{x} - u_{1x'}^{x}} = c_3 \sqrt{1-\varkappa^2 x'} \sqrt{1-\varkappa^2 x}$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}\right)} e^{u_{2x'}^{x}} = c_4 \sqrt{1-\lambda^2 x'} \sqrt{1-\lambda^2 x}$$

$$\text{V.} \quad \frac{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} + \frac{a_{1,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(u_{1x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \,\middle|\, u_{2x'}^{x} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2}\right)} = c_5 \sqrt{1-\mu^2 x'} \sqrt{1-\mu^2 x}.$$

§. 18.

Hiermit ist das aufgestellte Problem in seiner allgemeinsten Form gelöst. Wir bemerken zunächst, dass wenn wir die **beiden Grössen** x und x' unbeschränkt variabel annehmen, die links stehenden Ausdrücke Functionen mit ganz beliebigen Argumenten sind, indem man x und x' immer so bestimmen kann, dass das System $u_{1x'}^{x} | u_{2x'}^{x}$ jedem willkürlich angenommenen Systeme $e_1 | e_2$ congruent wird. In sofern wir aber dem x' auch einen constanten Werth beilegen können, ist die Möglichkeit gegeben, sowohl die rechts stehende Function von x, so wie die ihr entsprechende von x', jede für sich, durch ϑ-Functionen mit bestimmten Argumenten auszudrücken: in Folge dessen werden dann auch die links stehenden Quotienten, die die Differenzen zweier Integrale zu Argumenten haben, sich durch ϑ-Functionen, die die zwei Integrale gesondert enthalten, ausdrücken lassen. In dieser zweifachen Auffassung berühren sich die **Jacobi**'sche Theorie und die unsrige, indem beide, obwohl von verschiedenen Grundanschauungen auf verschiedenen Wegen ausgehend, zu den Endresultaten des vorigen Paragraphen führen können. Nach der **Jacobi**'schen Theorie werden nämlich von Anfang an

Functionen mit beliebigen Argumenten, die also zwei Variable wie oben enthalten, betrachtet, während bei unserer Untersuchung die Einführung der Grösse x' erst durch den Umstand geboten erschien, dass eine ϑ-Function immer für zwei Punkte 0^1 wird, und demnach der Quotient von zwei solchen Functionen nur dann für einen Punkt ∞^1 und 0^1 wird, wenn Zähler und Nenner für denselben Punkt x', s' verschwinden. Wenn wir also im nächsten Abschnitte zur Darstellung algebraischer Formen übergehen, die für zwei Punkte ∞^1 und 0^1 werden, so reisst der Faden der Analogie, der bei den vorliegenden Functionen die beiden Theorien verknüpft.

Unsere nächste Aufgabe soll jetzt sein, die fünf Constanten c zu bestimmen, indem wir für x und x' Verzweigungswerthe einsetzen: denn dafür sind uns auch die Werthe der Integrale $u_{1x'}^{x} | u_{2x'}^{x}$ bekannt. Die Quadratwurzeln können für denselben Werth von x verschiedene Werthe haben, je nachdem wir uns im obern oder untern Blatte der Fläche T'' befinden, und wie wir früher gesehen, kann man den Werth derselben in einem Punkte beliebig, positiv oder negativ annehmen, in Folge dessen sie dann in der Ausdehnung der ganzen Fläche T'' einwerthig und stetig bestimmt sind. In den Verzweigungspunkten haben aber alsdann die Functionen immer nur einen Werth, da für sie oberes und unteres Blatt zusammenfallen, und diese Werthe wollen wir mit Bezugnahme auf die Anfangswerthe durch die Quadratwurzeln ohne Vorzeichen bezeichnen, so dass z. B. $\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}}$ der Werth der Function $\sqrt{1-x}$ im Punkte $\frac{1}{\varkappa^2}$ sein soll, den man dort durch stetige Fortsetzung in T'' von dem Anfangswerthe $+1$ (für $x=0$) aus erhält. Gleicherweise müssen wir dann auch, wenn alle Resultate stimmen sollen, den Integralen die Werthe geben, die sie in T'' haben, also die in der Gleichung (T'') des vorigen Paragraphen aufgestellten. Es ergeben sich nun leicht mit Berücksichtigung der Formeln des §. 10 die folgenden Gruppen von Gleichungen, die einzeln den fünf aufgestellten Endgleichungen entsprechen.

I. Der Anfangswerth von $\sqrt{x}$ sei $+1$ für $x=1$. Die möglichen Combinationen von Verzweigungswerthen, durch deren Einsetzung die Gleichung I nicht die Form $0=0$ oder $\infty=\infty$ annimmt, sind:

$$1.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\varkappa^2};\qquad 2.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\lambda^2};\qquad 3.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

$$4.\ x'=\frac{1}{\varkappa^2},\ x=\frac{1}{\lambda^2};\qquad 5.\ x'=\frac{1}{\varkappa^2},\ x=\frac{1}{\mu^2};\qquad 6.\ x'=\frac{1}{\lambda^2},\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

und wir erhalten durch ihre Einführung:

$$1.\ \frac{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,1}}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}\,\middle|\,-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}+\frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{a_{1,1}}{2}\,\middle|\,-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}\right)}=\frac{c_1}{\varkappa};\qquad 2.\ \frac{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}\,\middle|\,\frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta(0\,|\,0)}\,e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{1,2}}{2}}=\frac{c_1}{\lambda};$$

$$3.\ \frac{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}\,\middle|\,0\right)}{\vartheta\left(\frac{a_{1,2}}{2}\,\middle|\,\frac{a_{2,2}}{2}\right)}\,e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{1,2}}{2}-\frac{a_{2,2}}{2}}=\frac{c_1}{\mu};\qquad 4.\ \frac{\vartheta\left(\frac{a_{1,2}}{2}\,\middle|\,\frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}\,\middle|\,0\right)}\,e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{1,2}}{2}}=\frac{c_1}{\varkappa\lambda};$$

$$5.\ \frac{\vartheta(0\,|\,0)}{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}\,\middle|\,\frac{a_{2,2}}{2}\right)}\,e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{1,2}}{2}-\frac{a_{2,2}}{2}}=\frac{c_1}{\varkappa\mu};\qquad 6.\ \frac{\vartheta\left(\frac{a_{1,1}}{2}\,\middle|\,-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}\right)}{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,1}}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}\,\middle|\,-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}+\frac{a_{2,2}}{2}\right)}\,e^{\pi i-a_{1,2}-\frac{a_{2,2}}{2}}=\frac{c_1}{\lambda\mu}.$$

II. Der Anfangswerth von $\sqrt{1-x}$ sei $+1$ für $x=0$. Die anwendbaren Combinationen der Verzweigungswerthe sind:

$$1.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\varkappa^2};\qquad 2.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\lambda^2};\qquad 3.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

$$4.\ x'=\frac{1}{\varkappa^2},\ x=\frac{1}{\lambda^2};\qquad 5.\ x'=\frac{1}{\varkappa^2},\ x=\frac{1}{\mu^2};\qquad 6.\ x'=\frac{1}{\lambda^2},\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

und es folgt:

$$1.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}{\vartheta(0\mid -\frac{\pi i}{2})}\,e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}}=c_2\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}};$$

$$2.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{22}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2})}\,e^{\pi i}=c_2\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}};\qquad 3.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}\mid 0)}{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}\,e^{\pi i-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{2}}=c_2\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}};$$

$$4.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}\mid 0)}\,e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}}=c_2\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}}\,\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}};$$

$$5.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{22}}{2})}\,e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}-\frac{a_{22}}{2}}=c_2\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}}\,\sqrt{1-\frac{1}{\mu^3}};$$

$$6.\ \frac{\vartheta(0\mid-\frac{\pi i}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}\,e^{\pi i-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{2}}=c_2\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}\,\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}.$$

III. Der Anfangswerth von $\sqrt{1-\varkappa^2 x}$ sei $+1$ für $x=0$. Die anwendbaren Combinationen der Verzweigungswerthe sind:

$$1.\ x'=0,\ x=1;\qquad 2.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\lambda^2};\qquad 3.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

$$4.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\lambda^2};\qquad 5.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\mu^2};\qquad 6.\ x'=\frac{1}{\lambda^2},\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

und es folgt:

$$1.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}\mid-\frac{\pi i}{2})}\,e^{\pi i+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}}=c_3\sqrt{1-\varkappa^2};$$

$$2.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{22}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2})}\,e^{\pi i}=c_3\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}};\qquad 3.\ \frac{\vartheta(0\mid 0)}{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}\,e^{\pi i-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{2}}=c_3\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}};$$

$$4.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}{\vartheta(0\mid 0)}\,e^{\pi i+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}}=c_3\sqrt{1-\varkappa^2}\,\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}};$$

$$5.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{11}}{2}\mid\frac{a_{12}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{12}}{2}\mid\frac{a_{22}}{2})}\,e^{\pi i+\frac{a_{11}}{2}-\frac{a_{22}}{2}}=c_3\sqrt{1-\varkappa^2}\,\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}};$$

$$6.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}\mid-\frac{\pi i}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2}\mid-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2})}\,e^{\pi i-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{2}}=c_3\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}}\,\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}}.$$

IV. Der Anfangswerth von $\sqrt{1-\lambda^2 x}$ sei $+1$ für $x=0$. Die anwendbaren Combinationen der Verzweigungswerthe sind:

$$1.\ x'=0,\ x=1; \qquad 2.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\varkappa^2}; \qquad 3.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

$$4.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\varkappa^2}; \qquad 5.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\mu^2}; \qquad 6.\ x'=\frac{1}{\varkappa^2},\ x=\frac{1}{\mu^2};$$

und es folgt:

$$1.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2} \mid \frac{a_{2,2}}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2} \mid -\frac{\pi i}{2})} e^{-\frac{a_{1,2}}{2}} = c_4\sqrt{1-\lambda^2}; \qquad 2.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{1,2}}{2} \mid \frac{a_{2,2}}{2})}{\vartheta(0 \mid -\frac{\pi i}{2})} e^{-\frac{a_{1,2}}{2}} = c_4\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}};$$

$$3.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2}+\frac{a_{1,2}}{2} \mid \frac{a_{1,2}}{2}+\frac{a_{2,2}}{2})} e^{-\frac{\pi i}{2}-a_{1,2}-\frac{a_{2,2}}{2}} = c_4\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}}; \quad 4.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2}+\frac{a_{1,2}}{2} \mid \frac{a_{1,2}}{2}+\frac{a_{2,2}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2})} = c_4\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}};$$

$$5.\ \frac{\vartheta(0 \mid -\frac{\pi i}{2})}{\vartheta(\frac{a_{1,2}}{2} \mid \frac{a_{2,2}}{2})} e^{-\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{1,2}}{2}-\frac{a_{2,2}}{2}} = c_4\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}};$$

$$6.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2} \mid -\frac{\pi i}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2} \mid \frac{a_{2,2}}{2})} e^{-\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{1,2}}{2}-\frac{a_{2,2}}{2}} = c_4\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}}.$$

V. Der Anfangswerth von $\sqrt{1-\mu^2 x}$ sei $+1$ für $x=0$. Die anwendbaren Combinationen der Verzweigungswerthe sind:

$$1.\ x'=0,\ x=1; \qquad 2.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\varkappa^2}; \qquad 3.\ x'=0,\ x=\frac{1}{\lambda^2};$$

$$4.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\varkappa^2}; \qquad 5.\ x'=1,\ x=\frac{1}{\lambda^2}; \qquad 6.\ x'=\frac{1}{\varkappa^2},\ x=\frac{1}{\lambda^2};$$

und es folgt:

$$1.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2} \mid 0)}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2} \mid -\frac{\pi i}{2})} = c_5\sqrt{1-\mu^2}; \qquad 4.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2} \mid \frac{a_{1,2}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2})} = c_5\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}};$$

$$2.\ \frac{\vartheta(0 \mid 0)}{\vartheta(0 \mid -\frac{\pi i}{2})} = c_5\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}}; \qquad 5.\ \frac{\vartheta(0 \mid -\frac{\pi i}{2})}{\vartheta(0 \mid 0)} = c_5\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}};$$

$$3.\ \frac{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2})}{\vartheta(\frac{a_{1,1}}{2} \mid \frac{a_{1,2}}{2})} = c_5\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}; \qquad 6.\ \frac{\vartheta(-\frac{\pi i}{2} \mid -\frac{\pi i}{2})}{\vartheta(-\frac{\pi i}{2} \mid 0)} = c_5\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}.$$

Wir wollen die in diesen Formeln vorkommenden ϑ-Functionen besonders bezeichnen indem wir setzen:

$$\theta_1 = \vartheta\binom{00}{00}(0 \mid 0) = \vartheta(0 \mid 0); \qquad \theta_3 = \vartheta\binom{00}{01}(0 \mid 0) = \vartheta(0 \mid -\tfrac{\pi i}{2});$$

$$\theta_2 = \vartheta\binom{00}{10}(0 \mid 0) = \vartheta(-\tfrac{\pi i}{2} \mid 0); \qquad \theta_4 = \vartheta\binom{00}{11}(0 \mid 0) = \vartheta(-\tfrac{\pi i}{2} \mid -\tfrac{\pi i}{2});$$

$$\theta_5 = \vartheta\binom{10}{00}(0\,|\,0) = \vartheta\left(\tfrac{a_{11}}{2}\;\middle|\;\tfrac{a_{12}}{2}\right) e^{\frac{a_{11}}{4}}\,; \qquad \theta_7 = \vartheta\binom{10}{01}(0\,|\,0) = \vartheta\left(\tfrac{a_{11}}{2}\;\middle|\;-\tfrac{\pi i}{2}+\tfrac{a_{12}}{2}\right) e^{\frac{a_{11}}{4}}\,;$$

$$\theta_6 = \vartheta\binom{01}{00}(0\,|\,0) = \vartheta\left(\tfrac{a_{12}}{2}\;\middle|\;\tfrac{a_{22}}{2}\right) e^{\frac{a_{22}}{4}}\,; \qquad \theta_8 = \vartheta\binom{01}{10}(0\,|\,0) = \vartheta\left(-\tfrac{\pi i}{2}+\tfrac{a_{12}}{2}\;\middle|\;\tfrac{a_{22}}{2}\right) e^{\frac{a_{22}}{4}}\,;$$

$$\theta_9 = \vartheta\binom{11}{00}(0\,|\,0) = \vartheta\left(\tfrac{a_{11}}{2}+\tfrac{a_{12}}{2}\;\middle|\;\tfrac{a_{12}}{2}+\tfrac{a_{22}}{2}\right) e^{\frac{a_{11}}{4}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{4}}\,;$$

$$\theta_{10} = \vartheta\binom{11}{11}(0\,|\,0) = \vartheta\left(-\tfrac{\pi i}{2}+\tfrac{a_{11}}{2}+\tfrac{a_{12}}{2}\;\middle|\;-\tfrac{\pi i}{2}+\tfrac{a_{12}}{2}+\tfrac{a_{22}}{2}\right) e^{\frac{a_{11}}{4}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{4}-\pi i}\,;$$

dann sind die zehn Grössen θ **die Werthe der zehn geraden Functionen** $\vartheta\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}(v_1\,|\,v_2)$, **wenn man darin die Argumente** $v_1\,|\,v_2 = 0\,|\,0$ **setzt** (s. §. 15 II.), und die Gleichungen gestalten sich wie folgt, indem $e^{\pm\pi i} = -1$, $e^{\pm\frac{\pi i}{2}} = \pm i$ ist.

I. 1. $-\dfrac{\theta_{10}}{\theta_7} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = \dfrac{c_1}{\varkappa}$; 2. $i\dfrac{\theta_8}{\theta_1} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = \dfrac{c_1}{\lambda}$; 3. $i\dfrac{\theta_2}{\theta_6} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = \dfrac{c_1}{\mu}$;

4. $i\dfrac{\theta_6}{\theta_2} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = \dfrac{c_1}{\varkappa\lambda}$; 5. $i\dfrac{\theta_1}{\theta_8} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = \dfrac{c_1}{\varkappa\mu}$; 6. $\dfrac{\theta_7}{\theta_{10}} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = \dfrac{c_1}{\lambda\mu}$.

II. 1. $-i\dfrac{\theta_{10}}{\theta_3} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_2\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}}$; 2. $-\dfrac{\theta_8}{\theta_5} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_2\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}$;

3. $-\dfrac{\theta_2}{\theta_9} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_2\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}$; 4. $i\dfrac{\theta_9}{\theta_2} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_2\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}}\,\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}$;

5. $i\dfrac{\theta_5}{\theta_8} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_2\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}}\,\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}$; 6. $\dfrac{\theta_3}{\theta_{10}} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_2\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}\,\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}$.

III. 1. $\dfrac{\theta_{10}}{\theta_1} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_3\sqrt{1-\varkappa^2}$; 2. $-\dfrac{\theta_6}{\theta_5} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_3\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}}$;

3. $-\dfrac{\theta_1}{\theta_9} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_3\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}}$; 4. $-\dfrac{\theta_9}{\theta_1} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_3\sqrt{1-\varkappa^2}\,\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}}$;

5. $-\dfrac{\theta_5}{\theta_6} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_3\sqrt{1-\varkappa^2}\,\sqrt{1-\frac{\varkappa^3}{\mu^2}}$; 6. $\dfrac{\theta_4}{\theta_{10}} e^{\frac{a_{11}}{4}-\frac{a_{22}}{4}} = c_3\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}}\,\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}}$.

IV. 1. $\dfrac{\theta_8}{\theta_1} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = c_1\sqrt{1-\lambda^2}$; 2. $\dfrac{\theta_6}{\theta_3} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = c_1\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}$;

3. $-i\dfrac{\theta_7}{\theta_9} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = c_1\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}}$; 4. $\dfrac{\theta_9}{\theta_7} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = c_1\sqrt{1-\lambda^2}\,\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}$;

5. $-i\dfrac{\theta_3}{\theta_6} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = c_1\sqrt{1-\lambda^2}\,\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}}$; 6. $-i\dfrac{\theta_4}{\theta_8} e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}} = c_1\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}\,\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}}$.

V. 1. $\frac{\theta_2}{\theta_4} = c_5 \sqrt{1-\mu^2}:$ 2. $\frac{\theta_1}{\theta_3} = c_5 \sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}}:$

3. $\frac{\theta_7}{\theta_5} = c_5 \sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}};$ 4. $\frac{\theta_5}{\theta_7} = c_5 \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}}:$

5. $\frac{\theta_3}{\theta_1} = c_5 \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}:$ 6. $\frac{\theta_4}{\theta_2} = c_5 \sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}}.$

§. 19.

Aus den letzten Gleichungen ergeben sich die Werthe der fünf Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$ etc. für die Verzweigungspunkte algebraisch durch die Grössen θ ausgedrückt, und umgekehrt die Quotienten von je zwei beliebigen θ als Functionen der drei Grössen $\varkappa$, λ, μ. Endlich lassen sich die fünf Constanten c sowohl durch die Grössen θ als auch durch $\varkappa$, λ, μ ausdrücken.

Man erhält für's Erste leicht durch Division der passenden Gleichungen aus je einer Gruppe ineinander die folgenden Resultate:

I. $\varkappa = \frac{\theta_2\theta_8}{\theta_1\theta_6};$ $\lambda = i\frac{\theta_2\theta_{10}}{\theta_6\theta_7};$ $\mu = i\frac{\theta_8\theta_{10}}{\theta_1\theta_7}.$

II. $\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}} = -i\frac{\theta_5\theta_9}{\theta_2\theta_8};$ $\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}} = -\frac{\theta_3\theta_9}{\theta_2\theta_{10}};$ $\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}} = -\frac{\theta_3\theta_5}{\theta_8\theta_{10}}.$

III. $\sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{\theta_5\theta_9}{\theta_1\theta_6};$ $\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}} = -\frac{\theta_4\theta_9}{\theta_1\theta_{10}};$ $\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}} = -\frac{\theta_4\theta_5}{\theta_6\theta_{10}}.$

IV. $\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{\theta_3\theta_9}{\theta_6\theta_7};$ $\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}} = \frac{\theta_4\theta_9}{\theta_7\theta_8};$ $\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}} = -i\frac{\theta_3\theta_4}{\theta_6\theta_8}.$

V. $\sqrt{1-\mu^2} = \frac{\theta_3\theta_5}{\theta_2\theta_7};$ $\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}} = \frac{\theta_4\theta_5}{\theta_2\theta_2};$ $\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}} = \frac{\theta_3\theta_4}{\theta_1\theta_2}.$

Von diesen Gleichungen sind sechs eine identische Folge der übrigen, man erhält durch Vergleichung der rechten Seiten:

$$\sqrt{1-\varkappa^2} = \varkappa i\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}};\qquad \sqrt{1-\lambda^2} = \lambda i\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}};\qquad \sqrt{1-\mu^2} = \mu i\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}};$$

$$\varkappa\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}} = \lambda i\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}};\qquad \varkappa\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}} = \mu i\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\mu^2}};\qquad \lambda\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}} = \mu i\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}};$$

und die neun selbständigen Formen sind, wenn wir $\sqrt{1-m^2}$ durch m_1, $\sqrt{n^2-m^2}$ durch m_n nach dem Vorgange von **Richelot** bezeichnen:

$$\varkappa = \frac{\theta_2\theta_8}{\theta_1\theta_6};\quad \lambda = i\frac{\theta_2\theta_{10}}{\theta_6\theta_7};\quad \mu = i\frac{\theta_8\theta_{10}}{\theta_1\theta_7};\quad \varkappa_1 = \frac{\theta_5\theta_9}{\theta_1\theta_6};\quad \lambda_1 = \frac{\theta_3\theta_9}{\theta_6\theta_7};\quad \mu_1 = \frac{\theta_3\theta_5}{\theta_1\theta_7};$$

$$\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2} = \lambda_\varkappa = \frac{\theta_2\theta_4\theta_9}{\theta_1\theta_6\theta_7};\quad \sqrt{\varkappa^2-\mu^2} = \mu_\varkappa = \frac{\theta_4\theta_5\theta_8}{\theta_1\theta_6\theta_7};\quad \sqrt{\lambda^2-\mu^2} = \mu_\lambda = i\frac{\theta_3\theta_4\theta_{10}}{\theta_1\theta_6\theta_7}.$$

Umgekehrt findet man aus den letzten Formeln die Quotienten von zwei Grössen θ durch $\varkappa$, λ, μ ausgedrückt, wie folgt:

$$\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\varkappa\mu_1\lambda_\varkappa}{\lambda_1\mu_\varkappa}; \qquad \left(\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\varkappa\mu_1\mu_\lambda}{\lambda\mu_\varkappa}; \qquad \left(\frac{\theta_4}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1};$$

$$\left(\frac{\theta_5}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\varkappa_1\mu_1}{\lambda_1}; \qquad \left(\frac{\theta_6}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\mu\mu_1\lambda_\varkappa}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}; \qquad \left(\frac{\theta_7}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\varkappa\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa};$$

$$\left(\frac{\theta_8}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\varkappa\mu}{\lambda}; \qquad \left(\frac{\theta_9}{\theta_1}\right)^2 = \frac{\mu\varkappa_1\lambda_\varkappa}{\lambda\mu_\varkappa}; \qquad \left(\frac{\theta_{10}}{\theta_1}\right)^2 = -\frac{\mu\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda_1\mu_\varkappa};$$

und hieraus ergeben sich durch gegenseitige Division alle übrigen. Den beiden letzten Systemen entsprechende Formeln hat schon **Rosenhain** aufgestellt in seinen Briefen an **Jacobi**[1]), die auch einen Auszug seiner oben erwähnten Preisschrift enthalten.

Die fünf Constanten c finden sich direct aus den Endgleichungen des vorigen Paragraphen. Man erhält ihre Quadrate durch $\varkappa$, λ, μ ausgedrückt, wenn man in jeder Gruppe (1) mit (6), oder (2) mit (5), oder (3) mit (4) multiplicirt, demnach

$$c_1^2 = -\varkappa\lambda\mu\, e^{-a_{1,2}-\frac{a_{2,2}}{2}}; \qquad c_2^2 = -\frac{\varkappa\lambda\mu}{\varkappa_1\lambda_1\mu_1}\, e^{\frac{a_{1,1}}{2}-\frac{a_{2,2}}{2}};$$

$$c_3^2 = -\frac{\lambda\mu}{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\, e^{\frac{a_{1,1}}{2}-\frac{a_{2,2}}{2}}; \qquad c_4^2 = \frac{\varkappa\mu}{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\, e^{-a_{1,2}-\frac{a_{2,2}}{2}};$$

$$c_5^2 = \frac{\varkappa\lambda}{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}.$$

Man erhält sie als Functionen der Grössen θ, wenn man in jeder Gruppe (1) mit (2) multiplicirt und durch (4) dividirt, demnach

$$c_1 = -\frac{\theta_2\theta_5\theta_{10}}{\theta_1\theta_6\theta_7}\, e^{-\frac{a_{1,2}}{2}-\frac{a_{2,2}}{4}}; \qquad c_2 = \frac{\theta_2\theta_8\theta_{10}}{\theta_3\theta_5\theta_9}\, e^{\frac{a_{1,1}}{4}-\frac{a_{2,2}}{4}};$$

$$c_3 = \frac{\theta_1\theta_6\theta_{10}}{\theta_4\theta_5\theta_9}\, e^{\frac{a_{1,1}}{4}-\frac{a_{2,2}}{4}}; \qquad c_4 = \frac{\theta_6\theta_7\theta_8}{\theta_3\theta_4\theta_9}\, e^{-\frac{a_{1,2}}{2}-\frac{a_{2,2}}{4}};$$

$$c_5 = \frac{\theta_1\theta_2\theta_7}{\theta_3\theta_4\theta_5}.$$

Nachdem wir so alle Constantenbeziehungen ermittelt, ist es leicht, die fünf Formen als Functionen der Integrale $u_1 | u_2$ darzustellen, und zwar durch die fünfzehn ϑ-Functionen mit den Charakteristiken. Wir setzen nämlich in jeder der Endformeln des §. 17 für x der Reihe nach die vier endlichen Verzweigungswerthe ein, für die die betreffende Form nicht verschwindet, und drücken die Constanten durch die Grössen θ nach dem Vorigen aus. Die

[1]) Crelle, Bd. 40, pag. 321.

Integrale $u'_1\, u'_2$ gehen alsdann in Halbe der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen über, so dass die ϑ-Functionen die einfachen Argumente $u_1|u_2$ erhalten. Wir bringen sie durch Multiplication mit constanten Factoren auf die Form:

$$e^c\vartheta\left(u_1-\frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i+\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu}{2}a_{1,\nu}\,\Big|\,u_2-\frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i+\sum_\nu\frac{\varepsilon_\nu}{2}a_{2,\nu}\right)e^{\varepsilon_1u_1+\varepsilon_2u_2}=\vartheta\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}(u_1|u_2)$$

wo

$$c=a_{1,1}\frac{\varepsilon_1^2}{4}+a_{1,2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}+a_{2,2}\frac{\varepsilon_2^2}{4}-\pi i\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon'_1}{2}+\frac{\varepsilon_2\varepsilon'_2}{2}\right)$$

und erhalten für jede der fünf Functionen die folgenden vier Formen:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{x}&=\frac{\theta_1\theta_6\theta_7}{\theta_2\theta_8\theta_{10}}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{10}(u_1|u_2)}=-\frac{\theta_7}{\theta_{10}}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{00}(u_1|u_2)}=\frac{\theta_1}{\theta_8}\cdot\frac{\vartheta\binom{00}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{01}(u_1|u_2)}=\frac{\theta_6}{\theta_2}\cdot\frac{\vartheta\binom{01}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{00}{01}(u_1|u_2)}\\
\sqrt{1-x}&=i\frac{\theta_3\theta_5\theta_9}{\theta_2\theta_8\theta_{10}}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{10}(u_1|u_2)}=-i\frac{\theta_3}{\theta_{10}}\cdot\frac{\vartheta\binom{00}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{00}(u_1|u_2)}=i\frac{\theta_5}{\theta_8}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{01}(u_1|u_2)}=i\frac{\theta_9}{\theta_2}\cdot\frac{\vartheta\binom{11}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{00}{01}(u_1|u_2)}\\
\sqrt{1-\varkappa^2x}&=-\frac{\theta_4\theta_5\theta_9}{\theta_1\theta_6\theta_{10}}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{10}(u_1|u_2)}=-\frac{\theta_4}{\theta_{10}}\cdot\frac{\vartheta\binom{00}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{10}(u_1|u_2)}=\frac{\theta_5}{\theta_6}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{01}(u_1|u_2)}=\frac{\theta_9}{\theta_1}\cdot\frac{\vartheta\binom{11}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{00}{01}(u_1|u_2)}\\
\sqrt{1-\lambda^2x}&=i\frac{\theta_3\theta_4\theta_9}{\theta_6\theta_7\theta_8}\cdot\frac{\vartheta\binom{00}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{10}(u_1|u_2)}=i\frac{\theta_4}{\theta_8}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{10}(u_1|u_2)}=i\frac{\theta_3}{\theta_6}\cdot\frac{\vartheta\binom{10}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{00}(u_1|u_2)}=-i\frac{\theta_9}{\theta_7}\cdot\frac{\vartheta\binom{01}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{00}{01}(u_1|u_2)}\\
\sqrt{1-\mu^2x}&=i\frac{\theta_3\theta_4\theta_5}{\theta_1\theta_2\theta_7}\cdot\frac{\vartheta\binom{01}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{10}(u_1|u_2)}=i\frac{\theta_4}{\theta_2}\cdot\frac{\vartheta\binom{11}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{10}(u_1|u_2)}=i\frac{\theta_3}{\theta_1}\cdot\frac{\vartheta\binom{11}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{11}{00}(u_1|u_2)}=-i\frac{\theta_5}{\theta_7}\cdot\frac{\vartheta\binom{01}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{01}{01}(u_1|u_2)}
\end{aligned}\right\}\quad(F)$$

Somit sind die fünf algebraischen Formen als einwerthige Functionen zweier linear-unabhängiger Integrale $u_1|u_2$ mit derselben obern Grenze x, s, d. h. als Functionen einer Variable wie verlangt dargestellt. Eben so können wir auch dieselben Formen mit x', also $\sqrt{x'}$, $\sqrt{1-x'}$, $\sqrt{1-\varkappa^2x'}$, $\sqrt{1-\lambda^2x'}$, $\sqrt{1-\mu^2x'}$ ausdrücken, wir brauchen nur in den obigen Formeln statt $u_1|u_2$: $u'_1|u'_2$ einzusetzen. Führen wir dann diese Ausdrücke, die $u_1|u_2$ und $u'_1|u'_2$ gesondert enthalten, in die rechten Seiten der Endgleichungen des §. 17 statt der dort stehenden symmetrischen Functionen von x und x' ein, so erhalten wir die fünf Quotienten von ϑ-Functionen, die die Differenz oder auch Summe (denn $-\int_\alpha^{x',s'}du_1\Big|-\int_\beta^{x',s'}du_2$ ist congruent $\int_\alpha^{x',-s'}du_1\Big|\int_\beta^{x',-s'}du_2$ nach §. 13, 4) zweier Integrale als Argumente enthalten, durch ϑ-Quotienten, die die Integrale gesondert enthalten, ausgedrückt auf mannichfache Weise, mit anderen Worten, wir erhalten die Additionstheoreme für eine bestimmte Classe von Functionen in der Form:

$$f(u_1+v_1|u_2+v_2)=\varphi(u_1|u_2)\cdot\psi(v_1|v_2)$$

wo f, φ, ψ verwandte Formen sind und die Argumente u und v nur den Bedingungen zu genügen brauchen: $\vartheta(u_1|u_2)=0$, $\vartheta(v_1|v_2)=0$. Wir verfolgen diese Relationen nicht weiter, da unsere Hauptaufgabe die Darstellung algebraischer Formen ist, auch diese Additionsformeln bei der beschränkten Veränderlichkeit der vier Grössen u_1, u_2, v_1, v_2 zu keinen allgemeinen Relationen zwischen den Functionen f, φ, ψ führen.

