BEITRAG

ZUR

THEORIE DES GRÖSSTEN UND KLEINSTEN DER FUNCTIONEN MEHRERER VARIABLEN

NEBST

EINIGEN ERÖRTERUNGEN ÜBER DIE COMBINATORISCHE DETERMINANTE

VON

Lorenz Żmurko,

K. K. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN ANSTALT IN LEMBERG, THÄTIGEM MITGLIEDE DER GALIZISCHEN LANDWIRTHSCHAFTS-GESELLSCHAFT

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 15. MÄRZ 1866.

---

§. 1.

Theorie des Grössten und Kleinsten.

Eine Function erreicht für solche Werthe ihrer Grundvariablen einen Maximal- oder Minimalwerth, für welche der zugehörige Functionswerth im ersten Falle alle seine nächsten Nachbarwerthe übertrifft — im zweiten Falle hingegen von allen seinen nächsten Nachbarwerthen übertroffen wird.

Die hieher gehörigen Betrachtungen mögen zunächst blos den primären (reellen) Werthen sowohl der Function selbst, als auch ihrer Grundvariablen gelten.

Es seien nun $x_1 x_2 x_3 \ldots x_m$ solche Werthe der Grundvariablen, welche die Function:

$$u = f(x_1 x_2 x_3 \ldots x_m) \tag{1}$$

zu einem Maximum oder Minimum machen; ferner seien:

$$\xi_1 = ra_1,\ \xi_2 = ra_2,\ \xi_3 = ra_3, \ldots \xi_m = ra_m \tag{2}$$

gehörig kleine primäre, sonst aber beliebige positive oder negative Zusätze, so erhalten wir die Darstellung aller Nachbarwerthe der Function u im folgenden Ausdruck:

$$u' = f(x_1 + ra_1,\ x_2 + ra_2, \ldots x_m + ra_m). \tag{3}$$

Da wir zur Darstellung aller möglichen Nachbarwerthe blos m gehörig kleiner unter einander unabhängiger Zusätze $\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_m$ benöthigen, so steht es uns frei unter den $(m+1)$ Grössen $r\,a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m$ eine beliebige, somit auch eine die Zwecke der Discussion möglichst
(4) fördernde Relation zu etabliren, und etwa die Einrichtung derart zu veranstalten, dass man bei einem sehr kleinen r die Grössen $a_1\,a_2\ldots a_m$ endlich belässt, und nebstbei zur Erfüllung einer geeigneten Relation verwendet.

Der eben gegebenen Erklärung gemäss muss unabhängig von speciellen Werthen der mit ξ bezeichneten Zusätze:

(5)
$$\begin{aligned}&\text{im Zustande des Maximums die Differenz } \Delta = u' - u < o,\\ &\quad\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad\text{,, Minimums}\quad\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad \Delta = u' - u > o\end{aligned}$$

sich ergeben, d. h. es muss die Differenz Δ im Falle des Maximums die Stabilität des negativen — im Falle des Minimums die Stabilität des positiven Zeichens beurkunden.

Verwendet man in üblicher Weise die Differentiationsdeterminante:

(6)
$$D = \frac{d}{dx_1}a_1 + \frac{d}{dx_2}a_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m}a_m = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dx_1}\xi_1 + \frac{d}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m}\xi_m\right)$$

zur symbolischen Andeutung der an diejenige Function anzubringenden Differentiationen, vor welche dieser Ausdruck in entsprechender Potenz als Factor gesetzt wird, so lässt sich dem Taylor'schen Satze gemäss zur Darstellung der in (5) erwähnten Differenz Δ folgende Gleichung schreiben:

(7)
$$\Delta = u' - u = \frac{r}{1!}D^1u + \frac{r^2}{2!}D^2u + \frac{r^3}{3!}D^3u + \ldots + \frac{r^{s-1}}{(s-1)!}D^{s-1}u + \frac{r^s}{s!}D^su_1,$$

wo für $0 < 1$

$$u_1 = f(x_1 + r\theta a_1,\ x_2 + r\theta a_2, \ldots x_m + r\theta a_m).$$

Hier sehen wir die oberwähnte Differenz durch eine nach steigenden Potenzen des sehr klein gedachten r geordnete Reihe dargestellt, deren jedes einzelne Glied bei der hier vorausgesetzten Stettigkeit von u sich grösser gestaltet, als der Betrag der sämmtlichen nachfolgenden Glieder dieser Reihe. Eine Ausnahme hievon bilden nur diejenigen Glieder der Reihe, welche unabhängig von r und den mit a bezeichneten Grössen Nullwerthe erhalten.

Die Glieder von der Form: $\frac{r}{1!}D^1u,\ \frac{r^3}{3!}D^3u,\ \frac{r^5}{5!}D^5u\ldots$ sind in Bezug auf das kleine sonst aber willkürliche r von einer ungeraden Ordnung. und besitzen die Eigenheit, entgegengesetzte Vorzeichen anzunehmen, sobald man bei unveränderten a-Werthen dem r einen entgegengesetzten Werth zuerkennt.

Soll nun die in Reihenform dargestellte Differenz Δ die Stabilität des Vorzeichens gewähren, so darf der oben gepflogenen Auseinandersetzung zufolge, keines der mit einem ungeraden Exponenten versehenen Glieder als Anfangsglied von Δ auftreten, und in Folge dessen müssen die Werthe $x_1\,x_2\,x_3\ldots x_m$ vor Allem so gewählt werden, dass hiedurch die Gleichung:

(8)
$$rDu = r\left(\frac{du}{dx_1}a_1 + \frac{du}{dx_2}a_2 + \ldots + \frac{du}{dx^m}a_m\right) = \frac{du}{dx_1}\xi_1 + \frac{du}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{du}{dx_m}\xi_m = 0$$

für willkührliche ξ in Erfüllung gehe. Diese Gleichung zerfällt in folgende zur Bestimmung von $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_m$ dienende Relationen:

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{du}{dx_2} = \ldots = \frac{du}{dx_m} = 0. \tag{9}$$

Die aus diesen in hinreichender Anzahl vorliegenden Gleichungen gezogenen Systeme von je einander zugehörigen primären Werthen von $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_m$ dienen nicht nur zur Ermittlung der entsprechenden Werthe der Function u, sondern auch zur Bestimmung aller zu a gehörigen Coëfficienten in allen der Form $D^s u$ angehörigen Gliedern; — es kann sich hiebei ereignen, dass in Folge (9) nebst dem Gliede $r\,Du$ zufällig noch mehrere unmittelbar darauffolgende Glieder der Reihe (7) gleichzeitig verschwinden. Unter solchen Umständen kann jedoch nur dann ein Maximal- oder Minimalzustand von u erwartet werden, wenn das diessfällige Anfangsglied von Δ einen geraden Exponenten aufweist, wenn somit das erste nicht verschwindende Glied in Δ der Form $\frac{r^{2n}}{2n!} D^{2n} u$ angehört. Für diesen Fall hat man aus (7)

$$\Delta = \frac{r^{2n}}{2n!} D^{2n} u + \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} D^{2n+1} u + \ldots . \tag{10}$$

Nimmt man die mit ξ bezeichneten Zusätze so an, dass etwa:

$$\xi_s \gtrless 0 \text{ und } \xi_1 = \xi_2 = \ldots \xi_{s-1} + \xi_{s+1} + \ldots = \xi_m = 0 \tag{11}$$

werden, so erhält man:

$$r \gtrless 0 \;\; a_s \gtrless 0 \text{ und } a_1 = a_2 = \ldots a_{s-1} + a_{+1} + \ldots = a_m = 0 \tag{12}$$

und auch:

$$\frac{r^{2n}}{2n!} D^{2n} u = \frac{r^{2n}}{2n!} \frac{d^{2n} u}{dx_s^{2n}} a_s^{2n};$$

hiedurch wird besagt, dass man es immer so einrichten kann, dass das erste in (10) vorkommende Glied mit dem $2n^{\text{ten}}$ nach x_s genommenen Differentialquotienten in Bezug auf sein Vorzeichen übereinstimmt.

