

C O P I E

DER

BESSEL'SCHEN TOISE DU PÉROU

IN ZWEI GLASSTÄBEN.

VON

DR. C. VON STEINHEIL.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 15. APRIL 1869.

Der Meter der Archive zu Paris ist ein aus der Toise abgeleitetes Maß, nur so weit sicher und vielleicht nicht einmal so weit als die französische Vergleichung

$$1000^{\text{mm}} = 443,296 \text{ Pariser Linien}$$

ergeben hat. Mit Rücksicht auf die Unsicherheit, welche über die wahre Ausdehnung des Platinstabes der Archive in der Toise besteht, da nur mit den Borda'schen Coëfficienten gerechnet ist, und in Anbetracht der verdorbenen Endflächen kann die Sicherheit des Meter kaum auf

$$\frac{1}{100\,000}$$

seiner Länge gehen.

Erst Bessel hat in den Jahren 1835--38 die wahre Messkunst in der Maßvergleichung eingeführt. Er hat bei Feststellung des preussischen Fusses das Originalmaß invariabel, unzweideutig, leicht zugänglich und so hergestellt, dass man die Grenzen der Sicherheit kennt, bis zu welcher seine Vergleichungen gehen. Er hat alle Quellen constanter Fehler untersucht und letztere beseitigt, so dass seine Vergleichungen eine neue Epoche der Maßvergleichungen begründen, welche die Genauigkeit der Kenntniss der Einheit mehr als um eine Ordnung gehoben hat. Ein besonderes Verdienst ist es noch, dass Bessel auf seine Einheit der Toise du Pérou nicht nur den preussischen Normalfuss, sondern auch die Länge des einfachen Secundenpendels und die ostpreussische Gradmessung gegründet hat.

Es wäre Vandalismus in der Wissenschaft, wenn man jetzt ohne Rücksicht auf das was Bessel gethan hat, ohne Weiteres eine Copie des Meter der Archive als wissenschaftliche Maßeinheit annehmen wollte. Gesetzlich kann dies wohl geschehen, weil sich das Gesetz nicht bekümmert um die Grenze der

Sicherheit, wenn diese nur den bürgerlichen Anforderungen genügen, dass nämlich im Handel und Verkehr kein finanzieller Nachtheil aus der Unsicherheit entstehe. Eine bürgerliche Maßeinheit ist also genügend, wenn sie auch $\frac{1}{100\,000}$ unsicher sein sollte. Die wissenschaftliche Maßeinheit, die nicht mehr nach Procenten gerechnet wird, muss an das Genaueste und Beste angeschlossen werden, wenn man nicht direct einen Rückschritt begehen will.

Darum muss die wissenschaftliche Maßeinheit auf die Bessel'sche Toise du Pérou gegründet werden. Soll es aber keinen Nachtheil haben, dass dadurch zwei Einheiten bestehen, nämlich gesetzlich der Meter und wissenschaftlich geboten die Bessel'sche Toise, so ist es nöthig, den Meter zum ebenbürtigen Maße mit der Toise zu machen. Das kann geschehen durch eine genaue, invariable Copie desselben, die direct mit der Bessel'schen Toise du Pérou verglichen wird. Aus diesen mit Rücksicht auf die Fortschritte der Messkunst gegründeten Vergleichen wäre dann das Verhältniss zwischen Toise und Meter auf's Neue und genauer festzustellen.

Zur Durchführung dieser jetzt unabweislich ¹⁾ gewordenen Arbeit habe ich schon im Jahre 1837 den Meter der Archive in Glasstäben copirt, zugleich aber die Bessel'sche Toise du Pérou in zwei ähnlichen Glasstäben von Repsold herstellen lassen und bei Conferenzzath Schumacher in Altona mit der Bessel'schen Toise = G verglichen.

Indem nun auch diese beiden Halbtoisen an die österreichische Regierung von mir abgetreten werden, theile ich die Ergebnisse meiner Vergleichen im Nachfolgenden mit.

Beide Stäbe sind von demselben Spiegelglase neben einander abgeschnittene Halbtoisen. Die Endflächen sind aus dem Schwerpunkte des Stabes geschliffene und polirte Kugelflächen. Sie sind mit kurzem Halbmesser so facettirt, dass das Maß als derjenige Kugeldurchmesser defnirt werden kann, der den Mittelpunkten der Endflächen am nächsten liegt. Dabei muss der Stab so horizontal aufgelegt sein, dass er keine Durchbiegung erleidet — also alle Punkte unterstützt sind. Die Endflächen sind übrigens so genau sphärisch, dass die Comparatoren keine Änderung des Werthes des Durchmessers der Kugel erkennen lassen, wenn der Stab 2° — 3° um seinen Mittelpunkt dreht.

