DER REST DER TAYLOR'SCHEN REIHE.

VON

DR. ANTON WINCKLER,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 25. JULI 1867.)

Die verschiedenen Ausdrücke, welche den sogenannten Rest der Taylor'schen Reihe bilden, und zu welchen hier die zuerst von d'Alembert (1754) aufgestellte Integralform nicht gerechnet wird, hängen insgesammt von einem nicht näher bestimmten positiven echten Bruch ab, welcher theils als Factor des Restausdruckes, theils als Coëfficient des Zuwachses der Variabeln auftritt. Setzt man nämlich:

$$f(x+h)=f(x)+hf^1(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}_{(x)}+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\cdot u$$

so kann bekanntlich für u einer der Ausdrücke:

$$f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}\;,\;\ldots\; n(1-\varepsilon)^{n-1}f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}\;\ldots\;\text{Lagrange},\;\ldots\;\text{Cauchy}$$

$$\frac{n}{p}(1-\varepsilon)^{n-p}f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}\;,\;\ldots\;\frac{n}{h}(1-\varepsilon)^{n-1}\left[f^{(n-1)}_{(x+h)}-f^{(n-1)}_{(x)}\right]\;\ldots\;\text{Roche}$$

$$\frac{n}{h}\left[f^{(n-1)}_{(x+\varepsilon h)}-f^{(n-1)}_{(x)}\right]\;\ldots\;\text{Sturm}$$

gesetzt werden, worin ε jedesmal einen andern positiven echten Bruch und p eine der Zahlen von 1 bis n bezeichnet. In vielen Fällen und namentlich, wenn es sich nur darum handelt, das Verschwinden des Restes für ein ohne Ende wachsendes n nachzuweisen, sind diese Ausdrücke zureichend, obgleich jeder von ihnen den Werth des Restes innerhalb gewisser, unter Umständen ziemlich weiter Grenzen unbestimmt lässt. Sie sind aber nicht in gleichem Masse dienlich, wenn der Rest als Fehler der bis zu einem gewissen Gliede fortgesetzten directen Summirung der Reihe betrachtet und mit einiger Genauigkeit bestimmt werden soll. Es ist daher schon dieses Umstandes wegen die Frage, ob sich die Grenzen x und $x+h$ des Arguments $x+\varepsilon h$, wenigstens unter bestimmten Voraussetzungen, etwa enger stellen lassen, und in welcher Form alsdann der Restausdruck erscheinen würde, von einigem Interesse.

Mit dieser Frage des so vielfach behandelten Themas wird das Folgende zunächst sich beschäftigen, woran dann einige andere die Restformel betreffende Bemerkungen sich anschliessen werden.

Die Resultate sind meines Wissens neu; insofern aber bereits bekannte in Rede kommen, werde ich sie ausdrücklich als solche bezeichnen.

1.

Die vorhin angegebenen Ausdrücke stellen gewissermassen die erste Näherung des Restes dar, welche für jede die Bedingungen der Continuität erfüllende Function giltig bleibt, und die Methode, durch welche sie erhalten werden, haben mindestens das mit einander gemein, dass sie, ohne Unterscheidungen bezüglich der Function oder deren Differentialquotienten zu erfordern, Resultate liefern, welche äusserlich zwar verschieden, doch als blosse erste Annäherung nahezu von gleicher Bedeutung sind. In besonderen Fällen mag das eine bequemer zu gebrauchen sein als das andere, aber jedes leidet an einer für die meisten Anwendungen zu beträchtlichen Unbestimmtheit.

Um schärfere Eingrenzungen des Restes zu finden, muss man hiernach die bisherigen Wege verlassen, und auf die Beschaffenheit des Ausdruckes, welchen er genähert darstellen soll, genauer eingehen. Die am nächsten liegenden Anhaltspunkte hiefür gewährt die in Reihenform unmittelbar gegebene Bedeutung von u, vermöge welcher nämlich:

$$u = f^{(n)}_{(x)} + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots$$

ist, und aus welcher unter vorerst festzuhaltenden Hypothesen sich mehrere Ausdrücke ableiten lassen, die u innerhalb viel engerer Grenzen als die oben bemerkten Formen richtig darstellen.

Zu diesen Hypothesen gehört hauptsächlich diejenige, dass $f^{(n)}_{(z)}, f^{(n+1)}_{(z)} \ldots$ für alle zwischen x und $x+h$ liegenden Werthe von z endlich bleiben, die Reihe also für die Werthe 1, 2, 3 ... von n convergire. Da nur die Reihe an sich in Frage steht, so ist sie durch die vorausgesetzte Convergenz legitimirt.

Zunächst soll ferner angenommen werden, die Glieder nehmen dem Zahlenwerthe nach schon vom ersten an beständig ab.

Es wird Sache einer weitern Erörterung sein, die Ergebnisse von diesen beschränkenden Annahmen zu befreien.

2.

Von den bezeichneten Annahmen ausgehend, kann man zu der gewöhnlichen Form des Restes sehr leicht gelangen, wenn man die beiden Fälle unterscheidet, ob die Glieder der Reihe u, beziehungsweise $f^{(n)}_{(x)}, hf^{(n+1)}_{(x)}, h^2 f^{(n+2)}_{(x)} \ldots$ gleiche Zeichen haben, oder ob zwischen ihnen ein regelmässiger Zeichenwechsel bestehe.

Haben alle Glieder dasselbe Zeichen, so liegt u offenbar zwischen

$$u_0 = f^{(n)}_{(x)}$$

und

$$u_1 = f^{(n)}_{(x)} + hf^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{1.2} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots$$

oder also zwischen $f^{(n)}_{(x)}$ und $f^{(n)}_{(x+h)}$ und kann folglich unter der Form $f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}$ gedacht werden.

Haben dagegen die Glieder in u einen einfachen Zeichenwechsel, so nehmen die Glieder der Reihe

$$u_1 - u = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] hf^{(n+1)}_{(x)} + \left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] h^2 f^{(n+2)}_{(x)} +$$

ebenfalls von Anfang an ab und es ist daher

$$u_1 - u \lessgtr 0\,,$$

wobei, wie im Folgenden durchgehend, das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $f^{(n)}_{(x)}$ positiv oder negativ ist.

Da ferner:

$$u - u_0 = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots$$

so folgt aus gleichem Grunde:

$$u - u_0 \lessgtr 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$u_0 \gtrless u \gtrless u_1$$

und kann also auch in diesem Falle u in der Form $f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}$ dargestellt werden.

Durch eine analoge Betrachtung gelangt man zu diesem Resultate auch in dem Fall, wenn ein Zeichenwechsel erst zwischen Gruppen gleicher Zeichen stattfindet.

Übrigens lässt sich der in Rede stehende Ausdruck von u unabhängig von den bisherigen Voraussetzungen auf einem Wege erlangen, welchen ich in einem, 1859 (Annali di Matematica, von Tortolini, Nr. 3) erschienenen Aufsatze befolgt habe, und wobei von der für u bestehenden Gleichung

$$F(u) = u - f^{(n)}_{(x)} + \frac{h}{n}\left[\frac{du}{dh} - \frac{du}{dx}\right] = 0$$

Gebrauch gemacht wird, die sich unmittelbar aus

$$f(x+h) = f(x) + hf^{1}_{(x)} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}_{(x)} + \frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}\,.\,u$$

ergibt.

Man setze für u nach einander die Ausdrücke:

$$u_0 = f^{(n)}_{(x)} \qquad , \qquad u_1 = f^{(n)}_{(x+h)}$$

so wird sich ergeben:

$$F(u_0) = -\frac{h}{n} f^{(n+1)}_{(x)} \qquad , \qquad F(u_1) = f^{(n)}_{(x+h)} - f^{(n)}_{(x)}$$

Nimmt $f^{(n)}_{(z)}$ von $z = x$ bis $x+h$ stetig entweder zu oder ab, so haben bekanntlich $hf^{(n+1)}_{(x)}$ und $f^{(n)}_{(x+h)} - f^{(n)}_{(x)}$ das gleiche, folglich $F(u_0)$ und $F(u_1)$ das entgegengesetzte Zeichen, und muss, weil zumal u_0 und u_1 besondere Werthe einer und derselben Function $f^{(n)}_{(z)}$ sind, nothwendig zwischen u_0 und u_1 ein Werth u von der Form $f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}$ liegen, wofür $F(u) = 0$ wird, wie es die Bedingungsgleichung fordert.

Geht aber $f^{(n)}_{(z)}$ während z von x bis $x+h$ sich ändert, ein oder mehrere Male vom Wachsen in das Abnehmen oder umgekehrt über, und ist ν die Anzahl dieser Übergänge, so gibt es nicht nur einen, sondern $\nu + 1$ Werthe von ε, wofür $u = f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}$ der Gleichung $F(u) = 0$ genügt, wie nicht näher gezeigt zu werden braucht.

In allen Fällen kann also, wenn nur $f^{(n)}_{(z)}$, folglich auch alle niedrigeren Differentialquotienten, einschliesslich $f(z)$, von $z = x$ bis $x+h$ endlich und stetig bleiben:

$$u = f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

gesetzt werden, einerlei, ob h positiv oder negativ ist.

3.

Zur Ermittelung der genaueren Formen des Restes, wovon oben die Rede war, ergeben sich aus den folgenden Bemerkungen wenigstens einige Anhaltspunkte.

Da es sich hiebei um die nähere Kenntniss von ζ in der Gleichung $u = f^{(n)}_{(x+\zeta)}$ handelt, so kann man damit beginnen, für ζ eine Reihenform zu suchen. Hierin aber liegt eine Aufgabe der Umformung unendlicher Reihen von allgemeinerer Bedeutung, welche eine nähere Besprechung zu verdienen scheint.

Etwas allgemeiner gefasst, lässt sich die Aufgabe wie folgt stellen. Z, Z_1, Z_2 . . . sind gegebene Functionen von x, frei von der Veränderlichen h, nach deren Potenzen die umzuformende Reihe:

$$Z + hZ_1 + h^2 Z_2 + \ldots$$

geordnet ist; $F(y)$ ist eine gegebene Function, deren Argument y in Form einer unendlichen Reihe

$$y = z + hz_1 + h^2 z_2 + \ldots$$

worin z, z_1, z_2 . . . unbekannte Functionen von x allein bezeichnen, so bestimmt werden soll, dass die gegebene Reihe

$$Z + hZ_1 + h^2 Z_2 + \ldots + h^n Z_n + \ldots = F(z + hz_1 + h^2 z_2 + \ldots + h^n z_n + \ldots) \tag{1}$$

werde.

Gleichungen zur Bestimmung der z lassen sich auf mehreren Wegen erhalten, wovon der nächstliegende etwa der folgende ist.

Da für $h = 0$ sich

$$Z = F(z)$$

ergibt, so darf z als bekannt vorausgesetzt werden.

Man kann nun die Gleichung (1) nach h wiederholt differentiiren und dann $h = 0$ setzen, wodurch sich Gleichungen von der Form:

$$n!\, Z_n = \left[\frac{d^n F(y)}{dh}\right]_0$$

ergeben, aus welchen sich z_1, z_2 . . . nach einander berechnen lassen.

Übrigens wird man bequemer zu jenen Gleichungen dadurch gelangen, dass man

$$\zeta = hz_1 + h^2 z_2 + h^3 z_3 + \ldots$$

setzt, die Gleichung (1) in der Form

$$Z + hZ_1 + h^2 Z_2 + \ldots + h^n Z_n + \ldots = \tag{2}$$

$$F(z) + \zeta F'_{(z)} + \frac{\zeta^2}{2!} F''_{(z)} + \ldots + \frac{\zeta^n}{n!} F^{(n)}_{(z)} + \ldots$$

betrachtet und nun die Coëfficienten von h, h^2, h^3 . . . der beiden Entwickelungen einander gleichsetzt, was offenbar damit übereinkommt, dass man diese Gleichung, allgemein n mal nach h differentiirt und dann wieder $h = 0$ setzt. Die Differentiation wird durch diese letztere Bemerkung auf jene der Potenzen von ζ zurückgebracht, indem man erhält:

$$n!\, Z_n = F'_{(z)} \frac{d^n \zeta}{dh^n} + \frac{F''_{(z)}}{2!} \frac{d^n(\zeta^2)}{dh^n} + \frac{F'''_{(z)}}{3!} \frac{d^n(\zeta^3)}{dh^n} + \ldots + \frac{F^{(n)}_{(z)}}{n!} \frac{d^n(\zeta^n)}{dh^n} \text{ für } h = 0.$$

Allerdings lassen sich auch in dieser Darstellung nur die Anfangs- und Endglieder ohne weitläufige Unterscheidungen allgemein angeben. Man erhält nämlich:

Wenn $n = 2m$ gerade ist:

$$Z_{2m} =$$

$$z_{2m} F'_{(z)} + \left[\tfrac{1}{2} z_m^2 + z_1 z_{2m-1} + \cdot\cdot + z_{m-1} z_{m+1}\right] F''_{(z)} + \cdot\cdot + z_1^{2m-2} z_2 \cdot \frac{F_{(z)}^{(2m-1)}}{(2m-2)!} + z_1^{2m} \cdot \frac{F_{(z)}^{(2m)}}{(2m)!}$$

und wenn $n = 2m+1$ ungerade ist:

$$Z_{2m+1} =$$

$$z_{2m+1} F'_{(z)} + \left[z_1 z_{2m} + z_2 z_{2m-1} + \cdot\cdot + z_m z_{m+1}\right] F'_{(z)} + \cdot\cdot + z_1^{2m-1} z_2 \cdot \frac{F_{(z)}^{(2m)}}{(2m-1)!} + z_1^{2m+1} \cdot \frac{F_{(z)}^{(2m+1)}}{(2m+1)!}$$

Die in Frage stehenden Bedingungsgleichungen können jedoch aus (2) in einer wesentlich andern Form entwickelt werden, wenn man sich der bekannten Art, den polynomischen Lehrsatz auszudrücken, bei Bestimmung der Coëfficienten von h^n bedient. Auf der linken Seite jener Gleichung ist dieser Coëfficient $= Z_n$; auf der rechten Seite werden alle genannten Coëfficienten aus

$$\frac{\zeta^i}{i!} F_{(z)}^{(i)} \quad \text{oder} \quad \left[h z_1 + h^2 z_2 + \cdot\cdot\right]^i \cdot \frac{F_{(z)}^{(i)}}{i!}$$

erhalten, wenn unter i die Zahlen 1, 2, 3 . . . n verstanden werden.

Nun wird nach dem polynomischen Lehrsatze die Gesammtheit aller h^n als Factor enthaltender Glieder der Entwickelung von $\left[h z_1 + h^2 z_2 + \ldots\right]^i$ aus dem Ausdruck

$$\frac{i!}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$$

gefunden, wenn $i_1, i_2 \ldots i_n$ positive ganze Zahlen, die Null mit einbegriffen, vorstellen, welche den beiden Bedingungen:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdot\cdot + i_n = i$$

$$i_1 + 2 i_2 + 3 i_3 + \cdot\cdot + n i_n = n$$

entsprechen, und wenn für $i_1!$, $i_2!$ . . . die Einheit gesetzt wird, im Falle i_1, i_2 . . . Null ist.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man also:

$$Z_n = \Sigma \frac{z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!} F_{(z)}^{(i)}$$

und können hieraus alle in Rede stehenden Gleichungen für Z_1, Z_2 . . . abgeleitet werden, wenn man nach einander die Werthe $i = 1$, 2, 3 . . . zu Grunde legt und alle zulässigen Werthe von i_1, i_2 . . . i_n den angegebenen Bedingungen entsprechend aufsucht.