Die Gleichung (12) lässt sich im obigen Sinne für beliebige Werthe von s auffassen, und begründet hiemit den Schluss, dass die Differenz Δ in Bezug auf ihr Vorzeichen nicht stabil erklärt werden darf, sobald man unter den gleichtönenden Differentialquotienten:

$$\frac{d^{2n} u}{dx_1^{2n}}, \; \frac{d^{2n} u}{dx_2^{2n}}, \; \ldots \; \frac{d^{2n} u}{dx_m^{2n}} \tag{13}$$

verschieden bezeichnete Werthe antrifft. Hieraus schliesst man weiter, dass im Falle eines Maximums keiner dieser Ausdrücke ein positives, dass im Falle eines Minimums keiner dieser Ausdrücke ein negatives Vorzeichen darbieten darf. Verschieden bezeichnete Resultate in (13) gestatten den sicheren Schluss, dass in einem solchen Falle die Function u sich weder in einem Maximal- noch in einem Minimalzustande befinden kann.

Sind nun die gleichtönenden Differentialquotienten sämmtlich gleich bezeichnet, dann erst liegt es uns ob, eine weitere Untersuchung anzustellen, ob der Ausdruck:

(14) $$D^{2n}u = \mathbf{S}\left[\frac{d^{2n}u}{dx_1^{\alpha_1}\,dx_2^{\alpha_2}\ldots}\cdot\frac{2n!\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots}\right] = A_{2n}$$

mit der einzigen Bedingung: $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m=2n)$ in Bezug auf beliebige Werthe von a die Stabilität seines Vorzeichens beurkundet oder nicht.

Den Ausdruck A_2, welcher aus (14) für $n=1$ hervorgeht, und nur dann Gegenstand der Untersuchung sein kann, wenn er nicht unabhängig von den a-Werthen verschwindet, hat Herr Professor Dr. Joseph Petzval erschöpfend behandelt, und gelangte mittelst einer zweckmässigen Ausübung des in (4) in Aussicht gestellten Anrechtes zu einfachen und präcis ausgeprägten Kriterien [siehe weiter (48)], welche über die Stabilität oder Nichtstabilität von A_2 entscheiden. Den Grundpfeiler dieser über A_2 angestellten Untersuchung bildet nämlich die Aufstellung der Relation:

(15) $$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_m^2=1,$$

welche der Beliebigkeit der mit ξ bezeichneten Zusätze unbeschadet durch die Werthe von a in Erfüllung zu gehen hat.

In der Erwartung eines ebenfalls günstigen Erfolges habe ich bei der Untersuchung des Vorzeichens von A_{2n} folgende der (15) analoge Relation:

(16) $$a_1^{2n}+a_2^{2n}+a_3^{2n}+\ldots+a_m^{2n}=1$$

zu Grunde gelegt, und hiedurch die Werthe von a in der Art eingeschränkt, dass die einzelnen a-Werthe blos innerhalb der positiven und der negativen Einheit variiren dürfen.

Setzt man in (14) $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m=1$ und summirt ohne Rücksicht auf die Vorzeichen die numerischen Werthe der in A_{2n} spielenden Coëfficienten von der Form:

$$C=\frac{2n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots}\cdot\frac{d^{2n}u}{dx_1^{\alpha_1}\,dx_2^{\alpha_2}\ldots},$$

so erhält man einen endlichen Zahlenwerth $=S$, welcher ganz gewiss den jeweiligen numerischen Werth von A_{2n} übertrifft, — und es kann behauptet werden, dass der Werth von A_{2n} für alle möglichen Annahmen der der Bedingung (16) genügenden primären Werthsysteme von $a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m$ nur innerhalb der endlichen Grenzen von $-S$ bis $+S$ variiren kann, und hiemit nothwendiger Weise mindestens Einen endlichen Maximal- und Einen endlichen Minimalwerth aufweisen muss.

Hierauf fussend notiren wir folgende den Ausdruck A_{2n} betreffenden Schlussfolgerungen:

(17)

a) Gibt es Werthsysteme von $a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m$, welche ein positives A_{2n} liefern, so gibt es auch ganz gewiss solche, welche einen positiven Maximalwerth veranlassen.

b) Gibt es Werthsysteme, von $a_1\,a_2\ldots a_m$, welche ein negatives A_{2n} liefern, so gibt es ganz gewiss auch solche, welche einen negativen Minimalwerth von A_{2n} veranlassen.

c) Ist kein Maximum noch Minimum von A_{2n} positiv, so ist A_{2n} positiver Werthe nicht fähig, und beurkundet hiemit die Stabilität des negativen Vorzeichens von Δ, und schliesslich den Maximalzustand von u.

d) Ist kein Maximum noch Minimum von A_{2n} negativ, so ist A_{2n} negativer Werthe nicht fähig, und beurkundet hiemit die Stabilität des positiven Vorzeichens von Δ, und schliesslich den Minimalzustand von u.

e) Ist überhaupt A_{2n} sowohl positiver als auch negativer Werthe fähig, so befindet sich diessfällig die Function u weder im Zustande des Maximums noch dem des Minimums.

Demzufolge läuft unsere Untersuchung darauf hinaus, das Vorzeichen blos von denjenigen Werthen von A_{2n} zu erforschen, welche in Bezug auf die primären Werthsysteme von $a_1 a_2 \ldots a_m$ den Vorbedingungen wie (8) des Maximal- oder Minimalzustandes von A_{2n} entsprechen, und gleichzeitig der Relation (16) genügen.

Zu diesem Behufe seien $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3 \ldots \mathfrak{d}_m$ die unendlich kleinen Zusätze zu $a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$, so müssen die Werthe von $a_1 a_2 \ldots a_m$ vor Allem die Gleichung:

$$\frac{dA_{2n}}{da_1}\mathfrak{d}_1 + \frac{dA_{2n}}{da_2}\mathfrak{d}_2 + \ldots + \frac{dA_{2n}}{da_m}\mathfrak{d}_m = 0 \tag{18}$$

und ausserdem wegen (16) noch die Gleichungen:

$$\begin{gathered} a_1^{2n} + a_2^{2n} + a_3^{2n} + \ldots + a_m^{2n} = 1 \\ (a_1 + \mathfrak{d}_1)^{2n} + (a_2 + \mathfrak{d}_2)^{2n} + \ldots + (a_m + \mathfrak{d}_m)^{2n} = 1 \end{gathered} \tag{19}$$

für sehr kleine Zusätze $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_m$ erfüllen.

Zieht man in (19) die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man nach Weglassung der höheren Potenzen der kleinen Zusätze $\mathfrak{d}$:

$$2na_1^{2n-1}\mathfrak{d}_1 + 2na_2^{2n-1}\mathfrak{d}_2 + \ldots + 2na_m^{2n-1}\mathfrak{d}_m = 0. \tag{20}$$

Multiplicirt man die Gleichung (20) mit einem erst später näher zu bestimmenden Factor s, und subtrahirt selbe dann von der Gleichung (18), so erhält man:

$$\left(\frac{dA_{2n}}{da_1} - 2nsa_1^{2n-1}\right)\mathfrak{d}_1 + \left(\frac{dA_{2n}}{da_2} - 2nsa_2^{2n-1}\right)\mathfrak{d}_2 + \ldots + \left(\frac{dA_{2n}}{da_m} - 2nsa_m^{2n-1}\right)\mathfrak{d}_m = 0. \tag{21}$$

Wählt man nun den Factor s so, dass in (21) etwa der Coëfficient von $\mathfrak{d}_1$ verschwindet, so müssen dann wegen der völlig willkührlichen $\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3 \ldots \mathfrak{d}_m$ auch die übrigen in (21) vorfindigen Coëfficienten jeder für sich verschwinden.

Hiedurch gelangen wir zum folgenden Systeme von $(m+1)$ Gleichungen:

$$\begin{gathered} \frac{dA_{2n}}{da_1} = 2nsa_1^{2n-1}; \ \frac{dA_{2n}}{da_2} = 2nsa_2^{2n-1}; \ \ldots . \frac{dA_{2n}}{da_m} = 2nsa_m^{2n-1}. \\ a_1^{2n} + a_2^{2n} + a_3^{2n} + \ldots + a_m^{2n} = 1, \end{gathered} \tag{22}$$

welche zur Bestimmung von $a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ und des Factors s zu dienen haben.

Wegen

$$A_{2n} = D^{2n} u \quad \text{und} \quad \frac{dD}{da_s} = \frac{d}{dx_s}$$

hat man:

(23)
$$\frac{dA_{2n}}{da_s} = \frac{d(D^{2n})u}{da_s} = 2n \frac{d}{dx_s}(D^{2n-1}u) = 2n \cdot \frac{d}{dx_s} D^{2n-1} \cdot u.$$

Demgemäss erhält man aus (22) folgendes System von Gleichungen:

(24)
$$\frac{d}{dx_1} D^{2n-1} \cdot u = sa_1^{2n-1}; \; \frac{d}{dx_2} D^{2n-1} \cdot u = sa_2^{2n-1}; \; \ldots . \frac{d}{dx_m} D^{2n-1} \cdot u = sa_m^{2n-1}$$
$$a_1^{2n} + a_2^{2n} + a_3^{2n} + \ldots + a_m^{2n} = 1,$$

in denen die symbolische Deutung der Potenzen von D nach (6) und (14) verstanden wird.