4.

Discussion der allgemeinen in dem Ausdrucke $\underline{\underline{R}}$ liegenden Formen.

§. 20.

Wir haben im vorigen Abschnitte die Functionen untersucht, die in T' einwerthig und stetig, nur für einen Punkt ∞^1 und 0^1 werden und an den Querschnitten Factoren ± 1 annehmen. Wir fanden, dass ihre Anzahl eine begrenzte ist; es sind nämlich die fünf dargestellten, ihre reciproken Werthe, so wie Quotienten je zweier von ihnen. Zugleich ergaben sich bei dieser Untersuchung die Werthe der Integrale $u_1|u_2$, mit den unteren Grenzen $\alpha|\beta$, für die sechs Verzweigungspunkte. Zur Darstellung der obigen Functionen waren wir von einem Ausdrucke

$$\underline{\underline{R}} = \frac{\vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(u_1 - f_1 \,|\, u_2 - f_2)}{\vartheta(u_1 - f_1 \,|\, u_2 - f_2)}$$

ausgegangen, in dem alle die algebraischen Functionen liegen sollten, die in T' einwerthig und stetig, für **zwei beliebige** Punkte ∞^1 werden und an den Querschnitten Factoren ± 1 erlangen; die Functionen, die nur für einen Punkt ∞^1 werden, hatten sich als specielle Fälle dieses Ausdrucks R ergeben, den wir jetzt ganz allgemein discutiren wollen.

Es sei demnach $f_1 \,|\, f_2 = \int_\alpha^{x_1, s_1} du_1 + \int_\alpha^{x_2, s_2} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_1, s_1} du_2 + \int_\beta^{x_2, s_2} du_2$, wo wir die Punkte x_1, s_1 und x_2, s_2 ganz beliebig annehmen können, indem das Grössensystem $f_1 \,|\, f_2$ vollkommen willkürlich ist: es wird dann R für die beiden Punkte x_1, s_1 und x_2, s_2 ∞^1. Ebenso können wir die Grössen $\varepsilon, \varepsilon'$ (0 oder 1) oder, was dasselbe, die Factoren $(-1)^{\varepsilon_1}$, $(-1)^{\varepsilon_1'}$, $(-1)^{\varepsilon_2}$, $(-1)^{\varepsilon_2'}$, die der Ausdruck der Reihe nach an den Querschnitten a_1, b_1, a_2, b_2 annimmt, beliebig wählen (als $+1$ oder -1), dann sind aber dadurch die beiden Punkte, für die R 0^1 wird, vollkommen bestimmt, sie finden sich als x_3, s_3 und x_4, s_4 aus der Congruenz:

$$f_1 + \frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i - \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{1,\nu} \,\Big|\, f_2 + \frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i - \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{2,\nu} \equiv \int_\alpha^{x_3, s_3} du_1 + \int_\alpha^{x_4, s_4} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_3, s_3} du_2 + \int_\beta^{x_4, s_4} du_2\,,$$

deren linke Seite das Constantensystem der ϑ-Function im Zähler bildet.

Da es ausser $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ noch fünfzehn verschiedene Charakteristiken $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)$ giebt, so folgt, dass in dem Ausdrucke R zu dem bestimmten Nenner $\vartheta(u_1 - f_1 | u_2 - f_2)$ fünfzehn verschiedene Zähler gehören können, und die dadurch festgelegten algebraischen Functionen haben alle fünfzehn das mit einander gemein, dass sie für dieselben beiden Punkte ∞^1 werden, und unterscheiden sich nur durch die Punkte, wo sie 0^1 werden, oder durch die Factoren an den Querschnitten, die ja mit den Punkten, wo der Zähler 0^1 wird, gemäss der letzten Congruenz in wechselseitiger Abhängigkeit stehen. R^2 **erlangt, da die Grössen** ε **nur 0 oder 1 sein können, an allen Querschnitten den Factor** $+1$, **ist demnach eine wie die Fläche** T **verzweigte algebraische Function, die für die beiden Punkte** x_1, s_1 **und** x_2, s_2 ∞^2 **wird und für zwei andere von diesen abhängige** 0^2.

Um den dem ϑ-Quotienten R^2 äquivalenten algebraischen Ausdruck zu bilden, betrachten wir eine Function, die für vier Punkte ∞^1 und 0^1 wird. Eine solche ist (nach §. 3) in der allgemeinen Form

$$F = C_1 \frac{s + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}{s + \gamma_1 x^3 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x + \gamma_4}$$

enthalten. Zähler und Nenner von F werden für $x = \infty : \infty^6$, also auch für sechs Punkte 0^1. Da der Nenner des Ausdruckes vier willkürliche Constante γ enthält, so können wir ihn in seinen Constanten so bestimmen, dass er für die beiden Punkte x_1, s_1 und x_2, s_2 0^2 wird; er wird dann ausserdem noch für zwei andere, von den beiden abhängige Punkte 0^1. Die vier Constanten c des Zählers müssen wir so bestimmen, dass derselbe für die beiden Punkte, wo der Nenner noch ausser für $x_1 s_1$ und x_2, s_2 verschwindet, auch 0^1 wird. Dies giebt zwei Bedingungsgleichungen, der Zähler behält zwei willkürliche Constante und wird ausser für die beiden Punkte, die er mit dem Nenner gemeinsam hat, noch für vier Punkte 0^1. Setzen wir diese vier Punkte paarweise einander gleich, so dass also der Zähler für zwei Punkte 0^2 wird, so entstehen dadurch zwei Bedingungsgleichungen, die die noch willkürlichen zwei Constanten des Zählers bestimmen. Auf wie viele Weisen diese Bestimmung möglich ist, können wir aus dem Vorigen schliessen. Da es nämlich nur fünfzehn verschiedene Formen R^2 giebt, die für dieselben beiden Punkte ∞^2 werden, so folgt daraus, dass sich die beiden letzten willkürlichen Constanten des Zählers von F auf fünfzehn Weisen so bestimmen lassen werden, dass derselbe für zwei Punkte 0^2 wird, die sechszehnte Weise abgerechnet, wo der Zähler mit dem Nenner vollkommen identisch würde, indem $c_1 = \gamma_1$, $c_2 = \gamma_2$ etc. auch eine Lösung der Aufgabe ist. Im Allgemeinen werden sich also die beiden letzten zu bestimmenden Constanten als Wurzeln zweier Gleichungen ergeben, die im günstigsten Falle vom sechszehnten Grade sind. Einer jeden der fünfzehn Formen F wird nun eine Form R^2 entsprechen, die für dieselben Punkte ∞^2 und 0^2 wird und sich demnach von ihr nur um eine Constante unterscheiden kann; es lassen sich demnach immer die Grössen c und γ für jeden ϑ-Quotienten R so bestimmen, dass

$$R = C \cdot \sqrt{\frac{s + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}{s + \gamma_1 x^3 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x + \gamma_4}} \;.$$

Dies ist die Form für R im allgemeinen Falle, wenn die Punkte x_1, s_1 und x_2, s_2 ganz beliebige sind. In speciellen Fällen können sowohl Zähler wie Nenner des obigen Ausdruckes frei von s und blosse Functionen von x sein, die Betrachtung wird dadurch nicht geändert. Das Resultat der Untersuchung ist, dass die Bestimmung der den ϑ-Quotienten äquivalenten algebraischen Ausdrücke zwar möglich, nicht aber auf dem angedeuteten Wege ausführbar ist, indem die Unlösbarkeit von Gleichungen höherer Grade sich entgegenstellt. Wir betreten desshalb einen andern Weg, der von speciellen Formen ausgehend uns synthetisch zu den allgemeinsten führen wird, indem wir die folgenden drei Fälle in Betreff der Grössen $f_1 \mid f_2$ unterscheiden.

1. Es sei

$$f_1 \mid f_2 = -\frac{\eta_1'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\eta_\nu}{2} a_{1,\nu} \;\Big|\; -\frac{\eta_2'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\eta_\nu}{2} a_{2,\nu}, \qquad (\eta, \eta' = 0 \text{ oder } 1)$$

d. h. congruent beliebigen Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen.

2. Es sei

$$f_1|f_2 = \int_{\alpha}^{x', s'} du_1 \Big| \int_{\beta}^{x', s'} du_2 = u'_1|u'_2,$$

d. h. das Grössensystem $f_1|f_2$ erfülle die Bedingung $\vartheta(f_1|f_2) = 0$.

3. Es sei

$$f_1|f_2 = \int_{\alpha}^{x_1, s_1} du_1 + \int_{\alpha}^{x_2, s_2} du_1 \Big| \int_{\beta}^{x_1, s_1} du_2 + \int_{\beta}^{x_2, s_2} du_2,$$

das Grössensystem ist dann ein ganz beliebiges.

Der zweite Fall umfasst den ersten und geht darin über, wenn wir für x' einen Verzweigungspunkt setzen. Der dritte Fall umfasst die beiden vorhergehenden als der allgemeinste. Die Lösung des ersten Falles wird uns auf natürlichem Wege zur Lösung des zweiten, und dieser hinwiederum zur Lösung des dritten führen.

§. 21.

Erster Fall:

$$f_1|f_2 = -\frac{\eta'_1}{2}\pi i + \sum_{\nu}\frac{\eta_\nu}{2}a_{1,\nu} \Big| -\frac{\eta'_2}{2}\pi i + \sum_{\nu}\frac{\eta_\nu}{2}a_{2,\nu}. \qquad (\eta, \eta' = 0 \text{ oder } 1)$$

Setzt sich das System $f_1|f_2$ aus Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen zusammen, so wird das Constantensystem der ϑ-Function im Zähler von R auch nur aus Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen bestehen, und R lässt sich durch Multiplication mit Constanten (vergl. §. 15, II.) immer in die allgemeine Form

$$r_1 = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon'_1\ \varepsilon'_2}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{\eta_1\ \eta_2}{\eta'_1\ \eta'_2}(u_1|u_2)}$$

bringen, indem wir statt der Grössen $\varepsilon + \eta$, die in der Charakteristik des Zählers vorkommen würden, die wieder nur die Werthe 0 oder 1 bezeichnenden ε einführen. Einfacher erhalten wir dieselbe Form, wenn wir zwei Formen R mit den resp. Zähler charakteristiken (ε) und (η) durch einander dividiren und in dem entstehenden Quotienten $f_1|f_2 = 0|0$ setzen. Da die Charakteristik $\binom{00}{00}$ ausgeschlossen, indem $\vartheta\binom{00}{00}(u_1|u_2) = \vartheta(u_1|u_2)$ identisch 0 ist, so gehören zu einem bestimmten Nenner nur vierzehn verschiedene Zähler, wenn r_1 nicht constant werden soll. Um diese Functionen r_1 algebraisch ausdrücken zu können, müssen wir die Punkte kennen, für die jede der fünfzehn ϑ-Functionen 0^1 wird; wir finden sie, indem wir das zu jeder gehörige, durch die Gleichung $\vartheta(\varepsilon)(u_1|u_2) = \vartheta(u_1 - e_1|u_2 - e_2)\, e^{\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + c}$ bestimmte Constantensystem $e_1|e_2$, aus Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen bestehend, in die Form

$$e_1|e_2 = \int_{\alpha}^{x_1, s_1} du_1 + \int_{\alpha}^{x_2, s_2} du_1 \Big| \int_{\beta}^{x_1, s_1} du_2 + \int_{\beta}^{x_2, s_2} du_2$$

zerlegen, dann sind x_1, s_1 und x_2, s_2 die beiden Punkte, für die die betreffende ϑ-Function 0^1 wird.

Wir kennen (nach §. 17) die Werthe der Integrale $u_1 | u_2$ für die sechs Verzweigungspunkte, sie drücken sich durch Halbe der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen aus. Combiniren wir diese Integralsysteme zu je zweien, oder, was dasselbe, führen für x_1 und x_2 in der obigen Congruenz immer je zwei verschiedene Verzweigungspunkte ein, so erhalten wir die fünfzehn möglichen Systeme von Halben der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen, nämlich:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1:\quad e_1 | e_2 \equiv \frac{a_{1,1}}{2} \Big| \frac{a_{1,2}}{2} \qquad \binom{10}{00}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\varkappa^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \Big| \frac{a_{1,2}}{2} \qquad \binom{10}{10}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\lambda^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} \qquad \binom{00}{11}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\mu^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{01}{11}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \infty:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \Big| \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{01}{10}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{\varkappa^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} \Big| 0 \qquad \binom{00}{10}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{\lambda^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \qquad \binom{10}{11}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{\mu^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{11}{11}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \infty:\quad e_1 | e_2 \equiv -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \Big| \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{11}{10}$$

$$x_1 = \frac{1}{\varkappa^2},\ x_2 = \frac{1}{\lambda^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv \frac{a_{1,1}}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \qquad \binom{10}{01}$$

$$x_1 = \frac{1}{\varkappa^2},\ x_2 = \frac{1}{\mu^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{11}{01}$$

$$x_1 = \frac{1}{\varkappa^2},\ x_2 = \infty:\quad e_1 | e_2 \equiv \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \Big| \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{11}{00}$$

$$x_1 = \frac{1}{\lambda^2},\ x_2 = \frac{1}{\mu^2}:\quad e_1 | e_2 \equiv \frac{a_{1,2}}{2} \Big| \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{01}{00}$$

$$x_1 = \frac{1}{\lambda^2},\ x_2 = \infty:\quad e_1 | e_2 \equiv \frac{a_{1,2}}{2} \Big| -\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2} \qquad \binom{01}{01}$$

$$x_1 = \frac{1}{\mu^2},\ x_2 = \infty:\quad e_1 | e_2 \equiv 0 \Big| -\frac{\pi i}{2} \qquad \binom{00}{01}$$

Der Übersichtlichkeit wegen steht neben jedem Systeme der Halben der correspondirenden Periodicitätsmodulen die Charakteristik (ε) derjenigen Function $\vartheta(\varepsilon)(u_1|u_2)$, die als einfache ϑ-Function geschrieben (§. 15, II.) dasselbe als Constantensystem enthält. Man erkennt, dass in r_1 nur solche Functionen enthalten sind, die für Verzweigungspunkte ∞^1 und 0^1 werden; ihr algebraischer Ausdruck setzt sich demnach aus den fünf ursprünglichen Functionen zusammen und kann sich von dem betreffenden ϑ-Quotienten, mit dem er für dieselben Punkte ∞^1 und 0^1 wird, jedesmal nur um eine Constante unterscheiden. Wir wählen zum Nenner von r_1 die Function $\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)$, die für $x = 1$ und $x = \frac{1}{\lambda^2}$ 0^1 wird und geben ihr die vierzehn übrigen der Reihe nach als Zähler; aus der obigen Tabelle ersehen wir sofort die Punkte, für die der jedesmalige Quotient ∞^1 und 0^1 wird, und bilden demgemäss die algebraischen Ausdrücke. Wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{llll}
1. & \dfrac{\vartheta\binom{11}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_1\dfrac{\sqrt{1-\varkappa^2x}\,\sqrt{1-\mu^2x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-\lambda^2x}}, & 2. & \dfrac{\vartheta\binom{01}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_2\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, \\[2ex]
3. & \dfrac{\vartheta\binom{01}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_3\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt{1-\mu^2x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-\lambda^2x}}, & 4. & \dfrac{\vartheta\binom{11}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_4\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2x}}. \\[2ex]
5. & \dfrac{\vartheta\binom{10}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_5\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt{1-\varkappa^2x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-\lambda^2x}}, & 6. & \dfrac{\vartheta\binom{00}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_6\dfrac{\sqrt{1-\varkappa^2x}}{\sqrt{1-\lambda^2x}}. \\[2ex]
7. & \dfrac{\vartheta\binom{00}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_7\dfrac{\sqrt{1-\mu^2x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-\lambda^2x}}, & 8. & \dfrac{\vartheta\binom{00}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_8\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}. \\[2ex]
9. & \dfrac{\vartheta\binom{10}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_9\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-\lambda^2x}}, & 10. & \dfrac{\vartheta\binom{01}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_{10}\dfrac{\sqrt{1-\mu^2x}}{\sqrt{1-x}}. \\[2ex]
11. & \dfrac{\vartheta\binom{10}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_{11}\dfrac{\sqrt{1-\varkappa^2x}}{\sqrt{1-x}}, & 12. & \dfrac{\vartheta\binom{01}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_{12}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-\lambda^2x}}. \\[2ex]
13. & \dfrac{\vartheta\binom{11}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_{13}\dfrac{\sqrt{1-\varkappa^2x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1-\lambda^2x}}, & 14. & \dfrac{\vartheta\binom{11}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(u_1|u_2)} = c_{11}\dfrac{\sqrt{1-\mu^2x}}{\sqrt{1-\lambda^2x}}.
\end{array}\right\}(F_1)$$

Die Constanten c bestimmen sich, indem man in jeder Formel für x einen Verzweigungspunkt einsetzt, für den der algebraische Ausdruck nicht verschwindet oder unendlich wird: z. B. $x=0$ in allen denjenigen Formeln, die $\sqrt{x}$ nicht enthalten. Dann geht jedesmal $u_1|u_2$ in Halbe der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen über, es drücken sich die linken Seiten der Gleichungen durch die Grössen ϑ, die rechten durch $\varkappa$, λ, μ aus, und die Constanten lassen sich unter Berücksichtigung der Resultate des §. 19 rein als Functionen der ϑ oder auch als blosse Functionen von $\varkappa$, λ, μ darstellen.

Um das lästige Auflösen der ϑ-Functionen mit den Charakteristiken in die ihnen entsprechenden einfachen zu vermeiden, notiren wir die folgenden Formeln, die das Operiren mit denselben wesentlich erleichtern und sich auf einfache Weise aus der Doppelgleichung II. §. 15. ableiten lassen. Ist

$$w_1|w_2 = v_1 - \frac{\gamma_1'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\gamma_\nu}{2} a_{1,\nu} \,\Big|\, v_2 - \frac{\gamma_2'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\gamma_\nu}{2} a_{2,\nu}$$

wo die vier Grössen γ die Werthe 0, ± 1 haben können, so ist

$$\frac{\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{pmatrix}(w_1|w_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_1' & \eta_2'\end{pmatrix}(w_1|w_2)} = e^{\frac{\pi i}{2}\{\gamma_1(\varepsilon_1'-\eta_1')+\gamma_2(\varepsilon_2'-\eta_2')\}}\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\gamma_1, & \varepsilon_2+\gamma_2\\ \varepsilon_1'+\gamma_1', & \varepsilon_2'+\gamma_2'\end{pmatrix}(v_1|v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}\eta_1+\gamma_1, & \eta_2+\gamma_2\\ \eta_1'+\gamma_1', & \eta_2'+\gamma_2'\end{pmatrix}(v_1|v_2)} \qquad (\vartheta)$$

wobei immer festzuhalten, dass die Grössen ε und η nur 0 oder 1 sein sollen. Einige der Grössen $\varepsilon+\gamma$, $\eta+\gamma$ können nun in der letzten Formel die Werthe $+2$ oder -1 haben, und um ein solches System auf die normale Charakteristikenform, die nur 0 oder 1 enthält, zu reduciren, wenden wir die folgenden Formeln an, die sich aus der Reihe §. 15. II. unmittelbar ergeben und für jeden Werth der Grössen ε, ε' gelten:

$$\vartheta\binom{\varepsilon_1\pm2,\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1',\ \ \varepsilon_2'}(v_1|v_2) = \vartheta\binom{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\pm2}{\varepsilon_1',\ \varepsilon_2'}(v_1|v_2) = \vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(v_1|v_2);$$

$$\vartheta\binom{\varepsilon_1,\ \ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\pm2,\varepsilon_2'}(v_1|v_2) = (-1)^{\varepsilon_1}\,\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(v_1|v_2);\ \vartheta\binom{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1',\varepsilon_2'\pm2}(v_1|v_2) = (-1)^{\varepsilon_2}\,\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(v_1|v_2). \qquad (\vartheta)$$

Es bedarf wohl keiner Bemerkung mehr, dass der Quotient der Quadrate zweier ϑ-Functionen, z. B. $\frac{\vartheta^2(\varepsilon)(v_1|v_2)}{\vartheta^2(\eta)(v_1|v_2)}$, ganz ungeändert bleibt, sowohl wenn man die einzelnen Glieder der Charakteristiken um ± 2 ändert, als auch, wenn man für $v_1|v_2$ beliebige andere congruente Systeme einsetzt: er ist in Bezug auf gleichzeitige Änderungen der Variablen um Einzelne der vier Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmodulen periodisch, also eine vierfach periodische Function.

Die Constanten ergeben sich nun wie folgt:

$$c_1 = i\,\frac{\theta_1}{\theta_8};\quad c_2 = i\,\frac{\theta_5}{\theta_8};\quad c_3 = i\,\frac{\theta_2\theta_9}{\theta_6\theta_8};\quad c_4 = i\,\frac{\theta_4}{\theta_8};\quad c_5 = \frac{\theta_3\theta_{10}}{\theta_7\theta_8};$$

$$c_6 = -i\,\frac{\theta_{10}}{\theta_8};\quad c_7 = i\,\frac{\theta_9}{\theta_8};\quad c_8 = i\,\frac{\theta_5}{\theta_1};\quad c_9 = i\,\frac{\theta_2\theta_4\theta_{10}}{\theta_1\theta_6\theta_7};\quad c_{10} = -\frac{\theta_7}{\theta_8};$$

$$c_{11} = i\,\frac{\theta_6}{\theta_8};\quad c_{12} = -\frac{\theta_3\theta_4\theta_5\theta_9}{\theta_1\theta_6\theta_7\theta_8};\quad c_{13} = -\frac{\theta_3}{\theta_8};\quad c_{14} = \frac{\theta_2}{\theta_8}.$$

Ihre Quadrate in $\varkappa, \lambda, \mu$ ausgedrückt sind:

$$c_1^2 = -\frac{\lambda}{\varkappa\mu};\quad c_2^2 = -\frac{\lambda\varkappa_1\mu_1}{\varkappa\mu\lambda_1};\quad c_3^2 = -\frac{\lambda\varkappa_1\lambda_\varkappa}{\mu\mu_\varkappa};\quad c_4^2 = -\frac{\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\mu\lambda_1};$$

$$c_5^2 = -\frac{\lambda\mu_1\mu_\lambda}{\varkappa\mu_\varkappa};\quad c_6^2 = \frac{\lambda\varkappa_1\mu_\lambda}{\varkappa\lambda_1\mu_\varkappa};\quad c_7^2 = -\frac{\varkappa_1\lambda_\varkappa}{\varkappa\mu_\varkappa};\quad c_8^2 = -\frac{\varkappa_1\mu_1}{\lambda_1};$$

$$c_9^2 = \frac{\lambda\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda_1};\quad c_{10}^2 = \frac{\varkappa_1\mu_\lambda}{\mu\lambda_1\mu_\varkappa};\quad c_{11}^2 = -\frac{\mu_1\lambda_\varkappa}{\varkappa\lambda_1\mu_\varkappa};\quad c_{12}^2 = \frac{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\mu};$$

$$c_{13}^2 = \frac{\mu_1\mu_\lambda}{\mu\mu_\varkappa};\quad c_{14}^2 = \frac{\lambda\mu_1\lambda_\varkappa}{\mu\lambda_1\mu_\varkappa}.$$

Das Formelsystem (F_1) stimmt vollständig mit dem Systeme (F) des §. 19 überein, indem jedes aus dem andern abgeleitet werden kann. Da es nur fünfzehn Functionen $\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1|u_2)$ giebt, indem $\vartheta\binom{00}{00}(u_1|u_2)$ für jeden Werth von x identisch verschwindet, so sind in r_1 $\frac{15.14}{2}$ Functionen enthalten, die sich alle aus (F_1) durch Division je zweier Formeln ergeben. Das Factorensystem ist für jede in den Charakteristiken enthalten, denn, wie wir schon früher bemerkt, nimmt

$$\frac{\vartheta(\varepsilon)(u_1-f_1|u_2-f_2)}{\vartheta(\eta)(u_1-f_1|u_2-f_2)}$$

an den Querschnitten der Reihe nach die Factoren $(-1)^{\varepsilon_1+\eta_1}, (-1)^{\varepsilon_1'+\eta_1'}, (-1)^{\varepsilon_2+\eta_2}, (-1)^{\varepsilon_2'+\eta_2'}$ an, und dieser Ausdruck geht in r_1 über, wenn man $f_1|f_2 = 0|0$ setzt. Rechnet man die reciproken Werthe der $\frac{15\,.\,14}{2}$ Functionen auch als selbständige Formen, so giebt es im Ganzen 15.14 Functionen r_1; diese zerfallen in fünfzehn Gruppen, wenn man alle die Functionen, die für dieselben Punkte ∞^1 werden, als zu einer Gruppe gehörig betrachtet, und jede Gruppe enthält dann wie (F_1) vierzehn Functionen; sie zerfallen ebenso in fünfzehn Gruppen, wenn man alle die Functionen, die an den Querschnitten dieselben Factoren annehmen, zu einer Gruppe rechnet.

Die sub (F_1) stehenden algebraischen Functionen sind nicht die einzigen, die in T'' einwerthig und stetig, für $x = 1$ und $x = \frac{1}{\lambda^2}$ ∞^1 werden und an den Querschnitten Factoren

± 1 annehmen, aber es sind die einzigen von dieser Art, die sich als Quotienten von zwei ϑ-Functionen darstellen lassen. Alle übrigen sind in der Form $\frac{m+nx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-\lambda^2 x}}$ enthalten und werden für zwei demselben Werthe von x entsprechende Punkte 0^1; eine ϑ-Function $\vartheta(u_1-e_1|u_2-e_2)$, die ebenso 0^1 würde, hat aber keinen Sinn, denn ihr Constantensystem $e_1|e_2$ wäre congruent $0|0$ und sie selbst verschwände identisch.

§. 22.

Zweiter Fall:

$$f_1|f_2 = \int_\alpha^{x',s'} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x',s'} du_2 \equiv u_1'|u_2'.$$

Erfüllt das Constantensystem $f_1|f_2$ die Bedingung $\vartheta(f_1|f_2) = 0$, so lässt es sich immer in die Form setzen:

$$f_1|f_2 \equiv \int_\alpha^{x',s'} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x',s'} du_2 \equiv u_1'|u_2'$$

und zwar nur auf eine Weise. Der Ausdruck R und alle übrigen, die durch Division zweier Ausdrücke R mit demselben Nenner $\vartheta(u_1-f_1|u_2-f_2)$ und verschiedenen Zählern entstehen, sind dann in der allgemeinen Form

$$r_2 = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta\binom{\eta_1\ \eta_2}{\eta_1'\ \eta_2'}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}$$

enthalten. Da alle sechszehn Charakteristiken vorkommen können, so gehören zu einem bestimmten Nenner fünfzehn verschiedene Zähler; die dadurch entstehenden Functionen r_2 lassen sich als Hauptformen ansehen, in sofern aus ihnen durch gegenseitige Division alle übrigen sich ergeben; sie haben alle fünfzehn die beiden Punkte, wo sie ∞^1 werden, gemein und unterscheiden sich nur durch die Nullpunkte oder durch die davon abhängigen Factoren an den Querschnitten.

Den algebraischen Ausdruck für r_2 haben wir schon hergestellt für den Fall, dass sein Zähler und sein Nenner ungerade ϑ-Functionen waren (vergl. §. 17); zum gemeinschaftlichen Nenner hatten wir die Function $\vartheta\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')$ genommen, die für $x, s = x', s'$ und für $x = \infty : 0^1$ wurde. Wir behalten diesen Nenner bei und geben ihm der Reihe nach jede der zehn geraden ϑ-Functionen als Zähler; können wir diese Quotienten algebraisch ausdrücken, so sind alle Hauptformen dargestellt. Betrachten zu dem Ende

$$r_2^2 = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} \qquad \varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv 0 \pmod{2},$$

wo also der Zähler eine gerade ϑ ist, so hat dieser Ausdruck folgende Eigenschaften.