Befolgt man das eine oder das andere Verfahren, so werden sich folgende Resultate ergeben:

$$Z_1 = z_1 F'_{(z)}$$

$$Z_2 = z_2 F'_{(z)} + \frac{z_1^2}{2!} F''_{(z)} \tag{3}$$

$$Z_3 = z_3 F'_{(z)} + z_2 z_1 F''_{(z)} + \frac{z_1^3}{3!} F'''_{(z)}$$

$$Z_4 = z_4 F'_{(z)} + \left[z_3 z_1 + \frac{z_2^2}{2}\right] F''_{(z)} + \frac{z_2 z_1^2}{2\,!} F'''_{(z)} + \frac{z_1^4}{4\,!} F^{IV}_{(z)}$$

$$Z_5 = z_5 F'_{(z)} + \left[z_4 z_1 + z_3 z_2\right] F''_{(z)} + \frac{z_3 z_1^2 + z_2^2 z_1}{2} F'''_{(z)} + \frac{z_2 z_1^3}{3\,!} F^{IV}_{(z)} + \frac{z_1^5}{5\,!} F^{V}_{(z)}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich z_1, z_2, z_3 ... unzweideutig bestimmen.

Obgleich die wirkliche Berechnung der z in gegebenen Fällen aus diesen Gleichungen zu geschehen hat, so mag doch eine Darstellung der Bedingungsgleichungen, welche deren gesetzmässige Bildung leichter, als dies oben der Fall ist, erkennen lässt, nicht unerwähnt bleiben. Man gelangt dazu aus (1) mittelst der Gleichungen:

$$\frac{dZ}{dx} + h\frac{dZ_1}{dx} + h^2\frac{dZ_2}{dx} + \ldots = \left[\frac{dz}{dx} + h\frac{dz_1}{dx} + h^2\frac{dz_2}{dx} + \ \ldots\right] F'_{(y)}$$

$$Z_1 + 2hZ_2 + 3h^2 Z_3 + \ldots = \left[\ z_1 + 2hz_2 + 3h^2 z_3 + \ \ldots\right] F'_{(y)}$$

oder, wenn man $F'_{(y)}$ eliminirt:

$$\left[z_1 + 2hz_2 + 3h^2 z_3 + 4h^3 z_4 + \ldots\right]\left[\frac{dZ}{dx} + h\frac{dZ_1}{dx} + h^2\frac{dZ_2}{dx} + h^3\frac{dZ_3}{dx} + \ldots\right] =$$

$$\left[Z_1 + 2hZ_2 + 3h^2 Z_3 + 4h^3 Z_4 + \ldots\right]\left[\frac{dz}{dx} + h\frac{dz_1}{dx} + h^2\frac{dz_2}{dx} + h^3\frac{dz_3}{dx} + \ldots\right]$$

Durch Vergleichung der entsprechenden Coëfficienten von h erhält man nun:

$$z_1\frac{dZ}{dx} = Z_1\frac{dz}{dx}$$

$$z_1\frac{dZ_1}{dx} + 2z_2\frac{dZ}{dx} = Z_1\frac{dz_1}{dx} + 2Z_2\frac{dz}{dx}$$

$$z_1\frac{dZ_2}{dx} + 2z_2\frac{dZ_1}{dx} + 3z_3\frac{dZ}{dx} = Z_1\frac{dz_2}{dx} + 2Z_2\frac{dz_1}{dx} + 3Z_3\frac{dz}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1\frac{dZ_{n-1}}{dx} + 2z_2\frac{dZ_{n-2}}{dx} + 3z_3\frac{dZ_{n-3}}{dx} + \ldots + nz_n\frac{dZ}{dx} =$$

$$Z_1\frac{dz_{n-1}}{dx} + 2Z_2\frac{dz_{n-2}}{dx} + 3Z_3\frac{dz_{n-3}}{dx} + \ \ldots + nZ_n\frac{dz}{dx}$$

Um daraus die vorigen Resultate wieder zu erhalten, braucht man blos zu bemerken, dass aus der Gleichung

$$Z = F_{(z)} \qquad \text{folgt:} \quad \frac{dZ}{dx} = F'_{(z)}\frac{dz}{dx}$$

dass also:

$$Z_1 = z_1 F'_{(z)}$$

Als sehr einfaches Beispiel will ich den Fall, in welchem die Grössen Z_1, Z_2, Z_3 ... von x unabhängig oder constant sind, und blos Z eine Function von x ist, etwas näher ausführen. Es sei, dieser Annahme entsprechend:

$$Z = x\ , \quad Z_1 = a_1\ , \quad Z_2 = a_2\ , \quad Z_3 = a_3\ , \ \ldots Z_n = a_n \ \ldots$$

und aus der Gleichung:

$$x = F_{(z)}$$

folge:

$$z = f_{(x)}$$

Dann ist:

$$\frac{dZ}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{dZ_1}{dx} = \frac{dZ_2}{dx} = \ldots = \frac{dZ_n}{dx} = 0$$

ferner:

$$\frac{dz}{dx} = f'_{(x)}$$

und erhält man zur Bestimmung der unbekannten $z_1, z_2, z_3 \ldots$ die Gleichungen:

$$z_1 = a_1 \frac{dz}{dx}$$

$$2z_2 = a_1 \frac{dz_1}{dx} + 2a_2 \frac{dz}{dx}$$

$$3z_3 = a_1 \frac{dz_2}{dx} + 2a_2 \frac{dz_1}{dx} + 3a_3 \frac{dz}{dx}$$

$$4z_4 = a_1 \frac{dz_3}{dx} + 2a_2 \frac{dz_2}{dx} + 3a_3 \frac{dz_1}{dx} + 4a_4 \frac{dz}{dx}$$

$$5z_5 = a_1 \frac{dz_4}{dx} + 2a_2 \frac{dz_3}{dx} + 3a_3 \frac{dz_2}{dx} + 4a_4 \frac{dz_1}{dx} + 5a_5 \frac{dz}{dx}$$

u. s. f. Hieraus ergibt sich:

$$z_1 = a_1 f'_{(x)}$$

$$z_2 = \frac{a_1^2}{2!} f''_{(x)} + a_2 f_{(x)}$$

$$z_3 = \frac{a_1^3}{3!} f'''_{(x)} + a_1 a_2 f''_{(x)} + a_3 f'_{(x)}$$

$$z_4 = \frac{a_1^4}{4!} f^{IV}_{(x)} + \frac{a_1^2 a_2}{2!} f'''_{(x)} + (a_1 a_3 + \tfrac{1}{2} a_2^2) f''_{(x)} + a_4 f'_{(x)}$$

$$z_5 = \frac{a_1^5}{5!} f^{V}_{(x)} + \frac{a_1^3 a_2}{3!} f^{IV}_{(x)} + \frac{a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2}{2!} f'''_{(x)} + (a_1 a_4 + a_2 a_3) f''_{(x)} + a_5 f'_{(x)}$$

$$z_6 = \frac{a_1^6}{6!} f^{VI}_{(x)} + \frac{a_1^4 a_2}{4!} f^{V}_{(x)} + \frac{2a_1^3 a_3 + 3a_1^2 a_2^2}{3!\,2} f^{IV}_{(x)} + \frac{3a_1^3 a_3 + 6a_1 a_2 a_3 + a_2^3}{2!\,3} f'''_{(x)}$$

$$+ (a_1 a_5 + a_2 a_4 + \tfrac{1}{2} a_3^2) f''_{(x)} + a_6 f'_{(x)}$$

u. s. f.

Diese Werthe sind für die z in die Gleichung:

$$x + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots = F(z + z_1 h + z_2 h^2 + z_3 h^3 + \ldots)$$

zu setzen, worin der Zusammenhang

$$x = F(z) \quad , \quad z = f(x)$$

besteht. Es ist klar, dass, wenn man z den besonderen Werth z_0 beilegt und $a_n = \frac{F^{(n)}_{(z_0)}}{n!}$ setzt, wegen $F'_{(z)} f'_{(x)} = 1$ u. s. w. die Gleichungen:

$$z_1 = 1 \;,\quad z_2 = z_3 = z_4 = \ldots = 0$$

sich ergeben müssen, so dass man die Taylor'sche Reihe

$$F(z_0) + hF'_{(z_0)} + \frac{h^2}{2!}F''_{(z_0)} + \ldots = F(z_0 + h)$$

wieder findet und damit die für die z angegebenen Ausdrücke verificirt.

4.

Nach dieser Digression kehre ich zu der im vorigen Artikel bezeichneten Aufgabe zurück, welche darin besteht, in der Gleichung:

$$u = f^{(n)}_{(x)} + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots = f^{(n)}_{(x+\zeta)}$$

den Zuwachs ζ nach Potenzen von h zu entwickeln. Da hier in den Gleichungen (3) des vorigen Artikels

$$Z = f^{(n)}_{(x)} \quad , \quad Z_m = \frac{f^{(n+m)}_{(x)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} \;,\quad F(z) = f^{(n)}_{(x)} \;,\quad z = x$$

zu setzen ist, so ergeben sich für die z die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{f^{(n+1)}_{(x)}}{n+1} = z_1 . f^{(n+1)}_{(x)}$$

$$\frac{f^{(n+2)}_{(x)}}{(n+1)(n+2)} = z_2 . f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{z_1^2}{2} f^{(n+2)}_{(x)}$$

$$\frac{f^{(n+3)}_{(x)}}{(n+1)(n+2)(n+3)} = z_3 f^{(n+1)}_{(x)} + z_2 z_1 f^{(n+2)}_{(x)} + \frac{z_1^3}{6} f^{(n+3)}_{(x)}$$

u. s. f. Man findet hieraus:

$$z_1 = \frac{1}{n+1}$$

$$z_2 = \frac{n}{2(n+1)^2(n+2)} \cdot \frac{f^{(n+2)}_{(x)}}{f^{(n+1)}_{(x)}}$$

$$z_3 = \frac{n}{6(n+1)^3(n+2)} \left[\frac{5n+7}{n+3} \frac{f^{(n+3)}_{(x)}}{f^{(n+1)}_{(x)}} - 3 \left(\frac{f^{(n+2)}_{(x)}}{f^{(n+1)}_{(x)}} \right)^2 \right]$$

u. s. f.

Setzt man diese Werthe von z_2 und z_3 in die Gleichung

$$u = f^{(n)}_{\left(x + \frac{h}{n+1} + z_2 h^2 + z_3 h^3 + \ldots\right)}$$

so stellt sie die verlangte Entwickelung dar, welche nun bezüglich des Werthes von ζ einige bemerkenswerthe Anhaltspunkte bietet. Man ersieht nämlich aus ihr, dass, wenn es sich um eine erste Annäherung für ζ in dem Falle handelt, wenn h ein hinreichend kleiner positiver, n aber ein gehörig grosser Werth beigelegt wird, nicht wie dies bei der gewöhnlichen Restformel geschieht, geradezu ein unbestimmter Bruchtheil von h, sondern der Bruch $\dfrac{h}{n+1}$ in das Auge zu fassen sei, und dass ζ, je nachdem z_2 positiv oder negativ ist, oder also $f^{(n+1)}_{(x)}$ und $f^{(n+2)}_{(x)}$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, über oder unter $\frac{h}{n+1}$ liegen werde.

Allerdings ist dies blos eine Bemerkung, welche sich auf Voraussetzungen rücksichtlich h und n und die nicht vollständig vorliegende Entwickelung $z_2 h^2 + z_3 h^3 + \ldots$ stützt, und welche einer näheren Untersuchung bedarf. Hierzu nun bieten sich mehrere Wege an, die gegenüber der vorigen Betrachtung den Vortheil haben, dass sie die zu Grunde liegenden Annahmen vollständig überblicken lassen.

Zunächst werde wieder die ursprünglich gegebene Reihe:

$$u = f^{(n)}_{(x)} + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots$$

zu Grunde gelegt und angenommen, es bestehe zwischen den endlich bleibenden Grössen

$$f^{(n)}_{(x)}, \quad h f^{(n+1)}_{(x)}, \quad h^2 f^{(n+2)}_{(x)}, \quad h^3 f^{(n+3)}_{(x)}, \ldots$$

ein regelmässiger Zeichenwechsel und es werden die Glieder von u schon von Anfang an und in dem Masse kleiner, dass die Reihe auch ohne Zeichenwechsel convergirt.

Man bringe mit dieser Reihe die Entwickelung von $f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ in Verbindung und setze:

$$u_2 = f^{(n)}_{(x)} + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{2!(n+1)^2} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$$

so wird vermöge der Voraussetzungen auch diese Reihe einen regelmässigen Zeichenwechsel besitzen, von Anfang an abnehmen und convergiren.

Nun besteht in den beiden Reihen:

$$u - u_0 = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}_{(x)} + \frac{h^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} f^{(n+3)}_{(x)} + \ldots$$

$$u - u_2 = \left[\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2!}\right] \frac{h^2}{(n+1)^2} f^{(n+2)}_{(x)} + \left[\frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{3!}\right] \frac{h^3}{(n+1)^3} f^{(n+3)}_{(x)} + \ldots$$

offenbar ein regelmässiger Zeichenwechsel und sind beide von den ersten Gliedern an abnehmend. Die beiden ersten Glieder haben aber entgegengesetzte Zeichen, folglich ist:

$$u - u_0 \lessgtr 0 \quad \text{oder} \quad u_0 \gtrless u$$

und

$$u - u_2 \gtrless 0 \quad \text{oder} \quad u \gtrless u_2$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem $f^{(n)}_{(x)}$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt nun:

$$u_0 \gtrless u \gtrless u_2$$

und es liegt also u zwischen $u_0 = f^{(n)}_{(x)}$ und $u_2 = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$.

Unter den gemachten Voraussetzungen kann also der Factor

$$u = f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$$

gesetzt werden

Unter denselben Voraussetzungen, jedoch mit Beseitigung des Zeichenwechsels, verbinde man die Reihe:

$$u_1 = f^{(n)}_{(x)} + h f^{(n+1)}_{(x)} + \frac{h^2}{2\,!} f^{(n+2)}_{(x)} + \ldots = f^{(n)}_{(x+h)}$$

mit jener für u und vergleiche die Reihe:

$$u - u_1 = \left[\frac{1}{n+1} - 1\right] h f^{(n+1)}_{(x)} + \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2\,!}\right] h^2 f^{(n+2)}_{(x)} + \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{3\,!}\right] h^3 f^{(n+3)}_{(x)} + \ldots$$

mit der obigen für $u - u_2$, so sieht man, dass:

$$u - u_1 \lesseqgtr 0 \quad \text{oder} \quad u \lesseqgtr u_1$$

und

$$u - u_2 \gtreqless 0 \quad \text{oder} \quad u \gtreqless u_2$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem $f^{(n)}_{(x)}$, $h f^{(n+1)}_{(x)}$, ... positiv oder negativ sind. Man hat also:

$$u_2 \lesseqgtr u \lesseqgtr u_1$$

und es liegt u zwischen $u_2 = f^{(n)}_{(x + \frac{h}{n+1})}$ und $u_1 = f^{(n)}_{(x+h)}$, so dass, wenn sämmtliche Glieder von u dasselbe Zeichen haben:

$$u = f^{(n)}_{(x + \frac{h}{\varepsilon n + 1})}$$

gesetzt werden kann.