Multiplicirt man die ersten m Gleichungen in (24) der Reihe nach mit $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_m$, und verbindet die so multiplicirten Gleichungen durch Addition, so erhält man mit Rücksicht auf die letzte in (24):

$$D^{2n-1} u \left(\frac{d}{dx_1} a_1 + \frac{d}{dx_2} a_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m} a_m \right) = D^{2n-1} u \,.\, D = s\,(a_1^{2n} + a_2^{2n} + \ldots + a_m^{2n})$$

oder

(25)
$$D^{2n} u = s \quad \text{hiemit} \quad A_{2n} = s,$$

wodurch besagt wird, dass die aus (24) gezogenen Werthe von s mit denjenigen Werthen von A_{2n} übereinstimmen, welche den Bedingungen (18) und (19) genügen, d. h. mit denjenigen Werthen von A_{2n}, unter welchen die eventuell möglichen Maximal- oder Minimalwerthe von A_{2n} sich einfinden.

Die bisherigen Ergebnisse in Verbindung mit der Deutung der Gleichung (25) führen uns zur Einsicht, dass von nun an der Grösse s die Rolle zufällt, den Schlussstein der Untersuchungen über das Maximum und Minimum einer Function u zu bilden.

Setzt man:

$$\frac{a_1}{a_m} = v_1 \; \frac{a_2}{a_m} = v_2 \ldots . \frac{a_{m-1}}{a_m} = v_{m-1}$$

und

(26)
$$D : a_m = \mathfrak{D},$$

so erhält man aus (24):

(27)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \mathfrak{D}^{2n-1} u &= sv_1^{2n-1} \\ \frac{d}{dx_2} \mathfrak{D}^{2n-1} u &= sv_2^{2n-1} \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \;\; \vdots \\ \frac{d}{dx_{m-1}} \mathfrak{D}^{2n-1} u &= sv_{m-1}^{2n-1} \\ s &= \frac{d}{dx_m} \mathfrak{D}^{2n-1} u. \end{aligned}$$

Wenn man die erste Gleichung in (27) mit jeder nachfolgenden verbindet, und dann aus jedem so entstehenden Gleichungspaare s eliminirt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{D}^{2n-1}\left|\frac{d}{dx_1}v_2^{2n-1}-\frac{d}{dx_2}v_1^{2n-1}\right|u=0\\
&\mathfrak{D}^{2n-1}\left|\frac{d}{dx_1}v_3^{2n-1}-\frac{d}{dx_3}v_1^{2n-1}\right|u=0\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
&\mathfrak{D}^{2n-1}\left|\frac{d}{dx_1}v_{m-1}^{2n-1}-\frac{d}{dx_{m-1}}v_1^{2n-1}\right|u=0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$s=\frac{d}{dx_m}\mathfrak{D}^{2n-1}u. \tag{29}$$

wobei:

$$\mathfrak{D}=\frac{d}{dx_1}v_1+\frac{d}{dx_2}v_2+\ldots+\frac{d}{dx_{m-1}}v_{m-1}+\frac{d}{dx_m}. \tag{30}$$

Aus den $(m-1)$ Gleichungen in (28) findet man nach Umständen mehrere Systeme von primären Werthen der Verhältnisszahlen $v_1\, v_2\, v_3 \ldots v_{m-1}$ und bestimmt mittelst (29) den einem jeden dieser Systeme entsprechenden Werth von s, welcher letztere ebenfalls primär ausfallen muss.

Auf Grund der Bemerkungen in (17) lassen sich aus dem Vorzeichen der so erhaltenen Werthe von s folgende Schlüsse herleiten:

a) Die Function u befindet sich im Maximum, wenn die eben erwähnten Werthe von s sämmtlich negativ sich ergeben.

b) Die Function befindet sich im Minimum, wenn diese s-Werthe sämmtlich positiv sich ergeben. (31)

c) Die Function u befindet sich weder im Maximum noch im Minimum, wenn diese s-Werthe sowohl positiv als auch negativ möglich erscheinen.

Die bisherige Untersuchung über Maxima und Minima von u betrifft blos die Systeme von primären aus (9) sich ergebenden Werthe von $x_1\, x_2 \ldots x_m$. Im Fall der Einbeziehung der Systeme von complexen $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_m$ müssten wir auch den Zusätzen $\xi_1\, \xi_2, \ldots \xi_m$ und folgerichtig auch den in (2) ersichtlichen r und a complexe Formen einräumen. Das in Bezug auf das Vorzeichen von Δ vorherrschende Glied $\frac{r^{2n}}{2n!}D^{2n}u$ erhält etwa für ein primäres r' und eine zulässige Combination der a-Werthe — für $r=r'$ den Werth $\frac{r'^{2n}}{2n!}D^{2n}u=\mathfrak{A}$, und dann für $r=r'\sqrt[2n]{-1}$ den Werth $\frac{-r'^{2n}}{2n!}D^{2n}u=-\mathfrak{A}$, und berechtigt somit zum Schluss, dass die diessfällige Differenz Δ der positiven sowohl als auch der negativen Vorzeichen fähig ist, — woraus weiter geschlossen wird, dass Systeme complexer aus (9) sich ergebenden Werthe von $x_1\, x_2 \ldots x_m$ weder ein Maximum noch ein Minimum von u zu veranlassen vermögen. (32)

Von den besonderen Fällen der hier vorgetragenen Theorie mögen hier blos zwei näher gewürdigt werden, welche aus dem allgemeinen Fall dadurch hervorgehen, dass man:

I. . . . . $m = 2$ setzt, und n als eine allgemeine ganze Zahl belässt;

II. . . . . $n = 1$ setzt, und m als eine allgemeine Zahl belässt.

Im Falle I. erhält man für

(33) $$u = f(x_1 x_2), \quad \mathfrak{D} = \frac{d}{dx_1} v_1 + \frac{d}{dx_2},$$

und nach (28), (29):

(34) $$\left(\frac{d}{dx_1} v_1 + \frac{d}{dx_2}\right)^{2n-1} \left[\frac{d}{dx_1} - \frac{d}{dx_2} v_1^{2n-1}\right] u = 0: \quad s = \frac{d}{dx_2} \left(\frac{d}{dx_1} v_1 + \frac{d}{dx_2}\right)^{2n-1} u.$$

Die erste in (34) ist nach v_1 vom $(4n-2)^{\text{ten}}$ Grade; die aus derselben sich ergebenden primären Werthe von v_1 liefern mittelst Substitution derselben in die zweite eben so viele primäre Werthe von s, aus deren Vorzeichen die weitere Entscheidung über den Zustand von u nach (31) gefällt wird.

Für $n = 2$ ist die erste in (34) vom 6^{ten} Grade und gestaltet sich folgendermassen:

(35) $$\begin{gathered} (3,1)\, v_1^6 + 3(22)\, v_1^5 + 3(13)\, v_1^4 + \{(04) - (40)\}\, v_1^3 - 3(3,1)\, v_1^2 - 3(22)\, v_1 - (13) = 0 \\ s = (31)\, v_1^3 + 3(22)\, v_1^2 + 3(13)\, v_1 + (04), \end{gathered}$$

wenn man überhaupt die runde Klammerfassung dahin deutet, dass man die Gleichung:

(36) $$(\omega\omega') = \frac{d^{\omega+\omega'} u}{dx_1^{\omega}\, dx_2^{\omega'}}$$

einräumt.