1. Er ist eine wie T verzweigte algebraische Function, also rational durch x und s ausdrückbar; wird ∞^2 für $x, s = x', s'$ und für $x = \infty$; wird 0^2 für die beiden von x', s' abhängigen Punkte, für die die ϑ im Zähler verschwindet. Der algebraische Ausdruck muss demnach in der allgemeinen Form

$$(1) \qquad r_2^2 = \frac{c_1 s + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5}{(x-x')^2}$$

enthalten sein, die auch für $x, s = x', s'$ und für $x = \infty : \infty^2$ wird. Da der Nenner für die beiden demselben x' entsprechenden Punkte: x', s' und $x', -s' : 0^2$ wird, der Ausdruck r_2^2 aber nur für den Punkt $x', s' : \infty^2$ werden soll, so sind die Constanten des Zählers so zu bestimmen, dass dieser auch für $x = x'$, $s = -s'$, 0^2 wird.

2. Die Constanten c sind natürlich von x' abhängig. Da der ϑ-Quotient r_2^2 eine symmetrische Function der Punkte x, s und x', s' ist, indem die Quadrate der ϑ-Functionen nicht geändert werden, wenn man $u_1 | u_2$ mit $u'_1 | u'_2$ vertauscht, so folgt, dass der Zähler von (1) auch eine symmetrische Function derselben Grössen sein muss, und es ergiebt sich die speciellere Form:

$$r_2^2 = \frac{\gamma_1 ss' + \gamma_2 [s \overset{3}{f(x')} + s' \overset{3}{f(x)}] + \gamma_3 \overset{3}{f(x, x')}}{(x-x')^2} \tag{2}$$

wo $\overset{3}{f(x)}$ eine rationale ganze Function des dritten Grades von x, $\overset{3}{f(x')}$ ebendieselbe Function von x', und $\overset{3}{\overline{f(x, x')}}$ eine symmetrische Function der beiden Variablen, vom dritten Grade in Bezug auf jede, bezeichnet. Die Constanten γ und die übrigen in den Functionen f vorkommenden sind dann von x und x' unabhängig.

3. Die für die Constantenbestimmung wichtigste Eigenschaft des ϑ-Quotienten r_2^2 ist die, dass wenn man für x' einen beliebigen Verzweigungspunkt setzt, die Form r_2^2 in eine der Formen $\pm r_1^2$ des vorigen Paragraphen gemäss der Gleichungen (ϑ) übergeht, indem dann $u'_1 | u'_2$ durch Halbe der zusammengehörigen Periodicitätsmodulen sich ausdrücken. Jede Form r_1^2 ist aber in dem allgemeinen Ausdrucke

$$\frac{mx^2 + m_1 x + m_2}{nx^2 + n_1 x + n_2}$$

enthalten, wo einzelne der Constanten auch 0 sein können. Soll der letzte Ausdruck r_2^2 unter der genannten Bedingung in diese Form übergehen, so muss das s aus dem Zähler wegfallen, wenn man für x' einen endlichen Verzweigungspunkt, d. h. $s' = 0$ setzt. Da nun $\overset{3}{f(x')}$ nicht für alle fünf endlichen Verzweigungswerthe verschwinden kann, so muss nothwendig die Constante $\gamma_2 = 0$ sein, und wir gewinnen den einfachen Ausdruck:

$$r_2^2 = C \, \frac{2ss' + \overset{3}{\overline{f(x, x')}}}{(x-x')^2}; \tag{3}$$

wo

$$\overset{3}{\overline{f(x, x')}} = a_1 x^3 x'^3 + a_2 (x^3 x'^2 + x^2 x'^3) + a_3 (x^3 x' + x x'^3) + a_4 x^2 x'^2 + a_5 (x^3 + x'^3) + a_6 (x^2 x' + x x'^2)$$
$$+ a_7 (x^2 + x'^2) + a_8 x x' + a_9 (x + x') + a_{10}$$

und die Constanten a beliebige von x und x' unabhängige Grössen bezeichnen.

Wie schon sub 1. bemerkt, sind die Constanten des Zählers so zu bestimmen, dass derselbe zugleich mit dem Nenner für den Punkt $x = x', s = -s'$, verschwindet und zwar 0^2 wird. Es entsteht die Bedingungsgleichung:

$$-2s^2 + \overset{3}{\overline{f(x, x)}} = 0$$

oder

$$-2x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x) + a_1 x^6 + 2a_2 x^5 + (2a_3 + a_4) x^4 + 2(a_5 + a_6) x^3$$
$$+ (2a_7 + a_8) x^2 + 2a_9 x + a_{10} = 0,$$

die für jedes x oder x' gelten muss. In Folge dessen müssen, wenn wir die letzte Gleichung nach Potenzen von x ordnen, die Coëfficienten der einzelnen Glieder den Werth 0 haben, und wir erhalten, indem wir zur Abkürzung

$$(a)\quad \begin{cases} p = \varkappa^2\lambda^2\mu^2; \qquad p_1 = \varkappa^2\lambda^2 + \varkappa^2\mu^2 + \lambda^2\mu^2; \qquad p_2 = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2; \\ \text{schreiben, die folgenden Relationen:} \\ a_1 = 0; \qquad a_2 = p; \qquad a_9 = 1; \qquad a_{10} = 0; \\ 2a_3 + a_4 + 2p + 2p_1 = 0; \quad a_5 + a_6 - p_1 - p_2 = 0; \quad 2a_7 + a_8 + 2 + 2p_2 = 0; \end{cases}$$

durch die die zehn Constanten a bis auf drei bestimmt sind. Lassen wir die drei: a_3, a_5, a_7 unbestimmt und drücken durch sie resp. a_4, a_6, a_8 aus, so nimmt $\overline{f(x,x')}$ durch Einsetzen der so bestimmten Constanten die Form an:

$$\begin{aligned} f(x,x') = p\,(x^3x'^2 + x^2x'^3) - 2\,(p+p_1)\,x^2x'^2 + (p_1+p_2)\,(x^2x' + xx'^2) - 2\,(1+p_2)\,xx' + x + x' \\ + [a_3xx' + a_5\,(x+x') + a_7]\,(x-x')^2 \end{aligned}$$

und es ist für alle zehn in r_2^2 enthaltenen Fälle, wo der Zähler eine gerade ϑ ist:

$$r_2^2 = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} = C\,\frac{2ss' + f(x,x')}{(x-x')^2}\,.$$

§. 23.

Der Zähler: $2ss' + f(x,x')$: des algebraischen Ausdruckes für r_2^2 ist jetzt so bestimmt, dass er für den Punkt $x, s = x', -s'$: 0^2 wird, wie man leicht durch Differentiation findet. Die in demselben noch enthaltenen vier unbestimmten Constanten C, a_3, a_5, a_7 sind verschieden nach den zehn möglichen Fällen und bestimmen sich leicht, wenn man für x' einen der fünf endlichen Verzweigungswerthe setzt, wo dann $s' = 0$ wird. Es genügt, zwei Verzweigungswerthe einzuführen, und wir wählen die einfachsten $x' = 0$ und $x' = 1$; dann erhalten wir:

$$\underset{(x'=0)}{r_2^2} = C\,\frac{f(x,0)}{x^2} = C\,\frac{1 + a_7x + a_5x^2}{x}\,,$$

$$\underset{(x'=1)}{r_2^2} = C\,\frac{f(x,1)}{(x-1)^2} = C\,\frac{(p+a_3+a_5)\,x^2 + (p_2-p_1-a_3+a_7)\,x - (a_5+a_7+1)}{x-1}\,.$$

Entsprechend nimmt der ϑ-Quotient die Formen an:

$$\underset{(x'=0)}{r_2^2} = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}\left(u_1 + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta^2\binom{10}{11}\left(u_1 + \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}\,,$$

$$\underset{(x'=1)}{r_2^2} = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}\left(u_1 + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta^2\binom{10}{11}\left(u_1 + \frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)}\,;$$

die sich vermöge der im §. 21 notirten Reductionsformeln (ϑ) auf ϑ-Quotienten mit den einfachen Argumenten u_1 u_2 reduciren und dann in jedem speciellen Falle aus den Formeln (F_1) algebraisch ausgedrückt werden können. Durch Vergleichung dieser algebraischen Ausdrücke mit den ihnen äquivalenten obigen, die die vier Constanten enthalten, ergeben sich die Werthe dieser vier noch übrigen als Functionen der Grössen $\varkappa$, λ, μ, und somit ist der algebraische Ausdruck für r_2^2 in allen seinen Constanten vollkommen bestimmt.

Wir wollen nach dieser Methode eine beliebige der zehn möglichen Formen bestimmen und wählen dazu z. B.:

$$r_2^2 = \frac{\vartheta^2\binom{00}{10}(u_1-u_1' \,|\, u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \,|\, u_2-u_2')} .$$

Es folgt:

$$\underset{(x'=0)}{r_2^2} = \frac{\vartheta^2\binom{00}{10}\left(u_1+\frac{a_{1,1}}{2}+\frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}+\frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta^2\binom{10}{11}\left(u_1+\frac{a_{1,1}}{2}+\frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{1,2}}{2}+\frac{a_{2,2}}{2}\right)} = -\frac{\vartheta^2\binom{11}{11}(u_1 \,|\, u_2)}{\vartheta^2\binom{01}{10}(u_1 \,|\, u_2)};$$

$$\underset{(x'=1)}{r_2^2} = \frac{\vartheta^2\binom{00}{10}\left(u_1+\frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{2,2}}{2}\right)}{\vartheta^2\binom{10}{11}\left(u_1+\frac{a_{1,2}}{2} \,\middle|\, u_2-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{2,2}}{2}\right)} = -\frac{\vartheta^2\binom{01}{11}(u_1 \,|\, u_2)}{\vartheta^2\binom{11}{10}(u_2 \,|\, u_2)} .$$

Aus dem Formelsysteme (F_1) entnehmen wir jetzt die algebraischen Ausdrücke für die zuletzt stehenden ϑ-Quotienten und finden:

$$\underset{(x'=0)}{r_2^2} = -\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda} \cdot \frac{(1-x)(1-\mu^2x)}{x} = C\,\frac{1+a_7x+a_5x^2}{x};$$

$$\underset{(x'=1)}{r_2^2} = \frac{\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1}{\mu_\varkappa\mu_\lambda} \cdot \frac{x(1-\mu^2x)}{x-1} = C\,\frac{(p+a_3+a_5)\,x^2+(p_2-p_1-a_3+a_7)\,x-(a_5+a_7+1)}{x-1} .$$

Aus diesen Gleichungen, die für jeden Werth von x gelten, bestimmen sich die Constanten wie folgt:

$$C = -\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}; \qquad a_3 = -\mu^2(\varkappa^2+\lambda^2); \qquad a_5 = \mu^2; \qquad a_7 = -(1+\mu^2);$$

die übrigen a ergeben sich in Folge dessen aus den Gleichungen (a) des vorigen Paragraphen durch $\varkappa$, λ, μ ausgedrückt, und es erhält $f(x, x')$ durch Einsetzen dieser Werthe die Form:

$$\begin{aligned} f(x, x') &= \varkappa^2\lambda^2\mu^2(x^3x'^2+x^2x'^3) - \mu^2(\varkappa^2+\lambda^2)(x^3x'+xx'^3) - 2\varkappa^2\lambda^2(1+\mu^2)\,x^2x'^2 + \mu^2(x^3+x'^3) \\ &\quad + (\varkappa^2+\lambda^2+\varkappa^2\lambda^2+\varkappa^2\mu^2+\lambda^2\mu^2)(x^2x'+xx'^2) - (1+\mu^2)(x^2+x'^2) - 2(\varkappa^2+\lambda^2)\,xx' + x + x' \\ &= x(1-x)(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x) + x'(1-x')(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x'); \end{aligned}$$

daher

$$r_2^2 = \frac{\vartheta^2\binom{00}{10}(u_1-u_1' \,|\, u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \,|\, u_2-u_2')} = C\,\frac{2ss'+f(x, x')}{(x-x')^2} =$$

$$= -\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda} \cdot \frac{2ss'+x(1-x)(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x)+x'(1-x')(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x')}{(x-x')^2} .$$

Eben so einfach ergeben sich die algebraischen Ausdrücke für die übrigen neun Formen r_2^2, wo die ϑ-Function im Zähler gerade ist; man findet, dass die sämmtlichen zehn vorkommenden Functionen $f(x, x')$ aus der zweigliedrigen Form

$$f = x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x) + x'(1-x')(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x')$$

entstehen, wenn man im ersten Gliede zwei Zeichen x durch zwei Zeichen x' ersetzt (was auf zehn Weisen möglich ist) und entsprechend an denselben Stellen im zweiten Gliede zwei Zeichen x' durch zwei Zeichen x, so dass f eine symmetrische Function der beiden Variablen bleibt. Nehmen wir aus §. 17 die schon dargestellten fünf Formen r_2^2, wo der Zähler ungerade ist, hinzu, quadriren, verwandeln die ϑ-Functionen in die entsprechenden mit den Charakteristiken, indem wir die in c_1^2, c_2^2 etc. (s. §. 19) enthaltenen Exponentialgrössen auf die linke Seite der Gleichungen bringen, so ergiebt sich das verlangte System der fünfzehn Hauptformen wie folgt:

$$1.\quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{01}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} = -\,\varkappa\lambda\mu x'x;$$

$$2.\quad \frac{\vartheta^2\binom{01}{01}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} = -\frac{\varkappa\lambda\mu}{\varkappa_1\lambda_1\mu_1}(1-x')(1-x);$$

$$3.\quad \frac{\vartheta^2\binom{01}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} = -\frac{\lambda\mu}{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}(1-\varkappa^2x')(1-\varkappa^2x);$$

$$4.\quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{10}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} = \frac{\varkappa\mu}{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}(1-\lambda^2x')(1-\lambda^2x);$$

$$5.\quad \frac{\vartheta^2\binom{10}{10}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} = \frac{\varkappa\lambda}{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}(1-\mu^2x')(1-\mu^2x);$$

$$6.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{10}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} =$$

$$= -\frac{\varkappa\lambda}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{2ss' + x(1-x)(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x) + x'(1-x')(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x')}{(x-x')^2};$$

$$7.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{01}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} =$$

$$= -\frac{\varkappa}{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\cdot\frac{2ss' + x(1-x')(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x') + x'(1-x)(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}{(x-x')^2};$$

$$8.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} =$$

$$= -\frac{1}{\varkappa_1\lambda_1\mu_1}\cdot\frac{2ss' + x(1-x)(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x') + x'(1-x')(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)}{(x-x')^2};$$

$$9.\quad \frac{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} =$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{2ss' + x(1-x')(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x') + x'(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x)}{(x-x')^2};$$

$$10.\quad \frac{\vartheta^2\binom{01}{00}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1'\,|\,u_2-u_2')} =$$

$$= -\frac{\mu}{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{2ss' + x(1-x')(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x') + x'(1-x)(1-\varkappa^2x')(1-\lambda^2x')(1-\mu^2x)}{(x-x')^2};$$

(F_2)

$$\left.\begin{aligned}
&11.\quad \frac{\vartheta^2\binom{10}{01}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} = \\
&= -\frac{\varkappa}{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa}\cdot\frac{2ss' + x\,(1-x')\,(1-\varkappa^2x')\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x) + x'\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x')\,(1-\mu^2x')}{(x-x')^2};\\
&12.\quad \frac{\vartheta^2\binom{01}{10}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} = \\
&= -\frac{\varkappa\mu}{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda}\cdot\frac{2ss' + x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x')\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x') + x'\,(1-x')\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x')\,(1-\mu^2x)}{(x-x')^2};\\
&13.\quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{00}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} = \\
&= -\frac{\mu}{\mu_1\mu_\varkappa\,\mu_\lambda}\cdot\frac{2ss' + x\,(1-x')\,(1-\varkappa^2x')\,(1-\lambda^2x')\,(1-\mu^2x) + x'\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x')}{(x-x')^2};\\
&14.\quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} = \\
&= \frac{\lambda\mu}{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\,\mu_\varkappa}\cdot\frac{2ss' + x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x')\,(1-\mu^2x') + x'\,(1-x')\,(1-\varkappa^2x')\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x)}{(x-x')^2};\\
&15.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{00}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} = \\
&= -\frac{\lambda}{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda}\cdot\frac{2ss' + x\,(1-x')\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x')\,(1-\mu^2x) + x'\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x')\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x')}{(x-x')^2}.
\end{aligned}\right\}(F_2)$$

Setzt man in diesen Formeln statt $s' : -s'$, so geht entsprechend das System $-u_1' \mid -u_2'$ in $+u_1' \mid +u_2'$ über, da ja

$$-\int_\alpha^{x',-s'} du_1 \mid -\int_\beta^{x',-s'} du_2 = \int_\alpha^{x',s'} du_1 \mid \int_\beta^{x',s'} du_2\,,$$

und die ϑ-Functionen erhalten statt der Differenz die Summe der Integrale u und u' als Argumente. Die algebraischen Ausdrücke für die fünf ersten ϑ-Quotienten werden dadurch nicht geändert, indem sie s' nicht enthalten, und überhaupt die Punkte x, wo sie 0 und ∞ werden, von dem Punkte x' unabhängig sind; dagegen in den letzten zehn Formen verändert sich $2ss'$ in $-2ss'$, dadurch verändern sich auch die Punkte, wo sie 0 und ∞ werden, und zwar so, dass sie aus einem Blatte in das andere übergehen, indem ein solcher Punkt ξ, σ zu $\xi, -\sigma$ wird. Durch Addition je zweier ϑ-Quotienten, von denen der eine die Summe, der andere die Differenz der Integrale zu Argumenten hat, und die sonst dieselben sind, erhält man rationale Functionen von x und x' durch ϑ-Functionen ausgedrückt, indem die Grössen s wegfallen; z. B. aus der letzten Formel 15:

$$\frac{\vartheta^2\binom{00}{00}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1-u_1' \mid u_2-u_2')} + \frac{\vartheta^2\binom{00}{00}(u_1+u_1' \mid u_2+u_2')}{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1+u_1' \mid u_2+u_2')} =$$

$$= -\frac{2\lambda}{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\,\mu_\lambda}\cdot\frac{x\,(1-x')\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x')\,(1-\mu^2x) + x'\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x')\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x')}{(x-x')^2}.$$

Eine Menge interessanter anderer Relationen zwischen ϑ-Functionen und algebraischen Formen ergeben sich aus dem obigen Formelsysteme, die wir als unserm Ziele ferner liegend übergehen.

Die Zähler der algebraischen Ausdrücke sub (F_2) sind wie die Nenner vollkommene Quadrate, und es ist leicht für jeden die quadratische Gleichung aufzustellen, die die Werthe x der beiden Punkte, für die der Quotient 0^2 wird, als Functionen des Werthes x' giebt. Die zugehörigen Werthe von s finden sich dann durch directe Betrachtung des Zählers. So ist z. B. der Zähler aus Formel 15:

$$2ss' + x(1-x')(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x')(1-\mu^2 x) + x'(1-x)(1-\kappa^2 x')(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x')$$
$$= \left[\sqrt{x(1-x')(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x')(1-\mu^2 x)} \pm \sqrt{x'(1-x)(1-\kappa^2 x')(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x')}\right]^2$$

wo das positive oder negative Zeichen zwischen den Quadratwurzeln stehen muss, je nachdem man sich im obern oder untern Blatte der Fläche befindet. Die beiden Werthe von x, für die dieser Zähler nicht zugleich mit dem Nenner 0^2 wird, ergeben sich in Folge dessen aus der Gleichung:

$$x(1-x')(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x')(1-\mu^2 x) = x'(1-x)(1-\kappa^2 x')(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x'),$$

die eine auszuscheidende Wurzel $x = x'$ hat und demnach sich auf eine quadratische reducirt.

Das Formelsystem dieses zweiten Falles hat schon **Rosenhain** aufgestellt (**Crelle**. Bd. 40, pag. 322, Briefe an **Jacobi**). Merkwürdiger Weise hat er weder die Möglichkeit der Specialisirung bemerkt, die darin besteht, dass durch Einsetzen von Verzweigungswerthen für x' diese Formeln in Formeln des Systems (F_1) des ersten Falles übergehen, worin zugleich die Prüfung der Richtigkeit der Constanten für uns liegt; noch auch, dass dieser zweite Fall nicht der allgemeinste ist, wo Quotienten von ϑ-Functionen sich algebraisch ausdrücken lassen. Eben, die Auffassung des Problems nach **Jacobi** bietet keinen Anlass zu derartigen Betrachtungen, während die Behandlung der ϑ-Function als Function einer Variable naturgemäss zu dem allgemeinsten Falle hinweist.

§. 24.

Dritter Fall:

$$f_1 | f_2 = \int_\alpha^{x_1, s_1} du_1 + \int_\alpha^{x_2, s_2} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_1, s_1} du_2 + \int_\beta^{x_2, s_2} du_2.$$

Der allgemeinste und letzte Fall ist derjenige, wo das Constantensystem $f_1 | f_2$ als ein ganz beliebiges ohne besondere Nebenbedingungen gegeben ist, und es ist die Aufgabe, auch für diesen Fall

$$R = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{pmatrix}(u_1 - f_1 | u_2 - f_2)}{\vartheta(u_1 - f_1 | u_2 - f_2)}$$

algebraisch auszudrücken. Wie auch das System $f_1 | f_2$ beschaffen sein mag (es darf nur nicht $= 0|0$ sein), so lässt es sich immer und nur auf eine Weise Summen von je zwei Integralen congruent setzen, so dass

$$-f_1 | -f_2 \equiv \int_\alpha^{x_1, s_1} du_1 + \int_\alpha^{x_2, s_2} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_1, s_1} du_2 + \int_\beta^{x_2, s_2} du_2 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} | u_2^{(1)} + u_2^{(2)}.$$

Der Ausdruck R und alle durch gegenseitige Division zweier Ausdrücke R mit demselben Nenner und verschiedenen Zählern entstehende Quotienten sind dann in der allgemeinsten Form

$$r_3 = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)})}{\vartheta\binom{\gamma_1\ \gamma_2}{\gamma_1'\ \gamma_2'}(u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)})}$$

enthalten, und es giebt wie früher fünfzehn Hauptformen, indem zu einem Nenner fünfzehn verschiedene Zähler gehören können. Wir wählen vortheilhaft als Nenner diejenige Function, deren Nullpunkte wir kennen, es ist dies:

$$\vartheta(u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)}) \begin{array}{l} = 0^1, \text{ wenn } x, s = x_1, -s_1\,, \\ = 0^1, \text{ wenn } x, s = x_2, -s_2\,, \end{array}$$

indem dann die Argumente sich auf $u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)}$ und auf $u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)}$ resp. congruent reduciren; ihre Charakteristik ist bekanntlich $\binom{00}{00}$. Betrachten also

$$r_3^2 = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)})}{\vartheta^2\binom{00}{00}(u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)})}\,,$$

so hat dieser Ausdruck folgende Eigenschaften.

1. Da die ϑ im Quadrate vorkommen, so nimmt er an allen Querschnitten den Factor $+1$ an, ist also eine wie die Fläche T verzweigte algebraische Function und folglich rational durch x und s ausdrückbar; er wird ∞^2 für die beiden Punkte $x_1, -s_1$ und $x_2, -s_2$, für die die ϑ im Nenner verschwindet, und 0^2 für die beiden von x_1 und x_2 abhängigen Punkte, für die die ϑ im Zähler verschwindet.

Der algebraische Ausdruck für r_3^2 ist (nach §. 20) in der Form

$$F = \frac{c_1 s + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5}{\gamma_1 s + \gamma_2 x^3 + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x + \gamma_5}$$

darstellbar; der Nenner ist so zu bestimmen, dass er für die beiden Punkte $x_1, -s_1$ und $x_2, -s_2$: 0^2 wird, und der Zähler so, dass er für die beiden Punkte, für die der Nenner ausserdem noch 0^1 wird, auch verschwindet. Da diese Bestimmung nur schwierig und nicht in eleganter Form durchführbar ist, so nehmen wir eine algebraische Form, in der Zähler und Nenner von höherem Grade sind, indem wir zum Nenner die vollkommen bestimmte symmetrische Function $(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\,(x_1-x_2)^2$ wählen, die für die beiden Punkte $x,s = x_1, -s_1$ und $x,s = x_2, -s_2$, für die die ϑ im Nenner verschwindet, 0^2 wird, und ausserdem noch 0^2 für die beiden Punkte $x,s = x_1, s_1$ und $x,s = x_2, s_2$. Der Zähler muss dann von demselben Grade in Bezug auf x sein wie der Nenner, da für $x = \infty$ r_3^2 weder 0 noch ∞ wird, so dass der algebraische Ausdruck für r_3^2 in der allgemeinen Form

$$(1.) \qquad r_3^2 = \frac{(c_1 x + c_2)\,s + \gamma_1 x^4 + \gamma_2 x^3 + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x + \gamma_5}{(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\,(x_1-x_2)^2}$$

enthalten ist, wo die Grössen c und γ von x unabhängige Constante bezeichnen, die Functionen von x_1 und x_2 sind. Zähler und Nenner dieses Ausdruckes werden für $x = \infty$: ∞^8, also auch für acht Punkte 0^1. Da r_3^2 nur für $x, s = x_1, -s_1$ und $x, s = x_2, -s_2$: ∞^2 werden soll, so sind die

Constanten des Zählers so zu bestimmen, dass er für die beiden Punkte $x, s = x_1, s_1$ und $x, s = x_2, s_2$, für die der Nenner ausserdem noch 0^2 wird, auch 0^2 wird. Dies giebt vier Bedingungsgleichungen, so dass von den sechs unabhängigen Constanten des Zählers (abgesehen von einem constanten Factor) nur noch zwei willkürlich bleiben; r_3^2 wird dann ∞^2 für die beiden verlangten Punkte und 0^1 für vier Punkte x, s, durch deren paarweise Gleichsetzung zwei Bedingungsgleichungen entstehen, die die beiden noch übrigen willkürlichen Constanten des Zählers bestimmen; eine Bestimmung, die auf so viele Weisen möglich sein wird, als in dem ϑ-Quotienten r_3^2 Formen enthalten sind, die für dieselben beiden Punkte ∞^2 werden, d. h. auf fünfzehn verschiedene Weisen, da es eben so viele Hauptformen giebt, die für dieselben beiden Punkte ∞^2 werden und sich nur durch die Punkte, wo sie 0^2 werden, unterscheiden.

2. Um die Constanten des Zählers, die Functionen von x_1 und x_2 sind, zu bestimmen, betrachten wir die Eigenschaften des ϑ-Quotienten r_3^2, dessen wichtigste darin besteht, dass er eine symmetrische Function der Punkte: $x, s : x_1, s_1 : x_2, s_2$ ist, indem die Argumente der ϑ-Functionen ganz unverändert bleiben, wenn man $u_1 | u_2$ mit $u_1^{(1)} | u_2^{(1)}$, oder $u_1^{(1)} | u_2^{(1)}$ mit $u_1^{(2)} | u_2^{(2)}$ vertauscht. Demnach muss auch der algebraische Ausdruck für r_3^2 eine symmetrische Function dieser drei Punkte sein, und da der Nenner schon eine solche ist, so sind die Constanten des Zählers als Functionen von x_1, s_1 und x_2, s_2 so zu bestimmen, dass derselbe sich nicht ändert, wenn man je zwei der Punkte: $x, s : x_1, s_1 : x_2, s_2$ mit einander vertauscht. Bezeichnet man den Zähler bis auf einen constanten von den drei Grössen unabhängigen Factor mit Z, so ergiebt sich demnach für ihn die folgende symmetrische Form:

$$
\begin{aligned}
(2.)\qquad Z = ss_1s_2\big[pxx_1x_2 + p_1(xx_1 + xx_2 + x_1x_2) + p_2(x + x_1 + x_2) + p_3\big] \qquad & \text{(I.)}\\
+ \big[ss_1xx_1\overset{4}{\overline{f(x_2)}} + ss_2xx_2\overset{4}{\overline{f(x_1)}} + s_1s_2x_1x_2\overset{4}{\overline{f(x)}}\big] \qquad & \text{(II.)}\\
+ \big[ss_1(x + x_1)\overset{4}{\overline{f_1(x_2)}} + ss_2(x + x_2)\overset{4}{\overline{f_1(x_1)}} + s_1s_2(x_1 + x_2)\overset{4}{\overline{f_1(x)}}\big] \qquad & \text{(III.)}\\
+ \big[ss_1\overset{4}{\overline{f_2(x_2)}} + ss_2\overset{4}{\overline{f_2(x_1)}} + s_1s_2\overset{4}{\overline{f_2(x)}}\big] \qquad & \text{(IV.)}\\
+ \big[sx\,\overset{4}{\overline{\varphi(x_1, x_2)}} + s_1x_1\overset{4}{\overline{\varphi(x, x_2)}} + s_2x_2\overset{4}{\overline{\varphi(x, x_1)}}\big] \qquad & \text{(V.)}\\
+ \big[s\,\overset{4}{\overline{\varphi_1(x_1, x_2)}} + s_1\overset{4}{\overline{\varphi_1(x, x_2)}} + s_2\overset{4}{\overline{\varphi_1(x, x_1)}}\big] \qquad & \text{(VI.)}\\
+ \overset{4}{\overline{F(x, x_1, x_2)}} \qquad & \text{(VII.)}
\end{aligned}
$$

In diesem Ausdrucke bezeichnen die Functionen f, f_1, f_2 rationale ganze Functionen des vierten Grades der betreffenden Variable, die Symbole φ, φ_1 ganze symmetrische Functionen der beiden unter dem Functionszeichen stehenden Variablen, vom vierten Grade in Bezug auf jede, und endlich bedeute $\overset{4}{\overline{F(x, x_1, x_2)}}$ eine ganze symmetrische Function der drei Grössen, in Bezug auf jede vom vierten Grade. Die Constanten p und die übrigen in den Functionen vorkommenden sind dann von den Grössen x, x_1, x_2 unabhängig. Dass in dem Ausdrucke für Z kein Glied, welches vorkommen muss, fehlt, erkennt man sofort, wenn man sich Z nach den Potenzen einer Variable geordnet denkt, so nach $sx, s, x^3, x^2 \ldots$, und die Coëfficienten dieser Potenzen betrachtet, die bis auf ein und denselben constanten Factor den Grössen $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ in dem Ausdrucke (1.) äquivalent sind; man findet dann, dass diese Coëfficienten wieder in der allgemeinsten Form $(c_1' x_1 + c_2')\, s_1 + \gamma_1' x_1^4 + \gamma_2' x_1^3 \ldots$ enthalten sind, wo die

Grössen c' und γ' Functionen von x_2 sind, die wieder die allgemeinste Form in Bezug auf die Variablen s_2 und x_2 besitzen.