5.

Obgleich die folgende Begründung der beiden vorhin erhaltenen Resultate sich ebenfalls auf gewisse Convergenzbedingungen stützt, so verdient sie doch als auf einer bemerkenswerthen Transformation der Reihe u beruhend, hier angeführt zu werden. Diese Transformation ergibt sich als specieller Fall einer Gleichung, welche ich in dem Aufsatze „Über die Umformung unendlicher Reihen" im 51. Bande der Sitzungsberichte hergeleitet habe, und welche heisst:

$$f(x_0) + \frac{\alpha}{\gamma} x f'_{(x_0)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2 f''_{(x_0)}}{1\,.\,2} + \ldots =$$

$$f(x_0+x) + \frac{\alpha-\gamma}{\gamma} x f'_{(x_0+x)} + \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2 f''_{(x_0+x)}}{1\,.\,2} + \ldots$$

Setzt man darin x für x_0, h für x, $f^{(n)}_{(x)}$ für $f_{(x)}$, ferner $\alpha = 1$, $\gamma = n+1$, so verwandelt sich die erste Reihe in jene für u und man erhält, wie leicht zu sehen:

$$u = f^{(n)}_{(x+h)} - \frac{nh}{n+1} f^{(n+1)}_{(x+h)} + \frac{n h^2}{2\,!\,(n+2)} f^{(n+2)}_{(x+h)} - \frac{n h^3}{3\,!\,(n+3)} f^{(n+3)}_{(x+h)} + \ldots \tag{1}$$

Übrigens kann man hierzu gelangen, ohne jene allgemeine Gleichung als bekannt vorauszusetzen. Die Brüche, welche in der ursprünglichen Reihe für u vorkommen, und deren Nenner $(n+1)(n+2)$, $(n+1)(n+2)(n+3)$ ... sind, lassen sich nämlich insgesammt auf folgende Art in ihre einfachen Partialbrüche zerlegen. Die Partialbrüche, deren Nenner $n+r$ ist, entspringen zum ersten Male aus dem Gliede von u, welches mit $h^r f^{(n+r)}_{(x)}$ multiplicirt ist, und kommen dann in jedem folgenden Gliede wieder vor. Allgemein ist nun der jenen Nenner enthaltende Partialbruch, welcher aus dem Gliede

$$\frac{h^{r+\nu}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r+\nu)} f^{(n+r+\nu)}_{(x)}$$

hervorgeht, nach bekannten Regeln berechnet, der folgende:

$$\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!\,\nu!}\;\frac{h^{r+\nu}}{n+r}f^{(n+r+\nu)}_{(x)}$$

Aus ihm ergeben sich alle genannten Partialbrüche, wenn man $\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$ setzt, ihre Summe ist also:

$$\frac{(-1)^{r-1}\,h^r}{(r-1)!\,(n+r)}\left[f^{(n+r)}_{(x)}+hf^{(n+r+1)}_{(x)}+\frac{h^2}{2\,!}f^{(n+r+2)}_{(x)}+\ldots\right]$$
$$=\frac{(-1)^{r-1}\,h^r}{(r-1)!\,(n+r)}f^{(n+r)}_{(x)}$$

Daraus wird nun u erhalten, wenn man $r=1,\ 2,\ 3\ldots$ setzt und alle Ausdrücke addirt.

Es ergibt sich hiernach die folgende Gleichung:

$$u=f^{(n)}_{(x)}+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}_{(x+h)}-\frac{h^2}{1\,!\,(n+2)}f^{(n+2)}_{(x+h)}+\frac{h^3}{2\,!\,(n+3)}f^{(n+3)}_{(x+h)}-\ldots \tag{2}$$

Sie stellt ebenfalls eine Transformation von u dar, stimmt aber mit jener in (1) nicht überein; offenbar convergirt sie im Anfang rascher als die letztere. Übrigens braucht man nur die Gleichung:

$$0=-f^{(n)}_{(x)}+f^{(n)}_{(x+h)}-hf^{(n+1)}_{(x+h)}+\frac{h^2}{2\,!}f^{(n+2)}_{(x+h)}-\frac{h^3}{3\,!}f^{(n+3)}_{(x+h)}+\ldots$$

hinzuzufügen, um sogleich (1) zu erhalten.

Setzt man nun wieder die Entwickelung (1) als convergent und schon vom ersten Gliede an als abnehmend voraus, nimmt man ferner an, es haben die Grössen:

$$f^{(n)}_{(x+h)}\,,\quad hf^{(n+1)}_{(x+h)}\,,\quad h^2f^{(n+2)}_{(x+h)}\,,\ldots$$

regelmässig abwechselnde Zeichen und setzt man analog wie früher:

$$u_0=f^{(n)}_{(x)} \tag{3}$$

$$u_2=f^{(n)}_{(x+h)}-\frac{nh}{n+1}f^{(n+1)}_{(x+h)}+\frac{n^2h^2}{2!\,(n+1)^2}f^{(n+2)}_{(x+h)}-\frac{n^3h^3}{3!\,(n+1)^3}f^{(n+3)}_{(x)}+\ldots=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})} \tag{4}$$

so folgt, wenn man die Gleichungen (2) und (3), sodann (1) und (4) von einander abzieht:

$$u-u_0=\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}_{(x+h)}-\frac{h^2}{1\,!\,(n+2)}f^{(n+2)}_{(x+h)}+\frac{h^3}{2\,!\,(n+3)}f^{(n+3)}_{(x+h)}-\ldots$$

$$u-u_2=+\left[\frac{n}{n+2}-\frac{n^2}{(n+1)^2}\right]\frac{h^2}{2\,!}f^{(n+2)}_{(x+h)}-\left[\frac{n}{n+3}-\frac{n^3}{(n+1)^3}\right]\frac{h^3}{3\,!}f^{(n+3)}_{(x+h)}+\ldots$$

Die Ausdrücke in den Klammern der letztern Reihe sind positiv; vermöge des vorausgesetzten Zeichenwechsels der übrigen Factoren haben also die Glieder jeder Reihe unter sich gleiche Zeichen, aber diese Zeichen sind in der einen Reihe die entgegengesetzten von jenen der andern, somit hat man

$$u-u_0 \lessgtr 0 \quad \text{oder} \quad u \lessgtr u_0$$

und

$$u-u_2 \gtrless 0 \quad \text{oder} \quad u \gtrless u_2$$

folglich ist:

$$u_0 \gtrless u \gtrless u_2$$

woraus sich dieselben Schlüsse wie im vorigen Artikel ergeben.

Unter denselben Voraussetzungen, jedoch unter der Annahme, dass **kein** Zeichenwechsel stattfinde, erhält man, wenn wieder:

$$u_1 = f^{(n)}_{(x+h)}$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$u - u_1 = -\frac{nh}{n+1} f^{(n+1)}_{(x+h)} + \frac{nh^2}{2\,!\,(n+2)} f^{(n+2)}_{(x+h)} - \frac{nh^3}{3\,!\,(n+3)} f^{(n+3)}_{(x+h)} + \ldots$$

$$u - u_2 = +\left[\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right]\frac{h^2}{2\,!} f^{(n+2)}_{(x+h)} - \left[\frac{n}{n+3} - \frac{n^3}{(n+1)^3}\right]\frac{h^3}{3\,!} f^{(n+3)}_{(x+h)} + \ldots$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern sind nicht nur positiv, sondern auch abnehmende Grössen, beide Reihen nehmen von den ersten Gliedern an ab und haben einen regelmässigen Zeichenwechsel; die Zeichen dieser ersten Glieder aber sind entgegengesetzt, folglich hat man wie im vorigen Artikel:

$$u - u_1 \lessgtr 0 \quad \text{und} \quad u - u_2 \gtrless 0$$

woraus sich wie dort dieselben Schlüsse wieder ergeben.

6.

Nach den Betrachtungen der Artikel 4 und 5 hängt die Giltigkeit der beiden Formen

$$u = f^{(n)}_{\left(x + \frac{\varepsilon h}{n+1}\right)} \quad \text{und} \quad u = f^{(n)}_{\left(x + \frac{h}{\varepsilon n+1}\right)}$$

blos noch davon ab, dass die Glieder der Reihe u von Anfang an abnehmen und die Reihe selbst convergent sei. Was nun aber besonders bemerkt zu werden verdient und zu einer weiteren Erörterung Anlass gibt, ist der eigenthümliche Umstand, dass die Voraussetzungen rücksichtlich des Zeichenwechsels und der Zeichenfolgen im Artikel 4 auf die Ausdrücke:

$$f^{(n)}_{(x)}, \quad hf^{(n+1)}_{(x)}, \quad h^2 f^{(n+2)}_{(x)}, \ldots$$

und im Artikel 5 auf die Ausdrücke:

$$f^{(n)}_{(x+h)}, \quad hf^{(n+1)}_{(x+h)}, \quad h^2 f^{(n+2)}_{(x+h)}, \ldots$$

sich beziehen und also diese beiden Reihen in genannter Rücksicht einander substituirt werden können. Die Vermuthung tritt hierdurch nahe, dass es überhaupt auf die Zeichen aller dieser Ausdrücke nicht ankommen werde und in weiterer Folge auch die Convergenzbedingung beseitigt werden könne.

Wie es sich damit verhalte, kann auf dem folgenden, von der Benützung unendlicher Reihen unabhängigen Wege genauer erörtert werden.

Der d'**Alembert**'sche Ausdruck für den Rest der Taylor'schen Reihe führt zu der Gleichung:

$$\frac{h^n}{n} u = \int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}_{(x+t)}\, dt$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$f^{(n)}_{(x+t)} = \varphi(t)$$

gesetzt wird:

$$\frac{h^n}{n} u = \int_0^h (h-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt$$

Bezeichnet nun a eine zwischen 0 und h liegende Grösse, deren nähere Bestimmung vorbehalten bleibt, so besteht nach der gewöhnlichen Restformel die Gleichung:

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\varphi'_{(a)} + \tfrac{1}{2}(t-a)^2\varphi''_{[a+\varepsilon(t-a)]}$$

und kann also

$$\frac{h^n}{n}u = \int_0^h (h-t)^{n-1}\left\{\varphi(a) + (h-a)\varphi'_{(a)} - (h-t)\varphi'_{(a)} + \tfrac{1}{2}(t-a)^2\varphi''_{[a+\varepsilon(t-a)]}\right\}.dt$$

gesetzt werden. Die Integration der drei ersten Glieder lässt sich ausführen und man erhält:

$$\frac{h^n}{n}u = \frac{h^n}{n}\varphi(a) + \left[\frac{h^n}{n}(h-a) - \frac{h^{n+1}}{n+1}\right]\varphi'_{(a)} + \tfrac{1}{2}\int_0^h (h-t)^{n-1}(t-a)^2\varphi''_{[a+\varepsilon(t-a)]}.dt$$

Dieser Ausdruck wird beträchtlich einfacher und, wie man sehen wird, zur nähern Bestimmung von u geeigneter, wenn man den Werth von a so bestimmt, dass der Coëfficient von $\varphi'(a)$ verschwindet, wenn man also:

$$\frac{1}{n}(h-a) - \frac{h}{n+1} = 0 \qquad \text{folglich} \quad a = \frac{h}{n+1}$$

setzt; denn die Gleichung verwandelt sich dann in die folgende:

$$\frac{h^n}{n}u = \frac{h^n}{n}\varphi\left(\frac{h}{n+1}\right) + \tfrac{1}{2}\int_0^h (h-t)^{n-1}\left(t-\frac{h}{n+1}\right)^2\varphi''\left[\frac{(1-\varepsilon)h+(n+1)\varepsilon t}{n+1}\right].dt$$

welche, wenn ht für t gesetzt und φ wieder eliminirt wird, in die Form:

$$u = f^{(n)}_{\left(x+\frac{h}{n+1}\right)} + \frac{n}{2}h^2\int_0^1 (1-t)^{n-1}.\left(t-\frac{1}{n+1}\right)^2.f^{(n+2)}_{\left[x+\frac{1-\varepsilon+(n+1)\varepsilon t}{n+1}h\right]}.dt \tag{1}$$

gebracht werden kann.

Rücksichtlich des Ausdruckes unter dem Integralzeichen bemerke man nun, dass das Product der beiden ersten Factoren innerhalb der Grenzen allerdings zweimal und zwar für $t = \frac{1}{n+1}$ und für $t=1$ verschwindet, aber sein Zeichen nicht ändert, sondern stets positiv bleibt, und dass, was den dritten Factor betrifft, der von t abhängige Theil des Arguments, nämlich

$$\frac{1-\varepsilon+(n+1)\varepsilon t}{n+1}.h$$

möglicherweise alle Werthe von 0 bis h annehmen kann, während t von 0 bis 1 wächst, weil ε innerhalb des Intervalles von 0 bis 1 völlig unbekannt ist, und für $\varepsilon = 1$, $t=0$ dieser Bruch $=0$, für $\varepsilon=1$, $t=1$ dagegen $=h$ wird.

Um also auf das Zeichen des Integralwerthes einen sichern Schluss ziehen zu können, muss unterschieden werden, ob $f^{(n+2)}_{(z)}$ in dem Intervall von $z=x$ bis $z=x+h$ positiv oder negativ bleibt.

Wird nun zunächst angenommen, $f^{(n+2)}_{(z)}$ bleibe beständig **positiv**, so ist auch das Integral positiv, folglich:

$$u > f^{(n)}_{\left(x+\frac{h}{n+1}\right)}$$

und wächst $f^{(n+1)}_{(z)}$ unausgesetzt, während z von x in $x+h$ übergeht. Ist aber $f^{(n+1)}_{(z)}$ eine bei diesem Übergang wachsende Function, so hängt es bekanntlich von dem Zeichen des Productes $hf^{(n+1)}_{(x)}$ ab, ob $f^{(n)}_{(z)}$ zugleich wächst oder abnimmt. Ist nämlich $hf^{(n+1)}_{(x)}$ positiv, so wächst $f^{(n)}_{(z)}$ ununterbrochen, während z von x in $x+h$ übergeht, ist aber $hf^{(n+1)}_{(x)}$ negativ, so nimmt $f^{(n)}_{(z)}$ für denselben Verlauf von z beständig ab.