Im Falle II sei

(37) $$u = f(x_1 x_2 x_3 \ldots x_m);$$

wegen $n = 1$ erhält man aus (24):

$$\frac{d}{dx_1} Du = sa_1; \ \frac{d}{dx_2} Du = sa_2; \ \ldots . \ \frac{d}{dx_m} Du = sa_m.$$

und nebstbei

(38) $$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_m^2 = 1;$$

wenn man diese Gleichungen entwickelt, und ganz allgemein die Gleichung

(39) $$(\omega, \omega') = (\omega' \omega) = \frac{d^2 u}{dx_{\omega}\, dx_{\omega'}}$$

bestehen lässt, so erhält man aus (38):

$$\begin{aligned}
(11)\,a_1 + (12)\,a_2 + (13)\,a_3 + \ldots + (1m)\,a_m &= a_1 s \\
(21)\,a_1 + (22)\,a_2 + (23)\,a_3 + \ldots + (2m)\,a_m &= a_2 s \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
(m1)a_1 + (m2)a_2 + (m3)a_3 + \ldots + (mm)a_m &= a_m s.
\end{aligned} \tag{40}$$

Wenn man alle diese Gleichungen durch a_m dividirt, so erscheinen diese m Gleichungen nach den Verhältnisszahlen $v_1 v_2 v_3 \ldots v_{m-1}$ geordnet. Die ersten $(m-1)$ Gleichungen verwende man dazu, um diese Verhältnisszahlen durch s auszudrücken. Durch Einführung der so erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung erhält man eine Gleichung von m^{ten} Grade nach der Unbekannten s, welche durch Auflösung m Werthe für s liefert. Diesen m Werthen von s entsprechen ebenso viele Werthsysteme der Verhältnisszahlen $v_1 v_2 v_3 \ldots v_{m-1}$ und auch ebenso viele Systeme von $a_1\, a_2 \ldots a_m$.

Seien nun zwei Systeme von zusammengehörigen Werthen:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots a_m, s)_1 \quad ; \quad (a'_1, a'_2, a'_3, \ldots a'_m, s')_2, \tag{41}$$

von denen das erste in den Gleichungen (40), das zweite hingegen in folgenden Gleichungen sich ausprägt:

$$\begin{aligned}
(11)\,a'_1 + (21)\,a'_2 + (31)\,a'_3 + \ldots + (m1)\,a'_m &= a'_1 s' \\
(12)\,a'_1 + (22)\,a'_2 + (32)\,a'_3 + \ldots + (m2)\,a'_m &= a'_2 s' \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
(1m)a'_1 + (2m)a'_2 + (3m)a'_3 + \ldots + (m,m)a'_m &= a'_m s'.
\end{aligned} \tag{42}$$

Die hier bewirkte Verstellung der Zeiger innerhalb der Klammern ist ja nach (39) gestattet.

Wenn man die Gleichungen (40) der Reihe nach mit $a'_1, a'_2, a'_3 \ldots a'_m$ multiplicirt, und die so erhaltenen Gleichungen addirt, und als Summe der aufeinander folgenden Verticalpolynome darstellt, so erhält man etwa als drittes Verticalpolynom mit Rücksicht auf die dritte in (42):

$$(13)\,a_3 a'_1 + (23)\,a_3 a'_2 + (33)\,a_3 a'_3 + \ldots + (m3)\,a_3 a'_m = a_3 \,.\, a'_3 s',$$

und demgemäss als Summe aller Verticalpolynome:

$$a_1 \,.\, a'_1 s' + a_2 \,.\, a'_2 s' + a_3 \,.\, a'_3 s' + \ldots + a_m \,.\, a'_m s' = a'_1 \,.\, a_1 s + a'_2 \,.\, a_2 s + \ldots + a'_m \,.\, a_m s,$$

oder

$$(s' - s)\{a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots + a_m a'_m\} = 0. \tag{43}$$

Sei nun

$$s = p + q\sqrt{-1},\ \ a_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1},\ \ a_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}, \ldots a_m = \alpha_m + \beta_m\sqrt{-1} \tag{44}$$

das erste den Gleichungen (40) genügende Werthsystem, so können wir immerhin als das zweite den Gleichungen (42) genügende Werthsystem folgendes ansehen:

$$s' = p - q\sqrt{-1},\ \ a'_1 = \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1},\ \ a'_2 = \alpha_2 - \beta_2\sqrt{-1}, \ldots a'_m = \alpha_m - \beta_m\sqrt{-1}. \tag{45}$$

Da ferner ganz allgemein $a_w a'_w = \alpha^2_w + \beta^2_w$ sich ergibt, so erhält man auf Grundlage der Hypothese (44) die Gleichung (43) in folgender Gestalt:

(46) $$-2q\sqrt{-1}\{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_m^2\} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich durch Annulirung des eingeklammerten Factors nicht erfüllen, weil dies im Widerspruche mit der zweiten in (38) die Satzungen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$$

zur Folge hätte. Aber auch nicht durch die Satzung $q = 0$, weil dies der in (44) gemachten Hypothese widerspricht. Es bleibt somit nichts übrig, als dass wir von der Hypothese (44) abstehen und anerkennen, dass dem Gleichungssysteme (40) complexe s-Werthe zu genügen nicht geeignet sind, dass somit aus (40) nur primäre s-Werthe resultiren können.

Die aus (40) gefolgerte Eliminationsgleichung in s habe nun folgende Gestalt:

(47) $$s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \ldots + b_1 s^1 + b_0 = 0 \ \ [\text{Siehe §. 3 (23)}],$$

welche auf Grund des eben gelieferten Nachweises blos primäre Wurzeln zulässt, und in Folge dessen nicht erst aufgelöst zu werden braucht, um in Bezug auf den Zustand der Function u folgende Kriterien zu bieten:

a) Bietet die Coëfficientengruppe in (47) lauter Zeichenfolgen, so ergeben sich die zugehörigen s-Werthe sämmtlich negativ und u befindet sich im Maximum;

(48) *b)* Bietet die Coëfficientengruppe in (47) lauter Zeichenabwechslungen, so ergeben sich die zugehörigen s-Werthe sämmtlich positiv und u befindet sich im Minimum;

c) Finden sich in (47) sowohl Zeichenwechsel als auch Zeichenfolgen ein, so ergeben sich die betreffenden s-Werthe theils positiv, theils negativ, und u befindet sich weder im Maximum noch im Minimum.

Die Bildung der Eliminationsgleichung (47) aus (40) wird nach Crammer am einfachsten mit Hilfe der combinatorischen Determinante durchgeführt. Es sei mir hier gestattet die einschlägige Theorie in möglichster Kürze beizufügen. Bei dieser Gelegenheit werde ich mich bestreben, nebst einigen auf die Darstellung sich beziehenden Vereinfachungen, eine wichtige Eigenschaft der sogenannten Functionsdeterminante mit einem Beweis zu belegen, welche unbewiesen vom Herrn Otto Hesse aufgestellt und zur Transformation der zweiten Variation eines bestimmten Integrales von der Form:

$$\Delta = \int_a^b f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})\, dx$$

mit ausgezeichnetem Erfolg verwendet worden ist, um zu den Kriterien des Maximums und Minimums von Δ zu gelangen. (Siehe Journale von Crelle, 54. Band, pag. 249.)

§. 2.

Über die combinatorische Zeichengruppe.

Einer jeden aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ... $(n-1)$, n gebildeten Permutationsform entspricht ein System von je $\binom{n}{2}$ Amben, von denen einige von Links nach Rechts gehend, eine Zunahme, die übrigen hingegen eine Abnahme beurkunden. Die ersteren Umstände mögen Steigungen, die letzteren hingegen Senkungen heissen. Die Anzahl der Steigungen und Senkungen zusammengenommen beträgt demnach $\binom{n}{2}$. (1)

Zu einer Permutationsform: $P_\alpha = AhBkC$, in welcher h und k einzelne Elemente vorstellen, und durch A, B, C, die aus den übrigen Elementen gebauten Partialgruppen angedeutet sind, findet man die in Bezug auf das Elementenpaar hk zugeordnete Permutationsform $P_{\alpha'}$ dadurch, dass man blos die Elemente h und k gegen einanden austauscht.

Demgemäss ist: $P_{\alpha'} = AkBhC$, wobei wir durch α und α' die jeweilig der Gruppe angehörige Anzahl der Senkungen andeuten.

Sind die aus den Partialgruppen Ah, AB, AC, hC, BC, kC zu gewinnenden Senkungen in der Anzahl γ vorhanden, so wissen wir, dass γ zu α und α' in gleicher Weise als gemeinschaftlicher Bestandtheil angehört.