Eine weitere Eigenschaft des ϑ-Quotienten r_3^2 besteht darin, dass wenn man für x_2 einen beliebigen Verzweigungspunkt einsetzt, die Form r_3^2 in eine der allgemeinen Formen $\pm r_2^2$ des zweiten Falles (wie sie in dem Systeme (F_2) enthalten sind oder sich durch gegenseitige Division je zweier Formeln desselben ergeben, nachdem man vorher statt der Argumente $u_1 - u'_1 | u_2 - u'_2$ die neuen $u_1 + u_1^{(1)} | u_2 + u_2^{(1)}$ eingeführt und dem entsprechend in den äquivalenten algebraischen Ausdrücken statt $x' : x_1$, statt $s' : -s_1$ geschrieben hat) gemäss der Gleichungen (ϑ) §. 21 übergeht, indem dann $u_1^{(2)} | u_2^{(2)}$ durch correspondirende Halbe der Periodicitätsmodulen sich ausdrücken. Jede Form r_2^2 ist aber, wie sich aus (F_2) ergiebt, in dem allgemeinen Ausdrucke

$$\frac{c_1\, ss_1 + \overset{3}{\overline{f(x, x_1)}}}{\gamma_1\, ss_1 + \overset{3}{\overline{f_1(x, x_1)}}}$$

enthalten, wo f und f_1 symmetrische Functionen des dritten Grades in Bezug auf jede Variable bezeichnen, und die von x und x_1 unabhängigen Constanten c_1, γ_1, so wie einige der in den Functionen f, f_1 enthaltenen in speciellen Fällen auch 0 sein können. Man sieht, dass in dem Ausdrucke für r_2^2 die Grössen s und s_1 nur in der Verbindung ss_1 und nicht für sich allein vorkommen; daraus folgt, dass wenn man in dem algebraischen Ausdrucke für r_3^2 statt x_2 einen beliebigen endlichen Verzweigungspunkt einführt, d. h. $s_2 = 0$ setzt, alle die Glieder wegfallen müssen, die s und s_1 gesondert enthalten. Solche Glieder finden sich in den Klammern (V.) und (VI.) und es muss also

$$s\left\{x\,\overset{4}{\overline{\varphi(x_1, x_2)}} + \overset{4}{\overline{\varphi_1(x_1, x_2)}}\right\}$$

so wie

$$s_1\left\{x_1\,\overset{4}{\overline{\varphi(x, x_2)}} + \overset{4}{\overline{\varphi_1(x, x_2)}}\right\}$$

verschwinden, wenn man für x_2 einen beliebigen endlichen Verzweigungswerth einführt. Da nun die Functionen φ und φ_1 als vom vierten Grade nur für vier Werthe x_2 verschwinden können, nicht also für alle fünf endlichen Verzweigungswerthe, so ist das Verlangte nur möglich, wenn die Coëfficienten der sämmtlichen Glieder in φ und φ_1 den Werth 0 haben, **so dass folglich die Terme (V.) und (VI.) in dem Ausdrucke für Z ganz wegfallen.**

3. Wir gehen jetzt dazu über, die Constanten des Zählers Z von r_3^2 so zu bestimmen, dass derselbe, wie sub 1. verlangt wurde, für die beiden Punkte: $x, s = x_1, s_1$ und $x, s = x_2, s_2$, für die der algebraische Nenner 0^2 wird, auch 0^2 wird. Haben wir ihn einmal für **einen** Punkt so bestimmt in seinen Constanten, so hat er dieselbe Eigenschaft auch für den **andern** Punkt, da er eine symmetrische Function dieser beiden Punkte ist. Setzen wir nun $x_1 = x$, $s_1 = s$, in Z ein, so geht dieser Ausdruck in eine Function zweier Variablen x und x_2 über, und ordnet man nach den Potenzen von $x_2 : s_2 x_2,\ s_2,\ x_2^4 \ldots$, so müssen natürlich die Coëfficienten dieser Potenzen 0 sein, wenn anders Z für den Punkt $x, s = x_1, s_1$ verschwinden soll, wie auch der Werth von x_2 als der dritten Variable beschaffen ist.

Der Coëfficient von $s_2 x_2$ in Z ist aber:

$$ss_1\left[pxx_1 + p_1(x + x_1) + p_2\right] + \left[sx\,\overset{4}{\overline{f(x_1)}} + s_1 x_1\,\overset{4}{\overline{f(x)}}\right] + \left[s\,\overset{4}{\overline{f_1(x_1)}} + s_1\,\overset{4}{\overline{f_1(x)}}\right] ;$$

ebenso ist der Coëfficient von s_2 in Z:

$$ss_1\left[p_1xx_1+p_2(x+x_1)+p_3\right]+\left[sx\overset{4}{\overline{f_1(x_1)}}+s_1x_1\overset{4}{\overline{f_1(x)}}\right]+\left[s\overset{4}{\overline{f_2(x_1)}}+s_1\overset{4}{\overline{f_2(x)}}\right].$$

Diese beiden Coëfficienten müssen zuerst 0 sein, wenn man darin $x_1=x$ und $s_1=s$ setzt, und wir erhalten die Gleichungen:

$$a)\qquad s^2\left[px^2+2p_1x+p_2\right]+\ 2s\left[x\overset{4}{\overline{f(x)}}+\overset{4}{\overline{f_1(x)}}\right]=0.$$

$$b)\qquad s^2\left[p_1x^2+2p_2x+p_3\right]+\ 2s\left[x\overset{4}{\overline{f_1(x)}}+\overset{4}{\overline{f_2(x)}}\right]=0.$$

die uns die Grössen p und die noch unbekannten Functionen f bestimmen. Da der Werth x ein ganz beliebiger ist und in Folge dessen zur Erfüllung der Gleichungen die Coëfficienten von s^2 und s einzeln verschwinden müssen, so zerfällt jede Gleichung in zwei neue, und wir erhalten:

$$a')\quad \left.\begin{array}{l} px^2+2p_1x+p_2=0,\\ p_1x^2+2p_2x+p_3=0,\end{array}\right\}\ p=p_1=p_2=p_3=0;\qquad b')\quad \begin{array}{l} x\overset{4}{\overline{f(x)}}+\overset{4}{\overline{f_1(x)}}=0,\\ x\overset{4}{\overline{f_1(x)}}+\overset{4}{\overline{f_2(x)}}=0.\end{array}$$

Aus den Gleichungen a') folgt, dass der Term (I.) aus dem Ausdrucke für Z wegfällt, indem seine sämmtlichen Constanten p den Werth 0 haben müssen; **es bleiben in Z also nur noch die Terme (II.), (III.), (IV.), (VII.) übrig.** Die Gleichungen b') drücken zwei von den unbekannten Functionen f, f_1, f_2 durch die dritte aus und bestimmen den Grad dieser letztern; man hat nämlich:

$$b')\qquad \overset{4}{\overline{f_1(x)}}=-x\overset{4}{\overline{f(x)}};\qquad \overset{4}{\overline{f_2(x)}}=-x\overset{4}{\overline{f_1(x)}}=x^2\overset{4}{\overline{f(x)}};$$

und da $\overset{4}{\overline{f_2(x)}}$ höchstens vom vierten Grade sein darf, so darf $\overset{4}{\overline{f(x)}}$ höchstens vom zweiten sein, d. h. die Coëfficienten von x^4 und x^3 in der Function $\overset{4}{f(x)}$ müssen 0 sein, weil sonst $\overset{4}{\overline{f_2(x)}}=x^2\overset{4}{\overline{f(x)}}$ den vierten Grad überstiege. Demnach ist

$$\overset{4}{\overline{f(x)}}=f(x)=mx^2+m_1x+m_2;\qquad \overset{4}{\overline{f_1(x)}}=-xf(x);\qquad \overset{4}{\overline{f_2(x)}}=x^2f(x)\ ;$$

und setzt man diese Werthe in Z ein, indem man die noch übrig gebliebenen Terme (II.), (III.), (IV.), (VII.), zusammenfasst, so erhält man:

$$\begin{aligned} Z=\ & ss_1\left[xx_1\ -(x+x_1)\,x_2+x_2^2\right]f(x_2)\\ &+\ ss_2\left[xx_2\ -(x+x_2)\,x_1+x_1^2\right]f(x_1)\ +\ \overset{4}{\overline{F(x,x_1,x_2)}}\\ &+\ s_1s_2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)\,x+x^2\right]f(x)\end{aligned}$$

oder auch:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} Z=\ & ss_1\,(x-x_2)\,(x_1-x_2)\,f(x_2)\\ &+\ ss_2\,(x-x_1)\,(x_2-x_1)\,f(x_1)\ +\ \overset{4}{\overline{F(x,x_1,x_2)}}\\ &+\ s_1s_2\,(x_1-x\,)\,(x_2-x\,)\,f(x\,)\end{aligned}\qquad f(x)=mx^2+m_1x+m_2.$$

§. 25.

Der Ausdruck für r_3^2 war in der allgemeinen Form

$$r_3^2 = \frac{C.Z}{(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\,(x_1-x_2)^2}$$

enthalten, wo C einen von den drei Grössen x unabhängigen Factor bezeichnet. Führen wir die sub 3. erhaltene specielle Form für Z ein, indem wir sie mit (-2) multipliciren und diesen Factor bei F in die noch unbestimmten Constanten verlegen, so können wir auch schreiben:

$$(4.)\qquad r_3^2 = C.\frac{\left[\begin{array}{l} -\;2ss_1\,(x-x_2)\,(x_1-x_2)\,(mx_2^2+m_1x_2+m_2) \\ -\;2ss_2\,(x-x_1)\,(x_2-x_1)\,(mx_1^2+m_1x_1+m_2) \\ -\;2s_1s_2\,(x_1-x)\,(x_2-x)\,(mx^2+m_1x+m_2) \\ \qquad\qquad +\;\overset{4}{\overline{F(x, x_1, x_2)}} \end{array}\right]}{(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\,(x_1-x_2)^2}$$

und es hat F als symmetrische Function des vierten Grades die Form:

$$\begin{aligned}
\overset{4}{\overline{F(x, x_1, x_2)}} = {} & c_1\, x^4x_1^4x_2^4 + c_2\,(x^4x_1^4x_2^3 + x^4x_1^3x_2^4 + x^3x_1^4x_2^4) + c_3\,(x^4x_1^4x_2^2 + x^4x_1^2x_2^4 + x^2x_1^4x_2^4) \\
& + c_4\,(x^4x_1^3x_2^3 + x^3x_1^4x_2^3 + x^3x_1^3x_2^4) + c_5\,(x^4x_1^4x_2^1 + x^4x_1^1x_2^4 + x^1x_1^4x_2^4) \\
& + c_6\,(x^4x_1^3x_2^2 + x^4x_1^2x_2^3 + x^3x_1^4x_2^2 + x^2x_1^4x_2^3 + x^3x_1^2x_2^4 + x^2x_1^3x_2^4) + c_7\, x^3x_1^3x_2^3 \\
& + c_8\,(x^4x_1^4 + x^4x_2^4 + x_1^4x_2^4) + c_9\,(x^4x_1^3x_2^1 + x^4x_1^1x_2^3 + x^3x_1^4x_2^1 + x^1x_1^4x_2^3 + x^3x_1^1x_2^4 + x^1x_1^3x_2^4) \\
& + c_{10}\,(x^4x_1^2x_2^2 + x^2x_1^4x_2^2 + x^2x_1^2x_2^4) + c_{11}\,(x^3x_1^3x_2^2 + x^3x_1^2x_2^3 + x^2x_1^3x_2^3) \\
& + c_{12}\,(x^4x_1^3 + x^3x_1^4 + x^4x_2^3 + x^3x_2^4 + x_1^4x_2^3 + x_1^3x_2^4) + c_{13}\,(x^4x_1^2x_2^1 + x^4x_1^1x_2^2 + x^2x_1^4x_2^1 + {} \\
& \qquad + x^1x_1^4x_2^2 + x^2x_1^1x_2^4 + x^1x_1^2x_2^4) + c_{14}\,(x^3x_1^3x_2^1 + x^3x_1^1x_2^3 + x^1x_1^3x_2^3) \\
& + c_{15}\,(x^3x_1^2x_2^2 + x^2x_1^3x_2^2 + x^2x_1^2x_2^3) + c_{16}\,(x^4x_1^2 + x^2x_1^4 + x^4x_2^2 + x^2x_2^4 + x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4) \\
& + c_{17}\,(x^4x_1^1x_2^1 + x^1x_1^4x_2^1 + x^1x_1^1x_2^4) + c_{18}\,(x^3x_1^3 + x^3x_2^3 + x_1^3x_2^3) \\
& + c_{19}\,(x^3x_1^2x_2^1 + x^3x_1^1x_2^2 + x^2x_1^3x_2^1 + x^1x_1^3x_2^2 + x^2x_1^1x_2^3 + x^1x_1^2x_2^3) + c_{20}\, x^2x_1^2x_2^2 \\
& + c_{21}\,(x^4x_1^1 + x^1x_1^4 + x^4x_2^1 + x^1x_2^4 + x_1^4x_2^1 + x_1^1x_2^4) + c_{22}\,(x^3x_1^2 + x^2x_1^3 + x^3x_2^2 + {} \\
& \qquad + x^2x_2^3 + x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3) + c_{23}\,(x^3x_1^1x_2^1 + x^1x_1^3x_2^1 + x^1x_1^1x_2^3) \\
& + c_{24}\,(x^2x_1^2x_2^1 + x^2x_1^1x_2^2 + x^1x_1^2x_2^2) + c_{25}\,(x^4 + x_1^4 + x_2^4) \\
& + c_{26}\,(x^3x_1^1 + x^1x_1^3 + x^3x_2^1 + x^1x_2^3 + x_1^3x_2^1 + x_1^1x_2^3) + c_{27}\,(x^2x_1^2 + x^2x_2^2 + x_1^2x_2^2) \\
& + c_{28}\,(x^2x_1^1x_2^1 + x^1x_1^2x_2^1 + x^1x_1^1x_2^2) + c_{29}\,(x^3 + x_1^3 + x_2^3) \\
& + c_{30}\,(x^2x_1^1 + x^1x_1^2 + x^2x_2^1 + x^1x_2^2 + x_1^2x_2^1 + x_1^1x_2^2) + c_{31}\, xx_1x_2 + c_{32}\,(x^2 + x_1^2 + x_2^2) \\
& + c_{33}\,(xx_1 + xx_2 + x_1x_2) + c_{34}\,(x + x_1 + x_2) + c_{35}.
\end{aligned}$$

Die fünfunddreissig Constanten c in F sind so zu bestimmen, dass der Zähler von r_3^2 verschwindet und zwar 0^2 wird, wenn wir darin $x_1 = x$, $s_1 = s$, setzen. **Für diese Bestimmung ergiebt sich aus (4.) die Bedingungsgleichung:**

$$\left\{ -2s^2\,(x-x_2)^2\,(mx_2^2+m_1x_2+m_2) + \overset{4}{\overline{F(x, x, x_2)}} = 0 \right\}$$

k*

denn auf diesen Ausdruck reducirt sich der Zähler für $x,s=x_1,s_1$. Wir ordnen die Gleichung nach Potenzen von x_2 und erhalten:

I. als Coëfficienten von x_2^4:

$$-2ms^2+c_1x^8+2c_2x^7+(2c_3+c_4)x^6+2(c_5+c_6)x^5+(2c_8+2c_9+c_{10})x^4+2(c_{12}+c_{13})x^3$$
$$+(2c_{16}+c_{17})x^2+2c_{21}x+c_{25};$$

II. als Coëfficienten von x_2^3:

$$-2s^2(m_1-2mx)+c_2x^8+2c_4x^7+(2c_6+c_7)x^6+2(c_9+c_{11})x^5+(2c_{12}+2c_{14}+c_{15})x^4$$
$$+2(c_{18}+c_{19})x^3+(2c_{22}+c_{23})x^2+2c_{26}x+c_{29};$$

III. als Coëfficienten von x_2^2:

$$-2s^2(mx^2-2m_1x+m_2)+c_3x^8+2c_6x^7+(2c_{10}+c_{11})x^6+2(c_{13}+c_{15})x^5+(2c_{16}+2c_{19}+c_{20})x^4$$
$$+2(c_{22}+c_{24})x^3+(2c_{27}+c_{28})x^2+2c_{30}x+c_{32};$$

IV. als Coëfficienten von x_2^1:

$$-2s^2(m_1x^2-2m_2x)+c_5x^8+2c_9x^7+(2c_{13}+c_{14})x^6+2(c_{17}+c_{19})x^5+(2c_{21}+2c_{23}+c_{24})x^4$$
$$+2(c_{26}+c_{28})x^3+(2c_{30}+c_{31})x^2+2c_{33}x+c_{34};$$

V. als Coëfficienten von x_2^0:

$$-2m_2s^2x^2+c_8x^8+2c_{12}x^7+(2c_{16}+c_{18})x^6+2(c_{21}+c_{22})x^5+(2c_{25}+2c_{26}+c_{27})x^4$$
$$+2(c_{29}+c_{30})x^3+(2c_{32}+c_{33})x^2+2c_{34}x+c_{35}.$$

Diese fünf Coëfficienten müssen einzeln den Werth 0 haben, wenn anders die obige Bedingungsgleichung für jeden beliebigen Werth der beiden Variablen x und x_2 gelten soll. Führen wir für s^2 seinen Ausdruck in x ein:

$$s^2=px^5-(p+p_1)x^4+(p_1+p_2)x^3-(1+p_2)x^2+x;$$
$$p=\varkappa^2\lambda^2\mu^2;\quad p_1=\varkappa^2\lambda^2+\varkappa^2\mu^2+\lambda^2\mu^2;\quad p_2=\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2;$$

so ergeben sich, wenn wir die Coëfficienten nach Potenzen von x ordnen, die folgenden Bedingungsgleichungen, entsprechend der Reihe nach den einzelnen Coëfficienten:

I. $c_1x^8+2c_2x^7+[2c_3+c_4]x^6+2[c_5+c_6-mp]x^5+[2c_8+2c_9+c_{10}+2m(p+p_1)]x^4$
$+2[c_{12}+c_{13}-m(p_1+p_2)]x^3+[2c_{16}+c_{17}+2m(1+p_2)]x^2+2[c_{21}-m]x+c_{25}=0;$

II. $c_2x^8+2c_4x^7+[2c_6+c_7+4mp]x^6+2[c_9+c_{11}-m_1p-2m(p+p_1)]x^5$
$+[2c_{12}+2c_{14}+c_{15}+2m_1(p+p_1)+4m(p_1+p_2]x^4+2[c_{18}+c_{19}-m_1(p_1+p_2)-2m(1+p_2)]x^3$
$+[2c_{22}+c_{23}+2m_1(1+p_2)+4m]x^2+2[c_{26}-m_1]x+c_{29}=0;$

III. $c_3x^8+2[c_6-mp]x^7+[2c_{10}+c_{11}+2m(p+p_1)+4m_1p]x^6$
$+2[c_{13}+c_{15}-m(p_1+p_2)-2m_1(p+p_1)-m_2p]x^5$
$+[2c_{16}+2c_{19}+c_{20}+2m(1+p_2)+4m_1(p_1+p_2)+2m_2(p+p_1)]x^4$
$+2[c_{22}+c_{24}-m-2m_1(1+p_2)-m_2(p_1+p_2)]x^3$
$+[2c_{27}+c_{28}+4m_1+2m_2(1+p_2)]x^2+2[c_{30}-m_2]x+c_{32}=0;$

$$\text{IV. } c_5x^8 + 2[c_9 - m_1p]x^7 + [2c_{13}+c_{14}+2m_1(p+p_1)+4m_2p]x^6$$
$$+ 2[c_{17}+c_{19}-m_1(p_1+p_2)-2m_2(p+p_1)]x^5$$
$$+ [2c_{21}+2c_{23}+c_{24}+2m_1(1+p_2)+4m_2(p_1+p_2)]x^4 + 2[c_{26}+c_{28}-m_1-2m_2(1+p_2)]x^3$$
$$+ [2c_{30}+c_{31}+4m_2]x^2 + 2c_{33}x + c_{34} = 0;$$

$$\text{V. } c_8x^8 + 2[c_{12}-m_2p]x^7 + [2c_{16}+c_{18}+2m_2(p+p_1)]x^6 + 2[c_{21}+c_{22}-m_2(p_1+p_2)]x^5$$
$$+ [2c_{25}+2c_{26}+c_{27}+2m_2(1+p_2)]x^4 + 2[c_{29}+c_{30}-m_2]x^3 + [2c_{32}+c_{33}]x^2 + 2c_{34}x + c_{35} = 0.$$

Diese Gleichungen, die für jeden Werth von x gelten sollen, bestimmen vollständig das System der Constanten c, indem die einzelnen Coëfficienten der Potenzen von x alsdann den Werth 0 haben müssen. Dies giebt fünfundvierzig Gleichungen, von denen elf eine identische Folge der übrigen sind: so dass also von den fünfunddreissig Constanten c nur eine willkürlich bleibt. Das System der Constanten c ergiebt sich nun leicht wie folgt:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_8 = c_{25} = c_{29} = c_{32} = c_{33} = c_{34} = c_{35} = 0;$$

$$c_6 = mp; \quad c_7 = -6mp; \quad c_9 = m_1p; \quad c_{10} = -2m_1p - 2m(p+p_1); \quad c_{11} = 2m(p+p_1);$$
$$c_{12} = m_2p; \quad c_{13} = -m_2p + m(p_1+p_2); \quad c_{14} = -2m(p_1+p_2) - 2m_1(p+p_1) - 2m_2p;$$
$$c_{15} = 2m_1(p+p_1) + 2m_2p; \quad c_{21} = m; \quad c_{22} = -m + m_2(p_1+p_2);$$
$$c_{23} = -2m - 2m_1(1+p_2) - 2m_2(p_1+p_2); \quad c_{24} = 2m + 2m_1(1+p_2); \quad c_{26} = m_1;$$
$$c_{27} = -2m_1 - 2m_2(1+p_2); \quad c_{28} = 2m_2(1+p_2); \quad c_{30} = m_2; \quad c_{31} = -6m_2;$$

$$c_{16} = c_{16}; \quad c_{17} = -2c_{16} - 2m(1+p_2); \quad c_{18} = -2c_{16} - 2m_2(p+p_1);$$
$$c_{19} = 2c_{16} + 2m(1+p_2) + m_1(p_1+p_2) + 2m_2(p+p_1);$$
$$c_{20} = -6c_{16} - 6m(1+p_2) - 6m_1(p_1+p_2) - 6m_2(p+p_1).$$

Setzen wir diese Werthe in dem Ausdrucke F an die Stelle der Constanten und bezeichnen zur Abkürzung den zum Coëfficienten c_n gehörigen algebraischen Term mit $\overline{c_n}$, so dass also $F = c_1\overline{c_1} + c_2\overline{c_2}$ etc., so nimmt F die Form an:

$$\overset{4}{\overline{F(x,x_1,x_2)}} = mp\overline{c_6} - 6mp\overline{c_7} + m_1p\overline{c_9} - 2[m_1p + m(p+p_1)]\overline{c_{10}} + 2m(p+p_1)\overline{c_{11}} + m_2p\overline{c_{12}}$$
$$-[m_2p - m(p_1+p_2)]\overline{c_{13}} - 2[m(p_1+p_2) + m_1(p+p_1) + m_2p]\overline{c_{14}} + 2[m_1(p+p_1) + m_2p]\overline{c_{15}}$$
$$- 2m(1+p_2)\overline{c_{17}} - 2m_2(p+p_1)\overline{c_{18}} + [2m(1+p_2) + m_1(p_1+p_2) + 2m_2(p+p_1)]\overline{c_{19}}$$
$$- 6[m(1+p_2) + m_1(p_1+p_2) + m_2(p+p_1)]\overline{c_{20}} + m\overline{c_{21}} - [m - m_2(p_1+p_2)]\overline{c_{22}}$$
$$- 2[m + m_1(1+p_2) + m_2(p_1+p_2)]\overline{c_{23}} + 2[m + m_1(1+p_2)]\overline{c_{24}} + m_1\overline{c_{26}}$$
$$- 2[m_1 + m_2(1+p_2)]\overline{c_{27}} + 2m_2(1+p_2)\overline{c_{28}} + m_2\overline{c_{30}} - 6m_2\overline{c_{31}}$$
$$+ c_{16}[\overline{c_{16}} - 2\overline{c_{17}} - 2\overline{c_{18}} + 2\overline{c_{19}} - 6\overline{c_{20}}].$$

Man erkennt, dass F aus zwei Theilen besteht: einem vollkommen bestimmten Ausdrucke und einem Gliede, dem letzten, das die willkürlich gebliebene Constante c_{16} zum Coëfficienten hat. Der erste vollkommen bestimmte Theil lässt sich in die Form bringen:

$$(x-x_2)(x_1-x_2)(mx_2^2 + m_1x_2 + m_2)\,p(x|x_1)$$
$$+ (x-x_1)(x_2-x_1)(mx_1^2 + m_1x_1 + m_2)\,p(x|x_2)$$
$$+ (x_1-x)(x_2-x)(mx^2 + m_1x + m_2)\,p(x_1|x_2),$$

wo $p(x|x_1) = p(x^3x_1^2 + x^2x_1^3) - 2(p+p_1)x^2x_1^2 + (p_1+p_2)(x^2x_1 + xx_1^2) - 2(1+p_2)xx_1 + x + x_1;$

wie man durch einfaches Ausrechnen [1] findet. Was den zweiten betrifft, so ergiebt sich, wenn man für die $\overline{c}$ die betreffenden algebraischen Ausdrücke einsetzt:

$$c_{16}[\overline{c_{16}}-2\overline{c_{17}}-2\overline{c_{18}}+2\overline{c_{19}}-6\overline{c_{20}}] = c_{16}(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2.$$

Führt man nun diese beiden Theile, die zusammen den Ausdruck F constituiren, in der letzten Formel (4.) für F ein, so erhält r_3^2 die folgende Form (statt c_{16} schreiben wir einfach c):

$$(5.)\qquad r_3^2 = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}(u_1+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}\,|\,u_2+u_2^{(1)}+u_2^{(2)})}{\vartheta^2\binom{00}{00}(u_1+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}\,|\,u_2+u_2^{(1)}+u_2^{(2)})} =$$

$$= \frac{C.\left[\begin{array}{l} \quad (x-x_2)(x_1-x_2)(mx_2^2+m_1x_2+m_2)\,[-2ss_1+p(x\,|\,x_1)] \\ +\,(x-x_1)(x_2-x_1)(mx_1^2+m_1x_1+m_2)\,[-2ss_2+p(x\,|\,x_2)] \\ +\,(x_1-x)(x_2-x)(mx^2+m_1x+m_2)\,[-2s_1s_2+p(x_1\,|\,x_2)] \\ \qquad\qquad +\,c(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2 \end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2}$$

und jetzt ist, wie verlangt wurde, der Zähler des algebraischen Ausdrucks für r_3^2 **so bestimmt, dass er für den Punkt** $x, s = x_1, s_1 : 0^2$ **wird und als symmetrische Function entsprechend auch für den Punkt** $x, s = x_2, s_2$: denn für $x = x_1$, $s = s_1$, wird in der ersten Reihe des Zählers der Factor $[-2ss_1+p(x|x_1)] : 0^2$, wie man leicht durch Differentiation findet, ferner in der vierten Reihe der Factor $(x-x_1)^2$; die zweite und dritte Reihe hat als gemeinschaftlichen Factor $(x-x_1)$, der herausgezogen ein Glied multiplicirt, das für sich 0^1 wird, wenn man $x = x_1$, $s = s_1$, setzt, also mit $(x-x_1)$ multiplicirt 0^2.

Hiermit ist die grösste Specialisirung der algebraischen Form r_3^2 für den allgemeinen Fall, wo die Charakteristik der ϑ im Zähler noch unbestimmt ist und also jede der fünfzehn möglichen Charakteristiken sein kann, erreicht. Die fünf noch willkürlichen Constanten C, c, m, m_1, m_2 werden verschieden sein nach den fünfzehn möglichen Formen des ϑ-Quotienten und sich für jeden Fall besonders bestimmen.

§. 26.

Bestimmung der Function: $f(x) = mx^2+m_1x+m_2$.