Damit also $f^{(n)}_{(z)}$ den Werth von u darstellen könne, muss im erstern Falle z über $x+\frac{h}{n+1}$ hinaus, nämlich näher an $x+h$ gerückt, im letztern dagegen unter $x+\frac{h}{n+1}$, nämlich näher an x genommen, folglich im erstern Falle $z=x+\frac{h}{\varepsilon n+1}$, im letztern aber $z=x+\frac{\varepsilon h}{n+1}$ gesetzt werden.

Man schliesst hieraus, dass wenn $f^{(n+2)}_{(z)}$ von $z=x$ bis $x+h$ positiv bleibt:

$$u=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})} \quad \text{wenn} \quad hf^{(n+1)}_{(x)} \text{ positiv}$$

und

$$u=f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})} \quad \text{wenn} \quad hf^{(n+1)}_{(x)} \text{ negativ ist.}$$

Eine ähnliche Betrachtung ist für den Fall anzustellen, dass $f^{(n+2)}_{(z)}$ das negative Zeichen behält, also das Integral in der Gleichung für u negativ, folglich

$$u < f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$$

ist. In diesem Falle stellt $f^{(n+1)}_{(z)}$ eine beständig abnehmende Function dar; ob aber $f^{(n)}_{(z)}$ wachse oder abnehme, hängt wie vorhin davon ab, ob das Product $hf^{(n+1)}_{(x)}$ positiv oder negativ ist. Damit also $f^{(n)}_{(z)}$ den Werth von u darstellen könne, muss im erstern Falle, weil $f^{(n)}_{(z)}$ wächst, wenn z von x in $x+h$ übergeht, z näher als $x+\frac{h}{n+1}$ dem Werthe x liegen, im letztern Falle aber, wofür $f^{(n)}_{(z)}$ bei jenem Übergang von z abnimmt, muss z über $x+\frac{h}{n+1}$ hinaus, nämlich näher an $x+h$ liegen; folglich muss im erstern Falle $z=x+\frac{\varepsilon h}{n+1}$, im letztern dagegen $z=x+\frac{h}{\varepsilon n+1}$ gesetzt werden.

Man schliesst hieraus, dass wenn $f^{(n+2)}_{(z)}$ von $z=x$ bis $x+h$ negativ bleibt:

$$u=f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})} \quad \text{wenn} \quad hf^{(n+1)}_{(x)} \text{ positiv}$$

und

$$u=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})} \quad \text{wenn} \quad hf^{(n+1)}_{(x)} \text{ negativ ist.}$$

Die hier unterschiedenen vier Fälle lassen sich in die folgenden zwei zusammenziehen. Behält von $z=x$ bis $z=x+h$

$$f^{(n+2)}_{(z)} \text{ mit } hf^{(n+1)}_{(x)} \text{ gleiches Zeichen,} \qquad \text{so ist } u=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})}$$

$$f^{(n+2)}_{(z)} \text{ mit } hf^{(n+1)}_{(x)} \text{ verschiedenes Zeichen, so ist } u=f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$$

wobei $\frac{\varepsilon h}{n+1}$ alle Werthe von 0 bis $\frac{h}{n+1}$ und $\frac{h}{\varepsilon n+1}$ alle Werthe von $\frac{h}{n+1}$ bis h darstellt. Wird von den Zeichenverhältnissen abstrahirt, so ergibt sich hieraus, wie man sieht, die gewöhnliche Restformel $u=f^{(n)}_{(x+\varepsilon h)}$ wieder.

Es ist beinahe überflüssig, zu bemerken, dass $f^{(n+2)}_{(z)}$ nicht in dem ganzen Intervall von $z=x$ bis $z=x+h$ eine Grösse von unveränderlichem Zeichen zu sein braucht, damit das Integral in der Gleichung (1) eine Grösse von bestimmtem Zeichen sei. In Folge der raschen Abnahme des Factors $(1-t)^{n-1}$ für nahe an der Einheit liegende Werthe von t ist es vielmehr leicht denkbar, dass $f^{(n+2)}_{(z)}$ für näher an $x+h$ liegende Werthe von z das Zeichen beliebig oft wechseln dürfe, ohne dass darum der ganze Integralwerth ein anderes Zeichen als das ihm für kleinere t zukommende erhält. Einen sichern Schluss in dieser Hinsicht zu ziehen, gestattet jedoch die obige Betrachtung wegen der Unbestimmtheit von ε nicht; eine weitere Einengung der vorhin angegebenen Grenzen von z wäre übrigens für die meisten Anwendungen auch ohne Bedeutung.

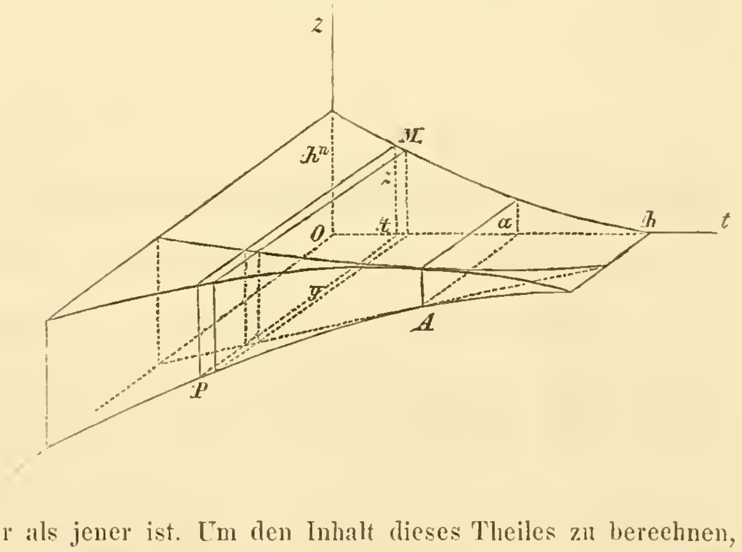
Die Resultate, welche früher mittelst der Betrachtung unendlicher Reihen und unter Voraussetzungen welche sich auf sämmtliche Differentialquotienten von $f^{(n)}_{(x)}$ erstrecken, erhalten wurden, sind jetzt von diesen Voraussetzungen befreit, an deren Stelle blos die Zeichen zweier Ausdrücke als Criterien für die Form des Arguments im Restausdrucke getreten sind.

Nicht ohne Interesse ist es, zu bemerken, dass sich die vorige Betrachtung in anderer Weise auf geometrischem Wege ausführen lässt. Ich beschränke mich dabei auf einen einzigen der unterschiedenen Fälle, da für die übrigen die Methode dieselbe bleibt. Insbesondere werde angenommen, $f^{(n)}_{(x+t)}$ behalte von $t=0$ bis $t=h$ das positive Zeichen und werde von $t=0$ an beständig kleiner; ausserdem sei $f^{(n+2)}_{(x+t)}$ in dem bezeichneten Intervall positiv. Dann lässt sich das Integral:

$$\frac{h^n}{n}u=\int_0^h (h-t)^{n-1} f^{(n)}_{(x+t)}\, dt$$

als den Inhalt eines Raumes betrachten, welcher (Fig. 1) die Fläche einer Curve in der ty Ebene, deren Ordinate $y=f^{(n)}_{(x+t)}$ ist, zur Basis hat, von einer cylindrischen Fläche, deren Leitlinie in der tz Ebene die Curve $z=(h-t)^{n-1}$ und deren Erzeugungslinie der y Axe parallel ist, begrenzt wird.

Fig. 1.



Dies vorausgesetzt, lege man an irgend einen Punkt A der Curve in der ty, dessen Abscisse a ist, eine Tangente und durch dieselbe eine zur z Axe parallele Ebene, welche den Annahmen zufolge im Innern des vorhin beschriebenen Raumes liegend einen Theil desselben begrenzt und also kleiner als jener ist. Um den Inhalt dieses Theiles zu berechnen, braucht man blos zu bemerken, dass, wenn η die Ordinate der Tangente bezeichnet, deren Gleichung:

$$\eta=f^{(n)}_{(x+a)}+(t-a)f^{(n+1)}_{(x+a)}$$

und folglich der genannte, von der tz Ebene aus gerechnete Raum

$$\int_0^h (h-t)^{n-1}\left[f^{(n)}_{(x+a)} + (t-a)f^{(n+1)}_{(x+a)}\right]dt$$

ist. Die Integration lässt sich ausführen und man erhält:

$$\frac{h^n}{n}u > \frac{h^n}{n}f^{(n)}_{(x+a)} + \left[\frac{h^n}{n}(h-a) - \frac{h^{n+1}}{n+1}\right]f^{(n+1)}_{(x+a)}$$

oder

$$u > f^{(n)}_{(x+a)} + \left[h-a-\frac{nh}{n+1}\right]f^{(n+1)}_{(x+a)}$$

Diese Relation findet immer Statt, welchen Werth a zwischen 0 und h annehmen mag, aber es wird von diesem Werthe abhängen, ob der Ausdruck rechts um mehr oder weniger von u verschieden ist. Das Maximum dieses Ausdruckes liegt u am nächsten. Der diesem Maximum entsprechende Werth von a lässt sich aber bestimmen. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$\alpha = f^{(n)}_{(x+a)} + \left[h-a-\frac{nh}{n+1}\right]f^{(n+1)}_{(x+a)}\,, \quad \text{so folgt:} \quad \frac{d\alpha}{da} = \left[h-a-\frac{nh}{n+1}\right]f^{(n+2)}_{(x+a)}$$

und dies verschwindet für:

$$a = \frac{h}{n+1}\,.$$

Zugleich findet man für diesen Werth von a:

$$\frac{d^2\alpha}{da^2} = -f^{(n+2)}_{\left(x+\frac{h}{n+1}\right)}$$

so dass, weil $f^{(n+2)}_{(x+a)}$ als positiv vorausgesetzt ist, der gefundene Werth von a in der That einem Maximum von α entspricht, welches $f^{(n)}_{\left(x+\frac{h}{n+1}\right)}$ ist. Da nun u noch grösser als dieses Maximum ist, $f^{(n)}_{(x+a)}$ aber abnimmt, während a von 0 in h übergeht, so muss $a < \frac{h}{n+1}$ sein und ist also

$$u = f^{(n)}_{\left(x+\frac{\varepsilon h}{n+1}\right)}$$

zu setzen. Aus demselben Gegensatze in der gleichzeitigen Änderung von $f^{(n)}_{(x+a)}$ und a folgt ferner, dass $af^{(n+1)}_{(x+a)}$ negativ bleiben, also von entgegengesetztem Zeichen mit $f^{(n+2)}_{\left(x+\frac{h}{n+1}\right)}$ sein müsse.

Es ist leicht einzusehen, dass umgekehrt für die Annahme $f^{(n)}_{(x+a)}$ wachse gleichzeitig mit a und $f^{(n+2)}_{(x+a)}$ bleibe von $a=0$ bis $a=h$ beständig negativ, der durch die Tangente des Punktes A bestimmte Raum grösser als u, sein dem Werthe von u am nächsten kommendes Minimum aber für $a=\frac{h}{n+1}$ erhalten werden würde. Dieses Minimum $=f^{(n)}_{\left(x+\frac{h}{n+1}\right)}$ ist immer noch grösser als u, damit also $f^{(n)}_{(x+a)}$ den Werth von u darstellen kann, muss das Argument verkleinert, also wieder

$$u = f^{(n)}_{\left(x+\frac{\varepsilon h}{n+1}\right)}$$

gesetzt werden. Da ferner $f^{(n)}_{(x+a)}$ mit a in diesem Falle gleichzeitig wächst, so bleibt $af^{(n+1)}_{(x+a)}$ von $a=0$ bis $a=h$ positiv, folglich wieder von entgegengesetztem Zeichen mit $f^{(n+1)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$.

Diese Ergebnisse stimmen genau mit den früheren überein. Wie man sieht, hatte die Betrachtung des Maximums und Minimumswerthes, respective des Kleinern und Grössern, den Zweck die grösste auf diesem Wege mögliche Annäherung an den wahren Werth des Arguments zu erreichen.

7.

Die vorhin eingeschlagenen, von der Betrachtung unendlicher Reihen unabhängigen Wege sind jedoch nicht die einzigen, welche zu den erhaltenen Resultaten führen. Auch aus der bereits im Artikel 2 benutzten Gleichung:

$$F(u) = u - f^{(n)}_{(x)} + \frac{h}{n}\left(\frac{du}{dh} - \frac{du}{dx}\right) = 0$$

lassen sich jene Resultate, zumal deren Form bereits gefunden ist, mit Leichtigkeit herleiten. Man findet nämlich, wenn in ihr einmal $u_0 = f^{(n)}_{(x)}$ und dann $u_2 = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ gesetzt wird, die Gleichungen:

$$F(u_0) = -\frac{h}{n} f^{(n+1)}_{(x)}$$

$$F(u_2) = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})} - f^{(n)}_{(x)} - \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$$

Der letztere Ausdruck lässt sich mittelst der gewöhnlichen Restformel, angewendet auf die beiden ersten Glieder der Taylor'schen Reihe, umgestalten. Da nämlich:

$$f^{(n)}_{(x)} = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})} - \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}_{(x+\frac{h}{n+1})} + \frac{h^2}{2(n+1)^2} f^{(n+2)}_{(x+\frac{h}{n+1}-\frac{\varepsilon h}{n+1})}$$

so sind nun, wenn der Kürze wegen δ für $1-\varepsilon$ gesetzt wird, die hier zu betrachtenden Gleichungen die folgenden:

$$F(u_0) = -\frac{h}{n} f^{(n+1)}_{(x)}, \qquad F(u_2) = -\frac{h^2}{2(n+1)^2} f^{(n+2)}_{(x+\frac{\delta h}{n+1})}$$

Hat nun $hf^{(n+1)}_{(x)}$ das entgegengesetzte Zeichen von $f^{(n+2)}_{(z)}$ für alle zwischen x und $x+\frac{h}{n+1}$ liegenden Werthe von z, so sind auch $F(u_0)$ und $F(u_2)$ von entgegengesetzten Zeichen und es wird zwischen $u_0 = f^{(n)}_{(x)}$ und $u_2 = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ ein Werth

$$u = f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$$

liegen, welcher als eine allen Bedingungen entsprechende besondere Lösung der partiellen Differentialgleichung $F(u) = 0$ zu betrachten ist.

Man setze nun ferner $u_1 = f^{(n)}_{(x+h)}$ und eben so wieder u_2 für u, wofür sich

$$F(u_1) = f^{(n)}_{(x+h)} - f^{(n)}_{(x)} = hf^{(n+1)}_{(x+\varepsilon h)}, \qquad F(u_2) = -\frac{h^2}{2(n+1)^2} f^{(n+2)}_{(x+\frac{\delta h}{n+1})}$$

ergibt, wenn unter δ und ε von einander verschiedene positive echte Brüche verstanden werden.

Hat nun $hf^{(n+1)}_{(z)}$ von $z=x$ bis $x+h$ dasselbe Zeichen wie $f^{(n+2)}_{(z)}$ von $z=x$ bis $x+\frac{h}{n+1}$, so sind, wie man sieht, $F(u_1)$ und $F(u_2)$ wieder von entgegengesetztem Zeichen und wird zwischen $u_1=f^{(n)}_{(x+h)}$ und $u_2=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ ein Werth von u, folglich zwischen $x+\frac{h}{n+1}$ und $x+h$ ein Werth $x+\frac{h}{\varepsilon n+1}$ liegen, so dass unter der gemachten Voraussetzung

$$u=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})}$$

die entsprechende Lösung der Differentialgleichung $F(u)=0$ darstellt.