Ist e die Anzahl der in B enthaltenen Elemente, und findet man unter diesen Elementen:

$$\begin{array}{l} m \text{ höhere Elemente als } h,\ w \text{ tiefere Elemente als } h; \\ m' \quad " \qquad " \qquad " \ k,\ w' \quad " \qquad " \qquad " \ k, \end{array} \tag{2}$$

so erhält man vor Allem:

$$e = m + w = m' + w'. \tag{3}$$

Man findet für $h > k$ aus der Partialgruppe hBk:

$$(\text{die Anzahl Senkungen}) = 1 + w + m',$$

somit:

$$\alpha = \gamma + m' + w + 1 \text{ und eben so } \alpha' = \gamma + \omega' + m, \tag{4}$$

hieraus

$$\alpha + \alpha' = 2\gamma + (w + m) + (w' + m') + 1 = 2(\gamma + e) + 1, \tag{5}$$

dem zufolge hat man:

$$(-1)^\alpha \times (-1)^{\alpha'} = (-1)^{\alpha+\alpha'} = -1, \tag{6}$$

wodurch besagt wird, dass die den einander zugeordneten Gruppen P_α und $P_{\alpha'}$ entsprechenden Potenzen $(-1)^\alpha$ und $(-1)^{\alpha'}$ auf entgegengesetzte Vorzeichen deuten.

Aus r Elementen erhält man $r!$ Permutationen. Bezeichnet man mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$... die den aufeinanderfolgenden Gruppen zugehörigen Anzahlen der Senkungen, so erhält man die diesen Gruppen entsprechende aus $r!$ Vorzeichen bestehende Zeichengruppe Z_r im Folgenden:

(7) $$Z_r = (-1)^\alpha, (-1)^\beta, (-1)^\gamma, (-1)^\delta, (-1)^\varepsilon, \ldots$$

und dies ist die zu r Elementen gehörige combinatorische Zeichengruppe.

So erhält man für die Elemente 1, 2, 3 die Permutationen: 123, 132, 213, 231, 312, 321, welchen der Reihe nach die Senkungsanzahlen 0, 1, 1, 2, 2, 3 entsprechen.

Dem gemäss ist:

$$Z_3 = + - - + + -;$$

und in gleicher Weise:

(8) $$Z_1 = +; \; Z_2 = + -.$$

Die in dieser Weise eingeleitete Aufstellung der Zeichengruppe Z_r ist bei einem nur etwas höheren Zeiger r sehr mühsam — es erscheint daher ein Verfahren sehr wünschenswerth, nach welchem man mit Umgehung der Auszählung der Senkungen jede beliebige Zeichengruppe Z_r unmittelbar hinzuschreiben im Stande wäre.

Hiezu verhilft uns folgende Consideration: Die Aufstellung aller möglichen Permutationen aus r Elementen in der Anreihung derselben von der niederen zur nächst höheren Gruppe bietet uns r Partien von je $(r-1)!$ Gruppen dar, welche beziehungsweise mit den Elementen $1, 2, 3, \ldots r$ beginnen, je nachdem solche zur 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, r^{ten} Partie gehören.

Die zu irgend einer etwa zur s^{ten} Partie gehörigen Gruppen gehen Glied für Glied in die zur $(s+1)^{\text{ten}}$ Partie gehörigen Gruppen über, wenn man in jeder Gruppe der s^{ten} Partie blos die Elemente s und $(s+1)$ ihre Plätze wechselseitig austauschen lässt. Es sind somit die Gruppen einer jeden, etwa der s^{ten} Partie, Glied für Glied sowohl den Gruppen der unmittelbar vorangehenden, als auch den Gruppen der nächstfolgenden Partie zugeordnet, und zwar im ersten Falle in Bezug auf das Elementenpaar $(s-1)$, s — im zweiten Falle in Bezug auf das Elementenpaar s, $s+1$. Man erhält somit aus der der s^{ten} Partie angehörigen Zeichengruppe diejenige, welche der $(s+1)^{\text{ten}}$ Partie angehört dadurch, dass man den sämmtlichen zur s^{ten} Partie gehörigen Zeichencomplex entgegengesetzt anschreibt.

Die zur ersten Partie gehörigen Gruppen beginnen sämmtlich mit dem Elemente 1, und bieten nach einander dieselben Senkungszahlen und dieselbe Zeichengruppe, welche man aus den zu $2, 3, 4, \ldots (r-1), r$, oder auch aus den zu $1, 2, 3, 4, \ldots (r-1)$ gehörigen Permutationsformen gewinnt. Demgemäss können wir die zur ersten Partie gehörige Zeichengruppe mit dem Symbol Z_{r-1} bezeichnen, und in weiterer Folge die zur 1^{ten}, 2^{ten}, $3^{\text{ten}} \ldots r^{\text{ten}}$ Partie gehörigen Zeichengruppen durch die Symbole:

$$(-1)^0 Z_{r-1}, \; (-1)^1 Z_{r-1}, \; (-1)^2 Z_{r-1}, \ldots \ldots (-1)^{r-2} Z_{r-1}, \; (-1)^{r-1} Z_{r-1}$$

ausdrücken und schliesslich folgende Relation anschreiben:

(9) $$Z_r = (-1)^0 Z_{r-1} + (-1)^1 Z_{r-1} + (-1)^2 Z_{r-1} + \ldots + (-1)^{r-1} Z_{r-1},$$

dem gemäss erhält man:

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = + ;\\
&Z_2 = (+) - (+) = + - ;\\
&Z_3 = (+-) - (+-) + (+-) = + - - + + - ;\\
&Z_4 = (+--++-) - (+--++-) + (+--++-) - (+--++-) =\\
&\quad = + - - + + - - + + - - + + - - + + - - + + - - + ;\\
&Z_5 = Z_4 - Z_4 + Z_4 - Z_4 + Z_4 \quad \&.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Bei der Austheilung der Vorzeichen an die einzelnen Permutationen können wir die in (10) angedeutete Vermittlung der Klammerfassungen ausser Acht lassen, und den stufenweisen Fortgang bei der Aufstellung der Zeichengruppen in Gedanken festhaltend, unmittelbar diejenige Zeichengruppe niederschreiben, welche zur verlangten Anzahl von Elementen hingehört.

Auf Grund der Gleichung (9) gelangt man für

$$A = a_m m! + a_{m-1}(m-1)! + a_{m-2}(m-2)! + \ldots + a_r . r! \quad \text{wo ganz allgemein } a_s < s! \tag{11}$$

zur folgenden sehr einfachen Relation:

$$(\text{Schlusszeichen von } A \text{ Anfangsgruppen}) = -(-1)^{\frac{r}{2}| + \alpha}, \tag{12}$$

wo α die Anzahl der ungeraden in (11) vorkommenden a bedeutet, und unter $\frac{r}{2}|$ die grösste in $\frac{r}{2}$ enthaltene ganze Zahl verstanden wird*).

Es ist z. B.

$$12654 = 101.5! + 21.4! + 5.3!$$

$$(\text{Schlusszeichen von } 12654 \text{ Anfangsgruppen}) = -(-1)^{\frac{3}{2}|+3} = -(-1)^4 = -1.$$

Es ist wegen (11):

$$A + 1 = a_m m! + a_{m-1}(m-1)! + \ldots + a_r r! + 1.1!$$

hiemit:

$$(\text{Schlusszeichen von } (A+1) \text{ Anfangsgruppen}) = -(-1)^{\alpha+1+\frac{1}{2}|} = -(-1)^{\alpha+1}$$

und

$$\frac{(\text{Schlusszeichen von } A \text{ Anfangsgruppen})}{(\text{Schlusszeichen von } (A+1) \text{ Anfangsgruppen}} = (-1)^{\frac{r}{2}| \pm 1}. \tag{13}$$

Hieraus geht hervor, dass das A^{te} Vorzeichen mit dem nächst folgenden übereinstimmt oder nicht, je nachdem $\frac{r}{2}|$ ungerade oder gerad sich gestaltet.

Im Allgemeinen wechselt in der Zeichengruppe das Zeichenpaar $(++)$ mit dem Zeichenpaar $(--)$ regelmässig ab. — Die Ausnahmen hievon sind mittelst (13) leicht zu eruiren.

*) Ebenso könnte man die möglichst kleinste ganze Zahl, welche den Werth von $\frac{r}{2}$ in sich enthält, mit dem Symbol $\frac{r|}{2}$ bezeichnen, und in Folge dessen die Relation $\frac{r}{2}| + \frac{r|}{2} = r$ einräumen.

§. 3.

Über die combinatorische Determinante.