Um den Charakter der Function $f(x) = mx^2+m_1x+m_2$ kennen zu lernen und die Rolle, die sie in dem algebraischen Ausdrucke für r_3^2 spielt, führen wir für x_2 einen Verzweigungs-

---

[1] Diese Rechnung wird bedeutend vereinfacht, wenn man

$$xx_1 = \rho_1\;;\qquad xx_2 = \sigma_1\;;\qquad x_1x_2 = \tau_1\;;$$
$$x+x_1 = \rho_2\;;\qquad x+x_2 = \sigma_2\;;\qquad x_1+x_2 = \tau_2\;:$$

setzt, dann geht die erste Reihe des aufzulösenden Ausdruckes über in

$$(\rho_1-\rho_2x_2+x_2^2)(mx_2^2+m_1x_2+m_2)[p\rho_1^2\rho_2-2(p+p_1)\rho_1^2+(p_1+p_2)\rho_1\rho_2-2(1+p_2)\rho_1+\rho_2]$$

und man erhält die zweite und dritte daraus, wenn man statt ρ_1, ρ_2, x_2, resp. σ_1, σ_2, x_1 und τ_1, τ_2, x schreibt. Rechnet man die erste Reihe aus, so wird jedes Glied in der Form $C'x_2^\alpha\rho_1^\beta\rho_2^\gamma$ enthalten sein, wo $\begin{Bmatrix}\alpha<5\\ \beta<4\\ \gamma<3\end{Bmatrix}$ und C' eine Constante ist. Mit Zuziehung der zweiten und dritten Reihe verwandelt sich ein solches Glied in $C'(x_2^\alpha\rho_1^\beta\rho_2^\gamma+x_1^\alpha\sigma_1^\beta\sigma_2^\gamma+x^\alpha\tau_1^\beta\tau_2^\gamma)$ und alle Ausdrücke von dieser Form ergeben sich als identisch mit Grössen $\overline{c}$, so ist z. B. $(x_2^4\rho_1^2\rho_2+x_1^4\sigma_1^2\sigma_2+x^4\tau_1^2\tau_2) = \overline{c_8}$ etc.

punkt ein, den wir allgemein mit ν bezeichnen, so dass ν jeden der sechs Verzweigungspunkte: $0, 1, \frac{1}{\varkappa^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}\,\infty$: bedeuten kann. Dann drückt sich das System $u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)}$ durch Halbe der correspondirenden Periodicitätsmodulen aus, so dass

$$\underset{(x_2=\nu)}{u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)}} = \int_\alpha^\nu du_1 \mid \int_\beta^\nu du_2 = -\frac{\gamma_1'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\gamma_\nu}{2} a_{1,\nu} \mid -\frac{\gamma_2'}{2}\pi i + \sum_\nu \frac{\gamma_\nu}{2} a_{2,\nu}$$

wo die Grössen γ die Werthe $0, 1$ haben können und das ν unter dem Summenzeichen $1, 2$ bedeutet (nicht zu verwechseln mit dem Verzweigungspunkte ν). Unter Berücksichtigung der Formeln (ϑ) §. 21, erhält durch Einsetzen dieser Werthe für $u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)}$ der ϑ-Quotient r_3^2 die Form:

$$\text{I.} \qquad \underset{(x_2=\nu)}{r_3^2} = \pm \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1+\gamma_1,\ \varepsilon_2+\gamma_2}{\varepsilon_1'+\gamma_1',\ \varepsilon_2'+\gamma_2'}(u_1+u_1^{(1)} \mid u_2+u_2^{(1)})}{\vartheta^2\binom{\gamma_1\ \gamma_2}{\gamma_1'\ \gamma_2'}(u_1+u_1^{(1)} \mid u_2+u_2^{(1)})}.$$

Entsprechend geht für $x_2 = \nu$ der algebraische Ausdruck r_3^2 über in

$$\text{II.} \qquad \underset{(x_2=\nu)}{r_3^2} = C.\,\frac{\left[\begin{array}{c}(x-\nu)(x_1-\nu)(m\nu^2+m_1\nu+m_2)[-2ss_1+p(x \mid x_1)] \\ +\,R(x, x_1, \nu).\end{array}\right]}{(x-x_1)^2\,(x-\nu)^2\,(x_1-\nu)^2}$$

wo R eine rationale Function bezeichnet, die kein s oder s_1 enthält, indem aus der zweiten und dritten Reihe des Zählers sub (5.) die Glieder, welche $-2ss_2$ und $-2s_1s_2$ als Factor enthalten, wegfallen: sowohl für einen endlichen Verzweigungswerth ν, da dann $s_2 = 0$, als auch für den im Unendlichen liegenden Verzweigungspunkt $\nu = \infty$, indem dann dieselben Glieder von niederer Ordnung unendlich werden (∞^7), als der Nenner $(x-x_1)^2\,(x-\nu)^2\,(x_1-\nu)^2$, (∞^8): und folglich gegen diesen verschwinden. Demgemäss bleiben von den drei letzten Reihen des Zählers nur doch die Glieder übrig, die kein s oder s_1 enthalten, und ihr Complex ist mit $R(x, x_1, \nu)$ bezeichnet.

Zu jedem der sechs Verzweigungspunkte ν gehört nun ein bestimmtes System der Grössen $\binom{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1'\gamma_2'}$, und diese sechs Systeme haben (vergl. §. 17) die gemeinsame Eigenschaft, dass sie als Charakteristiken aufgefasst ungerade sind, so dass $\gamma_1\gamma_1' + \gamma_2\gamma_2' \equiv 1$ (mod. 2): daher ist die ϑ im Nenner von I. immer eine ungerade ϑ-Function. Zu einer jeden der fünfzehn Charakteristiken $\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$ gehören **sechs** Charakteristiken $\binom{\varepsilon_1+\gamma_1,\ \varepsilon_2+\gamma_2}{\varepsilon_1'+\gamma_1',\ \varepsilon_2'+\gamma_2'}$, da es sechs verschiedene Systeme $\binom{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1'\gamma_2'}$ giebt, und es fragt sich, wie viele von diesen **sechs** jedesmal ungerade, wie viele gerade sind: oder mit anderen Worten, wie oft für ein bestimmtes System $\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$ **auch der Zähler** des Ausdruckes I. eine ungerade ϑ-Function wird, wenn man für ν der Reihe nach die sechs Verzweigungspunkte setzt und entsprechend für die γ die zu jedem Verzweigungspunkte gehörigen Werthe. Um dies zu erfahren, addiren wir zu jeder der fünfzehn Charakteristiken $\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$ der Reihe nach die sechs Charakteristiken $\binom{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1'\gamma_2'}$ und setzen immer, wenn ein Glied $\varepsilon + \gamma = 2$ sein sollte, dafür 0, indem man gemäss der Formeln (ϑ) jede Charakteristik so reduciren kann, dann erhalten wir sämmtliche Systeme $\binom{\varepsilon_1+\gamma_1,\ \varepsilon_2+\gamma_2}{\varepsilon_1'+\gamma_1',\ \varepsilon_2'+\gamma_2'}$ in der folgenden Tabelle:

	$x_2=\nu=0,$	$1\,,$	$\frac{1}{\varkappa^2}\,,$	$\frac{1}{\lambda^2}\,,$	$\frac{1}{\mu^2}\,,$	∞
	$\begin{pmatrix}\gamma_1\gamma_2\\ \gamma_1'\gamma_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix},$	$\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}$
Systeme $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{pmatrix}$	Systeme $\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\gamma_1, \varepsilon_2+\gamma_2\\ \varepsilon_1'+\gamma_1', \varepsilon_2'+\gamma_2'\end{pmatrix}$					
1. $\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$
9. $\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}$
14. $\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}$
15. $\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}$

Diese Tabelle enthält in je einer Horizontalreihe die **sechs** zu einem bestimmten $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{pmatrix}$, das in derselben Reihe steht, gehörigen Charakteristiken $\begin{pmatrix}\varepsilon_1+\gamma_1, \varepsilon_2+\gamma_2\\ \varepsilon_1'+\gamma_1', \varepsilon_2'+\gamma_2'\end{pmatrix}$ und zeigt, **dass von diesen sechs jedesmal zwei ungerade sind, die in eckigen Klammern eingefassten:** sie giebt zugleich für jedes System $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{pmatrix}$ die beiden Verzweigungspunkte ν an, die mit Rücksicht auf den Ausdruck I. dies bewirken. Wir erhalten das Resultat, dass es für jeden der fünfzehn ϑ-Quotienten r_3^2 zwei Verzweigungspunkte ν_1 und ν_2 giebt, die für x_2 eingesetzt bewirken, dass der Ausdruck I., in den alsdann der ϑ-Quotient r_3^2 übergeht, im Zähler eben so wie im Nenner eine ungerade ϑ-Function hat: und dieses Resultat bestimmt für jede Charakteristik $\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{pmatrix}$ die zugehörige Function $mx^2+m_1x+m_2$. Denn, wie aus §. 16 bekannt, ist der algebraische Ausdruck des Quotienten zweier ungeraden ϑ^2-Functionen mit den Argumenten $u_1 \pm u_1^{(1)} \mid u_2 \pm u_2^{(1)}$ in der allgemeinen Form

$$r = \frac{(m+nx)(m+nx_1)}{(m'+n'x)(m'+n'x_1)}$$

enthalten, d. h. er ist eine rationale Function von x und x_1, die kein s oder s_1 enthält. Soll sich auf diese Form der Ausdruck II., der den ϑ-Quotienten sub I. algebraisch repräsentirt, für $\nu = \nu_1$ und $\nu = \nu_2$ reduciren, so muss für diese Werthe das Glied des Zählers, welches die Grösse ss_1 enthält, wegfallen, so dass nur noch die rationale Function R übrig bleibt. Unter Zuziehung des Nenners erhält man für das Wegfallen dieses Gliedes die Bedingungsgleichung:

$$(\nu.) \qquad \frac{m\nu^2 + m_1\nu + m_2}{(x-\nu)(x_1-\nu)} = 0$$

und es erhellt, dass die beiden Verzweigungspunkte ν_1 und ν_2, für die die ϑ im Zähler von I. ungerade wird, die Wurzeln dieser Gleichung sein müssen. Die zu einer bestimmten Charakteristik $\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$ gehörige Function $mx^2+m_1x+m_2$ in dem algebraischen Ausdruck sub (5.) muss demnach so in ihren Constanten beschaffen sein, dass sie für jeden endlichen Verzweigungspunkt verschwindet, dessen System $\binom{\eta_1\eta_2}{\eta_1'\eta_2'}$ so beschaffen ist, dass $\binom{\varepsilon_1+\eta_1,\ \varepsilon_2+\eta_2}{\varepsilon_1'+\eta_1',\ \varepsilon_2'+\eta_2'}$ eine ungerade Charakteristik; und ist einer der beiden Verzweigungspunkte ν_1, ν_2, die in Bezug auf die bestimmte Charakteristik diese Eigenschaft haben, ∞, so muss $m = 0$ sein, da er sonst die Bedingungsgleichung $(\nu.)$ nicht erfüllen kann. Mit Berücksichtigung unserer Tabelle ergiebt sich demgemäss für jede Charakteristik $\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$ die zugehörige Function $mx^2 + m_1x + m_2 = f(x)$ bis auf einen constanten Factor (dem wir immer den Werth 1 geben können, indem die Constanten C und c im Zähler sub (5.), die dies beeinflussen könnte, noch unbestimmt sind) wie folgt:

$$\begin{array}{llll}
1. & \binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'} = \binom{11}{01},\ f(x) = (1-\varkappa^2x)(1-\mu^2x); & 8. & \binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'} = \binom{00}{01},\ f(x) = 1-\mu^2x; \\
2. & \quad ,, \quad = \binom{01}{01},\ f(x) = 1-\lambda^2x; & 9. & \quad ,, \quad = \binom{00}{11},\ f(x) = x\,(1-\lambda^2x); \\
3. & \quad ,, \quad = \binom{01}{11},\ f(x) = x\,(1-\mu^2x); & 10. & \quad ,, \quad = \binom{10}{00},\ f(x) = x\,(1-x); \\
4. & \quad ,, \quad = \binom{11}{10},\ f(x) = 1-x; & 11. & \quad ,, \quad = \binom{01}{00},\ f(x) = (1-\lambda^2x)(1-\mu^2x); \\
5. & \quad ,, \quad = \binom{10}{10},\ f(x) = x\,(1-\varkappa^2x); & 12. & \quad ,, \quad = \binom{10}{01},\ f(x) = (1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x); \\
6. & \quad ,, \quad = \binom{10}{11},\ f(x) = (1-x)(1-\lambda^2x); & 13. & \quad ,, \quad = \binom{01}{10},\ f(x) = x; \\
7. & \quad ,, \quad = \binom{00}{10},\ f(x) = (1-x)(1-\varkappa^2x); & 14. & \quad ,, \quad = \binom{11}{00},\ f(x) = 1-\varkappa^2x;
\end{array}$$

$$15.\ \binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'} = \binom{11}{11},\ f(x) = (1-x)(1-\mu^2x).$$

Nachdem wir so sämmtliche Functionen $mx^2+m_1x+m_2$ kennen gelernt, bleiben, wenn die Charakteristik $\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$ festgesetzt ist, in dem algebraischen Ausdrucke für r_3^2 nur noch die beiden Constanten C und c unbestimmt. Diese bestimmen sich leicht, wenn man für x_2 einen bestimmten Verzweigungspunkt, z. B. $x_2 = 0$ setzt: dann geht der ϑ-Quotient r_3^2 in einen ϑ-Quotienten $\pm\, r_2^2$ des zweiten Falles über, der sich vermöge der Formeln (F_2) bestimmt algebraisch ausdrücken lässt, und durch Vergleichung dieses algebraischen Ausdruckes mit dem Ausdrucke $\underset{(x_2=0)}{r_3^2}$, der die Constanten C und c enthält, bestimmen sich diese letzteren auf einfache

Weise. Wir schlagen einen andern Weg der Bestimmung ein, indem wir vorher noch den Zähler des algebraischen Ausdruckes r_3^2 transformiren: dadurch werden die Endresultate charakteristischere Formen gewinnen, als es bei der jetzigen Gestaltung des Zählers möglich ist.

§. 27.

Wir setzen in der Formel (5.) des §. 25:

$$c = \gamma + c', \quad Cc' = C',$$

und dividiren das Glied, welches c' zum Coëfficienten hat, durch den Nenner, dann erhalten wir für r_3^2 den Ausdruck:

$$(6.) \qquad r_3^2 = C. \frac{\left[\begin{array}{l} (x-x_2)(x_1-x_2)f(x_2)[-2ss_1+p(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)f(x_1)[-2ss_2+p(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)f(x)[-2s_1s_2+p(x_1|x_2)] \\ \qquad +\gamma(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2 \end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'$$

wo die Constante γ einen willkürlich zu wählenden Werth hat, von dem aber der Werth der Constante C' abhängig ist. Das Glied $\gamma(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2$ lässt sich auf mehrfache Weise in die Form bringen:

$$(\Gamma_1.) \quad \gamma(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2 = \begin{array}{l} (x-x_2)(x_1-x_2)f(x_2)[(x-x_1)^2\varphi(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)f(x_1)[(x-x_2)^2\varphi(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)f(x)[(x_1-x_2)^2\varphi(x_1|x_2)] \end{array}$$

wo φ eine symmetrische Function der beiden jedesmaligen Variablen bezeichnet, die die verschiedensten Formen haben kann. Dieser Ausdruck, statt des Gliedes mit dem Coëfficienten γ in (6.) eingeführt, lässt sich dann so auf die drei ersten Reihen des Zählers vertheilen, dass in den kleinen eckigen Klammern statt $p(x|x_1)$ sich schreibt:

$$P(x|x_1) = p(x|x_1) + (x-x_1)^2\varphi(x|x_1)$$

u. s. w. in den übrigen, während die vierte Reihe gänzlich wegfällt. Dividiren wir noch die Gleichung $(\Gamma_1.)$ beiderseits durch $(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)$, so gewinnt sie, für $f(x)$ den betreffenden Ausdruck eingesetzt, die einfachere Gestalt:

$$(\Gamma_2.) \quad \gamma(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2) = \begin{array}{l} (mx_2^2+m_1x_2+m_2)(x-x_1)\varphi(x|x_1) \\ -(mx_1^2+m_1x_1+m_2)(x-x_2)\varphi(x|x_2) \\ +(mx^2+m_1x+m_2)(x_1-x_2)\varphi(x_1|x_2) \end{array}$$

und die Aufgabe ist, für $\varphi(x|x_1)$ solche einfache Formen zu finden, dass $P(x|x_1)$ in bekannte Functionen übergeht.

Wir wollen zwei Fälle bezüglich der Function $f(x)$ unterscheiden, je nachdem $m \gtrless 0$ oder $m = 0$ ist: der erstere Fall umfasst nach dem vorigen Paragraphen zehn Functionen $f(x)$, der zweite fünf. Es sei nun:

1. $m \gtrless 0$. Für diesen Fall setzen wir:

$$\varphi(x|x_1) = a_1 x x_1 + a_2(x+x_1) + a_3$$

dann erhält man aus der Gleichung (Γ_2.) durch Einführung von φ und Ausführung der Multiplication die Bedingung:

$$\left\{ \quad \gamma = a_1 m_2 - a_2 m_1 + a_3 m \quad \right\}$$

und da die Grösse γ ganz willkürlich wählbar ist, so kann man auch den Grössen a jeden beliebigen Werth zulegen. Setzen wir diese Function φ in der Gleichung (Γ_1.) ein und führen das Resultat in den Zähler von r_3^2 ein, so wird:

$$(7_a.) \quad r_3^2 = C. \frac{\begin{bmatrix} (x-x_2)(x_1-x_2)(mx_2^2+m_1x_2+m_2)[-2ss_1+P_a(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)(mx_1^2+m_1x_1+m_2)[-2ss_2+P_a(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)(mx^2+m_1x+m_2)[-2s_1s_2+P_a(x_1|x_2)] \end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C''$$

$$P_a(x|x_1) = p(x|x_1) + (x-x_1)^2\varphi(x|x_1) = p(x^3x_1^2+x^2x_1^3) - 2(p+p_1)x^2x_1^2 + (p_1+p_2)(x^2x_1+xx_1^2) -$$
$$-2(1+p_2)xx_1 + x + x_1 + [a_1xx_1 + a_2(x+x_1) + a_3](x-x_1)^2$$

wo man die Werthe der Grössen a ganz beliebig wählen kann, und sind sie für die einzelnen ϑ-Quotienten r_3^2 festgesetzt, so bestimmen sich die Constanten C und C'' in jedem speciellen Falle durch Einsetzen von Verzweigungswerthen in die Doppelgleichung für r_3^2. Wir wollen nun entsprechend den zehn Functionen $f(x)$, die wir an die Stelle von $mx^2+m_1x+m_2$ in (7_a.) setzen können, wenn wir demgemäss die Charakteristik der ϑ-Function im Zähler des ϑ-Quotienten r_3^2 wählen, auch zehn Functionen $P_a(x|x_1)$ anwenden, und nehmen dazu die zehn, die aus der zweigliedrigen Form

$$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1) + x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

entstehen, wenn man im ersten Gliede zwei Zeichen x_1 durch zwei Zeichen x ersetzt und an denselben Stellen im zweiten Gliede zwei Zeichen x durch zwei Zeichen x_1, so dass der Ausdruck eine symmetrische Function der beiden Variablen bleibt. Von diesen Functionen wissen wir schon aus §. 22 und 23, dass sie in der allgemeinen Form $P_a(x|x_1)$ enthalten sind. Wir theilen sie den zehn Functionen $f(x)$ in nachstehender Reihenfolge zu:

Functionen $mx^2+m_1x+m_2$	Functionen $P_a(x\|x_1)$
$x(1-x)$:	$x(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1) + x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$
$x(1-\varkappa^2x)$:	$x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$
$x(1-\lambda^2x)$:	$x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)$
$x(1-\mu^2x)$:	$x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$
$(1-x)(1-\varkappa^2x)$:	$x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1) + x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$
$(1-x)(1-\lambda^2x)$:	$x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1) + x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)$
$(1-x)(1-\mu^2x)$:	$x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x) + x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$
$(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)$:	$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1) + x(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)$
$(1-\varkappa^2x)(1-\mu^2x)$:	$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x) + x(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$
$(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$:	$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x) + x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)$

und das leitende Princip hierbei ist leicht zu erkennen, indem bei dieser Vertheilung die Function f in jedem Gliede der zugehörigen Function $P_a(x|x_1)$ charakteristisch als Factor hervortritt, und zwar im ersten Gliede als $f(x)$, multiplicirt mit einer Function von x_1 allein, entsprechend im zweiten als $f(x_1)$, multiplicirt mit einer Function von x allein. Wir gehen nunmehr zum zweiten Falle über, und es sei:

II. $m = 0$. Für diesen Fall wollen wir setzen:

$$\varphi(x|x_1) = b_1(x^2x_1 + xx_1^2) + b_2(x^2 + x_1^2) + b_3xx_1 + b_4(x + x_1) + b_5$$

dann erhält man aus der Gleichung (Γ_2.) durch Einführung der Function φ und Ausführung der Multiplication, berücksichtigend dass $m = 0$, die folgenden Bedingungen:

$$\left\{ \gamma = -b_2m_2 + b_3m_2 - b_4m_1 \ , \ b_1m_2 = b_2m_1 \right\}$$

und da γ ganz willkürlich wählbar ist, so kann man den vier Grössen b_1, b_3, b_4, b_5 beliebige Werthe zulegen, und es bestimmt sich dann b_2 aus der Gleichung $b_1m_2 = b_2m_1$. Wir setzen nun

$$b_1 = p; \quad b_3 = b_2 - (p+p_1): \quad \text{daher} \quad b_2 = \frac{pm_2}{m_1}:$$

so wird

$$(x-x_1)^2\,\varphi(x|x_1) = p(x^4x_1 + xx_1^4) - p(x^3x_1^2 + x^2x_1^3) - (p+p_1)(x^3x_1 + xx_1^3) + 2\,(p+p_1)\,x^2x_1^2 + \\ + \left[\frac{pm_2}{m_1}(x^2 + x_1^2 + xx_1) + b_4(x + x_1) + b_5\right](x-x_1)^2;$$

und wir erhalten unter Anwendung der Gleichung (Γ_1.) für r_3^2 den Ausdruck:

$$(7_b.) \qquad r_3^2 = C.\,\frac{\begin{bmatrix} (x-x_2)(x_1-x_2)(m_1x_2+m_2)\,[-2ss_1 + P_b(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)(m_1x_1+m_2)\,[-2ss_2 + P_b(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)(m_1x+m_2)\,[-2s_1s_2 + P_b(x_1|x_2)] \end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'$$

$$P_b(x|x_1) = p(x|x_1) + (x-x_1)^2\varphi(x|x_1) = p_1(x|x_1) + \left[\frac{pm_2}{m_1}(x^2 + x_1^2 + xx_1) + b_4(x+x_1) + b_5\right](x-x_1)^2:$$

$$p_1(x|x_1) = p(x^4x_1 + xx_1^4) - (p+p_1)(x^3x_1 + xx_1^3) + (p_1+p_2)(x^2x_1 + xx_1^2) - 2(1+p_2)\,xx_1 + x + x_1;$$

wo die beiden Constanten b_4 und b_5 ganz beliebige Werthe haben können, von deren Wahl natürlich der Werth der Constante C' abhängig ist. Wir wollen, geleitet durch die sub I. bezüglich der Functionen $P_a(x|x_1)$ gewonnenen Anschauungen, untersuchen, ob wir analog als Functionen $P_b(x|x_1)$ nicht die fünf anwenden dürfen, die aus der zweigliedrigen Form

$$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1) \ + \ x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

entstehen, wenn man im ersten Gliede ein Zeichen x_1 durch ein Zeichen x ersetzt (was auf fünf Weisen möglich ist), und entsprechend an derselben Stelle im zweiten Gliede ein Zeichen x durch ein Zeichen x_1, so dass der Ausdruck eine symmetrische Function der beiden Variablen bleibt. Diese sämmtlichen fünf Functionen sind in der allgemeinen Form

$$P(x|x_1) = p_1(x|x_1) + [\beta(x^2 + x_1^2 + xx_1) + b_4(x+x_1) + b_5](x-x_1)^2$$

enthalten, die mit $P_b(x|x_1)$ bis auf den Coëfficienten β übereinstimmt, und man findet, wenn man jede in diese Form bringt, für β, entsprechend den einzelnen Functionen, die Werthe:

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = -p; \quad \beta_3 = -\frac{p}{\varkappa^2}; \quad \beta_4 = -\frac{p}{\lambda^2}; \quad \beta_5 = -\frac{p}{\mu^2}.$$

Soll also in der Formel $(7_b.)$ zu einer bestimmten Function $m_1x + m_2$ eine der fünf speciellen Functionen $P(x|x_1)$ als $P_b(x|x_1)$ gesetzt werden dürfen, so muss nothwendig das derselben speciell zukommende β die Bedingung erfüllen:

$$\beta = \frac{pm_2}{m_1} = \varkappa^2\lambda^2\mu^2\frac{m_2}{m_1}$$

während die Grössen b keinen Einschränkungen unterworfen sind. Demgemäss kann man von den obigen fünf speciellen Functionen $P(x|x_1)$ setzen:

zu $m_1x + m_2 = x$ (da dafür $\frac{pm_2}{m_1} = 0$) nur die eine Function $P(x|x_1)$, für die $\beta = 0$;
„ „ $= 1-x$ („ „ „ $= -p$) „ „ „ „ „ „ „ $\beta = -p$;
„ „ $= 1-\varkappa^2x$ („ „ „ $= -\frac{p}{\varkappa^2}$) „ „ „ „ „ „ „ $\beta = -\frac{p}{\varkappa^2}$;

u. s. w. so dass sich die fünf Functionen folgendermassen vertheilen:

Funct. m_1x+m_2	Functionen $P_b(x\,|\,x_1)$	
x:	$x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)+x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$;	$\beta = 0$
$1-x$:	$x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)+x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$;	$\beta = -p$
$1-\varkappa^2x$:	$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)+x(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$;	$\beta = -\frac{p}{\varkappa^2}$
$1-\lambda^2x$:	$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)+x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)$;	$\beta = -\frac{p}{\lambda^2}$
$1-\mu^2x$:	$x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)+x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$;	$\beta = -\frac{p}{\mu^2}$

und man erkennt, dass der anschauliche Zusammenhang dieser Functionen $P_b(x|x_1)$ und m_1x+m_2 ein ähnlicher ist, wie sub 1. derjenige der Functionen $P_a(x|x_1)$ und $mx^2+m_1x+m_2$.

Diese fünfzehn charakteristischen Functionen P_a und P_b wollen wir nun bei der Bildung der algebraischen Ausdrücke für die fünfzehn ϑ-Quotienten r_3^2 anwenden, und wir haben dann nur noch die beiden Constanten C und C' in jedem speciellen Falle zu bestimmen.

§. 28.

Das Resultat der letzten Untersuchungen ist jetzt, dass die sämmtlichen fünfzehn ϑ-Quotienten r_3^2 in der allgemeinen Form

$$(8.) \quad r_3^2 = \frac{\vartheta^2\binom{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}(u_1+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}\,|\,u_2+u_2^{(1)}+u_2^{(2)})}{\vartheta^2\binom{00}{00}(u_1+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}\,|\,u_2+u_2^{(1)}+u_2^{(2)})} =$$

$$= C.\frac{\left[\begin{array}{l}(x_1-x_2)(x_1-x_2)(mx_2^2+m_1x_2+m_2)[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(mx_1^2+m_1x_1+m_2)[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)(mx^2+m_1x+m_2)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'$$

enthalten sind.