Diese Ergebnisse stimmen mit jenen des vorigen Artikels überein, nur sind die Grenzen von z, innerhalb welcher $hf^{(n+1)}_{(z)}$ und $f^{(n+2)}_{(z)}$ entgegengesetztes oder gleiches Zeichen behalten müssen, hier zum Theil andere und noch schärfer bestimmt, als die frühere Betrachtung sie ergab, ohne aber mit dieser im Widerspruche zu stehen. Wie jedoch schon im vorigen Artikel bemerkt wurde, ist fast in allen Fällen der Anwendung diese noch engere Begrenzung der Werthe von z ohne Belang; hier wird davon der Einfachheit wegen Umgang genommen.

Der nun auf mehrere Arten bewiesene Satz lässt sich wie folgt aussprechen:

Bleiben $f(z)$, $f'_{(z)}, \ldots f^{(n+2)}_{(z)}$ von $z=x$ bis $x+h$ endlich und stetig, behält ferner $f^{(n+2)}_{(z)}$ innerhalb dieses Intervalls von z das entgegengesetzte Zeichen von $hf^{(n+1)}_{(x)}$, so ist:

$$f(x+h)=f(x)+hf'_{(x)}+\frac{h^2}{2!}f''_{(x)}+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}_{(x)}+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$$

Behält dagegen $f^{(n+2)}_{(z)}$ das gleiche Zeichen mit $hf^{(n+1)}_{(x)}$, so ist:

$$f(x+h)=f(x)+hf'_{(x)}+\frac{h^2}{2!}f''_{(x)}+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}_{(x)}+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})}$$

Die Übertragung dieses Satzes auf die Maclaurin'sche Reihe versteht sich von selbst, und es mögen die entsprechenden Gleichungen blos des spätern Gebrauches wegen angeführt werden.

Hat $f^{(n+2)}_{(z)}$ für alle zwischen $z=a$ und $z=x$ liegenden Werthe das entgegengesetzte Zeichen von $(x-a)f^{(n+1)}_{(a)}$, so ist:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'_{(a)}+\frac{(x-a)^2}{2!}f''_{(a)}+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}_{(a)}+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}_{(a+\varepsilon\cdot\frac{x-a}{n+1})}$$

Hat dagegen $f^{(n+2)}_{(z)}$ für alle zwischen a und x liegenden Werthe von z gleiches Zeichen mit $(x-a)f^{(n+1)}_{(a)}$, so ist:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'_{(a)}+\frac{(x-a)^2}{2!}f''_{(a)}+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}_{(a)}+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}_{(a+\frac{x-a}{\varepsilon n+1})}$$

Wie durchgehend, bezeichnet hier ε einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch.

Bei den gewöhnlichen Potenzreihen mit regelmässigem Zeichenwechsel, welche aus der Entwickelung einer Function erhalten werden können, und in welchen keine Potenz der Veränderlichen fehlt, sind die Voraussetzungen der ersten dieser zwei Formeln unmittelbar erfüllt.

Die vorhin für $F(u_0)$, $F(u_1)$, $F(u_2)$ erhaltenen Ausdrücke führen noch zu einer andern Bemerkung. Aus ihnen ergibt sich nämlich:

$$\frac{F(u_2)}{F(u_0)} = \frac{nh}{2(n+1)^2} \cdot \frac{f^{(n+2)}_{(x+\frac{\delta h}{n+1})}}{f^{(n+1)}_{(x)}} \quad \text{und} \quad \frac{F(u_2)}{F(u_1)} = -\frac{h}{2(n+1)^2} \cdot \frac{f^{(n+2)}_{(x+\frac{\delta h}{n+1})}}{f^{(n+1)}_{(x+\varepsilon h)}} \tag{1}$$

und man sieht, dass der erste dieser beiden Quotienten mit wachsendem n sich immer dann der Grenze Null nähern wird, wenn

$$\frac{f^{(n+2)}_{(x+\frac{\delta h}{n+1})}}{(n+1)f^{(n+1)}_{(x)}} \tag{2}$$

für $n = \infty$ verschwindet. Dann nähert sich $F(u_2)$ viel rascher als $F(u_0)$ der Null und liegt $u_2 = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ dem richtigen Werthe u viel näher als $u_0 = f^{(n)}_{(x)}$ oder, was dasselbe ist, es nähert sich in diesem Falle ε in dem Ausdruck $u = f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$, so wie in $u = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})}$ mehr der Einheit als der Null.

Der zweite Quotient aber verschwindet, wenn

$$\frac{f^{(n+2)}_{(x+\frac{\delta h}{n+1})}}{(n+1)^2 f^{(n+1)}_{(x+\varepsilon h)}}$$

für $n = \infty$ in Null übergeht, und es nähert sich also ebenfalls $F(u_2)$ rascher als $F(u_1)$ der Grenze Null, woraus folgt, dass u_2 dem richtigen Werthe u näher als $u_1 = f^{(n)}_{(x+h)}$ liegt.

Man sieht hieraus, dass in allen Fällen, wenn der Quotient (2) mit wachsendem n verschwindet oder doch sehr klein wird, ε sowohl in der Form $u = f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$ als in der andern $u = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})}$ sich nicht der Null, sondern mehr und mehr der Einheit nähert, also beide Formen in einander übergehen.

8.

Der Vortheil, welchen die vorstehenden Bestimmungen des Restes gegenüber den bisher bekannten, sowohl bei der numerischen Berechnung von Reihen als bei Betrachtungen über die Zulässigkeit ihrer Fortsetzung ins Unendliche gewähren, lässt sich nicht verkennen, und tritt namentlich in dem ersten der, Artikel 7 unterschiedenen zwei Fälle hervor, in welchem der Factor u des Restes für ein wachsendes n von dem unbestimmten Bruch ε ganz unabhängig wird und nicht, wie die gewöhnliche Formel ergibt, einen nicht näher bekannten, zwischen $f^{(n)}_{(a)}$ und $f^{(n)}_{(x)}$ liegenden, sondern zuletzt den ganz bestimmten Werth $f^{(n)}_{(a)}$ annimmt.

Wie nun die gefundenen Resultate anzuwenden seien, bedarf keiner Erklärung; doch verdienen einige besondere Fälle bemerkt zu werden.

Es sei

$$f(x) = \log(1+x) \quad \text{und} \quad x > 0$$

also:

$$f^{(n)}_{(x)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1.2.3..(n-1)}{(1+x)^n}$$

Da x als positiv vorausgesetzt ist, so findet die Bedingung, dass $xf^{(n+1)}_{(0)}$ und $f^{(n+2)}_{(z)}$ von $z=0$ bis $\frac{x}{n+1}$ entgegengesetzte Zeichen haben, statt und ist also:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdot \cdot + (-1)^n \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{\left(1+\frac{\varepsilon x}{n+1}\right)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass, wenn man die Entwickelung mit dem $n-1$. Gliede abbricht, die untere Grenze des dabei entstehenden Fehlers, nicht wie die gewöhnliche Restformel (für $\varepsilon=1$) ergibt:

$$\frac{1}{(1+x)^n} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad \text{sondern} \quad \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n} \cdot \frac{x^n}{n} \tag{1}$$

somit für ein grosses n beträchtlich grösser ist. Der letztere Ausdruck liefert daher eine genauere Eingrenzung jenes Fehlers, da die obere Grenze, beiden Formeln gemeinsam, ($\varepsilon=0$ entsprechend) $\frac{x^n}{n}$ ist.

Lässt man n ohne Ende wachsen, so geht der Rest, immer ein positives x vorausgesetzt, über in:

$$(-1)^{n+1} e^{-\varepsilon x} \cdot \frac{x^n}{n}$$

und verschwindet also, wenn x ein echter Bruch ist.

Bricht man die Reihe schon mit dem ersten Gliede ab, so hat man:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2\left(1+\frac{\varepsilon x}{3}\right)^2}$$

was von der sonst häufig benutzten Gleichung:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\varepsilon x)^2}$$

ziemlich verschieden ist.

Eine numerische Vergleichung der beiden Ausdrücke (1) ist nicht ohne Interesse. Es sei $n=12$, $x=0\cdot3$. Man findet hierfür:

die unteren Grenzen:
$$\frac{1}{(1+x)^n} \cdot \frac{x^n}{n} = 0\cdot0000\ 00002$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n} \cdot \frac{x^n}{n} = 0\cdot0000\ 00034$$

die gemeinsame obere Grenze:
$$\frac{x^n}{n} = 0\cdot0000\ 00044$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdot \cdot + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = 0\cdot2623\ 64300$$

$$\log(1+x) = 0\cdot2623\ 64265$$

also der Rest der berechneten Summe $= 0\cdot0000\ 00035$

welcher in den letzten Stellen beträchtlich schärfer durch die Zahlen 34 und 44, als nach der gewöhnlichen Formel durch die Zahlen 2 und 44 eingegrenzt ist. Mit auffallender Genauigkeit stellt der hier entwickelte

Ausdruck den Rest bis auf 1 Einheit der letzten Decimale dar. Dieser Genauigkeit kommt selbst der oben angegebene Näherungsausdruck:

$$e^{-\varepsilon x} \cdot \frac{x^n}{n}$$

wenn man darin ebenfalls $\varepsilon = 1$ setzt, sehr nahe. Man findet nämlich:

$$e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n} = 0{\cdot}0000\ 00033$$

Diese Genauigkeit lässt sich einer am Schlusse des Artikels 7 gemachten Bemerkung entsprechend erklären. Da nämlich im vorliegenden Falle das Verhältniss:

$$\frac{f^{(n+2)}_{(z)}}{f^{(n+1)}_{(0)}} = -\frac{n+1}{(1+z)^{n+2}}$$

so ergibt sich aus der daselbst angegebenen Gleichung (1), wenn $h = x$ gesetzt wird:

$$\frac{F(u_2)}{F(u_0)} = -\frac{n}{2n+2} \cdot \frac{x}{\left(1+\frac{\delta x}{n+1}\right)^{n+2}} = -\frac{9}{65\,(1+0{\cdot}023\,\delta)^{14}}$$

Der Werth dieses Bruches liegt zwischen 0·10 und 0·14, ist also so klein, dass sich die Form $u_2 = f^{(n)}_{\left(\frac{x}{n+1}\right)}$ als die weitaus genauere herausstellen musste.

Ähnliche Bemerkungen ergeben sich bei der Entwickelung der Function:

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

wofür:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-\frac{\varepsilon x}{n+1}}$$

erhalten wird. Die übliche Restformel würde den letzten Factor $= e^{-\varepsilon x}$ ergeben, dessen Abhängigkeit von n in keiner Weise näher bestimmt ist, und dessen extremste Werthe 1 und e^{-x} sind. Hier nun werden diese Werthe durch die einander viel näher liegenden 1 und $e^{-\frac{x}{n+1}}$ ersetzt, deren letzter, wie man sieht, mit wachsendem n sich der bestimmten Grenze 1 rasch nähert.

Um übrigens auch hier die verschiedenen Restausdrücke für einen besondern Fall numerisch vergleichen zu können, sei $n = 10$, $x = 2$. Man findet hierfür:

die unteren Grenzen: $(-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-x} = 0{\cdot}000\ 038$

$$(-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-\frac{x}{n+1}} = 0{\cdot}000\ 235$$

die gemeinsame obere Grenze: $(-1)^n \frac{x^n}{n!} = 0{\cdot}000\ 282$

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 0{\cdot}135\ 097$$

$$e^{-x} = 0{\cdot}135\ 335$$

also der Rest der berechneten Summe: $= 0{\cdot}000\ 238$

welcher in den letzten Stellen durch die Zahlen 235 und 282 weit genauer als nach der gewöhnlichen Formel durch die Zahlen 38 und 282 eingegrenzt ist. Auch hier stellt der neue Ausdruck den Rest sehr scharf, bis auf 3 Einheiten der letzten Decimale, dar, während der gewöhnliche mit seiner dem wahren Werthe am nächsten kommenden obern Grenze von dem Reste um 44 Einheiten abweicht. Man sieht, dass ε in u_2 auch hier der Einheit sehr nahe liegt.

Für die Function

$$f(x) = e^x \ , \quad x > 0$$

erhält man, da hier alle Differentialquotienten von gleichem Zeichen sind, die Gleichung:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{x^n}{n\,!} e^{\frac{x}{\varepsilon n + 1}}$$

9.

Wird für $f(x)$ eine der Functionen $\sin x$, $\cos x$ gesetzt, so muss man, um das Argument von u näher angeben zu können, unterscheiden, ob n in der einen oder andern der Formen $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ enthalten ist.

Die Ergebnisse für $f(x) = \sin x$ und $x > 0$ sind die folgenden:

Für $n = 4m$ ist $f_{(x)}^{(n-1)} = -\cos x$, $f_{(x)}^{(n)} = +\sin x$, $f_{(x)}^{(n+1)} = +\cos x$, $f_{(x)}^{(n+2)} = -\sin x$

Man erhält also die Gleichung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)\,!} + \frac{x^{4m}}{(4m)\,!} \sin \frac{\varepsilon x}{4m+1} \tag{1}$$

Für $n = 4m+1$ ist $f_{(x)}^{(n-2)} = -\cos x$, $f_{(x)}^{(n-1)} = \sin x$, $f_{(x)}^{(n)} = \cos x$, $f_{(x)}^{(n+1)} = -\sin x$, $f_{(x)}^{(n+2)} = -\cos x$

und findet man:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)\,!} + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)\,!} \cos \frac{x}{(4m+1)\,\varepsilon + 1} \tag{2}$$

Für $n = 4m+2$ ist $f_{(x)}^{(n-1)} = +\cos x$, $f_{(x)}^{(n)} = -\sin x$, $f_{(x)}^{(n+1)} = -\cos x$, $f_{(x)}^{(n+2)} = +\sin x$

folglich hat man die Gleichung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)\,!} - \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)\,!} \sin \frac{\varepsilon x}{4m+3} \tag{3}$$

Für $n = 4m+3$ ist $f_{(x)}^{(n-2)} = \cos x$, $f_{(x)}^{(n-1)} = -\sin x$, $f_{(x)}^{(n)} = -\cos x$, $f_{(x)}^{(n+1)} = \sin x$, $f_{(x)}^{(n+2)} = \cos x$

und man erhält:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)\,!} - \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)\,!} \cos \frac{x}{(4m+3)\,\varepsilon + 1} \tag{4}$$

Analog würden sich vier Gleichungen für $\cos x$ ergeben.

Um hier ebenfalls die Genauigkeit der Eingrenzung, welche diese Formeln gewähren, in einem bestimmten Falle darzulegen und mit jener der üblichen Formeln zu vergleichen, will ich die Gleichungen (1) und (4), welche hinsichtlich der Form des Restes am meisten von einander abweichen, für besondere Werthe von x und m anwenden.