Zu einem Tableau von n^2 Zahlen, welches wir uns aus n Horizontalreihen von je n Zahlen, oder auch aus n Verticalreihen von je n Zahlen zusammengesetzt vorstellen, könnten wir uns folgender symbolischer Bezeichnung bedienen:

$$\begin{array}{cccc} (11)\,(12)\,(13) & \ldots & (1n) \\ (21)\,(22)\,(23) & \ldots & (2n) \\ (31)\,(32)\,(33) & \ldots & (3n) \\ \vdots\quad\;\vdots\quad\;\vdots & & \vdots \\ (n1)\,(n2)\,(n3) & \ldots & (nn), \end{array} \tag{1}$$

in welchem die einzelnen Zahlen mittelst je zwei in eine runde Klammer gefassten Zeigern dargestellt sind. Von Links nach Rechts gehend, ist der erste Zeiger der Horizontalzeiger, und zeigt an, in welcher Horizontale die betreffende Zahl zu suchen ist; der zweite Zeiger heisst der Verticalzeiger und zeigt an, in welcher Verticalreihe die betreffende Zahl sich aufhält. Die diesem Zahlentableau entsprechende Determinante pflegt man dadurch zu bezeichnen, dass man das entsprechende Zahlentableau zwischen zwei verticalen Linien
(2) einschliesst. — Der kürzeren Schreibweise wegen wollen wir diese Determinante symbolisch durch $\left\{\begin{smallmatrix} 1 & \overline{\quad\quad} & n \\ n & & \end{smallmatrix}\right\}$ kennzeichnen, und durch das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} & 1 & \overset{r}{\overline{\quad\quad}} & n \\ s & n & & \end{smallmatrix}\right\}$ diejenige Determinante bezeichnen, welche einem, aus (1) dadurch hervorgehenden Zahlensystem angehört, dass man in (1) alle Zahlen weglässt, denen r als Horizontalzeiger oder s als Verticalzeiger angehört.

Dem gemäss schreiben wir folgende Gleichungen an:

$$\left\{\begin{smallmatrix} 1 & \overline{\quad\quad} & n \\ n & & \end{smallmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} (11)\,(12)\,(13)\ldots(1n) \\ (21)\,(22)\,(23)\ldots(2n) \\ \vdots \\ (n1)\,(n2)\,(n3)\ldots(nn) \end{vmatrix}\; ; \quad \left\{\begin{smallmatrix} & 1 & \overset{3}{\overline{\quad\quad}} & n \\ 2 & n & & \end{smallmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} (11)\,(13)\,(14)\ldots(1n) \\ (21)\,(23)\,(24)\ldots(2n) \\ (41)\,(43)\,(44)\ldots(4n) \\ \vdots \\ (n1)\,(n3)\,(n4)\ldots(nn) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Durch das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} 1 & \overset{r}{\underset{s}{\overline{\quad\quad}}} & n \\ n & & \end{smallmatrix}\right\}$ wollen wir den Werth andeuten, welchen die zu (1) gehörige Determinante annimmt, wenn man in der letzteren an die Stelle des Horizontalzeigers r durchgehends den Horizontalzeiger s einführt.

(4) Durch das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} & 1 & \overline{\quad\quad} & n \\ r & \big| & s & \\ & n & & \end{smallmatrix}\right\}$ wollen wir den Werth andeuten, welchen die zu (1) gehörige Determinante annimmt, wenn man in der letzteren an die Stelle des Verticalzeigers r durchgehends den Verticalzeiger s einführt.

Durch das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} & 1 & \overline{\quad\quad} & n \\ r & | & n & \\ & n & & \end{smallmatrix}\right\}$ deuten wir denjenigen Werth an, welchen die zu (1) gehörige Determinante annimmt, wenn man in derselben den Verticalzeiger r unterdrückt, und auf diese Weise etwa das Symbol (sr) in das Symbol (s) übergehen lässt. Hievon kann jedoch nur dann die Rede sein, wenn überhaupt die Symbole (1), (2), (3), . . . $n)$ auf gewisse in der laufenden Untersuchung einbegriffenen Grössen deuten.

Die zum Tableau (1) gehörige Determinante $\left\{\begin{smallmatrix} 1 & \overline{\quad\quad} & n \\ | & & \\ n & & \end{smallmatrix}\right\}$ erhält man als eine Summe von $n!$ Gliedern, welche aus dem Producte:

$$(11)\,(22)\,(33)\,(44)\ldots(nn) \tag{5}$$

hervorgehen, sobald man in demselben blos die Verticalzeiger auf alle möglichen Weisen permutirt, und die Horizontalzeiger an ihren Plätzen belässt, und schliesslich den so entstehenden $n!$ Gliedern der Reihe nach jene Vorzeichen ertheilt, wie solche in der §. 2 (7) (10) besprochenen combinatorischen Zeichengruppe auf einander folgen.

Beispielsweise erhält man:

$$\left\{\begin{smallmatrix} 1 & \overline{\quad\quad} & 2 \\ | & & \\ 2 & & \end{smallmatrix}\right\} = (11)\,(11) - (12)\,(21)$$

$$\left\{\begin{smallmatrix} \ulcorner & \overline{\quad\quad} & 3 \\ | & & \\ 3 & & \end{smallmatrix}\right\} = (11)\,(22)\,(33) - (11)\,(23)\,(32) - (12)\,(21)\,(33) + (12)\,(23)\,(31) + (13)\,(21)\,(32) - (13)\,(22)\,(31)\,. \tag{6}$$

Man würde zu demselben Resultate gelangen, wenn man in (5) mit Belassung der Verticalzeiger blos die Horizontalzeiger permutirt hätte. Daraus ersieht man auch, dass bei der Bildung eines beliebigen Gliedes der Determinante die Horizontal- und Verticalreihen des Zahlensystems (1) blos mit je einem einzigen Bestandtheile betheiligt sind.

Die sämmtlichen aus den Verticalzeigern gebildeten Permutationsformen zerfallen mit Rücksicht auf zwei ins Auge gefassten Verticalzeiger h, k in $\frac{1}{2}n!$ Paare von je einander zugeordneten Gruppen. Jedes dieser Paare trägt zur Bildung eines entsprechenden Gliederpaares in $\left\{\begin{smallmatrix} 1 & \overline{\quad\quad} & n \\ | & & \\ n & & \end{smallmatrix}\right\}$ bei, von je zwei einander zugeordneten mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Summanten.

In diesem Sinne erhält man aus den im §. 2 erwähnten Gruppen P_α und $P_{\alpha'}$ die entsprechenden mit Rücksicht auf die Verticalzeiger h und k einander zugeordneten Summanten S_α, $S_{\alpha'}$ im Folgenden:

$$S_\alpha = (-1)^\alpha \underset{\sim}{A}(h'h)\,\underset{\sim}{B}\,(k'k)\underset{\sim}{C}\,; \quad S_{\alpha'} = (-1)^{\alpha'} \underset{\sim}{A}(h'k)\,\underset{\sim}{B}(k\,h)\,\underset{\sim}{C} \tag{7}$$

wo die unter A, B, C gelegten Schlangenstriche andeuten, dass die in dieser Partialgruppe enthaltenen Verticalzeiger die entsprechenden Horizontalbegleiter bereits erhalten haben, und je in eine runde Klammer gefasst sind.

Aus (7) erhält man:

$$S_\alpha + S_{\alpha'} = (-1)^\alpha \underset{\sim\sim\sim}{ABC} \Big\{ (h'h)\,(k'k) - (h'k)\,(k'.)\ \Big\{ h \tag{8}$$

Diese Summe verschwindet in folgenden vier Fällen:

1. Wenn man in derselben h an die Stelle von k setzt;
2. „ „ „ „ k „ „ „ „ h „ ;
(9) 3. „ „ „ „ h' „ „ „ „ k' „ ;
4. „ „ „ „ k' „ „ „ „ h' „ .

Es wird somit ein Paar von einander zugeordneten Summanten verschwinden, wenn man in demselben irgend einen Zeiger von dem zu Grunde liegenden Zeigerpaar durch den anderen Zeiger ersetzt. Das zu Grunde liegende Zeigerpaar mag sonst aus der Horizontal- oder auch aus der Verticalzeigerreihe entnommen worden sein.

Die Determinante lässt sich mit Zugrundelegung eines beliebigen Zeigerpaares in lauter Paare von einander zugeordneten Summanten abtheilen — muss daher in folgenden Fällen verschwinden:

(10) *a)* Wenn man in derselben irgend eine Verticalreihe durch eine andere Verticalreihe ersetzt.

b) Wenn man in derselben irgend eine Horizontalreihe durch eine andere Horizontalreihe ersetzt.