Zu einer bestimmten Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)$ gehört eine bestimmte Function $f(x) = mx^2 + m_1 x + m_2$, die man passend **die charakteristische Function des algebraischen Ausdruckes** nennen könnte: sie ist für jeden der fünfzehn Fälle im §. 26 aufgestellt bis auf einen constanten Factor, den wir $= 1$ gesetzt oder, was dasselbe, in die Constante C verlegt haben, die für jeden Fall bestimmt ist, wenn die Grössen m bestimmt sind. Anders verhält es sich mit der symmetrischen Function P, die, selbst wenn $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)$ festgesetzt ist und in Folge dessen auch $f(x)$, noch die verschiedensten Formen haben kann: sie muss nur in ihren Constanten so beschaffen sein, dass $[-2ss_1 + P(x|x_1)]\ 0^2$ wird für $x = x_1$, $s = s_1$, (indem sonst der Zähler für $x.s = x_1.s_1$ und $x.s = x_2.s_2$ nicht 0^2 würde), und ferner so, dass der Complex der von s, s_1, s_2 unabhängigen Glieder des Zählers in Bezug auf keine der drei Variablen den vierten Grad übersteigt, indem der rationale Theil des Zählers in der Form $\overset{4}{\overline{F(x, x_1, x_2)}}$ des §. 25 enthalten sein muss. Wir haben gefunden, dass P ganz beliebige Constanten enthalten kann, und erst, wenn der Werth derselben festgesetzt, ist die Constante C' in jedem speciellen Falle eine bestimmte. Es gelang uns, der Reihe nach den fünfzehn Functionen $f(x)$ entsprechend, fünfzehn Functionen $P(x|x_1)$ zu finden, die mit diesen in merkwürdigem Zusammenhange stehen, und deren Einführung, durch die Tabellen des vorigen Paragraphen festgesetzt, übersichtliche Endresultate verspricht. Um also die fünfzehn Hauptformeln zu erhalten, setzen wir in der letzten Doppelgleichung (8.) für $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)$ der Reihe nach die fünfzehn möglichen Charakteristiken: entsprechend für $f(x)$ die zugehörigen Functionen aus §. 26 und für $P(x|x_1)$ die ausgewählten Functionen des vorigen Paragraphen. Dann bestimmen sich die beiden Constanten C und C' in jedem speciellen Falle am einfachsten, wenn man für x_1 und x_2 zwei verschiedene Verzweigungswerthe einführt: dadurch geht das System $u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$ in Halbe der correspondirenden Periodicitätsmodulen über und entsprechend der ϑ-Quotient r_3^2 in einen der allgemeinen ϑ-Quotienten $\pm r_1^2$ des ersten Falles, der sich vermöge der Formeln (F_1) algebraisch bestimmt ausdrücken lässt. Durch Vergleichung dieses algebraischen Ausdruckes mit dem äquivalenten, der die Constanten C und C' enthält, bestimmen sich leicht diese letzteren. Setzen wir also zur Abkürzung:

$$u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)}\ u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)} = w_1 | w_2$$

so ergiebt sich, mit Berücksichtigung des Gesagten, das folgende

Formelsystem (F_3):

$$1.\quad \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}11\\01\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)} = C_1 \cdot \frac{\begin{bmatrix} (x-x_2)(x_1-x_2)(1-\varkappa^2 x_2)(1-\mu^2 x_2)[-2ss_1 + P(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)(1-\varkappa^2 x_1)(1-\mu^2 x_1)[-2ss_2 + P(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\mu^2 x)[-2s_1s_2 + P(x_1|x_2)] \end{bmatrix}}{(x-x_1)^2 (x-x_2)^2 (x_1-x_2)^2} + C_1'$$

$$P(x|x_1) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x_1)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x_1) + x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x_1)(1-\mu^2 x)$$

Constantenbestimmung. Für $x_1 = 0$. $x_2 = 1$: wird $w_1 | w_2 = u_1 + \frac{a_{1\cdot 1}}{2} | u_2 + \frac{a_{1\cdot 2}}{2}$, daher:

$$\frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}11\\01\end{smallmatrix}\right)(u_1 + \frac{a_{1\cdot 1}}{2} | u_2 + \frac{a_{1\cdot 2}}{2})}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1 + \frac{a_{1\cdot 1}}{2} | u_2 + \frac{a_{1\cdot 2}}{2})} = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}01\\01\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)} = C_1 \varkappa_1^2 \mu_1^2 \frac{1-\lambda^2 x}{x(1-x)} + C_1'.$$

Aus (F_1) §. 21 folgt nun:

$$\frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}01\\01\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)} = -\frac{\varkappa_1\mu_1}{\varkappa\mu\lambda_\varkappa\mu_\lambda} \cdot \frac{1-\lambda^2 x}{x(1-x)} \quad \text{daher} \quad \left\{ C_1 = -\frac{1}{\varkappa\mu\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda} \ ; \ C_1' = 0. \right\}$$

$$2.\quad \frac{\vartheta^2\binom{01}{01}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_2\cdot\frac{\left[\begin{array}{l}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-\lambda^2x_2)\left[-2ss_1+P(x|x_1)\right]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-\lambda^2x_1)\left[-2ss_2+P(x|x_2)\right]\\+(x_1-x\,)(x_2-x)(1-\lambda^2x)\left[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)\right]\end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2}+C_2'$$

$$P(x|x_1)=x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)+x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0,\ x_2=1\ :\ w_1|w_2\equiv u_1+\frac{a_{11}}{2}\Big|u_2+\frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (2):

$$\frac{\vartheta^2\binom{11}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)}=-\frac{\lambda_1}{\varkappa\mu\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{(1-\varkappa^2x)(1-\mu^2x)}{x(1-x)}=C_2\lambda_1^2\,\frac{(1-\varkappa^2x)(1-\mu^2x)}{x(1-x)}+C_2'\qquad\left\{C_2=-\frac{1}{\varkappa\mu\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\ ;\ C_2'=0.\right\}$$

$$3.\quad \frac{\vartheta^2\binom{01}{11}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_3\cdot\frac{\left[\begin{array}{l}(x-x_2)(x_1-x_2)\,x_2(1-\mu^2x_2)\left[-2ss_1+P(x|x_1)\right]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)\,x_1(1-\mu^2x_1)\left[-2ss_2+P(x|x_2)\right]\\+(x_1-x)(x_2-x)\,x\,(1-\mu^2x)\left[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)\right]\end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2}+C_3'$$

$$P(x|x_1)=x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)+x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0,\ x_2=1\ :\ w_1|w_2\equiv u_1+\frac{a_{11}}{2}\Big|u_2+\frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (3):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{11}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)}=-\frac{\mu_1}{\mu\mu_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{1-\mu^2x}{x}=C_3\mu_1^2\,\frac{1-\mu^2x}{x}+C_3'\qquad\left\{C_3=-\frac{1}{\mu\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}\ ;\ C_3'=0.\right\}$$

$$4.\quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{10}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_4\cdot\frac{\left[\begin{array}{l}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-x_2)\left[-2ss_1+P(x|x_1)\right]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-x_1)\left[-2ss_2+P(x|x_2)\right]\\+(x_1-x)(x_2-x)(1-x)\left[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)\right]\end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2}+C_4'$$

$$P(x|x_1)=x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)+x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0,\ x_2=1\ :\ w_1|w_2\equiv u_1+\frac{a_{11}}{2}\Big|u_2+\frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (4):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{01}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)}=-\frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_1}{\varkappa\lambda\mu}\cdot\frac{1}{1-x}=C_4\,\varkappa_1^2\lambda_1^2\mu_1^2\,\frac{1}{1-x}+C_4'\qquad\left\{C_4=-\frac{1}{\varkappa\lambda\mu\varkappa_1\lambda_1\mu_1}\ ;\ C_4'=0.\right\}$$

$$5.\quad \frac{\vartheta^2\binom{10}{10}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_5\cdot\frac{\left[\begin{array}{l}(x-x_2)(x_1-x_2)\,x_2(1-\varkappa^2x_2)\left[-2ss_1+P(x|x_1)\right]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)\,x_1(1-\varkappa^2x_1)\left[-2ss_2+P(x|x_2)\right]\\+(x_1-x\,)(x_2-x)\,x\,(1-\varkappa^2x)\left[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)\right]\end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2}+C_5'$$

$$P(x|x_1)=x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)+x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0,\ x_2=1\ :\ w_1|w_2\equiv u_1+\frac{a_{11}}{2}\Big|u_2+\frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (5):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{00}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)}=-\frac{\varkappa_1}{\varkappa\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\cdot\frac{1-\varkappa^2x}{x}=C_5\varkappa_1^2\,\frac{1-\varkappa^2x}{x}+C_5'\qquad\left\{C_5=-\frac{1}{\varkappa\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\ ;\ C_5'=0.\right\}$$

$$6.\quad \frac{\vartheta^2\binom{10}{11}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_6\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)(1-x)(1-\lambda^2x)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C_6'$$

$$P(x|x_1) = x(1-x_1)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0$, $x_2=1$: $w_1|w_2 \equiv u_1+\frac{a_{\nu 1}}{2}|u_2+\frac{a_{\nu 2}}{2}$, so wird aus (6):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{00}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)} = \frac{\varkappa_1\mu_1}{\lambda\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{1-\lambda^2x}{1-x} = C_6\varkappa_1^2\mu_1^2\frac{1-\lambda^2x}{1-x}+C_6' \qquad \left\{ C_6 = \frac{1}{\lambda\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda};\ C_6'=0. \right\}$$

$$7.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{10}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_7\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)(1-x)(1-\varkappa^2x)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C_7'$$

$$P(x|x_1) = x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0$, $x_2=1$: $w_1|w_2 \equiv u_1+\frac{a_{\nu 1}}{2}|u_2+\frac{a_{\nu 2}}{2}$, so wird aus (7):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{10}{10}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)} = \frac{\lambda_1\mu_1}{\varkappa\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\cdot\frac{1-\varkappa^2x}{1-x} = C_7\lambda_1^2\mu_1^2\frac{1-\varkappa^2x}{1-x}+C_7' \qquad \left\{ C_7 = \frac{1}{\varkappa\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa};\ C_7'=0. \right\}$$

$$8.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{01}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_8\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-\mu^2x_2)[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-\mu^2x_1)[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)(1-\mu^2x)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C_8'$$

$$P(x|x_1) = x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1) + x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0$, $x_2=1$: $w_1|w_2 \equiv u_1+\frac{a_{\nu 1}}{2}|u_2+\frac{a_{\nu 2}}{2}$, so wird aus (8):

$$\frac{\vartheta^2\binom{10}{01}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)} = -\frac{\mu_1}{\varkappa\lambda\mu_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)}{x(1-x)} = C_8\mu_1^2\frac{(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)}{x(1-x)}+C_8' \qquad \left\{ C_8 = -\frac{1}{\varkappa\lambda\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda};\ C_8'=0. \right\}$$

$$9.\quad \frac{\vartheta^2\binom{00}{11}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_9\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)\,x_2(1-\lambda^2x_2)[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)\,x_1(1-\lambda^2x_1)[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)\,x\,(1-\lambda^2x)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C_9'$$

$$P(x|x_1) = x(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x_1) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1=0$, $x_2=1$: $w_1|w_2 \equiv u_1+\frac{a_{\nu 1}}{2}|u_2+\frac{a_{\nu 2}}{2}$, so wird aus (9):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{10}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)} = -\frac{\lambda_1}{\lambda\lambda_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{1-\lambda^2x}{x} = C_9\lambda_1^2\frac{1-\lambda^2x}{x}+C_9' \qquad \left\{ C_9 = -\frac{1}{\lambda\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda};\ C_9'=0. \right\}$$

$$10.\quad \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)} = C_{10}\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)\,x_2(1-x_2)\,[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)\,x_1(1-x_1)\,[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)\,x\,(1-x)\,[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'_{10}$$

$$P(x|x_1) = x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x_1)\,(1-\lambda^2x_1)\,(1-\mu^2x_1) + x_1\,(1-x_1)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\varkappa^2}:\ w_1|w_2 \equiv u_1 - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{11}}{2}\Big|u_2 + \frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (10):

$$\frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\10\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)} = -\frac{\varkappa_1}{\lambda_1\mu_1}\cdot\frac{1-x}{x} = -C_{10}\varkappa_1^2\frac{1-x}{x} + C'_{10} \qquad \left\{C_{10} = \frac{1}{\varkappa_1\lambda_1\mu_1};\quad C'_{10} = 0.\right\}$$

$$11.\quad \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}01\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)} = C_{11}\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)\,[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)\,[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)\,[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'_{11}$$

$$P(x|x_1) = x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x_1)\,(1-\mu^2x_1) + x_1\,(1-x_1)\,(1-\varkappa^2x_1)\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1 = 0,\ x_2 = 1:\ w_1|w_2 \equiv u_1 + \frac{a_{11}}{2}\Big|u_2 + \frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (11):

$$\frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}11\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)} = \frac{\lambda_1\mu_1}{\lambda\mu\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}\cdot\frac{1-\varkappa^2x}{x(1-x)} = C_{11}\lambda_1^2\mu_1^2\frac{1-\varkappa^2x}{x(1-x)} + C'_{11} \qquad \left\{C_{11} = \frac{1}{\lambda\mu\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa};\quad C'_{11} = 0.\right\}$$

$$12.\quad \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\01\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)} = C_{12}\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)\,[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)\,[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)\,[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'_{12}$$

$$P(x|x_1) = x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x_1)\,(1-\lambda^2x_1)\,(1-\mu^2x) + x_1\,(1-x_1)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1 = 0,\ x_2 = 1:\ w_1|w_2 \equiv u_1 + \frac{a_{11}}{2}\Big|u_2 + \frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (12):

$$\frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\01\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)} = -\frac{\varkappa_1\lambda_1}{\varkappa\lambda\mu_\varkappa\mu_\lambda}\cdot\frac{1-\mu^2x}{x(1-x)} = C_{12}\varkappa_1^2\lambda_1^2\frac{1-\mu^2x}{x(1-x)} + C'_{12} \qquad \left\{C_{12} = -\frac{1}{\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda};\quad C'_{12} = 0.\right\}$$

$$13.\quad \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}01\\10\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right)(w_1|w_2)} = C_{13}\cdot\frac{\begin{bmatrix}(x-x_2)(x_1-x_2)\,x_2\,[-2ss_1+P(x|x_1)]\\+(x-x_1)(x_2-x_1)\,x_1\,[-2ss_2+P(x|x_2)]\\+(x_1-x)(x_2-x)\,x\,[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)]\end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'_{13}$$

$$P(x|x_1) = x\,(1-x_1)\,(1-\varkappa^2x_1)\,(1-\lambda^2x_1)\,(1-\mu^2x_1) + x_1\,(1-x)\,(1-\varkappa^2x)\,(1-\lambda^2x)\,(1-\mu^2x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1 = 0,\ x_2 = 1:\ w_1|w_2 \equiv u_1 + \frac{a_{11}}{2}\Big|u_2 + \frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (13):

$$-\frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right)(u_1|u_2)} = \frac{1}{\varkappa\lambda\mu}\cdot\frac{1}{x} = C_{13}\frac{1}{x} + C'_{13} \qquad \left\{C_{13} = \frac{1}{\varkappa\lambda\mu};\quad C'_{13} = 0.\right\}$$

$$14. \quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{00}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_{11} \cdot \frac{\begin{bmatrix} (x-x_2)(x_1-x_2)(1-\varkappa^2 x_2)[-2ss_1+P(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)(1-\varkappa^2 x_1)[-2ss_2+P(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)(1-\varkappa^2 x)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)] \end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)(x_1-x_2)^2} + C'_{14}$$

$$P(x|x_1) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x_1)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x) + x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x_1)(1-\mu^2 x_1)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$: $w_1|w_2 \equiv u_1 + \frac{a_{11}}{2}|u_2 + \frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (14):

$$\frac{\vartheta^2\binom{01}{00}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)} = \frac{\varkappa_1}{\lambda\mu\lambda_\varkappa\mu_\varkappa} \cdot \frac{(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}{x(1-x)} = C_{14}\varkappa_1^2 \frac{(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}{x(1-x)} + C'_{14} \quad \left\{ C_{14} = \frac{1}{\lambda\mu\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}; \quad C'_{14} = 0. \right\}$$

$$15. \quad \frac{\vartheta^2\binom{11}{11}(w_1|w_2)}{\vartheta^2\binom{00}{00}(w_1|w_2)} = C_{15} \cdot \frac{\begin{bmatrix} (x-x_2)(x_1-x_2)(1-x_2)(1-\mu^2 x_2)[-2ss_1+P(x|x_1)] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)(1-x_1)(1-\mu^2 x_1)[-2ss_2+P(x|x_2)] \\ +(x_1-x)(x_2-x)(1-x)(1-\mu^2 x)[-2s_1s_2+P(x_1|x_2)] \end{bmatrix}}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2} + C'_{15}$$

$$P(x|x_1) = x(1-x_1)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x_1) + x_1(1-x)(1-\varkappa^2 x_1)(1-\lambda^2 x_1)(1-\mu^2 x)$$

Constantenbestimmung. Setzen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$: $w_1|w_2 \equiv u_1 + \frac{a_{11}}{2}|u_2 + \frac{a_{12}}{2}$, so wird aus (15):

$$-\frac{\vartheta^2\binom{01}{11}(u_1|u_2)}{\vartheta^2\binom{10}{00}(u_1|u_2)} = \frac{\varkappa_1\lambda_1}{\mu\mu_\varkappa\mu_\lambda} \cdot \frac{1-\mu^2 x}{1-x} = C_{15}\varkappa_1^2\lambda_1^2 \frac{1-\mu^2 x}{1-x} + C'_{15} \qquad \left\{ C_{15} = \frac{1}{\mu\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}; \quad C'_{15} = 0. \right\}$$

Wir sehen, dass bei dieser Wahl der Functionen P die sämmtlichen davon abhängigen Constanten C' den Werth 0 haben.

Die in den ϑ-Functionen zur Abkürzung geschriebenen Argumente $w_1|w_2$ sind gleichbedeutend mit dem ursprünglichen Systeme $u_1-f_1|u_2-f_2$, das von uns in die Form

$$u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} | u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$$

gesetzt wurde, indem wir durch die Congruenz

$$-f_1|-f_2 \equiv u_1^{(1)} + u_1^{(2)} | u_2^{(1)} + u_2^{(2)}$$

die Punkte x_1, s_1 und x_2, s_2, die, nur einwerthig bestimmbar, dieser Congruenz Genüge leisten, als Hilfsgrössen für die Bildung der algebraischen Formen einführten.

Aus jeder Formel sub (F_3) lassen sich, wie ähnlich bei den Formeln des Systems (F_2) geschehen, neue ableiten, indem man statt der Grössen s_1, s_2 ihre negativen Werthe einzeln oder zugleich einführt. Setzt man in den algebraischen Ausdrücken statt s_1: $-s_1$ oder statt s_2: $-s_2$ ein, so muss man entsprechend in den Argumenten der ϑ-Functionen statt $u_1^{(1)}|u_2^{(1)}$: $-u_1^{(1)}|-u_2^{(1)}$ oder statt $u_1^{(2)}|u_2^{(2)}$: $-u_1^{(2)}|-u_2^{(2)}$ resp. schreiben, da ja die Congruenz

$$\int_\alpha^{x,-s} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x,-s} du_2 \equiv -\int_\alpha^{x,s} du_1 \,\Big|\, -\int_\beta^{x,s} du_2$$

für jeden Werth von x besteht. Man kann auf diese Weise aus jeder Formel (F_3), je nachdem man statt $s_1: -s_1$, oder statt $s_2: -s_2$, oder endlich zugleich statt s_1 und s_2: $-s_1$ und $-s_2$ einführt, drei neue ableiten, die in Verbindung mit der ursprünglichen eine Menge algebraischer Formen durch Summen oder Differenzen von ϑ^2-Quotienten, deren Argumente in der allgemeinen Form $u_1 \pm u_1^{(1)} \pm u_1^{(2)} | u_2 \pm u_2^{(1)} \pm u_2^{(2)}$ enthalten sind, auszudrücken gestatten.

§. 29.

Unsere Aufgabe, die in der allgemeinen Form

$$\frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1-f_1|u_2-f_2)}{\vartheta\binom{\eta_1\ \eta_2}{\eta_1'\ \eta_2'}(u_1-f_1|u_2-f_2)} \qquad (\varepsilon, \eta = 0, 1)$$

darstellbaren algebraischen Functionen für jeden Werth von x und für ein beliebiges Constantensystem $f_1|f_2$ algebraisch auszudrücken, ist jetzt gelöst, indem aus dem letzten Formelsysteme, durch Division je zweier der dort vorkommenden fünfzehn Hauptformeln in einander, die Quadrate aller übrigen ϑ-Quotienten von der obigen Form sich algebraisch ausdrücken lassen.

Betrachten wir jetzt die sub (F_3) gewonnenen algebraischen Ausdrücke genauer, so zeigt sich die merkwürdige Erscheinung, dass bei unserer Wahl der Functionen P, die allgemein das Verschwinden der Constanten C' zur Folge hatte, sämmtliche Formen bezüglich des Baues in naher Verwandtschaft zu einander stehen, und dass, abgesehen von dem constanten Factor C, der bei jeder einen besondern Werth hat, sie sich nur durch die zu jeder speciell gehörige **charakteristische Function** $f(x)$, die lediglich den ganzen Bau des Zählers und nach ihrer Verschiedenheit die Verschiedenheiten im Baue der einzelnen Zähler bestimmt, unterscheiden. Eine weitere Frage ist demnach, ob der allgemeinen Form

$$R = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}(u_1-f_1|u_2-f_2)}{\vartheta(u_1-f_1|u_2-f_2)}$$

entsprechend, aus der die betrachteten ϑ-Quotienten sämmtlich resultiren, indem man statt der symbolischen Charakteristik der Reihe nach die fünfzehn möglichen bestimmten Charakteristiken einführt, nicht auch eine äquivalente **algebraische Cardinalform** existirt, in der die charakteristische Function $f(x)$ in allgemeiner Bezeichnung dieselbe symbolische Rolle spielt, wie die Charakteristik $\binom{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1'\ \varepsilon_2'}$ bei dem ϑ-Quotienten, und aus der für jeden einzelnen ϑ-Quotienten der äquivalente algebraische Ausdruck erhalten würde, wenn man darin statt $f(x)$ die specielle charakteristische algebraische Function einführte, die der jedesmaligen ϑ-Charakteristik, gemäss des im §. 26 aufgedeckten Zusammenhanges, entspricht.

Zu dieser Cardinalform gelangen wir, wenn wir bemerken, dass sämmtliche fünfzehn Functionen $f(x) = mx^2 + m_1 x + m_2$ Theiler von $s^2 = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$ sind, und dass die zu einer Function $f(x)$ gehörige Function $P(x|x_1)$ **in jedem Falle** (vergl. die beiden Tab. §. 27) **so gewählt ist, dass die Relation**

$$P(x|x_1) = \frac{s^2}{f(x)} f(x_1) + \frac{s_1^2}{f(x_1)} f(x)$$

stattfindet. Führen wir nun in der letzten Gleichung (8.) statt der dort vorkommenden Functionen P ihre der obigen Relation entsprechenden Ausdrücke mit den betreffenden Variablen ein und berücksichtigen, dass C'' allgemein den Werth 0 hat, so folgt:

$$r_3^2 = C.\frac{\left[\begin{array}{l} (x-x_2)(x_1-x_2)f(x_2)\left[-2ss_1+\dfrac{s^2}{f(x)}f(x_1)+\dfrac{s_1^2}{f(x_1)}f(x)\right] \\ +(x-x_1)(x_2-x_1)f(x_1)\left[-2ss_2+\dfrac{s^2}{f(x)}f(x_2)+\dfrac{s_2^2}{f(x_2)}f(x)\right] \\ +(x_1-x)(x_2-x)f(x)\left[-2s_1s_2+\dfrac{s_1^2}{f(x_1)}f(x_2)+\dfrac{s_2^2}{f(x_2)}f(x_1)\right] \end{array}\right]}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x_1-x_2)^2}$$

und man erkennt ohne Mühe, dass der Zähler dieses Ausdruckes ebenso wie der Nenner ein vollkommenes Quadrat ist. Ziehen wir die Quadratwurzel aus und schreiben statt r_3 einfacher R, so folgt unter Beifügung des zugehörigen ϑ-Quotienten:

$$R = \frac{\vartheta\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{smallmatrix}\right)(u_1+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}\,|\,u_2+u_2^{(1)}+u_2^{(2)})}{\vartheta(u_1+u_1^{(1)}+u_1^{(2)}\,|\,u_2+u_2^{(1)}+u_2^{(2)})} =$$

$$= \pm\sqrt{C}.\frac{\left[\begin{array}{l} \dfrac{s}{\sqrt{f(x)}}\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\,(x_2-x_1) \\ +\dfrac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}}\sqrt{f(x)f(x_2)}\,(x-x_2) \\ +\dfrac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}}\sqrt{f(x)f(x_1)}\,(x_1-x) \end{array}\right]}{(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)} = \pm\sqrt{C}.\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{s}{\sqrt{f(x)}}, & \dfrac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}}, & \dfrac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}} \\ \sqrt{f(x)}, & \sqrt{f(x_1)}, & \sqrt{f(x_2)} \\ x\sqrt{f(x)}, & x_1\sqrt{f(x_1)}, & x_2\sqrt{f(x_2)} \end{vmatrix}}{(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)}$$

und den letzten Ausdruck, dessen Zähler in Form einer Determinante geschrieben ist, wollen wir als die algebraische Cardinalform ansehen.

Diese Cardinalform stellt den ganzen Bau des algebraischen Ausdruckes in das hellste Licht und bildet, einmal entdeckt, vermöge ihrer leicht zu verallgemeinernden Gestaltung den Schlüssel für das gesammte Gebiet der hyperelliptischen quadratischen Functionen, von denen die hier betrachteten ultraelliptischen nur einen speciellen ausgezeichneten Fall abgeben. Die Determinante im Zähler ändert als alternirende Function, wie der Nenner, ihr Vorzeichen, wenn man zwei der vorkommenden Punkte $x,s : x_1,s_1 : x_2,s_2$ mit einander vertauscht; sie verschwindet, als Function des Punktes x,s betrachtet (und zwar wird sie 0^1), wenn man $x,s = x_1,s_1$ oder $x,s = x_2,s_2$ setzt, indem dann zwei Verticalreihen identisch werden. Der algebraische Quotient ist also wie der allgemeine ϑ-Quotient eine symmetrische Function der drei Variablen und wird wie dieser, als Function von x,s betrachtet, nur ∞^1 für die beiden Punkte $x,s = x_1,-s_1$ und $x,s = x_2,-s_2$, indem dies die einzigen Werthe x,s sind, für die der Nenner $(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)$ nicht zugleich mit dem Zähler verschwindet. Als symmetrische Function hat er in Bezug auf jeden der beiden übrigen Punkte ganz analoge Eigenschaften. Wie nun die Factoren, die R an den Querschnitten erlangt, und die beiden Punkte, wo R 0^1

wird, verschieden nach den verschiedenen möglichen Charakteristiken, in jedem Falle vollkommen bestimmt sind, sobald eine bestimmte Charakteristik statt der symbolischen $\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}$ gewählt ist, so werden entsprechend diese Grössen auch mit der jedesmaligen Function $f(x)$ in nachweisbar nothwendigem Zusammenhange stehen, da diese Function mit der Wahl der betreffenden Charakteristik zugleich nothwendig bestimmt ist und umgekehrt.

Zunächst ist klar, dass die Factoren $(-1)^{\varepsilon_1}$, $(-1)^{\varepsilon_1'}$, $(-1)^{\varepsilon_2}$, $(-1)^{\varepsilon_2'}$, die R der Reihe nach an den Querschnitten a_1, b_1, a_2, b_2 annimmt, dieselben sind, die $\sqrt{f(x)}$ dort erlangt, denn diese Wurzelgrösse ist die einzige nicht wie T verzweigte Function, die in jedem Gliede des algebraischen Zählers von R als Factor zu einer wie T verzweigten Function vorkommt. Anschaulicher wird dieses Verhältniss, wenn wir durch Herausheben der Wurzelgrössen aus der Determinante den Zähler (der Nenner ist für sich schon wie T verzweigt) in die Form

$$\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{f(x)}\,\sqrt{f(x_1)}\,\sqrt{f(x_2)}} \cdot \begin{vmatrix} s, & s_1, & s_2 \\ f(x), & f(x_1), & f(x_2) \\ x f(x), & x_1 f(x_1), & x_2 f(x_2) \end{vmatrix}$$

setzen. Die neue Determinante ist dann eine wie T verzweigte Function, erlangt also an allen Querschnitten den Factor $+1$, und die Factoren, die der Totalausdruck annimmt, können demnach nur dieselben wie die des Factors $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)}$ oder der Function $\sqrt{f(x)}$ sein, die entweder als identisch mit einer der fünf Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$ etc., oder als Product von zweien derselben in T' einwerthig und stetig ist und an den Querschnitten Factoren ± 1 erlangt. Diese Factoren giebt die Tabelle des §. 9 an, und man kann durch sie für jeden Fall das gefundene Resultat prüfen. So erlangt z. B. der sub 15. stehende einfache (nicht quadratische) ϑ-Quotient mit der Charakteristik $\binom{11}{11}$ an allen Querschnitten den Factor -1, und eben denselben die Quadratwurzel, $\sqrt{(1-x)(1-\mu^2 x)}$, aus der charakteristischen Function des zugehörigen algebraischen Ausdruckes; denn nach der Factorentabelle erlangt $\sqrt{1-x}$ an den Querschnitten der Reihe nach die Factoren $-1, -1, -1, +1$: $\sqrt{1-\mu^2 x}$ die Factoren $+1, +1, +1, -1$: daher das Product dieser Functionen, $\sqrt{(1-x)(1-\mu^2 x)}$, an allen Querschnitten den Factor -1. Eben dieser innige Zusammenhang zwischen den Charakteristiken der ϑ-Quotienten und den Quadratwurzeln aus den correspondirenden, im §. 26 bestimmten Functionen $f(x)$ liess mich auch vermuthen, dass den Functionen $f(x)$ für die algebraischen Ausdrücke dieselbe Bedeutung zukomme, wie den Charakteristiken für die einzelnen ϑ-Quotienten, und veranlasste mich, bei der Aufstellung des Formelsystems (F_3) die Functionen P so zu wählen, dass sie in jedem Falle mit der betreffenden gefundenen Function $f(x)$ in charakteristischem Zusammenhange stehen.

Was ferner die beiden Punkte x, s betrifft, wo R 0^1 wird, und die wir mit x_3, s_3 und x_4, s_4 bezeichnet haben, so sind sie von der ϑ-Function im Zähler aus bestimmt durch die schon im §. 20 aufgestellte Congruenz:

$$f_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\pi i - \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{1,\nu} \,\Big|\, f_2 + \frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i - \sum_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{2} a_{2,\nu} \equiv \int_\alpha^{x_3,s_3} du_1 + \int_\alpha^{x_4,s_4} du_1 \,\Big|\, \int_\beta^{x_3,s_3} du_2 + \int_\beta^{x_4,s_4} du_2 .$$

Diese Congruenz ist allgemein algebraisch lösbar, wenn wir statt $-f_1 | -f_2$ das gleichwerthige Integralsystem $u_1^{(1)}+u_1^{(2)} | u_2^{(1)}+u_2^{(2)}$ einführen, indem x_3, s_3 und x_4, s_4 zugleich mit x_1, s_1 und x_2, s_2 die Wurzeln x, s der Determinante in dem algebraischen Ausdrucke für R bilden. Ordnen wir die Determinante nach den Elementen der ersten Verticalreihe, so finden sich ihre Wurzeln aus der Gleichung:

$$0 = a\frac{s}{\sqrt{f(x)}} + b\sqrt{f(x)} + cx\sqrt{f(x)}$$

wo a, b, c bekannte Functionen von x_1, s_1 und x_2, s_2 allein sind. Die Werthe von x, die dieser Gleichung genügen, sind identisch mit den Wurzeln der Gleichung:

$$0 = a^2\frac{s^2}{f(x)} - (b+cx)^2 f(x),$$

die durch Quadrirung der vorigen entsteht, und deren rechte Seite für jede der fünfzehn Functionen $f(x)$, die alle Theiler zu s^2 sind, eine ganze Function des vierten Grades von x ist. Scheiden wir aus dieser Gleichung ihre beiden bekannten Wurzeln $x = x_1$ und $x = x_2$ aus, so reducirt sie sich auf eine quadratische, die uns die beiden noch übrigen Wurzeln $x = x_3$ und $x = x_4$ als Functionen der in den a, b, c enthaltenen Werthe x_1, s_1 und x_2, s_2 liefert. Die zu x_3 und x_4 gehörigen Werthe s_3 und s_4 bestimmen sich dann ihrem Vorzeichen nach aus der ersten Gleichung:

$$0 = as + (b+cx)f(x),$$

indem die Werthe x_3, s_3 und x_4, s_4 ihr als Wurzeln genügen müssen.