In der Gleichung (1) sei $x = 1$, $m = 2$.

Die untere Grenze des Restes ist hier sowohl in (1) als in der gewöhnlichen Formel $= 0$. Dagegen sind in diesen beiden Formeln:

die oberen Grenzen: $$\frac{x^{4m}}{(4m)!}\sin\frac{x}{4m+1} = 0\cdot0000\ 02750$$

$$\frac{x^{4m}}{(4m)!}\sin x = 0\cdot0000\ 20870$$

Ferner ist:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} = 0\cdot8414\ 68254$$

$$\sin x = 0\cdot8414\ 70985$$

also der Rest der berechneten Summe: $= 0\cdot0000\ 02731$

welchem die obere Grenze des neuen Restgliedes bis auf 19 Einheiten der letzten Decimalen nahekommt, während derselbe von der obern Grenze des gewöhnlichen Restausdruckes um 18139 Einheiten abweicht. Auch hier liegt also ε der Einheit sehr nahe.

In der Gleichung (4) sei $x = 1$, $m = 1$. Man findet hierfür:

die gemeinschaftliche untere Grenze: $$\frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}\cos x = 0\cdot000\ 1072$$

die oberen Grenzen: $$\frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}\cos\frac{x}{4m+4} = 0\cdot000\ 1969$$

$$\frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}\cos 0 = 0\cdot000\ 1984$$

Ferner ist:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} = 0\cdot841\ 6667$$

$$\sin x = 0\cdot841\ 4710$$

also der Rest der berechneten Summe: $= 0\cdot000\ 1957$

Obgleich hier in Folge des absichtlich sehr klein angenommenen Werthes von m der Rest sehr gross ist, kommt demselben der neue Restausdruck doch bis auf 12 Einheiten der letzten Decimalen nahe, während der gewöhnliche in seiner obern, genauesten Grenze um 27 Einheiten davon abweicht. Übrigens zeigt sich auch hier, dass ε sehr nahe an 1 liegt.

Es werde noch:

$$f(x) = (1+x)^a$$

gesetzt und x zunächst als p o s i t i v betrachtet. Da hierfür:

$$f^{(n)}_{(x)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

ist, so sieht man, dass, sobald n den Werth von a überschritten hat, ein regelmässiger Zeichenwechsel zwischen den auf einander folgenden Differentialquotienten eintreten, und also der erste Fall des im Artikel 7 aufgestellten Satzes seine Anwendung finden wird. Man erhält somit für $n > a$ die Gleichung:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1\ .\ 2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ (n-1)}x^{n-1}$$
$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n} \cdot \frac{x^n}{\left(1+\frac{\varepsilon x}{n+1}\right)^{n-a}}$$

Anders gestaltet sich der Rest für

$$f(x) = (1-x)^a \quad , \quad 0 < x < 1$$

Hier ist:

$$f_{(x)}^{(n)} = (-1)^n a(a-1) \ldots (a-n+1)(1-x)^{a-n}$$

und man sieht, dass, sobald n grösser als a geworden, alle folgenden Differentialquotienten das gleiche Zeichen annehmen und der zweite Fall des erwähnten Satzes eintritt. Man erhält somit für $n > a$ die Gleichung:

$$(1-x)^a = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} x^{n-1}$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{x^n}{(1-\frac{x}{\varepsilon n+1})^{n-a}}$$

Es versteht sich von selbst, dass für $n < a$ in der ersten dieser zwei Gleichungen der Nenner im Restgliede durch $(1+\frac{x}{\varepsilon n+1})^{n-a}$, in der zweiten dagegen durch $(1-\frac{\varepsilon x}{n+1})^{n-a}$ zu ersetzen ist.

Wie aus diesen Gleichungen die bekannten Bedingungen für die Giltigkeit des binomischen Satzes sich ergeben, behalte ich mir bei einer andern Gelegenheit zu zeigen vor.

10.

Durch den Satz des Artikels 7 wird nun allerdings der Rest in zwei ihrer Art nach sehr allgemeinen Fällen schärfer als durch die üblichen Formeln bestimmt. Aber die Genauigkeit seiner Eingrenzung ist bei der ersten Form $u = f^{(n)}_{(x+\frac{\varepsilon h}{n+1})}$ ungleich grösser als bei der zweiten $u = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\varepsilon n+1})}$, welche für grosse Werthe von n der Unbestimmtheit des Arguments einen ziemlich weiten Spielraum offen lässt. Die Criterien der Fälle, welchen diese beiden Formen entsprechen, sind nun offenbar die einfachsten, die es im Allgemeinen geben kann, aber dies schliesst die Möglichkeit, in mehr oder weniger speciellen Fällen, namentlich bei der zweiten Form, eine schärfere Bestimmung von ε zu treffen, keineswegs aus. Es versteht sich von selbst, dass die Anwendbarkeit der im Artikel 2 angeführten Bedingungsgleichung für u auf die Substitution der drei Werthe u_0, u_1, u_2, von welchen bis jetzt allein die Rede war, nicht beschränkt bleibt und auch noch für andere Werthe von u, welche einander noch näher als die drei genannten liegen, in $F(u)$ ein Zeichenwechsel eintreten kann. Offenbar kann:

$$u_3 = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n\rho+1})}$$

als der gemeinschaftliche Ausdruck der drei bisher gebrauchten Substitutionen u_0, u_1, u_2, beziehungsweise für $\rho = \infty$, 0 und 1 angesehen werden und muss zwischen $\rho = 0$ und $\rho = \infty$ nothwendig immer wenigstens ein Werth liegen, wofür:

$$F(u_3) = f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n\rho+1})} - f^{(n)}_{(x)} - \frac{h\rho}{n\rho+1} f^{(n+1)}_{(x+\frac{h}{n\rho+1})}$$

verschwindet, also u_3 den richtigen Werth von u darstellt. Um daher in gegebenen Fällen einen Zeichenwechsel in $F(u_3)$ hervorzurufen, steht für ρ ein ausgedehntes Gebiet von Werthen zu Gebote, welches indessen mit Rücksicht auf die im Artikel 7 unterschiedenen Hauptfälle zum Voraus schon in die Intervalle von $\rho = 0$ bis 1 und von $\rho = 1$ bis ∞ zu theilen ist.

Das erstere Intervall entspricht den Fällen, in welchen $h \cdot f_{(z)}^{(n+1)}$ und $f_{(z)}^{(n+2)}$ von $z = x$ bis $x+h$ gleiche Zeichen haben und wird also, wenn überhaupt eine genauere Eingrenzung nöthig ist, Gegenstand einer weitern Betrachtung sein, die übrigens allgemein geführt, umständlichere Unterscheidungen erfordert, in besonderen Fällen, wie z. B. für $f(x) = e^x$, $x > 0$ aber sehr leicht ist. Ich glaube dieselbe, so wie auch ein anderes der Regula falsi analoges, auf die vorstehende Aufgabe allgemein anwendbares Verfahren hier des Weiteren nicht berühren zu sollen.

Von den mannigfachen Betrachtungen, welche sich an die Frage des Restes der Taylor'schen Reihe knüpfen lassen, möge nur noch die folgende erwähnt werden.

Angenommen, es haben alle Glieder der Entwickelung:

$$u = f_{(x)}^{(n)} + \frac{h}{n+1} f_{(x)}^{(n+1)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f_{(x)}^{(n+2)} + \ldots + \frac{h^r}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} f_{(x)}^{(n+r)} + \ldots$$

das gleiche, und, wie ohne der Allgemeinheit zu schaden, vorausgesetzt werden kann, das positive Zeichen. Vom r. Gliede dieser Reihe an sei ferner jedes folgende Glied kleiner als ein Bruchtheil des unmittelbar vorhergehenden, also allgemein:

$$\frac{h}{n+s} \frac{f_{(x)}^{(n+s)}}{f_{(x)}^{(n+s-1)}} \leqq \alpha\,, \quad s \geqq r\,, \quad \alpha < 1.$$

Dann hat man:

$$\frac{h^r}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} f_{(x)}^{(n+r)} + \frac{h^{r+1}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r+1)} f_{(x)}^{(n+r+1)} + \ldots$$
$$< \frac{h^r}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} f_{(x)}^{(n+r)} \cdot \left[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\right]$$

und hieraus folgt, wenn die geometrische Reihe summirt wird:

$$u < f_{(x)}^{(n)} + \frac{h}{n+1} f_{(x)}^{(n+1)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f_{(x)}^{(n+2)} + \ldots + \frac{h^{r-1}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)} f_{(x)}^{(n+r-1)}$$
$$+ \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{h^r}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} f_{(x)}^{(n+r)} \tag{1}$$

Unter den gemachten Annahmen ist aber auch:

$$f_{(x+\frac{h}{\rho})}^{(n)} > f_{(x)}^{(n)} + \frac{h}{\rho} f_{(x)}^{(n+1)} + \frac{h^2}{1.2.\rho^2} f_{(x)}^{(n+2)} + \ldots + \frac{h^{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)\rho^{r-1}} f_{(x)}^{(n+r-1)}$$
$$+ \frac{h^r}{1.2.3\ldots r.\rho^r} \cdot f_{(x)}^{(n+r)} \tag{2}$$

und diese beiden Ungleichheiten können nun für einen bestimmten Werth von ρ mit einander in Relation gesetzt werden. Die Anfangsglieder beider Reihen stimmen mit einander überein; man bestimme nun ρ in der Art, dass auch die letzten Glieder einander gleich werden, man setze also:

$$\rho = \left[(1-\alpha) \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{1 \,.\, 2 \ldots r}\right]^{\frac{1}{r}}$$

dann lässt sich nachweisen, dass die Divisoren der früheren Glieder in der Entwicklung (1) insgesammt grösser als die entsprechenden Divisoren in der Entwicklung (2) sind. Um dies zu zeigen, genügt die Bemerkung, dass der Ausdruck:

$$A = \left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}{1 \,.\, 2 \ldots q}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+n)}{1 \,.\, 2 \ldots n}\right]^{\frac{1}{q}}$$

mit wachsendem q beständig abnimmt, oder also der auf q bezogene Differentialquotient von A beständig negativ bleibt. Setzt man der Kürze wegen $\frac{dA}{dq} = A'$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{q^2}\left[\frac{q}{q+1} + \frac{q}{q+2} + \frac{q}{q+3} + \ldots + \frac{q}{q+n}\right]$$
$$-\frac{1}{q^2}\left[\log(q+1) + \log(q+2) + \log(q+3) + \ldots + \log(q+n)\right]$$

Da nun:

$$\log\left(1 - \frac{q}{q+p}\right) < -\frac{q}{q+p}$$

folglich:

$$\frac{q}{q+p} < \log\frac{q+p}{p}$$

so ist offenbar:

$$\frac{A'}{A} < \frac{1}{q^2}\left[\log\frac{q+1}{1} + \log\frac{q+2}{2} + \log\frac{q+3}{3} + \ldots + \log\frac{q+n}{n}\right]$$
$$-\frac{1}{q^2}\left[\log(q+1) + \log(q+2) + \log(q+3) + \ldots + \log(q+n)\right]$$

oder also:

$$\frac{A'}{A} < -\frac{1}{q^2}\log(1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n)$$

Daraus folgt nun, dass $\frac{dA}{dq}$ negativ ist.

Wenn daher n und q positive Zahlen sind, so nimmt mit wachsendem q der Ausdruck

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)\,.\,.\,(n+q)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

beständig ab. Da nun $1-\alpha < 1$, so ist um so mehr:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)\,.\,.\,(n+q)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}\right]^{\frac{1}{q}} > \left[(1-\alpha)\frac{(n+1)(n+2)\,.\,.\,(n+r)}{1\,.\,2\,.\,.\,r}\right]^{\frac{1}{r}} \text{ für } q < r$$

folglich:

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+q) > 1\,.\,2\,.\,3\ldots q\,.\,\rho^q$$

was zu beweisen war.

Dies vorausgesetzt ist nun, wenn man der Abkürzung wegen:

$$P = f_{(x)}^{(n)} + \frac{h}{n+1} f_{(x)}^{(n+1)} + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f_{(x)}^{(n+2)} + \ldots + \frac{h^{r-1}}{(n+1)(n+2)\,.\,.(n+r-1)} f_{(x)}^{(n+r-1)}$$
$$+ \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{h^r}{(n+1)(n+2)\,.\,.(n+r)} f_{(x)}^{(n+r)}$$

$$Q = f_{(x)}^{(n)} + \frac{h}{\rho} f_{(x)}^{(n+1)} + \frac{h^2}{1\,.\,2\,.\,\rho^2} f_{(x)}^{(n+2)} + \ldots + \frac{h^{r-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,(r-1)\,\rho^{r-1}} f_{(x)}^{(n+r-1)}$$
$$+ \frac{h^r}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,r\,.\,\rho^r} f_{(x)}^{(n+r)}$$

setzt:

$$P < Q$$

und da:

$$u < P \quad \text{und} \quad f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\rho})} > Q$$

so folgt zunächst:

$$u < P \quad \text{und} \quad f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\rho})} > P$$

also:

$$u < f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\rho})}$$

Den Voraussetzungen gemäss ist aber (Artikel 6):

$$u > f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$$

folglich hat man:

$$f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})} < u < f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\rho})}$$

Hiernach findet der folgende Satz statt:

Sind die Grössen $f^{(n)}_{(x)}$, $hf^{(n+1)}_{(x)}$, $h^2 f^{(n+2)}_{(x)}$, . . $h^r f^{(n+r)}_{(x)}$, . . insgesammt positiv und bleibt der Quotient:

$$\frac{h}{n+s} \cdot \frac{f^{(n+s)}_{(x)}}{f^{(n+s-1)}_{(x)}} < 1 \quad \text{für } s = r,\ r+1,\ r+2,\ r+3, \ldots$$

ist ferner der grösste Werth, welchen dieser Quotient für diese Werthe von s annimmt, kleiner oder gleich einem positiven echten Bruche α, und bleibt für:

$$\rho = \left[(1-\alpha)\frac{(n+1)\,(n+2)\,.\,.\,(n+r)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;r}\right]^{\frac{1}{r}}$$

$f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\rho})}$ endlich, so liegt in der Gleichung:

$$f(x+h) = f(x) + hf'_{(x)} + \frac{h^2}{2\,!}f''_{(x)} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}_{(x)} + \frac{h^n}{n\,!}\,u$$

der Factor u zwischen $f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ und $f^{(n)}_{(x+\frac{h}{\rho})}$, oder, was dasselbe ist, es kann, wenn ε einen positiven echten Bruch bezeichnet:

$$f(x+h) = f(x) + hf'_{(x)} + \frac{h^2}{2\,!}f''_{(x)} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}_{(x)} + \frac{h^n}{n\,!}f^{(n)}_{\left[x+\frac{h}{n+1-\varepsilon(n+1-\rho)}\right]}$$

gesetzt werden.

Je kleiner der Werth von r ist, wofür die Voraussetzungen stattfinden, um so näher liegen einander, im Allgemeinen, die Grenzen zwischen welchen u enthalten ist. Dieser Satz dient, wie man sieht, in manchen Fällen als Ergänzung des zweiten Theiles des frühern, im Art. 7 aufgestellten Satzes.