Aus (9) und (10) folgern wir folgende Relationen:

(11)
$$\left\{\begin{matrix}1 & & n\\ r & s & \\ n & & \end{matrix}\right\}=0\ ;\qquad \left\{\begin{matrix}1 & r & n\\ & s & \\ n & & \end{matrix}\right\}=0 \text{ sobald } r \gtrless s\,.$$

Ordnet man die zu (1) gehörige Determinante nach irgend einer, etwa der s^{ten} Verticalreihe, so erhält man etwa:

(12)
$$\left\{\begin{matrix}1 & & n\\ & & \\ n & & \end{matrix}\right\}=(1s)q_1+(2s)q_2+(3s)q_3+\ldots+(ns)q_n.$$

Wenn man die combinatorische Operation aufmerksam prüft, mittelst welcher man zum Ausdruck $\left\{\begin{matrix}1 & & n\\ & & \\ n & & \end{matrix}\right\}$ gelangt, so muss man zugeben, dass jedes von den in (12) ersichtlichen q etwa q_r gerade durch eine ähnliche Operation aus den Horizontalzeigern $1, 2, 3, 4, \ldots (r-1), (r+1), r+2) \ldots n$ und aus den Verticalzeigern $1, 2, 3, 4, \ldots (s-1), (s+1), (s+2), \ldots n$ gebildet wird, mit der einzigen Bedingung, dass man die diesen Zeigern im Sinne (2) entsprechende Determinante $\left\{\begin{matrix}1 & r & n\\ s & & \\ n & & \end{matrix}\right\}$ mit $(-1)^{s-r}$ multipliciren muss, um q_r zu erhalten.

Wir werden jedoch in der nächstfolgenden Untersuchung zum Behufe der einfacheren Schreibweise jeden Ausdruck von der Form $(-1)^{s-r}\left\{\begin{matrix}1 & r & n\\ s & & \\ n & & \end{matrix}\right\}$ schlechtweg durch das Symbol $\left\{\begin{matrix}1 & r & n\\ s & & \\ n & & \end{matrix}\right\}$ ersetzen, und demgemäss die Gleichung (12) in folgender Form anschreiben:

$$\left\{\begin{matrix}1 & & n\\ & & \\ n & & \end{matrix}\right\}=(1s)\left\{\begin{matrix}1 & 1 & n\\ s & & \\ n & & \end{matrix}\right\}+(2s)\left\{\begin{matrix}1 & 2 & n\\ s & & \\ n & & \end{matrix}\right\}+\ldots+(ns)\left\{\begin{matrix}1 & n & n\\ s & & \\ n & & \end{matrix}\right\},$$

(13) und eben so

$$\left\{\begin{matrix}1 & & n\\ & & \\ n & & \end{matrix}\right\}=(s1)\left\{\begin{matrix}1 & s & n\\ 1 & & \\ n & & \end{matrix}\right\}+(s2)\left\{\begin{matrix}1 & s & n\\ 2 & & \\ n & & \end{matrix}\right\}+\ldots+(sn)\left\{\begin{matrix}1 & s & n\\ n & & \\ n & & \end{matrix}\right\},$$

und hieraus:

$$\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{n}\\ \big|\\ {}_{n}\end{array}\right\}=\left[(rs)\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\;\;r\;\;}{}^{n}\\ s\big|\\ {}_{n}\end{array}\right\}\right]_{r=1}^{r=n}=\left[(sr)\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\;\;s\;\;}{}^{n}\\ r\big|\\ {}_{n}\end{array}\right\}\right]_{s=1}^{s=n}. \tag{14}$$

Ist $s' \gtrless s$, so wird im Sinne (11) jedes der Polynome (13) und beziehungsweise jede der Summen in (14) verschwinden, wenn man in dem ersteren die s^{te} Verticalreihe durch die s'^{te} (15) Verticalreihe, dagegen in dem zweiten die s^{te} Horizontalreihe durch die s'^{te} Horizontalreihe ersetzt d. h., wenn man in (13) und (14) in die Coëfficienten (rs) und beziehungsweise (sr) statt s den Buchstaben s' hinschreibt.

Zu einem Systeme vom m Gleichungen mit m Unbekannten: $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_m$

$$\begin{array}{l}(11)a_1+(12)a_2+(13)a_3+\ldots+(1m)a_m=(1)\\ (21)a_1+(22)a_2+(23)a_3+\ldots+(2m)a_m=(2)\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\ (m1)a_1+(m2)a_2+(m3)a_3+\ldots+(mm)a_m=(m)\end{array} \tag{16}$$

denke man sich ein aus den vorstehenden Coëfficienten gebildetes Tableau — die zugehörige Determinante veranlasst im Sinne (12) etwa folgende Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ \big|\\ {}_{m}\end{array}\right\}=(13)q_1+(23)q_2+(33)q_3+\ldots+(m3)q_m, \tag{17}$$

wo bekannter Weise etwa:

$$q_r=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\;\;r\;\;}{}^{m}\\ 3\big|\\ {}_{m}\end{array}\right\}$$

sich ergibt.

Multiplicirt man die Gleichungen (16) der Reihe nach mit $q_1, q_2, q_2, \ldots q_m$, verbindet die so multiplicirten Gleichungen durch Addition und ordnet das erhaltene Resultat nach den Unbekannten $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_m$, so erhält man:

$$Q_1 a_1+Q_2 a_2+Q_3 a_3+\ldots+Q_m a_m=Q', \tag{18}$$

wo wegen (4) und (11)

$$Q_1=(11)q_1+(21)q_2+(31)q_3+\ldots+(m1)q_m=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ 3\big|\;1\\ {}_{m}\end{array}\right\}=0$$

$$Q_2=(12)q_1+(22)q_2+(32)q_3+\ldots+(m2)q_m=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ 3\big|\;2\\ {}_{m}\end{array}\right\}=0$$

$$Q_3=(13)q_1+(23)q_2+(33)q_3+\ldots+(m3)q_n=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ \big|\\ {}_{m}\end{array}\right\},$$

eben so findet man:

$$Q_4=Q_5=Q_6=\ldots=Q_m=0$$

und

$$Q'=(1)q_1+(2)q_2+(3)q_3+\ldots+(m)q_m=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ 3\big|\;\cdot\\ {}_{m}\end{array}\right\}. \tag{19}$$

Man erhält somit aus (18):

$$a_3\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ \big|\\ {}_{m}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ 3\big|\;r\\ {}_{m}\end{array}\right\} \text{ oder } a_3=\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ 3\big|\;\cdot\\ {}_{m}\end{array}\right\}:\left\{\begin{array}{l}{}^{1}\overline{\qquad}{}^{m}\\ \big|\\ {}_{m}\end{array}\right\}.$$

und somit allgemein:

(20) $$a_r = \left\{\begin{matrix}1 & \overline{\quad} & m\\ r\,| & r & \\ m & & \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}1 & \overline{\quad} & m\\ | & & \\ m & & \end{matrix}\right\}.$$

Der vorstehenden Formel zu Folge haben alle in (16) spielenden Unbekannten die Coëfficienten-Determinante zum gemeinschaftlichen Nenner — der jedesmalige Zähler geht aus dem Nenner hervor, wenn man in den Klammerausdrücken des Nenners den entsprechenden Verticalzeiger unterdrückt und etwa statt (rs) den Ausdruck (r) schreibt.

Die im §. 1 sub (40) vorgeführten Gleichungen gehen aus den hier sub (16) angeführten
(21) hervor, wenn man $(1)=(2)=(3)=\ldots=(m)=0$ setzt, und dann an die Stelle der Symbole (11), (22), (33), $\ldots(mm)$ die Differenzen: $[(11)-s]$, $[(22)-s)$, $[(33)-s]$, $\ldots$ $[(mm)-s]$ schreibt.

Auf Grund dieser Annahme geht die Determinante $\left\{\begin{matrix}1 & \overline{\quad} & m\\ | & & \\ m & & \end{matrix}\right\}$ in Folge ihres ersten Gliedes in ein nach s dem m^{ten} Grade angehöriges Polynom über, und lässt sich etwa so schreiben:

(22) $$\left\{\begin{matrix}1 & \overline{\quad} & m\\ | & & \\ m & & \end{matrix}\right\} = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \ldots b_1 s^1 + b_0\,.$$

Die sämmtlichen Zähler der $a_1\,a_2\,a_3\ldots a_m$ erhalten wegen (21) (20) (19) Nullwerthe, da aber wegen der zweiten Gleichung sub (38) §. 1 die Relation $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m=0$ unstatthaft erscheint, so kann die diesfällige Auflösung der Gleichung (40) nur dadurch dem Widerspruche entgehen, wenn man durch schickliche Wahl der s-Werthe das Nennerpolynom (22) nöthigt, den Nullwerth anzunehmen. Es ist somit die Relation:

(23) $$\left\{\begin{matrix}1 & \overline{\quad} & m\\ | & & \\ m & & \end{matrix}\right\} = 0\,,$$

die zur Bestimmung der s-Werthe dienende Gleichung, welche bereits im §. 1 sub (47) besprochen wurde.