Die Untersuchung, auf welche verschiedene Weise die bestimmenden Eigenschaften der allgemeinen Function R in dem ϑ-Quotienten und in der algebraischen Cardinalform zum Ausdrucke kommen, ist hiermit erledigt. Die verknüpfende Constante $\sqrt{C}$ ist bis auf das Vorzeichen für jeden der fünfzehn Fälle sub (F_3) bestimmt; einwerthig erhält man sie durch Grössen ϑ ausgedrückt, wenn man in die Doppelgleichung für R (in diesem Paragraphen) statt x, x_1, x_2 drei verschiedene endliche Verzweigungswerthe einführt, für die die Determinante nicht verschwindet, und entsprechend für die Integrale in den Argumenten der ϑ-Functionen die resp. in der Gleichung (T') §. 17 aufgestellten Werthe. Vermöge der Relationen des §. 19 lässt sich dann $\sqrt{C}$ rational durch Grössen ϑ in jedem Falle darstellen.

Unter Voraussetzung der zuerst dargestellten Formelsysteme (F_1) und (F_2) haben wir das Formelsystem (F_3) durch rein algebraische Betrachtungen gewonnen. Die daraus abstrahirte, dem allgemeinsten ϑ-Quotienten entsprechende algebraische Cardinalform lässt sich aber auch unmittelbar, mit Übergehung der Systeme (F_1) und (F_2), herleiten, sobald man den Umstand ins Auge fasst, **dass zu jedem ϑ-Quotienten R eine Function $\sqrt{f(x)}$ sich finden lässt, die,** entweder als identisch mit einer der fünf Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$ etc., oder als Product von zweien dieser fünf, in T'' einwerthig und stetig, **an den Querschnitten dieselben Factoren ± 1 erlangt wie der betrachtete specielle ϑ-Quotient R.** Das Product, $R.\sqrt{f(x)}$, dieser beiden Functionen ist dann, da es an allen Querschnitten den Factor $+1$ erlangt, eine wie die Fläche T verzweigte algebraische Function, die nach ihren Eigenschaften sich leicht rational durch x und s darstellen lässt. Die Schwierigkeiten, die wir bei unserm Gange der Untersuchung zu bewältigen hatten, bestanden eben darin, dass wir von der Betrachtung der Quadrate der ϑ-Quotienten, als wie T verzweigter Functionen, ausgehend, eine der wichtigsten bestimmenden Eigenschaften des einfachen ϑ-Quotienten, an den Querschnitten bestimmte Factoren ± 1 zu erlangen, die zugleich vollkommen die Unterschiede der einzelnen Functionen und Formen bestimmt und bei den Quadraten nicht mehr hervortritt, bei der Construction des algebraischen Ausdruckes für R^2 nicht in Rechnung ziehen konnten. In Folge dessen war es auch unmöglich, ohne Zurückgehen auf die schon bestehenden Formeln (F_1) und (F_2) den allgemeinen algebraischen Ausdruck so zu specialisiren, dass die individuellen Formen alle symbolisch in ihm enthalten gewesen; im Gegentheile, eines der einfachsten Abhängigkeitsgesetze, wie es zwischen der Charakteristik $\binom{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}$ und der Function $f(x)$ des algebraischen Ausdruckes existirt, musste, unbemerkt geblieben, durch ein viel complicirteres wieder gegeben werden. Geht man dagegen, unter Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges, wie er zwischen den ϑ-Quotienten R und den fünfzehn charakteristischen Functionen $f(x)$ besteht, von dem Producte, $R.\sqrt{f(x)}$, zweier solcher, durch ein gemeinsames Factorensystem verknüpfter Functionen R und $\sqrt{f(x)}$, als von einer wie T verzweigten Function aus, so ist damit der oben erwähnten wichtigsten Eigenschaft des ϑ-Quotienten vollkommen Rechnung getragen, und unmittelbar ergiebt sich, eindeutig durch seine übrigen Eigenschaften bestimmt, der algebraische Ausdruck für R. Ich will diese Untersuchung für den vorliegenden Fall der ultraëlliptischen Functionen nicht mehr speciell durchführen, sondern sie im Folgenden allgemein auf das Gebiet der hyperelliptischen ausdehnen: denn eben darin besteht die Bedeutung der algebraischen Cardinalform, dass an der Hand der bei ihrer Betrachtung gewonnenen Anschauungen das ganze Gebiet der analogen hyperelliptischen Formen sich uns aufschliesst.

Es bedarf wohl keiner Bemerkung mehr, dass man umgekehrt aus den Formeln (F_3) als den allgemeinsten die specielleren (F_1) und (F_2) unmittelbar ableiten kann. Führen wir in die Doppelgleichung für R (pag. 92) statt x_2 den Verzweigungswerth ∞ ein, so erhalten wir einen der sub (F_2) stehenden einfachen ϑ-Quotienten, indem dann das System der Argumente in

$$u_1 + u_1^{(1)} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,1}}{2} \mid u_2 + u_2^{(1)} - \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{1,2}}{2},$$

und der Nenner $\vartheta\binom{00}{00}(u_1 + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \mid u_2 + u_2^{(1)} + u_2^{(2)})$ in Verbindung mit der jedesmaligen ϑ-Function im Zähler (nach (ϑ) §. 21) in den gemeinsamen Nenner $\vartheta\binom{10}{11}(u_1 + u_1^{(1)} \mid u_2 + u_2^{(1)})$ der Formeln (F_2), bei denen er natürlich quadratisch vorkommt, übergeht. Entsprechend verwandelt sich für $x_2 = \infty$ die algebraische Cardinalform bis auf einen constanten Factor entweder in

$$R_1 = \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x_1)},$$

wenn die der Charakteristik $\binom{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}$ entsprechende $\sqrt{f(x)}$ eine der fünf Functionen $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$, etc. ist, indem dann in der Determinante gegen das von höherer Ordnung unendlich werdende Glied $\frac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}}$ die Glieder $\sqrt{f(x_2)}$ und $x_2\sqrt{f(x_2)}$ verschwinden und folglich gleich 0 gesetzt werden können, während $\lim\limits_{x_2=\infty} \frac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}\,(x-x_2)\,(x_1-x_2)}$ einen constanten Werth erhält; oder in

$$R_2 = \frac{\frac{s}{\sqrt{f(x)}}\sqrt{f(x_1)} - \frac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}}\sqrt{f(x)}}{x-x_1},$$

wenn die entsprechende $\sqrt{f(x)}$ ein Product von zweien der fünf Functionen ist, indem dann in der Determinante die Glieder $\frac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}}$ und $\sqrt{f(x_2)}$ gegen das von höherer Ordnung unendlich werdende Glied $x_2\sqrt{f(x_2)}$ verschwinden und folglich gleich 0 gesetzt werden können, während $\lim\limits_{x_2=\infty} \frac{x_2\sqrt{f(x_2)}}{(x-x_2)(x_1-x_2)}$ einen constanten Werth erhält: R_1^2 und R_2^2 sind aber mit Berücksichtigung der jedesmal statt $\sqrt{f(x)}$ einsetzbaren Functionen dieselben Formen, in denen die fünfzehn **Rosenhain**'schen algebraischen Functionen sich bewegen, so dass also die Formeln (F_2) unmittelbar aus dem Systeme (F_3) resultiren, wenn man $x_2 = \infty$ setzt. Bei einiger Übung ist die auf diese Weise ausführbare Bestimmung der fünfzehn Constanten C und C' sub (F_3) einfacher als die angewandte. Führt man endlich in die Gleichung für R statt x_1 und x_2 beliebige, aber von einander verschiedene Verzweigungswerthe ein, wie es sub (F_3) geschehen, so erhält man Gleichungen, aus denen das Formelsystem (F_1) sich herstellen lässt.

§. 30.

Wir haben bis jetzt diejenigen algebraischen Functionen untersucht, die, durch den Quotienten zweier einfacher ϑ-Functionen darstellbar, Quadratwurzeln aus wie T verzweigten, d. h. rational durch x und s ausdrückbaren Functionen sind: man könnte sie passend mit dem Namen „**ultraëlliptische quadratische Functionen**“ bezeichnen. Wir fanden, dass sie alle Functionen umfassen, die in T'' einwerthig und stetig, für zwei beliebige Punkte ∞^1 werden und an den Querschnitten Factoren ± 1 erlangen. Von diesen bestimmenden Eigenschaften ausgehend, untersuchten wir, auf welche verschiedene Weise dieselben in den ϑ-Quotienten und in den algebraischen Formen zum Ausdrucke gelangen, und es ergab sich als Resultat der im vorigen Paragraphen aufgedeckte merkwürdige Zusammenhang der beiden verschiedenen Ausdrucksformen. Die Fortsetzung dieser Untersuchungen würde zeigen, dass nicht nur zweite, sondern allgemein dritte, vierte, etc. $n$te in T'' einwerthige und stetige Wurzeln aus wie T verzweigten algebraischen Functionen durch den Quotienten zweier ϑ-Functionen darstellbar sind, endlich dass jede in T'' einwerthige und stetige algebraische Function, um so mehr also jede wie T verzweigte Function sich durch ein Product mehrerer solcher ϑ-Quotienten ausdrücken lässt. Ich habe diese weiteren Untersuchungen, die über den merkwürdigen Parallelismus der algebraischen und der ϑ-Formen das hellste Licht verbreiten, in allgemeinerer Fassung zum Gegenstande einer demnächst erscheinenden Arbeit: „**Zur Theorie der hyperelliptischen algebraischen Functionen**“ gemacht, aus der ich hier noch zum Schlusse einiges auf die algebraischen Cardinalformen der hyperelliptischen quadratischen Functionen Bezügliche, als mit dem Resultate der vorliegenden Abhandlung in engster Beziehung stehend, anführen will, die weitere Ausführung der erwähnten Schrift vorbehaltend.

Der Gang der Untersuchung ist bis zur Herleitung der dem allgemeinen ϑ-Quotienten äquivalenten algebraischen Form nicht von dem, in der vorliegenden Arbeit für die ultraëlliptischen Functionen eingeschlagenen, verschieden: für $p = 2$ gehen die folgenden Betrachtungen und Ausdrücke in schon aus dieser Abhandlung bekannte über, so dass möglichste Kürze gestattet sein wird.

Wir gehen von den immer endlichen hyperelliptischen Integralen aus. Ein solches, dem allgemeinsten Falle $p=p$ entsprechendes, immer endliches Integral lässt sich durch eine lineare Transformation immer in die allgemeine Form

$$w=\int_{\alpha_1}^{x}\frac{(a_0+a_1x+\ldots.+a_{p-1}x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_{2p+1})}}+c$$

setzen, in der die $2p+1$ Constanten α von einander verschiedene Grössen bezeichnen, deren Werthe, so wie diejenigen der p Constanten a, weiter keinen besonderen Bedingungen unterworfen sind. Insofern wir in diesem Ausdrucke den Constanten a und α, so wie der Variable x jeden reellen oder complexen Werth anzunehmen gestatten, können wir w als die Cardinalform der hyperelliptischen Integrale ansehen. Wir setzen nun fest, dass die Grössen α im Laufe der Untersuchung ihre Werthe nicht ändern sollen, so greifen wir damit eine gewisse Gruppe von Integralen heraus, und wenn wir im Folgenden allgemein von hyperelliptischen Integralen reden, so sollen darunter nur **einer** Gruppe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1})$ angehörige verstanden sein. Da der Zähler von dw p willkürliche Constante enthält, so lässt sich jedes Integral w aus p anderen linearunabhängigen linear zusammensetzen.

Bezeichnen wir den Nenner von dw mit s, setzen also

$$\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots.(x-\alpha_{2p+1})}=s,$$

so hat diese Function s für jeden Punkt der X-Ebene zwei entgegengesetzte Werthe, $+s$ und $-s$, und ihre Verzweigungspunkte sind die $2p+2$ Punkte: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}, \infty$. Wir bilden jetzt nach den im §. 2 angewandten Principien die zweiblättrige Fläche T, die die Verzweigungsart der Function s und jeder aus s und x rational zusammengesetzten Function repräsentirt, indem wir über die X-Ebene zwei im Unendlichen geschlossene Ebenenblätter ausbreiten, dieselben längs $p+1$ Linien, durch die wir vorher in jedem Blatte α_1 mit α_2, α_3 mit $\alpha_4, \ldots., \alpha_{2p+}$ mit ∞ verbunden, zerschneiden und so zusammensetzen, dass sich in diesen Schnitten die beiden Blätter durcheinander durchsetzen. s ist dann in dieser Fläche, sobald man seinen Werth für einen Punkt a derselben als $+s_a$ oder als $-s_a$ willkürlich angenommen, eine allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes: einem jeden Werthe von x entsprechen zwei Punkte der Fläche, der eine im obern, der andere im untern Blatte: entspricht dem einen dieser Punkte der Werth s, so entspricht dem andern der entgegengesetzte Werth $-s$. Diese Fläche T zeigt sich nun als eine $(2p+1)$-fach zusammenhangende Fläche, die wir ähnlich wie im §. 4 durch p getrennte Querschnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_p, b_p$; die durch $p-1$ Linien c verbunden sind, in eine einfach zusammenhangende Fläche T' zerlegen. Das Integral w ist dann, unter Beschränkung des Integrationsweges auf diese Fläche, eine in T' einwerthige, stetige und immer endliche Function des Ortes oder Punktes x, s, die so in der Begrenzung von T' bestimmt ist, dass ihre demselben Punkte eines Querschnittes auf der positiven und negativen Seite entsprechenden Werthe sich um eine längs des ganzen Querschnittes constante Grösse, Periodicitätsmodul genannt, unterscheiden. Es lassen sich nun, wenn wir die inneren Seiten der Querschnitte a, b als die positiven, die äusseren als die negativen annehmen, p wie w gestaltete Integrale:

$$u_1=\int_{\alpha_1}^{x,s}du_1;\quad u_2=\int_{\alpha_1}^{x,s}du_2;\quad \ldots.,\quad u_p=\int_{\alpha_1}^{x,s}du_p,$$

mit dem gemeinschaftlichen Anfangswerthe 0 für $x = \alpha_1$, so in ihren Constanten a bestimmen, dass allgemein der Periodicitätsmodul von u_ν für den Querschnitt a_ν den Werth πi, die Periodicitätsmodulen von u_ν für alle übrigen Querschnitte a den Werth 0 haben. Die durch diese Bedingungen ebenfalls ihrem Werthe nach vollkommen bestimmten Periodicitätsmodulen der Functionen u für die p Querschnitte b erfüllen dann, wenn wir allgemein den Periodicitätsmodul von u_ν für den Querschnitt b_μ mit $a_{\nu,\mu}$ bezeichnen, die Bedingung $a_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu}$, d. h. der Periodicitätsmodul der Function u_ν für den Querschnitt b_μ ist gleich dem Periodicitätsmodul der Function u_μ für den Querschnitt b_ν. Längs der Linien c sind die u, wie alle Integrale w, stetig.

Wir substituiren jetzt in der $p$fach unendlichen Reihe

$$\vartheta(v_1 | v_2 | \dots | v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \dots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} a_{\mu,\nu} m_\mu m_\nu + 2 \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} v_\nu m_\nu}$$

für v_ν die Function $u_\nu - f_\nu$, wo f_ν eine willkürliche Constante bedeutet, und für $a_{\mu,\nu}$ den Periodicitätsmodul von u_ν für den Querschnitt b_μ, so geht diese Reihe in die ϑ-Function

$$\vartheta(u_1 - f_1 | u_2 - f_2 | \dots | u_p - f_p)$$

über, die in T' einwerthig, stetig und immer endlich ist, für p Punkte 0^1 wird, beim Überschreiten eines Querschnittes a_ν ungeändert bleibt, beim Überschreiten des Querschnittes b_ν den Factor $e^{-2(u_\nu^- - f_\nu) - a_{\nu,\nu}}$ erlangt, wo u_ν^- den Werth von u_ν in dem Punkte auf der negativen Seite, von dem aus überschritten wird, bedeutet. Bezeichnen wir die p Punkte, wo ϑ 0^1 wird, mit x_1, s_1; x_2, s_2; ...: x_p, s_p; so wird das Abhängigkeitsgesetz, welches zwischen diesen Punkten und dem Constantensysteme $f_1 | f_2 | \dots | f_p$ der ϑ-Function existirt, durch die Congruenz

$$f_1 | f_2 | \dots | f_p \equiv \sum_\nu \int_{\alpha_1}^{x_\nu, s_\nu} du_1 \pm k_1 \,\Big|\, \sum_\nu \int_{\alpha_1}^{x_\nu, s_\nu} du_2 \pm k_2 \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \sum_\nu \int_{\alpha_1}^{x_\nu, s_\nu} du_p \pm k_p \,,$$

in der die Grössen k von den Grössen f und den p Punkten x_1, s_1; x_2, s_2; ...; x_p, s_p unabhängig sind, ausgedrückt, wenn wir durch das Symbol

$$P_1 | P_2 | \dots | P_p \equiv Q_1 | Q_2 | \dots | Q_p$$

überhaupt bezeichnen, dass das eine System aus dem andern durch Änderung um ein System zusammengehöriger Periodicitätsmodulen der Integrale $u_1 | u_2 | \dots | u_p$ erhalten werden kann. Es ist dabei $\sum\limits_\nu$ statt $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}$ geschrieben, und das vorkommende System der Grössen $k_1 | k_2 | \dots | k_p$, das nur von der Wahl des Querschnittsystems und der Anfangswerthe der Integrale u abhängt, setzt sich, bei jeder Wahl dieser Grössen fest bestimmt, immer aus Halben der correspondirenden Periodicitätsmodulen zusammen, d. h. $2k_1 | 2k_2 | \dots | 2k_p \equiv 0 | 0 | \dots | 0$, wenn die gemeinschaftliche untere Grenze der Integrale u ein Verzweigungspunkt, α_1 oder α_2 etc. ist; in Folge dessen kann man ihm das positive oder negative Vorzeichen geben, ohne die Congruenz zu stören.

Eine ähnliche Untersuchung wie die des §. 14 zeigt nun, dass sämmtliche durch den Quotienten von nur zwei ϑ-Functionen darstellbaren algebraischen Functionen in der allgemeinen Form

$$r = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'\,\ldots\,\varepsilon_p'}(u_1-f_1|u_2-f_2|\ldots\ldots|u_p-f_p)}{\vartheta(u_1-f_1|u_2-f_2|\ldots\ldots|u_p-f_p)}$$

enthalten sind, wo die ϑ im Zähler eine der ϑ im Nenner ähnlich gebaute Reihe ist von der Form:

$$\vartheta\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'\,\ldots\,\varepsilon_p'}(v_1|v_2|\ldots\ldots|v_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\ldots\ldots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} a_{\mu,\nu}(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2})(m_\nu+\frac{\varepsilon_\nu}{2})+2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(v_\nu-\frac{\varepsilon_\nu'}{2}\pi i)(m_\nu+\frac{\varepsilon_\nu}{2})}$$

und die Grössen ε, ε' überhaupt rationale Zahlen bezeichnen sollen. r erlangt am Querschnitte a_ν den Factor $(-1)^{\varepsilon_\nu}$, am Querschnitte b_ν den Factor $(-1)^{\varepsilon_\nu'}$: schränken wir also die Bedeutung der symbolischen Grössen ε, ε' ein, indem wir einer jeden von ihnen nur die Werthe 0 und 1 beliebig zu bezeichnen gestatten (doch nie alle Grössen den Werth 0 zugleich annehmen lassen, indem sonst Zähler und Nenner von r identisch würden), so sind in r auch nur alle diejenigen algebraischen Functionen enthalten, die in T' einwerthig, für p beliebige Punkte ∞^1 werden und an den Querschnitten Factoren ± 1 annehmen, deren Quadrate folglich wie T verzweigte algebraische Functionen sind. Führen wir statt des willkürlichen Systems $f_1|f_2|\ldots\ldots|f_p$ p in Folge dessen auch beliebige Punkte $x_1, -s_1$; $x_2, -s_2$; ...; $x_p, -s_p$; ein, für die die ϑ im Nenner 0^1 werden soll, so geschieht dies durch die Congruenz:

$$-f_1|-f_2|\ldots\ldots|-f_p \equiv \sum_\nu\int_{\alpha_1}^{x_\nu,s_\nu} du_1+k_1\Big|\sum_\nu\int_{\alpha_1}^{x_\nu,s_\nu} du_2+k_2\Big|\ldots\ldots\Big|\sum_\nu\int_{\alpha_1}^{x_\nu,s_\nu} du_p+k_p$$

in die die ursprüngliche (auf voriger Seite) übergeht, wenn man darin statt s_ν: $-s_\nu$ setzt, und r erhält durch Einführen dieser Werthe, wenn wir allgemein den Werth des Integrals u_μ für den Punkt x_ν, s_ν mit $u_\mu^{(\nu)}$ bezeichnen, die Form:

$$R = \frac{\vartheta\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'\,\ldots\,\varepsilon_p'}(u_1+\sum\limits_\nu u_1^{(\nu)}+k_1|u_2+\sum\limits_\nu u_2^{(\nu)}+k_2|\ldots\ldots|u_p+\sum\limits_\nu u_p^{(\nu)}+k_p)}{\vartheta(u_1+\sum\limits_\nu u_1^{(\nu)}+k_1|u_2+\sum\limits_\nu u_2^{(\nu)}+k_2|\ldots\ldots|u_p+\sum\limits_\nu u_p^{(\nu)}+k_p)}$$

für die wir die äquivalente algebraische Cardinalform hier bestimmen wollen.

Zu dem Ende sind nur die bestimmenden Eigenschaften der Function R algebraisch zum Ausdrucke zu bringen, die sich folgendermassen aussprechen lassen: **R ist als Function des Punktes x, s eine in T' einwerthige und stetige Function des Ortes, die für p Punkte:**

$$x, s = x_1, -s_1;\ x, s = x_2, -s_2;\ \ldots;\ x, s = x_p, -s_p:$$

∞^1 wird und an den Querschnitten bestimmte Factoren ± 1 erlangt; sie ist ferner eine symmetrische Function der $p+1$ Punkte x, s; x_1, s_1; x_2, s_2; ...; x_p, s_p. Durch diese Eigenschaften ist die Function R **vollkommen** bis auf einen von den $p+1$ Punktwerthen unabhängigen constanten Factor bestimmt, und alle übrigen Eigenschaften, wie die, für p Punkte x, s 0^1 zu werden, oder die Quadratwurzel aus einer wie T verzweigten Function zu sein etc., ergeben sich als secundäre nothwendig aus den obigen primären. Da die Grössen ε, ε' nur die Werthe 0 und 1 annehmen dürfen, man aber aus 0 und 1 auf 2^{2p} Weisen Variationen zu $2p$ Elementen mit Wiederholung bilden kann, so giebt es im Ganzen 2^{2p} Charakteristiken $\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'\,\ldots\,\varepsilon_p'}$, und da $\binom{0\,0\,\ldots\,0}{0\,0\,\ldots\,0}$ als Zählercharakteristik ausgeschlossen ist, so sind in R überhaupt $2^{2p}-1$ verschiedene

Functionen enthalten, die alle für dieselben p Punkte ∞^1 werden und sich nur durch die Factoren an den Querschnitten oder durch die davon abhängigen Punkte, wo sie einzeln 0^1 werden, unterscheiden.

Um den algebraischen Ausdruck für R zu bilden, betrachten wir vorher die $2p+1$ einfachen Functionen:

$$\sqrt{x-\alpha_1},\ \sqrt{x-\alpha_2},\ldots,\ \sqrt{x-\alpha_{2p+1}}\ ;$$

deren Product die Function s ist, und die hier dieselbe Rolle spielen, wie die fünf Functionen $\sqrt{x}, \sqrt{1-x}, \ldots, \sqrt{1-\mu^2 x}$ in dem speciellen Falle $p=2$. Es ist nämlich (vergl. §. 9) irgend eine derselben $\sqrt{x-\alpha_\iota}$ eine in T' einwerthige und stetige Function des Ortes, die für den Verzweigungspunkt $x=\infty : \infty^1$ wird, für den ihr speciell zukommenden Verzweigungspunkt $x=\alpha_\iota : 0^1$, und an den Querschnitten bestimmte Factoren ± 1 erlangt. Ein Product aus n beliebigen der obigen Functionen hat ähnliche Eigenschaften: ebenfalls in T' einwerthig und stetig, wird es für $x=\infty : \infty^n$, für n endliche Verzweigungspunkte 0^1, und erlangt an jedem Querschnitte einen bestimmten Factor, $+1$ oder -1, der das Product der n Factoren ± 1 ist, die die n Functionen, jede einen, an dem betreffenden Querschnitte erlangen. Zu jedem Producte von n Functionen lässt sich nur eines, aber auch nur eines finden, das an den Querschnitten dieselben Factoren erlangt; es ist dasjenige, welches sich aus den übrigen $2p+1-n$ Functionen bildet; denn bezeichnen wir das erstere Product mit $\sqrt{f(x)}$, so ist das zweite gleich $\frac{s}{\sqrt{f(x)}}=\frac{s}{f(x)}\sqrt{f(x)}$, und es erlangen $\sqrt{f(x)}$ und $\frac{s}{\sqrt{f(x)}}$ dieselben Factoren, da ihr Product s an allen Querschnitten den Factor $+1$ erlangt; ferner sieht man sofort, dass ausser dem erwähnten kein anderes Product P, von m Functionen z. B., dieselben Factoren ± 1 wie $\sqrt{f(x)}$ erlangen kann, indem sonst $P.\sqrt{f(x)}$ rational durch x und s ausdrückbar sein müsste, was unmöglich, wenn nicht $P=\sqrt{f(x)}$ oder $P=\frac{s}{\sqrt{f(x)}}$ ist. Wollen wir demnach aus den $2p+1$ Functionen als Factoren nur solche Producte erhalten, die sämmtlich verschiedene Factoren ± 1 an den Querschnitten erlangen, so dürfen wir sie nur zu Producten von $1, 2, \ldots, p$ Factoren ohne Wiederholung combiniren; bezeichnen wir ein solches Product allgemein durch $\sqrt{f(x)}$, so erhalten wir auf diese Weise, da

$$(2p+1)_1+(2p+1)_2+\ldots+(2p+1)_p = 2^{2p}-1,$$

$2^{2p}-1$ verschiedene Functionen $\sqrt{f(x)}$ (unter denen die obigen $2p+1$ einfachen Functionen als Producte aus einem Factor vorkommen), die sämmtlich verschiedene Factorensysteme in Bezug auf die Querschnitte haben.

Da es nun überhaupt nur $2^{2p}-1$ verschiedene Factorensysteme von der Art der bis jetzt betrachteten giebt, dieselben, die dem Ausdrucke R zukommen, wenn wir für $\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \ldots & \varepsilon'_p\end{smallmatrix}\right)$ der Reihe nach die möglichen $2^{2p}-1$ bestimmten Charakteristiken einsetzen (indem mit der Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0\end{smallmatrix}\right)$ zugleich das entsprechende Factorensystem, das nie einer Function $\sqrt{f(x)}$ zukommen kann, ausgeschlossen ist), so folgt daraus, **dass zu jeder der $2^{2p}-1$ Functionen R eine Function $\sqrt{f(x)}$ aus der Gruppe der aufgestellten $2^{2p}-1$ sich finden lässt, die an den Querschnitten dieselben Factoren erlangt wie die betreffende Function R, und die wir die zu R gehörige „charakteristische Function" nennen wollen.** Das Product, $R.\sqrt{f(x)}$, je zweier solcher, durch ein gemeinsames Factorensystem verknüpfter Functionen R und $\sqrt{f(x)}$ erlangt dann an jedem

Querschnitte den Factor $+1$, ist folglich eine wie T verzweigte, d. h. rational durch x und s ausdrückbare Function.

Wir bestimmen jetzt diejenige, rational durch s und x darstellbare algebraische Form, in der alle Functionen $R.\sqrt{f(x)}$ enthalten sind, wenn $\sqrt{f(x)}$ in dieser Verbindung jedesmal die zu dem betreffenden R gehörige charakteristische Function bezeichnet. Da $R.\sqrt{f(x)}$ nur unendlich wird für die p Punkte $x_1, -s_1 : \ldots ; x_p, -s_p$: für die jedes R ∞^1 wird, und ferner für $x = \infty$ unendlich wie $\sqrt{f(x)}$, so muss eine jede Function $R.\sqrt{f(x)}$ in dem allgemeinen Ausdrucke

$$R.\sqrt{f(x)} = \frac{A_1 s + A_2}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)}$$

enthalten sein, wo A_1, A_2 noch zu bestimmende rationale ganze Functionen von x bezeichnen. verschieden nach den verschiedenen Functionen $R.\sqrt{f(x)}$. Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet, wenn wir für x eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ einsetzen, und da mit $\sqrt{f(x)}$ zugleich s verschwindet, so muss die Function A_2 dieselben Wurzeln wie $f(x)$ haben, wenn anders die rechte Seite auch verschwinden soll. Die Function $f(x)$ muss demnach Theiler von A_2 sein, so dass also $A_2 = B_1.f(x)$, wo B_1 wieder eine rationale ganze Function von x ist. Führen wir diesen Ausdruck für A_2 in die obige Gleichung ein, dividiren beiderseits durch $\sqrt{f(x)}$ und setzen statt A_1 und B_1 rationale ganze Functionen von noch zu bestimmendem Grade m und n resp. ein, so folgt für R die bis auf die Constanten bestimmte Form:

$$R = \frac{(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)\dfrac{s}{\sqrt{f(x)}} + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)\sqrt{f(x)}}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)}$$

in der alle $2^{2p}-1$ Functionen R enthalten sind.