11.

Um dieses Resultat auf einen besondern Fall anzuwenden, sei.

$$f(x) = e^x\,, \quad x > 0.$$

Da hierfür $\frac{h}{n+s} \cdot \frac{f_{(x)}^{(n+s)}}{f_{(x)}^{(n+s-1)}} = \frac{h}{n+s} < 1$ bleibt, sobald $n+1 > h$, so kann $r=1$, folglich $\alpha = \frac{h}{n+1}$ als grösster Werth jenes Quotienten gesetzt werden. Man erhält also:

$$\rho = \left(1 - \frac{h}{n+1}\right)(n+1) = n+1-h\,, \quad \frac{h}{n+1-\varepsilon(n+1-\rho)} = \frac{h}{n+1-\varepsilon h}$$

und es ist:

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2\,!} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{h^n}{n\,!}\, e^{\frac{h}{n+1-\varepsilon h}}$$

oder wenn man x für h schreibt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{x^n}{n\,!}\, e^{\frac{x}{n+1-\varepsilon x}}\,, \quad x < n+1$$

Um die Genauigkeit, welche diese neue Restformel gewährt, numerisch darzustellen, und mit jener der gewöhnlichen Formel $u = e^{\varepsilon x}$ zu vergleichen, sei $n = 12$, $x = 1$. Man findet hierfür:

die unteren Grenzen: $\frac{x^n}{n\,!} e^{0.x} = 0{\cdot}0000\ 0000\ 2088$

$\frac{x^n}{n\,!} e^{\frac{x}{n+1}} = 0{\cdot}0000\ 0000\ 2255$

die oberen Grenzen: $\frac{x^n}{n\,!} e^{x} = 0{\cdot}0000\ 0000\ 5675$

$\frac{x^n}{n\,!} e^{\frac{x}{n+1-x}} = 0{\cdot}0000\ 0000\ 2269$

$$1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} = 2{\cdot}7182\ 8182\ 6198$$

$$e^x = 2{\cdot}7182\ 8182\ 8459$$

also der Rest der berechneten Summe: $= 0{\cdot}0000\ 0000\ 2261$

welcher in den letzten Stellen durch die Zahlen 2255 und 2269 ohne Vergleich schärfer als, nach der gewöhnlichen Restformel, durch die Zahlen 2088 und 5675 eingeschlossen ist. Die hier entwickelte Formel gibt in der untern Grenze den Rest um 6 Einheiten zu klein, in der obern Grenze um 8 Einheiten der letzten Decimale zu gross; die gewöhnliche Formel dagegen um 173 zu klein und um 3414 zu gross, und doch ist der neue Restausdruck beinahe eben so einfach als der übliche.

Für die Function:

$$f(x) = \log(1-x)$$

ergibt sich:

$$f_{(x)}^{(n)} = -\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1-x)^n}\,, \quad \text{also} \quad \frac{h}{n+s} \cdot \frac{f_{(x)}^{(n+s)}}{f_{(x)}^{(n+s-1)}} = \frac{n+s-1}{n+s} \cdot \frac{h}{1-x}$$

Dieser Ausdruck bleibt für alle Werthe von s kleiner als 1, wenn $h < 1-x$ und $x < 1$ ist.

Da derselbe immer kleiner als $\frac{h}{1-x}$ ist, so kann man $\alpha = \frac{h}{1-x}$ und $r = 1$ setzen.

Man findet daher:

$$\rho=(1-\frac{h}{1-x})(n+1)\,,\quad \frac{h}{n+1-\varepsilon\,(n+1-\rho)}=\frac{h}{(n+1)\left[1-\frac{\varepsilon h}{1-x}\right]}$$

und wenn der Kürze wegen $1-x=a$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$\log(a-h)=\log a-\left\{\frac{h}{a}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a}\right)^n\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{h}{(n+1)(a-\varepsilon h)}\right]^n}$$

Diese Gleichung geht, wenn $a=1$, $h=x<1$ gesetzt wird, über in die folgende:

$$\log\frac{1}{1-x}=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n-1}x^{n-1}+\frac{x^n}{n\left[1-\frac{x}{(n+1)(1-\varepsilon x)}\right]^n}$$

Es sei hierin $n=12$, $x=0{\cdot}3$. Die Berechnung des durch diese Formel gegebenen und des gewöhnlichen Restausdrucks liefert folgende Zahlenwerthe.

Die unteren Grenzen: $\frac{x^n}{n}=0{\cdot}00000\,00443$

$$\frac{x^n}{n\left[1-\frac{x}{n+1}\right]^n}=0{\cdot}00000\,00600$$

die oberen Grenzen: $\frac{x^n}{n(1-x)^n}=0{\cdot}00000\,31996$

$$\frac{x^n}{n\left[1-\frac{x}{(n+1)(1-x)}\right]^n}=0{\cdot}00000\,00662$$

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n-1}x^{n-1}=0{\cdot}35667\,48826$$

$$\log\frac{1}{1-x}=0{\cdot}35667\,49439$$

also der Rest der berechneten Summe: $=0{\cdot}00000\,00613$

wofür die gewöhnliche Formel in den letzten Stellen die Zahlen 443 und 31996, der hier entwickelte Ausdruck dagegen die Zahlen 600 und 662 gibt; die letzteren schliessen, wie man sieht, die Zahl 613 beträchtlich enger ein als die ersteren.

Auch bei den so eben betrachteten Fällen bemerkt man, dass die Formel $u=f^{(n)}_{(x+\frac{h}{n+1})}$ dem Rest näher als die übrigen Ausdrücke liegt.

Ich füge noch bei, dass für:

$$f(x)=(1-x)^a\,,\quad 0<x<1$$

wie bereits im Artikel 9 angegeben wurde:

$$f^{(n)}_{(x)}=(-1)^n a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(1-x)^{a-n},\ \text{also}\ \frac{h}{n+s}\,\frac{f^{(n+s)}_{(x)}}{f^{(n+s-1)}_{(x)}}=\frac{n+s-(a+1)}{n+s}\cdot\frac{h}{1-x}\qquad(1)$$

und dass, wenn $a > -1$ und kleiner als n ist, dieser Ausdruck immer unter $\frac{h}{1-x}$ liegt, folglich $\alpha = \frac{h}{1-x}$ und $r = 1$ gesetzt werden kann, wenn nur $h < 1-x$ bleibt. Man erhält also wieder:

$$\rho = (n+1)\left(1 - \frac{h}{1-x}\right)$$

und durch eine ganz analoge Betrachtung wie im vorigen Falle die Gleichung:

$$(1-x)^a = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)}x^{n-1}$$
$$+ (-1)^n \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}\,\frac{x^n}{\left[1 - \frac{x}{(n+1)(1-\varepsilon x)}\right]^{n-a}}$$

Ist $a < -1$, so findet der grösste Werth des Bruches (1) immer noch für $s = r = 1$ statt, aber es muss dann $h < \frac{n+1}{n-a+1}(1-x)$ bleiben, wofür:

$$\alpha = \frac{n-a}{n+1}\cdot\frac{h}{1-x} < 1 \quad , \quad \rho = (n+1)\left(1 - \frac{n-a}{n+1}\cdot\frac{h}{1-x}\right)$$

folglich:

$$\frac{h}{n+1-\varepsilon(n+1-\rho)} = \frac{h}{(n+1)\left[1 - \frac{n-a}{n+1}\cdot\frac{\varepsilon h}{1-x}\right]}$$

Setzt man auch hier wieder $x = 0$ und hierauf x für h, so dass nun x der Bedingung

$$x < \frac{n+1}{n-a+1}$$

zu entsprechen hat, so gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$(1-x)^a = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{1\,.\,2}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)}x^{n-1}$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}\,\frac{x^n}{\left[1 - \frac{x}{n+1-(n-a)\varepsilon x}\right]^{n-a}}$$

Die hier betrachteten Fälle, obgleich sie auf Functionen der einfachsten Art sich beziehen, mögen hinreichen, die Anwendung welche sich von dem Satze des vorigen Artikels machen lässt, in das rechte Licht zu setzen.

12.

Über die Lagrange'sche Form des Restes, von welcher in der vorliegenden Arbeit ausgegangen wurde, füge ich noch die folgenden Bemerkungen bei. Man kann, wie bekannt, den Rest der auf das erste Glied beschränkten Taylor'schen Reihe geometrisch nachweisen, wenn unter $f(x)$ die Ordinate einer Curve, deren Abscisse x ist, gedacht wird. Sind nämlich (Fig. 2), P und Q zwei Punkte dieser Curve, deren Abscissen x und $x+h$, und zieht man zur Sehne PQ parallel eine Tangente, so wird die Berührung nothwendig in einem zwischen P und Q liegenden Punkte S stattfinden, in so ferne, wie vorausgesetzt, die Curve zwischen P und Q continuirlich bleibt. Nun ist die trigonometrische Tangente des entsprechenden Berührungswinkels

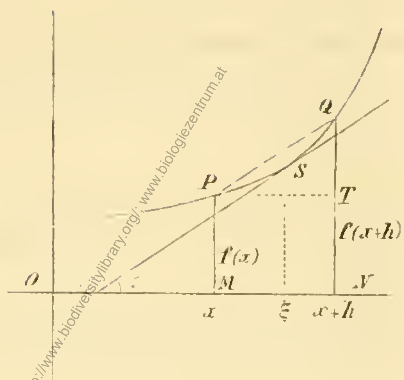
τ immer bestimmt durch die Gleichung $\operatorname{tang} \tau = f'_{\xi}$, wenn ξ die Abscisse des Punktes S bezeichnet, und man hat daher wegen

$$TQ = f(x+h) - f(x) = h \operatorname{tang} \tau$$

die Gleichung:

$$f(x+h) = f(x) + h f'_{(\xi)}$$

Fig. 2.

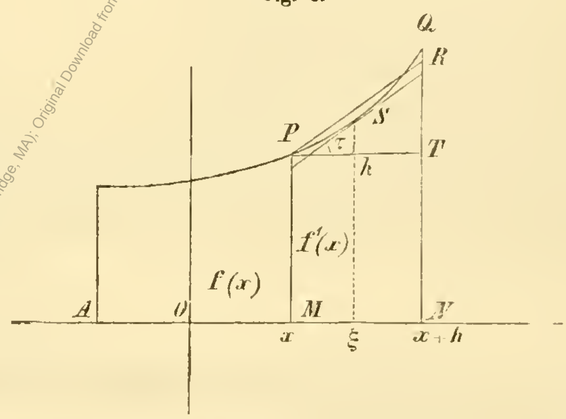


Da aber ξ zwischen x und $x+h$ liegt, so lässt es sich in der Form $\xi = x + \varepsilon h$ darstellen und hat man:

$$f(x+h) = f(x) + h f'_{(x+\varepsilon h)}$$

Meines Wissens ist dies die einzige geometrische Herleitung, welche bis jetzt bekannt wurde, und ist man hierbei über den blos zweigliederigen Ausdruck rechter Hand nicht hinausgegangen. Es ist nun aber nicht ohne Interesse, zu zeigen, dass auch der Rest der bis zum zweiten, ja sogar der bis zum dritten Gliede fortgesetzten Reihe von Taylor aus geometrischen Gründen hergeleitet werden kann. Betrachtet man nämlich $f(x)$ als den Flächeninhalt AP (Fig. 3) einer ebenen Curve zwischen irgend einer Anfangsabscisse OA und der Abscisse $OM = x$, so ist die der letztern entsprechende Ordinate $MP = f'_{(x)}$ und $\operatorname{tang} \tau = f''_{(\xi)}$, wenn wieder τ den Tangentenwinkel in irgend einem Punkte S, dessen Abscisse ξ ist, bezeichnet. Da der Raum $AQ = f(x+h)$ ist und das krummlinig begrenzte Viereck MQ einem Rechteck von derselben Grundlinie MN und einer zwischen MP und NQ enthaltenen Ordinate als Höhe gleichgesetzt werden kann, so erhält man schon nach dieser Bemerkung wie vorhin die Gleichung:

Fig. 3.



$$f(x+h) - f(x) = h f'_{(\xi)} = h f'_{(x+\varepsilon h)}$$

Nun lässt sich aber auch das Viereck MQ als aus dem Viereck $MT = h f'_{(x)}$ und aus dem krummlinig begrenzten Dreieck PQT bestehend ansehen, welches dem von der Sehne PR gebildeten ebenen Dreieck PRT gleich sein wird, dessen Spitze je nach der Richtung der Krümmung in einem bestimmten Punkte R unter- oder oberhalb Q liegt. Die zu dieser Sehne parallele Tangente des Bogens PQ muss den letztern nothwendig in einem zwischen seinen Endpunkten befindlichen Punkte S berühren; bezeichnet also τ den Winkel, welchen sie mit der Axe bildet, so hat man die Gleichung:

$$f(x+h) - f(x) = h f'_{(x)} + \frac{h}{2} \cdot h \operatorname{tang} \tau, \quad \operatorname{tang} \tau = f''_{(\xi)} = f''_{(x+\varepsilon h)}$$

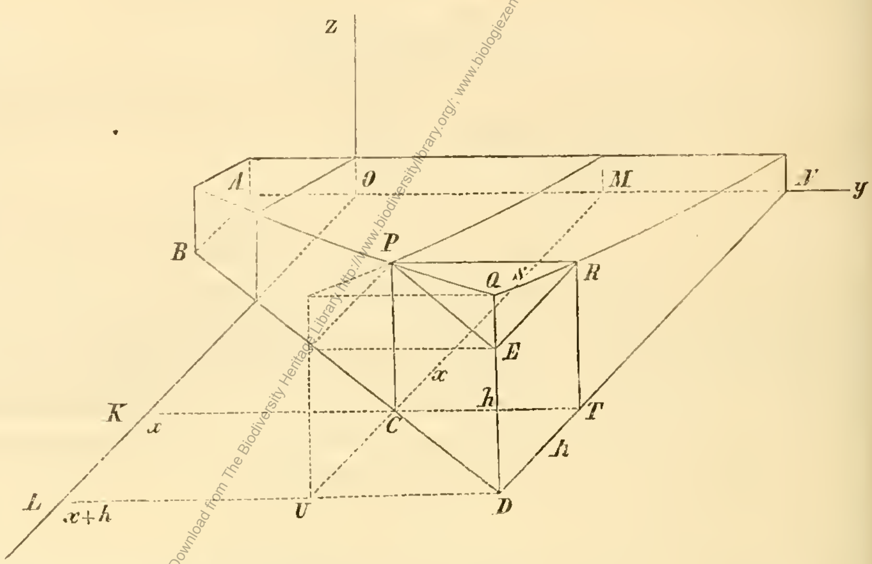
folglich:

$$f(x+h) = f(x) + h f'_{(x)} + \frac{h^2}{2} f''_{(x+\varepsilon h)}$$

Der Rest der auf die drei Anfangsglieder beschränkten Reihe lässt sich geometrisch nachweisen, wenn man $f(x)$ als den cubischen Inhalt AP (Fig. 4) eines Raumes betrachtet, welcher von der zy und xz Ebene, von zwei zur y Axe senkrechten Ebenen AB und MP, sodann von einer zu xz und yz unter einem halben rechten Winkel geneigten Ebene LP und endlich oberhalb von einer Cylinderfläche begrenzt ist, deren Erzeugungslinien der y Axe parallel sind. Dann ist $f(x+h)$ der Inhalt des Raumes AQ, wenn $OK = MC = x$ und $OL = ND = x + h$ also $KL = CU = MN = CT = h$ gesetzt wird, und es drückt $f'_{(x)}$ den Inhalt der

Seitenfläche MP, ferner $f''_{(x)}$ die Ordinate $CP = TR$ der zu xz parallelen Schnittcurven, endlich $f'''_{(\xi)}$ die trigonometrische Tangente des Winkels τ, welchen die Berührenden aller derjenigen Punkte S dieser Curven mit der xy Ebene bilden, deren gemeinschaftliche Abscisse $= \xi$ ist.