Über die Functions-Determinante.

Denken wir uns aus dem Tableau (1) ein anderes dadurch abgeleitet, dass man ganz allgemein setzt:

(24) $$(rs) = (\lambda a_r)^{(s-1)} = \frac{d^{s-1}(\lambda a_r)}{dx^{s-1}}\,,$$

wo a und λ gegebene Functionen von x vorstellen. Hiedurch erhält man folgendes Tableau:

(25) $$\begin{matrix}(\lambda a_1), & (\lambda a_1)^{(1)}, & (\lambda a_1)^{(2)}\ldots & (\lambda a_1)^{(n-1)}\\ (\lambda a_2), & (\lambda a_2)^{(1)}, & (\lambda a_2)^{(2)}\ldots & (\lambda a_2)^{(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\lambda a_n), & (\lambda a_n)^{(1)}, & (\lambda a_n)^{(2)}\ldots & (\lambda a_n)^{(n-1)}\end{matrix}$$

dessen Determinante wir in analoger Weise mit dem Symbol $\left\{\begin{matrix}1 & \overline{\quad} & n\\ | & & \\ n & & \end{matrix}\right\}_{(\lambda)}$ andeuten.

Für ($n=2$) erhält man aus (25) mit Rücksicht auf die entsprechende Determinante:

$$\left\{\begin{matrix}1\text{——}2\\ 2\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} = \begin{vmatrix}(\lambda a_1)(\lambda a_1)^{(1)}\\ (\lambda a_2)(\lambda a_2)^{(1)}\end{vmatrix} = \lambda a_1\,(\lambda a_2)^{(1)} - (\lambda a_1)^{(1)}\,(\lambda a_2) = \lambda a_1\,(\lambda a_2^{(1)} + \lambda^{(1)} a_2) - (\lambda a_1^{(1)} + \lambda^{(1)} a_1)\,\lambda a_2$$
$$= \lambda^2\,(a_1 a_2^{(1)} - a_2 a_1^{(1)}), \tag{26}$$

oder

$$\left\{\begin{matrix}1\text{——}2\\ 2\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} = \lambda^2 \left\{\begin{matrix}\text{——}2\\ 2\end{matrix}\right\}_{(1)}. \tag{27}$$

Die unter dem rechten Klammerarme angehängten Zeiger (λ) und (1) deuten an, ob die im Functionstableau mit a bezeichneten Functionen mit λ oder mit 1 multiplicirt gedacht werden sollen.

Aus (27) ersieht man, dass für den dort angedeuteten Fall die mit beliebigem λ versehene Determinante erhalten wird, wenn man die zu $\lambda=1$ gehörige Determinante mit λ^2 multiplicirt. Wir vermuthen, dass dieses Gesetz für beliebige Ausdehnung des Functionstableau's seine Giltigkeit bewähren wird, und sich in folgender Gleichung ausprägt:

$$\left\{\begin{matrix}1\text{——}n\\ n\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} = \lambda^n \left\{\begin{matrix}1\text{——}n\\ n\end{matrix}\right\}_{(1)}{}^{*)}. \tag{28}$$

Auf Grund der höheren Induction wird das Gesetz in (28) erwiesen sein, sobald wir gezeigt haben werden, dass es für den Fall $n=m$ gelten muss, wenn man seine Giltigkeit für (29) den Fall $n=m-1$ bereits als erwiesen voraussetzt.

Behufs dessen hat man wegen (13) und (24):

$$\left\{\begin{matrix}1\text{——}m\\ m\end{matrix}\right\}_{\lambda} = (1m)\left\{\begin{matrix} & 1\overset{1}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} + (2m)\left\{\begin{matrix} & 1\overset{2}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} + \ldots + (mm)\left\{\begin{matrix} & 1\overset{m}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} = \left((\lambda a_r)^{(m-1)}\left\{\begin{matrix} & 1\overset{r}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(\lambda)}\right)_{r=1}^{r=m}. \tag{30}$$

Da aber die Determinante $\left\{\begin{matrix} & 1\overset{r}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(\lambda)}$ zu einem Functionstableau gehört, welches aus (25) durch Weglassung der m^{ten} Verticalreihe und der r^{ten} Horizontalreihe entsteht, so gehört diese Determinante für beliebiges r dem Fall $n=m-1$ an, und man hat der Hypothese (29) gemäss

$$\left\{\begin{matrix} & 1\overset{r}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(\lambda)} = \lambda^{m-1}\left\{\begin{matrix} & 1\overset{r}{\text{——}}m\\ m & \\ & m\end{matrix}\right\}_{(1)}. \tag{31}$$

Setzt man Kürze halber:

$$G = \lambda^{(m-1)} a_r + \binom{m-1}{1}\lambda^{(m-2)} a_r^{(1)} + \ldots + \binom{m-1}{m-2}\lambda^{(1)} a_r^{(m-2)} = \left(\binom{m-1}{v-1} a_r^{(v-1)}\,\lambda^{(m-v)}\right)_{v=1}^{v=(m-1)}. \tag{32}$$

---

*) Während Hesse seine Untersuchung auf dieses Gesetz zu stützen unternimmt, spricht er sich über dasselbe mit folgenden Worten aus: „Ich erinnere mich nicht, dieses Gesetz irgendwo gelesen zu haben." Da er seinen eigenen Beweis hievon bis jetzt der Öffentlichkeit nicht übergab, so glaube ich hiedurch hinlänglich gerechtfertigt zu sein, dass ich meinen eigenen Beweis dieses Satzes in dieser Abhandlung niederlege.

(33) so erhält man $(\lambda a_r)^{(m-1)} = \lambda a_r^{(m-1)} + G$, somit aus (30), (31):

(34) $$\left\{\begin{smallmatrix}1 & & m\\ & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(\lambda)} = \left[(\lambda a_r^{(m-1)} + G)\lambda^{m-1}\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right]_{r=1}^{r=m} = \lambda^m\left[a_r^{(m-1)}\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right]_{r=1}^{r=m} + \left(G\lambda^{m-1}\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right)_{r=1}^{r=m}.$$

Aus (24) hat man aber für $\lambda=1$, $a_r^{(v-1)} = (rv)$, $a_r^{(m-1)} = (rm)$, hiemit auch:

(35) $$\left[a_r^{(m-1)}\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right]_{r=1}^{r=m} = \left[(rm)\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right]_{r=1}^{r=m} = \left\{\begin{smallmatrix}1 & & m\\ & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)};$$

und ebenso wegen (32), (13), (14) und (11):

$$\left(G\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\lambda^{m-1}\right)_{r=1}^{r=m} = \left[\binom{m-1}{v-1}\lambda^{(m-v)}\lambda^{m-1}\left((rv)\left\{\begin{smallmatrix}1 & r & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right)_{r=1}^{r=m}\right]_{v=1}^{v=(m-1)} =$$

$$= \left[\binom{m-1}{v-1}\lambda^{(m-v)}\lambda^{m-1}\left((1v)\left\{\begin{smallmatrix} & 1 & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)} + (2v)\left\{\begin{smallmatrix} & 2 & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)} + \ldots + (mv)\left\{\begin{smallmatrix} & m & m\\ m & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right)\right]_{v=1}^{v=(m-1)} =$$

(36) $$= \left[\binom{m-1}{v-1}\lambda^{(m-v)}\lambda^{m-1}\left\{\begin{smallmatrix}1 & & m\\ m & v & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}\right]_{v=1}^{v=(m-1)} = 0\,.$$

Schliesslich erhalten wir aus (34) mit Hilfe (35) und (36):

(37) $$\left\{\begin{smallmatrix}1 & & m\\ & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(\lambda)} = \lambda^m\left\{\begin{smallmatrix}1 & & m\\ & & \\ m & & \end{smallmatrix}\right\}_{(1)}.$$

Das in (28) ausgeprägte Gesetz gilt also in der That für $n=m$, sobald man seine Geltung für $n=m-1$ annimmt, zum Beweise, dass es für jedes ganze positive n gelten muss.