Die Werthe von m und n bestimmen sich durch die Bedingung, dass der Grad des Zählers in Bezug auf die Variable x den Grad p des Nenners nicht übersteigen, noch unter ihm bleiben darf, indem für $x = \infty$ der allgemeine ϑ-Quotient R weder ∞ noch 0 wird. Definiren wir den Grad g einer beliebigen Function $\varphi(x)$ in Bezug auf die Variable x durch die Gleichung $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^g} = \text{Const.}$ und bezeichnen dies durch $G(\varphi(x)) = g$, wo dann z. B. $G(s) = \dfrac{2p+1}{2}$ ist, so finden wir leicht, dass wenn der Grad der zu R gehörigen Function $f(x)$

$$G(f(x)) = 2\nu - 1 \text{ oder } G(f(x)) = 2\nu$$

ist, wo ν eine ganze Zahl, d. h. wenn $\sqrt{f(x)}$ aus $2\nu-1$ oder aus 2ν der einfachen Functionen $\sqrt{x-\alpha_1}, \ldots, \sqrt{x-\alpha_{2p+1}}$ zusammengesetzt ist, dann den Grössen m und n die Werthe

$$m = \nu - 1 \quad . \quad n = p - \nu,$$

als höchste mögliche zukommen. Es ist nämlich unter Annahme dieser Werthe:

$$\begin{array}{lll} 1.\ \text{wenn } G(f(x)) = 2\nu-1, & \left\{ G\left(x^m \dfrac{s}{\sqrt{f(x)}}\right) = p; \right. & G(x^n\sqrt{f(x)}) = p - \dfrac{1}{2}; \\ 2.\ \text{wenn } G(f(x)) = 2\nu, & \left\{ \qquad\quad ,, \quad = p - \dfrac{1}{2}; \right. & \qquad ,, \quad = p; \end{array}$$

so dass folglich m und n in keinem Falle grösser genommen werden können, ohne dass der Zähler den Grad p übersteigt.

Der Nenner des algebraischen Ausdruckes wird nun 0^1 für die p Punkte $x_1, s_1; \ldots; x_p, s_p$: und ferner 0^1 für die p Punkte $x_1, -s_1; \ldots; x_p, -s_p$; da aber R allgemein als Function von x, s nur für die p letzten Punkte ∞^1 werden soll, so sind die $p+1$ Constanten

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\nu-1},\ b_0,\ b_1, \ldots,\ b_{p-\nu}$$

des algebraischen Zählers so zu bestimmen, dass derselbe zugleich mit dem Nenner für die p Punkte $x_1, s_1; \ldots; x_p, s_p$ verschwindet, und folglich R dafür einen endlichen Werth behält. Bezeichnen wir den Zähler mit Z und schreiben ihn selbst als erste Gleichung hin, so erhalten wir zur Bestimmung der $p+1$ Constanten die folgenden $p+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
Z &= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{\nu-1} x^{\nu-1}) \frac{s}{\sqrt{f(x)}} + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{p-\nu} x^{p-\nu}) \sqrt{f(x)} \\
0 &= (a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{\nu-1} x_1^{\nu-1}) \frac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}} + (b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{p-\nu} x_1^{p-\nu}) \sqrt{f(x_1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (a_0 + a_1 x_p + \ldots + a_{\nu-1} x_p^{\nu-1}) \frac{s_p}{\sqrt{f(x_p)}} + (b_0 + b_1 x_p + \ldots + b_{p-\nu} x_p^{p-\nu}) \sqrt{f(x_p)}
\end{aligned}$$

aus denen nach bekannter Methode unmittelbar folgt:

$$Z . \Delta'_\nu = a_0 . \Delta_\nu$$

wenn wir durch Δ_ν die Determinante des obigen Gleichungensystems

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix}
\frac{s}{\sqrt{f(x)}}, & \frac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}}, & \frac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}}, & \ldots, & \frac{s_p}{\sqrt{f(x_p)}} \\
x\frac{s}{\sqrt{f(x)}}, & x_1\frac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}}, & x_2\frac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}}, & \ldots, & x_p\frac{s_p}{\sqrt{f(x_p)}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x^{\nu-1}\frac{s}{\sqrt{f(x)}}, & x_1^{\nu-1}\frac{s_1}{\sqrt{f(x_1)}}, & x_2^{\nu-1}\frac{s_2}{\sqrt{f(x_2)}}, & \ldots, & x_p^{\nu-1}\frac{s_p}{\sqrt{f(x_p)}} \\
\sqrt{f(x)}, & \sqrt{f(x_1)}, & \sqrt{f(x_2)}, & \ldots & \sqrt{f(x_p)} \\
x\sqrt{f(x)}, & x_1\sqrt{f(x_1)}, & x_2\sqrt{f(x_2)}, & \ldots, & x_p\sqrt{f(x_p)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x^{p-\nu}\sqrt{f(x)}, & x_1^{p-\nu}\sqrt{f(x_1)}, & x_2^{p-\nu}\sqrt{f(x_2)}, & \ldots, & x_p^{p-\nu}\sqrt{f(x^p)}
\end{vmatrix}$$

bezeichnen und durch Δ'_ν die Determinante von nur p^2 Elementen, die aus der obigen durch Weglassung der ersten Horizontalreihe und der ersten Verticalreihe entsteht, und die eine Function von $x_1, x_2, \ldots, x_p$ allein ist. Setzen wir noch:

$$\begin{aligned}
N &= (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_p)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_p)\ldots(x_{p-1}-x_p), \\
N_1 &= (x_1-x_2)\ldots(x_1-x_p)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_p)\ldots(x_{p-1}-x_p),
\end{aligned}$$

so ergiebt sich, unter Berücksichtigung der obigen Gleichung für Z, für R der Ausdruck:

$$R = \frac{Z}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)} = \frac{Z . N_1}{N} = a_0 \frac{N_1}{\Delta'_\nu} \cdot \frac{\Delta_\nu}{N} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) \frac{\Delta_\nu}{N}$$

wo φ eine Function der p Variablen allein ist, indem die Grössen a_0, N_1, Δ'_ν die Variable x nicht enthalten. Diese Function φ zeigt sich als eine vollkommene Constante, wenn wir die primäre Eigenschaft der Function R, eine symmetrische Function der $p+1$ Punkte x, s; x_1, s_1; . . .; x_p, s_p zu sein, berücksichtigen. Da nämlich die Determinante Δ_ν sowohl wie die Function N ihr Vorzeichen wechseln, wenn wir zwei beliebige der $p+1$ Punkte vertauschen, ihr Quotient folglich wie R eine symmetrische Function dieser Punkte ist, so muss der letzten Gleichung gemäss φ ebenfalls eine symmetrische Function aller $p+1$ Punkte sein, und da sie die Variable x nicht enthält, so ist dies nur möglich, wenn sie ebenfalls von den p übrigen Grössen x_1, $x_2, \ldots, x_p$ unabhängig, also eine vollkommene Constante ist, die wir allgemein durch C bezeichnen wollen. Das Resultat unserer Untersuchung gestaltet sich demnach folgendermassen:

„**Nennen wir zur Gruppe ν gehörig diejenigen von den $2^{2p}-1$ Functionen R, deren zugehörige charakteristische Functionen, $\sqrt{f(x)}$, sich aus $2\nu-1$ oder aus 2ν der einfachen Functionen $\sqrt{x-\alpha_1}, \ldots, \sqrt{x-\alpha_{2p+1}}$ als Producte zusammensetzen, so sind die algebraischen Ausdrücke dieser sämmtlichen $(2p+1)_{2\nu-1}+(2p+1)_{2\nu}$ Functionen R in der allgemeinen Form**

$$R = C.\ \frac{\Delta_\nu}{N}$$

enthalten, die wir die algebraische Cardinalform der Functionen der Gruppe ν nennen wollen, und es resultirt daraus für jeden solchen zur Gruppe ν gehörigen ϑ-Quotienten R der ihm äquivalente algebraische Ausdruck, indem man in Δ_ν statt $\sqrt{f(x)}$ jedesmal die specielle charakteristische Function einführt, die zu dem betreffenden ϑ-Quotienten, mit ihm durch ein gemeinsames Factorensystem verknüpft, gehört. Die Constante C bestimmt sich alsdann in jedem Falle besonders, entweder durch die Verzweigungswerthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}$ oder durch ϑ-Functionen mit den Argumenten 0 ausdrückbar, wenn man zugleich für alle Grössen $x, x_1, \ldots, x_p$ verschiedene Verzweigungswerthe einführt, für die die betreffende Determinante Δ_ν nicht verschwindet.“

Eine weitere Frage ist jetzt, wie viele Gruppen ν, oder, was dasselbe, wie viele algebraische Cardinalformen in dem allgemeinen Falle $p=p$ existiren. Der kleinste Werth, den ν annehmen darf, ist 1, indem zur Gruppe $\nu=1$ diejenigen Functionen R gehören, die entweder eine der Functionen $\sqrt{x-\alpha_1}, \ldots, \sqrt{x-\alpha_{2p+1}}$, oder ein Product von zweien dieser als charakteristische Functionen haben. Lässt man ν aufsteigend die Werthe 1, 2, 3, etc. annehmen, so werden die Grössen $2\nu-1$ und 2ν, die resp. die Anzahl der Factoren, aus denen eine zur Gruppe ν gehörige Function $\sqrt{f(x)}$ besteht, angeben, der Reihe nach die zulässigen Werthe 1, 2; 3, 4; 5, 6; etc. annehmen, und da die grösste Anzahl von Factoren $\sqrt{x-\alpha_1}, \ldots, \sqrt{x-\alpha_{2p+1}}$, aus denen eine Function $\sqrt{f(x)}$ als Product zusammengesetzt sein kann, p ist, so wird sich der entsprechende höchste Werth von ν, wenn p ungerade, aus der Gleichung $2\nu-1=p$, wenn p gerade, aus der Gleichung $2\nu=p$ ergeben. Ist also p ungerade, so giebt es $\frac{p+1}{2}$ algebraische Cardinalformen, die man aus der obigen Gleichung für R erhält, wenn man der Reihe nach in der Determinante Δ_ν statt ν: $1, 2, \ldots, \frac{p+1}{2}$ setzt, ist dagegen p gerade, so giebt es deren nur $\frac{p}{2}$, und man erhält sie, wenn man in Δ_ν der Reihe nach statt ν: $1, 2, \ldots, \frac{p}{2}$ einführt. Für $p=1$ und $p=2$, d. h. für die elliptischen und ultraëlliptischen quadratischen Functionen, giebt es demnach nur eine algebraische Cardinalform, indem für ν nur der Werth 1, als niedrigster und höchster zugleich, zulässig ist. Für $p=2$, $\nu=1$ geht R in die aus dieser Abhandlung bekannte Cardinalform (vergl. §. 29) über: für $p=1$, $\nu=1$ ergiebt sich für R eine Form, deren Betrachtung direct die Additionstheoreme der elliptischen Functionen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta\, am\, u$ liefert.

Die ϑ-Quotienten R haben zu Argumenten Summen von je $p+1$ Integralen: führen wir also statt x einen Verzweigungspunkt, am einfachsten $x=\infty$ ein, so erhalten wir $2^{2p}-1$ neue ϑ-Quotienten mit gemeinschaftlicher Nennerfunction, die zu Argumenten das System

$$\sum_\nu u_1^{(\nu)}+k_1 \,\Big|\, \sum_\nu u_2^{(\nu)}+k_2 \,\Big|\, \ldots \,\Big|\, \sum_\nu u_p^{(\nu)}+k_p$$

haben. Da man nun nach Vorigem durch ein solches System jedes beliebige System $v_1|v_2|\ldots|v_p$ darstellen, oder, was dasselbe, jedes beliebige System $v_1|v_2|\ldots|v_p$ in diese Form setzen kann, unter einwerthiger Bestimmtheit der p Punkte x_1, s_1; x_2, s_2; ...; x_p, s_p; so sind diese Formen in Verbindung mit den ihnen äquivalenten algebraischen von der grössten Bedeutung, wenn es darauf ankommt, auf rein algebraischem Wege Relationen zwischen ϑ-Functionen mit beliebigen Argumenten zu erhalten. Für $x=\infty$ gehen die algebraischen Cardinalformen in niedrigere über, die zum Zähler eine Determinante von nur p^2 Elementen, zum Nenner die Function N_1 haben, und es giebt, wenn p ungerade, $\frac{p+1}{2}$, wenn p gerade, $\frac{p+2}{2}$ solcher niedrigeren Formen. Jedesmal in den beiden ersten dieser resp. $\frac{p+1}{2}$ oder $\frac{p+2}{2}$ Formen bewegen sich die **Weierstrass**'schen Functionen $al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_\alpha$ und $al(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)_{\alpha\beta}$ für $\rho=p$: sie gehen aus der algebraischen Cardinalform R hervor, wenn man $\nu=1$, $x=\infty$ setzt. Dann muss $\sqrt{f(x)}$ entweder die Form $\sqrt{x-\alpha_\mu}$ oder die Form $\sqrt{(x-\alpha_\mu)(x-\alpha_\nu)}$ haben, wo α_μ, α_ν zwei beliebige der $2p+1$ Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p+1}$ bedeuten, und es geht im ersten Falle R über in

$$R_1 = C.\sqrt{x_1-\alpha_\mu}\;\sqrt{x_2-\alpha_\mu}\ldots\sqrt{x_p-\alpha_\mu}\,,$$

im zweiten über in

$$R_2 = C.\sum_{m=1}^{m=p}\frac{s_m\cdot\sqrt{(x_1-\alpha_\mu)(x_1-\alpha_\nu)}\ldots\sqrt{(x_p-\alpha_\mu)(x_p-\alpha_\nu)}}{\varphi'(x_m)(x_m-\alpha_\mu)(x_m-\alpha_\nu)}\,,$$

$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_p)$; $\varphi'(x_m)=(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_p)$;

welche beiden Formen bis auf die Bezeichnung der Constanten mit den **Weierstrass**'schen übereinstimmen. Die Ausführung dieser Untersuchungen und die Ableitung einer Menge anderer Relationen behalte ich, hier durch den gebotenen Raum beschränkt, meiner erwähnten Arbeit vor.

Düren, bei Cöln am Rhein, im September 1863.

Fig. A.
(zu pag. 4).

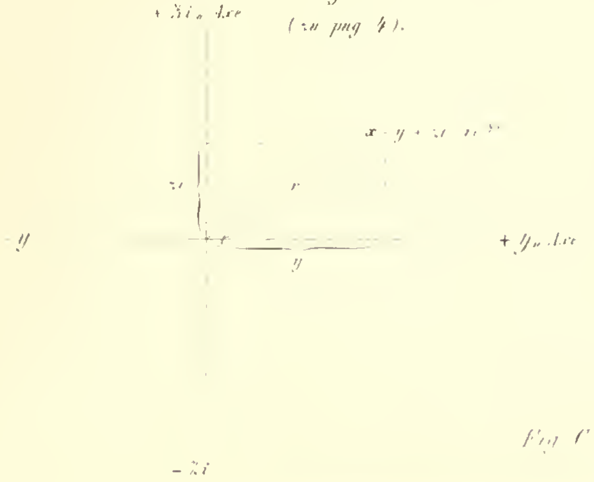


Fig. B
(zu pag. 6).

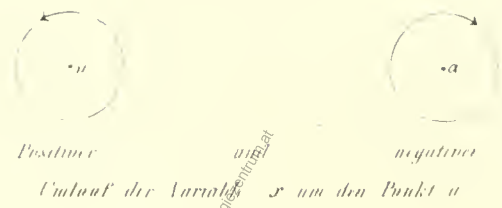
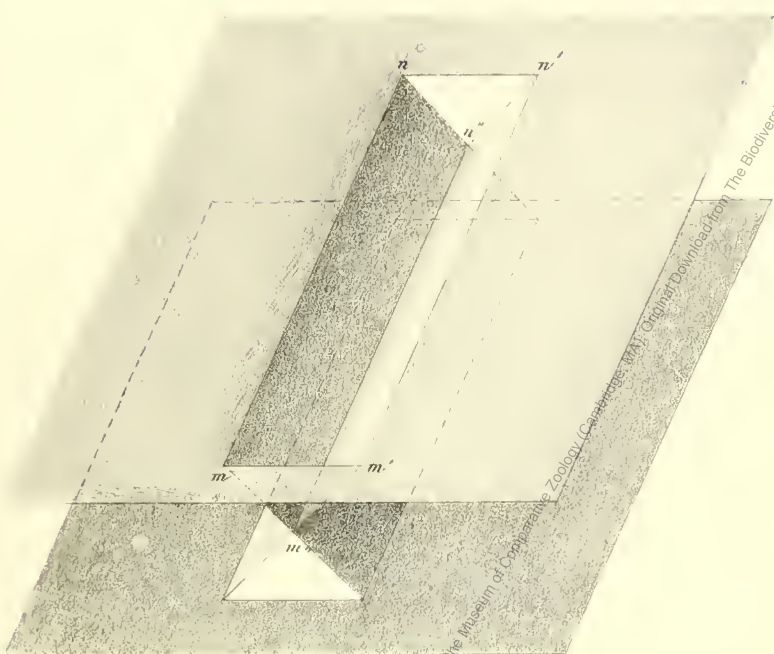
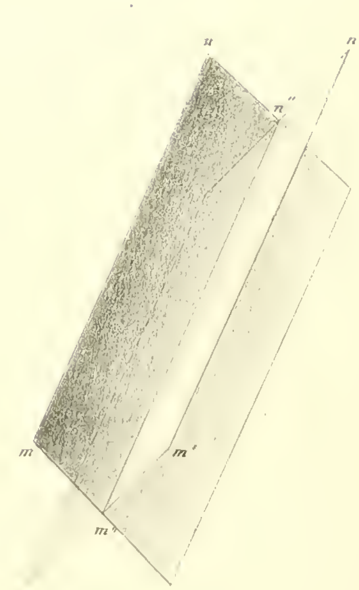


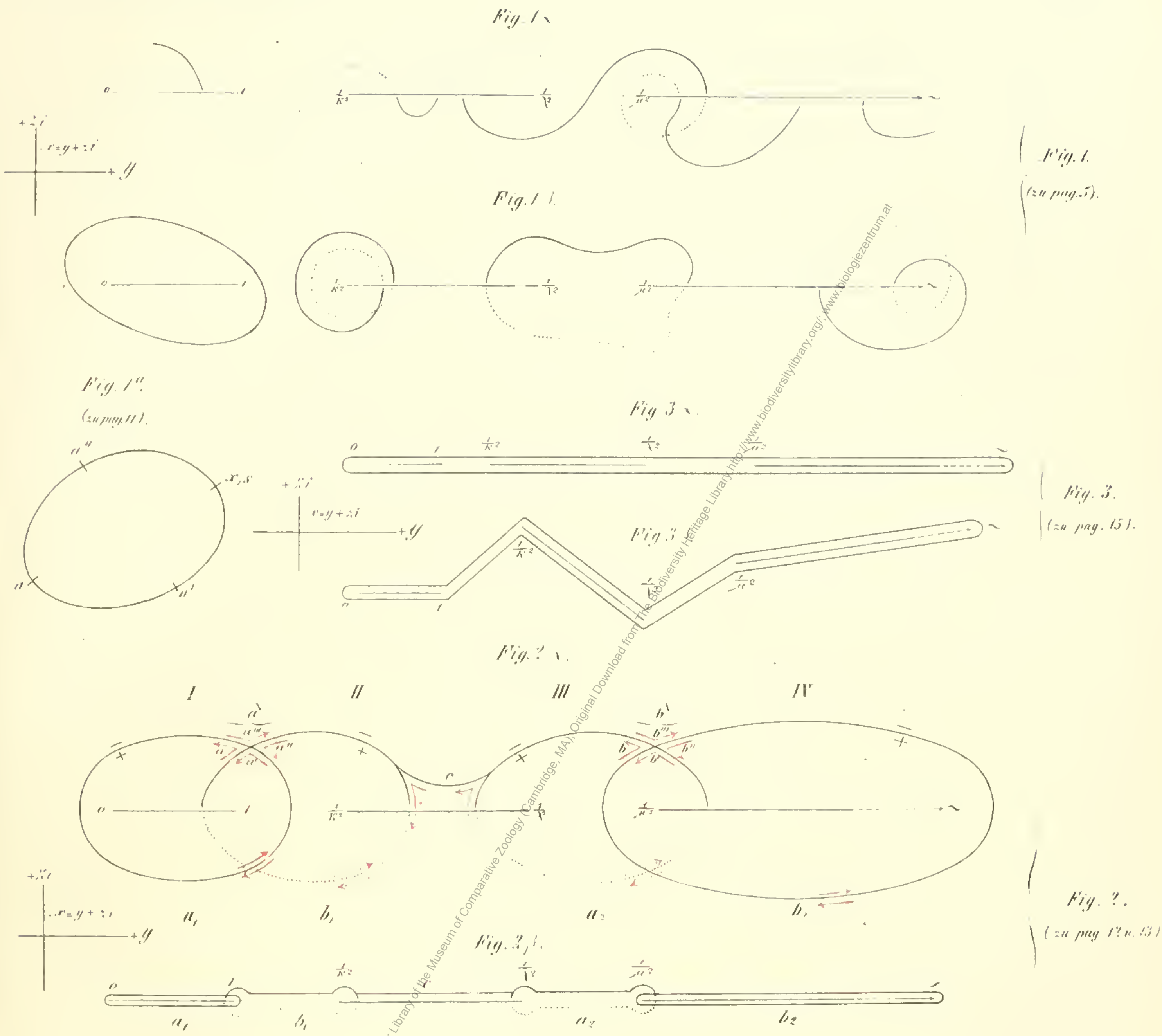
Fig. C (zu pag. 6). Fig. D.





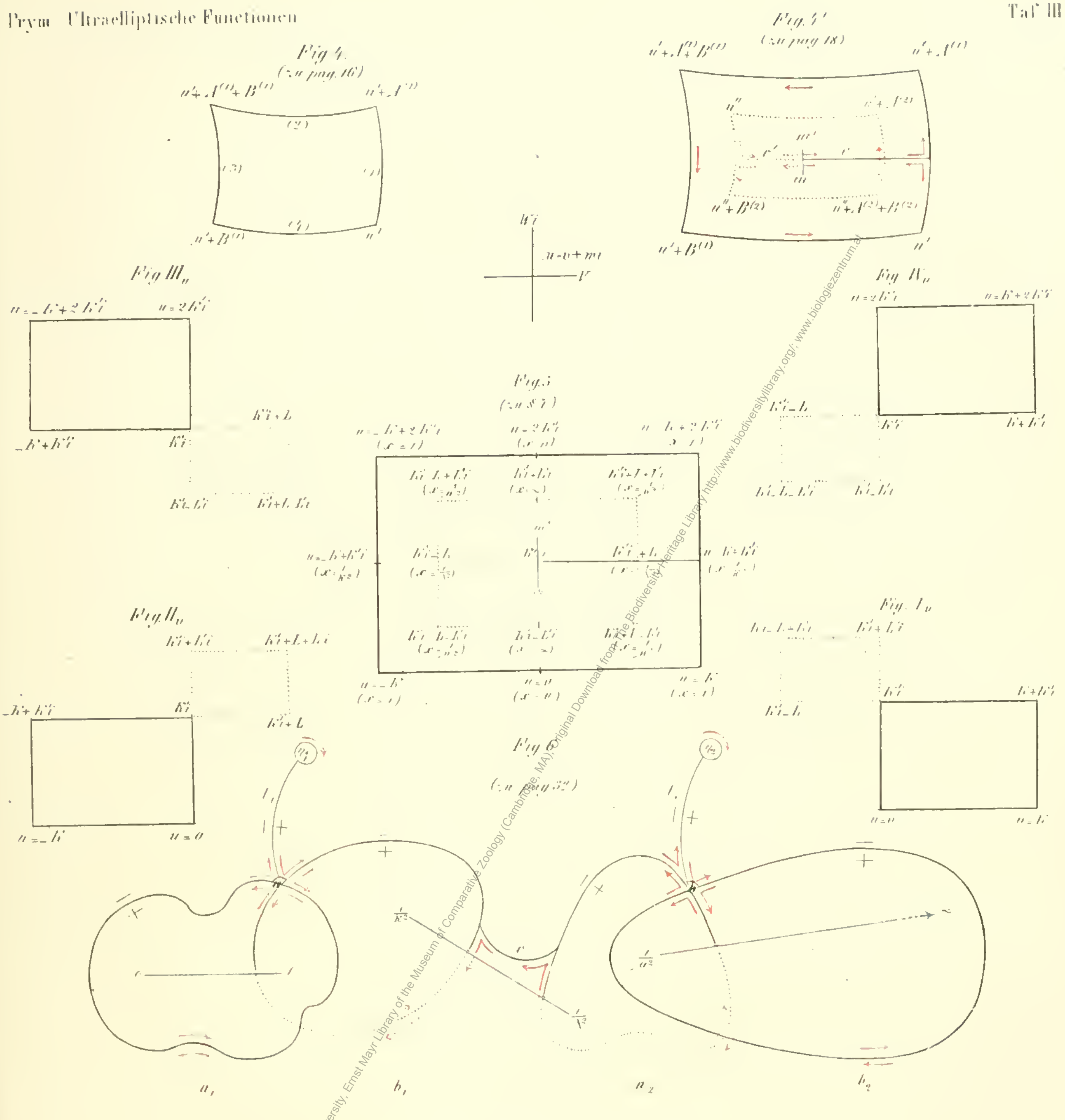
Anmerkungen zu den Figuren.

Fig. A giebt ein Bild der X-Ebene, deren Punkte die Werthe der Variable $x=y+zi$, $(i=\sqrt{-1})$, geometrisch repräsentiren. Ein positiver Umlauf von x um einen Punkt a (Fig. B) wird bewirkt, indem man $x=a+\rho e^{\psi i}$ setzt für endliches a, $x=re^{\psi i}$, lim $r=\infty$, für unendliches a, und ψ von ψ bis $\psi+2\pi$ zunehmen lässt. Auf diese Weise findet man z. B., dass eine Function $\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$ nur dann den Punkt $x=\infty$ als Verzweigungspunkt hat, wenn n eine ungerade Zahl; ist n gerade, so hat sie nur n endliche Verzweigungspunkte. Fig. C zeigt in idealer Ansicht einen Verzweigungsschnitt der Fläche T. Nimmt man die Breite, mm' oder nn', desselben sowie den Abstand des obern Blattes vom untern unendlich klein und setzt $mn=1$, so geht der ideale Schnitt in den wirklichen Verzweigungsschnitt 0—1 der Fläche T über. Entsprechend reducirt sich das Ebenenkreuz D, das von Fig. C übrig bleibt, wenn man das obere und untere Blatt entfernt, auf die Linie $m''n''$, in der die Blätter sich durcheinander durchsetzen. Diese Linien $m''n''$ sind in allen folgenden Figuren blau gezeichnet; überschreitet man eine solche Linie, so kommt man aus dem einen Blatte von T in das andere. Die beiden Blätter der Fläche T liegen der X-Ebene parallel und unendlich nahe; die letztere dient nur zur Fixirung des Coordinatensystems Y, Zi, auf das die Punkte y, z der Fläche T den Werthen von x nach bezogen sind.



Anmerkungen zu den Figuren.

Die sämmtlichen Figuren dieser Tafel sind auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit den Axen Y und Zi bezogen, dessen Anfangspunkt bei jeder Figur im Punkte $x=0$ liegend zu denken ist, und dessen Y-Axe folglich die Richtung des Schnittes $0-1$ hat. — . Fig. 1α. repräsentirt den Verlauf einer beliebigen, in der Fläche T gezogenen Curve. Fig. 1β. zeigt in sich zurückkehrende Umläufe um einen und um zwei Verzweigungspunkte in T. Fig 2α. giebt ein Bild der Fläche T' für reelle Werthe von $\varkappa, \lambda, \mu$; die Gestalt der Querschnitte ist willkürlich. Fig 2β. zeigt dieselbe Fläche T' mit möglichst zusammengezogener Begrenzung, die in Folge dessen in unendlicher Nähe der Y-Axe geradlinig verläuft. Fig 3α repräsentirt eine im obern Blatte der Fläche T um sämmtliche Verzweigungspunkte (in unendlicher Nähe der Y Axe) geführte geschlossene Curve. Fig. 3β. zeigt die Gestalt derselben Curve, wenn die Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ complexe Werthe haben.



Anmerkungen zu den Figuren.

Die Figuren 4, 4', 5 mit Nebenfiguren sind auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem mit den Axen V und Wi bezogen, dessen Anfangspunkt bei jeder Figur im Punkte $u = 0$ liegend zu denken ist. — Der bessern Zeichnung wegen sind die reellen Grössen K, K', L, L' alle als positiv angenommen worden: die Berücksichtigung ihrer theilweise entgegengesetzten Vorzeichen würde nur die Gestalt der Figuren I_u bis IV_u ändern, während Fig. 5, die durch das Zusammenschieben dieser vier einzelnen Figuren entsteht, genau wieder dieselbe würde. Fig. 5 ist die genaue Abbildung der Fläche T' (Fig. 2β.), und bei jedem Punkte u ist eingeklammert der Punkt x angegeben, der ihm in der Fläche T' entspricht. Den beiden Verzweigungspunkten $u = m$ und $u = m'$ (verknüpft durch die Relation $m + m' = 2K'i$) entsprechen die beiden zu demselben Werthe $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ gehörigen Punkte x, s und $x, -s$ — Fig. 6 endlich giebt ein Bild der Fläche T''; die Werthe von x, λ, μ und die Formen der Querschnitte sind willkürlich gewählt.