Fig. 4.



Dies vorausgesetzt besteht nun der Raum AQ aus dem bezeichneten $AP = f(x)$, aus $MR = hf'_{(x)}$, ferner aus dem dreikantigen Prisma $CDTPER = \frac{1}{2}h^2 f''_{(x)}$ und aus dem krummflächig begrenzten Raume $PERQ$, so dass man zunächst die Gleichung:

$$f(x+h) = f(x) + hf'_{(x)} + \frac{h^2}{2} f''_{(x)}$$

$$+ PERQ$$

erhält, worin jetzt noch der Inhalt des bezeichneten Raumes $PERQ$ näher zu bestimmen ist. Denkt man sich durch die Gerade PR eine Ebene so gelegt, dass sie mit der Grundfläche PER ein Tetraeder von gleichem Inhalte wie $PERQ$ einschliesst, so wird diese Ebene den Bogen RQ nothwendig in einem zwischen seinen Endpunkten liegenden Punkte S schneiden, und muss es zwischen R und S einen Punkt geben, dessen Tangente jener Ebene parallel ist. Der Winkel τ dieser Tangente sowohl als dieser Ebene wird daher durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \tau = f'''_{(x+\varepsilon h)}$$

bestimmt und folglich die Höhe des genannten Tetraeders $= hf'''(x+\varepsilon h)$ sein. Da nun seine Grundfläche $\frac{1}{2}h^2$ zum Inhalte hat, so ist:

$$PERQ = \tfrac{1}{2}h^2 \cdot \tfrac{1}{3}hf'''_{(x+\varepsilon h)} = \frac{h^3}{1.2.3} f'''_{(x+\varepsilon h)}$$

und es findet somit die Gleichung:

$$f(x+h) = f(x) + hf'_{(x)} + \frac{h^2}{1.2} f''_{(x)} + \frac{h^3}{1.2.3} f'''_{(x+\varepsilon h)}$$

auch aus geometrischen Gründen statt.

13.

Das Verfahren, welches im Art. 6 zur Ermittelung genauerer Grenzen aus dem in Integralform gegebenen Reste der Taylor'schen Reihe benutzt wurde, ist, was hier noch zu bemerken, einer Anwendung auf das allgemeinere Integral:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx$$

fähig, zu dessen näherungsweiser Darstellung man sich, wenn $\psi(x)$ zwischen den Grenzen der Integration das Zeichen nicht ändert, häufig der bekannten Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi\left(a+\varepsilon(b-a)\right)\int_a^b \psi(x)\,dx \tag{1}$$

bedient, in welcher das Argument der Function $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ nicht näher bestimmt ist. Die Einschränkung dieses Intervalls ist in vielen Fällen wünschenswerth; man gelangt dazu auf folgendem Wege.

In der Gleichung:

$$\varphi(x) = \varphi_{(h)} + (x-h)\varphi'_{(h)} + \frac{(x-h)^2}{2}\varphi''_{\left(h+\varepsilon(x-h)\right)}$$

sei h eine noch nicht bestimmte, von x jedoch unabhängige Grösse und es werde in der hieraus folgenden Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \psi(x)\left[\varphi_{(h)} + (x-h)\varphi'_{(h)}\right]dx + \tfrac{1}{2}\int_a^b (x-h)^2\psi(x)\varphi''_{\left(h+\varepsilon(x-h)\right)}dx$$

das erste Glied der rechten Seite:

$$H = \int_a^b \psi(x)\left[\varphi_{(h)} + (x-h)\varphi'_{(h)}\right]dx$$

gesetzt und daraus h so bestimmt, dass H ein Maximum oder Minimum werde. Da nun:

$$\frac{dH}{dh} = \varphi''_{(h)}.\int_a^b (x-h)\psi(x)\,dx$$

folgt, so ergibt sich für h der besondere Werth:

$$h_0 = \frac{\int_a^b x\psi(x)\,dx}{\int_a^b \psi(x)\,dx} \tag{2}$$

und ist nun:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi_{(h_0)}\int_a^b \psi(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_a^b (x-h_0)^2\psi(x)\varphi''_{\left(h_0+\varepsilon(x-h_0)\right)}dx \tag{3}$$

Macht man auch hier die Annahme, es behalte $\psi(x)$ beständig dasselbe, und zwar unbeschadet der Allgemeinheit, das positive Zeichen, so folgt aus der Gleichung (2) dass h_0 zwischen a und b liege; dann setzt man in (1):

$$\varphi(x) = x$$

so ergibt sich:

$$\int_a^b x\psi(x)\,dx = \left[a+\varepsilon(b-a)\right]\int_a^b \psi(x)\,dx$$

und erhält man:

$$h_0 = a+\varepsilon(b-a)$$

wie behauptet wurde. Der hierdurch bestimmte Werth h_0 hat nun die Eigenschaft, scharf die Fälle zu scheiden, welche bezüglich der Function $\varphi(x)$ zu betrachten sind, wenn das Glied $\varphi(h)\int_a^b \psi(x)\,dx$ der Gleichung (3) für sich allein das links stehende Integral darstellen soll.

Unter der die Allgemeinheit nicht beeinträchtigenden Voraussetzung, dass $a<b$ sei, hängt in jener Gleichung das Zeichen des zweiten Gliedes:

$$\tfrac{1}{2}\int_a^b (x-h_0)^2\psi(x)\varphi''_{\left(h_0+\varepsilon(x-h_0)\right)}dx$$

wie man sieht, blos noch von dem Zeichen des Factors $\varphi''_{(h)}$ ab, wenn unter h irgend ein zwischen a und b liegender Werth verstanden wird.

Angenommen nun, es bleibe $\varphi''_{(h)}$ beständig positiv, so ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx > \varphi(h_0)\int_a^b \psi(x)\,dx \tag{4}$$

und stellt $\varphi'_{(h)}$ eine mit h gleichzeitig wachsende Function dar, die aber gleichwohl entweder positiv oder negativ sein kann und in dieser Hinsicht eine weitere Unterscheidung nothwendig macht.

Bleibt $\varphi'_{(h)}$ beständig positiv, so ist $\varphi(h)$ eine wachsende Function und muss man, damit (4) in eine Gleichung übergehen könne, $\varphi(h)$ statt $\varphi(h_0)$ und $h > h_0$ setzen. Bleibt dagegen $\varphi'_{(h)}$ beständig negativ, so ist $\varphi(h)$ eine abnehmende Function und muss zu gleichem Zwecke $h < h_0$ gesetzt werden.

Angenommen, es bleibe $\varphi''_{(h)}$ beständig negativ, so ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \varphi(h_0)\int_a^b \psi(x)\,dx \tag{5}$$

und stellt $\varphi'_{(h)}$ eine mit h gleichzeitig abnehmende Function dar, die rücksichtlich ihres Zeichens wieder zwei Unterscheidungen fordert.

Bleibt zunächst $\varphi'_{(h)}$ beständig positiv, so wächst $\varphi(h)$ mit h und muss, damit (5) in eine Gleichung übergehe, $\varphi(h)$ statt $\varphi(h_0)$ und $h < h_0$ gesetzt werden. Bleibt aber $\varphi'_{(h)}$ beständig negativ, so nimmt $\varphi(h)$ mit wachsendem h ab, und muss, wenn $\varphi(h)$ an die Stelle von $\varphi(h_0)$ gesetzt wird, um (5) in eine Gleichung zu verwandeln, $h > h_0$ sein.

Man kann nun die hier unterschiedenen vier Fälle auf zwei zurückführen. Es ist nämlich $h > h_0$ zu setzen, wenn $\varphi''_{(h)}$ positiv und $\varphi'_{(h)}$ positiv, sodann wenn $\varphi''_{(h)}$ negativ und $\varphi'_{(h)}$ negativ ist, also $\varphi'_{(h)}$ und $\varphi''_{(h)}$ gleiches Zeichen haben. Dagegen ist $h < h_0$ zu setzen, wenn $\varphi''_{(h)}$ positiv und $\varphi'_{(h)}$ negativ, sodann wenn $\varphi''_{(h)}$ negativ und $\varphi'_{(h)}$ positiv ist, also $\varphi'_{(h)}$ und $\varphi''_{(h)}$ entgegengesetztes Zeichen haben. Dass h in keinem dieser Fälle $< a$ oder $> b$ werden könne, wenn, wie hier vorausgesetzt wurde, $\varphi(h)$ eine beständig entweder wachsende oder abnehmende Function ist, zeigt ein Blick auf die Relationen (4) und (5).

Hieraus ergibt sich der Satz:

Bezeichnet $\psi(x)$ eine zwischen $x = a$ und $x = b$ endlich und positiv bleibende Function, ist ferner $b > a$ und wird:

$$h_0 = \frac{\int_a^b x\psi(x)\,dx}{\int_a^b \psi(x)\,dx}$$

gesetzt, so ist, wenn $\varphi'_{(x)}$ und $\varphi''_{(x)}$ zwischen den Grenzen a und b von x gleiches Zeichen haben:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi\left(b+\varepsilon(h_0-b)\right)\int_a^b \psi(x)\,dx\;, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

und wenn die Zeichen von $\varphi'_{(x)}$ und $\varphi''_{(x)}$ entgegengesetzt sind:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi\left(a+\varepsilon(h_0-a)\right)\int_a^b \psi(x)\,dx\;, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Dieser Satz unterscheidet sich, wie man sieht, von dem der gewöhnlichen Gleichung (1) wesentlich darin, dass das Argument der Function enger begrenzt, nämlich in die Intervalle a bis h_0 und h_0 bis b eingeschlossen ist.

In dem besondern Falle $\psi(x)=1$ ist $h_0=\frac{a+b}{2}$, daher:

Wenn $\varphi'_{(x)}$ und $\varphi''_{(x)}$ gleiche Zeichen haben:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=(b-a)\,\varphi_{\left(b-\varepsilon\frac{b-a}{2}\right)}$$

und wenn die Zeichen von $\varphi'_{(x)}$ und $\varphi''_{(x)}$ entgegengesetzt sind:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=(b-a)\,\varphi_{\left(a+\varepsilon\frac{b-a}{2}\right)}.$$

Durch die Einführung des arithmetischen Mittels gelangt man übrigens auch zu einer bemerkenswerthen Reihe für dieses Integral.

Aus der Gleichung:

$$\varphi(x)=\varphi(h)+(x-h)\,\varphi'_{(h)}+\frac{(x-h)^2}{1\,.\,2}\,\varphi''_{(h)}+\ldots+\frac{(x-h)^{m-1}}{(m-1)\,!}\,\varphi^{(m-1)}_{(h)}+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^{x-h} t^{m-1}\,\varphi^{(m)}_{(x-t)}\,dt$$

ergibt sich nämlich, wenn man zwischen den Grenzen a und b integrirt:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=(b-a)\,\varphi(h)+\frac{(b-h)^2-(a-h)^2}{2\,!}\,\varphi'_{(h)}+\frac{(b-h)^3-(a-h)^3}{3\,!}\,\varphi''_{(h)}+\ldots+\frac{(b-h)^m-(a-h)^m}{m\,!}\,\varphi^{(m-1)}_{(h)}$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\int_a^b dx\int_0^{x-h} t^{m-1}\,\varphi^{(m)}_{(x-t)}\,dt$$

und wenn man $h=\frac{b+a}{2}$ und $m=2n+1$ setzt:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=(b-a)\,\varphi_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\frac{(b-a)^3}{3\,!\,2^2}\,\varphi''_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\frac{(b-a)^5}{5\,!\,2^4}\,\varphi^{IV}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\ldots+\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)\,!\,2^{2n}}\,\varphi^{(2n)}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}$$

$$+\frac{1}{(2n)\,!}\int_a^b dx\int_0^{x-\frac{b+a}{2}} t^{2n}\,\varphi^{(2n+1)}_{(x-t)}\,dt$$

Für denselben Werth von h und für $x=a$ erhält man ferner aus der Gleichung für $\varphi(x)$:

$$\varphi(a)=\varphi_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}-\frac{b-a}{2}\,\varphi'_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\frac{(b-a)^2}{2\,.\,4}\,\varphi''_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}-\ldots+\frac{(b-a)^{2n}}{2.4.6..4n}\,\varphi^{(2n)}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}$$

$$+\frac{1}{1.2..2n}\int_0^{\frac{a-b}{2}} t^{2n}\,\varphi^{(2n+1)}_{(a-t)}\,dt$$

und wenn man a mit b vertauscht:

$$\varphi(b)=\varphi_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\frac{b-a}{2}\,\varphi'_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\frac{(b-a)^2}{2\,.\,4}\,\varphi''_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}+\ldots+\frac{(b-a)^{2n}}{2.4.6..4n}\,\varphi^{(2n)}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)}$$

$$+\frac{1}{1.2..2n}\int_0^{\frac{b-a}{2}} t^{2n}\,\varphi^{(2n+1)}_{(b-t)}\,dt$$

Verschwinden die Restausdrücke für $n=\infty$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\varphi(b)+\varphi(a)=2\left[\varphi_{\left(\frac{b+a}{2}\right)} + \frac{(b-a)^2}{2\,.\,4}\varphi''_{\left(\frac{b+a}{2}\right)} + \frac{(b-a)^4}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\varphi^{IV}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)} + \cdots\right]$$

$$\varphi(b)-\varphi(a)=2\left[\frac{b-a}{2}\varphi'_{\left(\frac{b+a}{2}\right)} + \frac{(b-a)^3}{2.4.6}\varphi'''_{\left(\frac{b+a}{2}\right)} + \frac{(b-a)^5}{2.4.6.8.10}\varphi^{V}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)} + \cdots\right]$$

deren Gebrauch in manchen Fällen bequem ist.

So findet man für $\varphi(x)=\log x$ unmittelbar die Gleichungen:

$$\log\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{a\,.\,b}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \cdots$$

$$\log\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a-b}{a+b} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \cdots$$

die, wie sich von selbst versteht, auch aus der gewöhnlichen logarithmischen Reihe erhalten werden können.

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1868

Band/Volume: 28_1

Autor(en)/Author(s): Winckler Anton

Artikel/Article: Die Reste der TaylorÅ½schen Reihe. 243-278