Beide Stäbe $A + B$ aneinander gelegt sind circa 50mal in der Luft verglichen mit der Bessel'schen Toise G (von Gambey in Paris ausgeführt). Der Comparator war derselbe Repsold'sche, welcher in Paris zu den Vergleichen der Meter gedient hat. (S. Denkschr. d. k. bair. Akad. d. Wiss. IV. Bd. 1. Abth. In der neuen Reihe der Denkschr. XIX. Bd. p. 163—280.)

Die benützten Thermometer haben 100theilige Scala und geben direct Normaltemperatur an.

Bei den Comparatoren werden die Fühlniveaue nur zur Einstellung des Mikrometers benutzt, aber nicht besonders abgelesen und notirt. Da in jeder Einstellung das Bestreben liegt auf 0 zu kommen, kann sich der Mittelwerth nur um Kleinigkeiten ändern gegen den bei Ablesung der Niveaue. Es wird also nur der mittlere Fehler der einmaligen Einstellung etwas grösser, ohne Ablesung der Niveaue. Dies ist aber ganz verschwindend gegen die Fehler, die aus Ungleichheit der Temperatur der Stäbe hervorgehen, und dadurch die Beobachtungsweise gerechtfertigt.

1) Unabweislich ist die Arbeit dadurch geworden, dass die Maß- und Gewichts-Commission meines Wissens den Meter mit all seinen Mängeln ohne Weiteres nur copirte, und die Arbeiten, die Bessel 30 Jahre früher durchführte, vollständig ignorirte. Sollen also jetzt nicht zweierlei Maße, ein sicheres und ein unsicheres aber gesetzlich giltiges bestehen, so muss der Meter verbessert werden, d. h. es muss das Verhältniss des Platinstabes der Archive zu Paris zu der Bessel'schen Toise du Pérou eben so genau als die Bessel'schen Arbeiten sind, hergestellt werden. Dann bleibt der Meter und die Toise wie jetzt, aber beide sind gleich genau festgestellt, und es wird gleichgiltig, in welcher der Einheiten man rechnen will.

Der Factor, mit welchem die Mikrometer-Trommeltheile multiplicirt werden müssen, um sie in Pariser Linien zu verwandeln, ist in der angeführten Abhandlung von mir pag. 263 aus 32 Beobachtungen abgeleitet und ergibt sich im Mittel aus beiden sehr nahe gleichen Schrauben

$$1 = 50 \cdot 21 \cdot 5 \quad \text{also}$$

$$(I) \quad 1 = 0 \cdot 000199145 \dots [6,29917].$$

Sei die Ablesung für die Glasstäbe $(A + B) \dots m$ links rechts Temp.
 " " " " Toise $G \dots M$ M' T ,

so findet sich

$$(I) \quad G - (A + B) = ((M + M') - (m + m')) 0 \cdot 000199145.$$

Bessel gibt an

$$P = 863 \cdot 9992 \quad \text{Pariser Linien bei } 16 \cdot 25 \text{ C.}$$

Die Ausdehnung von P für 1°C. findet er

$$= 0 \cdot 00001126$$

$$\pm 0 \cdot 0000000386$$

sehr nahe mit Borda übereinstimmend. Es ist also

$$(II) \quad P = 863 \cdot 9992 + (t^\circ - 16 \cdot 25) 0 \cdot 0097255$$

$$\pm \dots \dots 333.$$

Die Toise G von Gambey findet Bessel §. 5, p. 32

$$(III) \quad G = P - 0 \cdot 00390$$

$$\pm 0 \cdot 00021;$$

aus II und III folgt

$$(IV) \quad G = 863 \cdot 9953 + (t^\circ - 16 \cdot 25) 0 \cdot 009725,$$

wobei die Ausdehnung von G gleich mit der von P angenommen ist, da sie Bessel nicht eigens bestimmt hat. Aus I und IV folgt:

$$(V) \quad (A + B) = 863 \cdot 9953 + (t^\circ - 16 \cdot 25) 0 \cdot 009725 - ((M + M') - (m + m')) 0 \cdot 000199145$$

worans sich die Länge der Summe beider Stäbe ergibt. Die in Altona 1837 angestellten Vergleichen¹⁾ sind folgende:

1837	t	$A+B$		T	G	
		m	m'		M	M'
März 13	12·90	252·1	71·5			
	13·33	251·4	73·0			
				12·8	103·0	169·7
				13·4	97·6	172·1
	12·8	137·0	195·3			
		123·5	201·0			
	13·33	117·0	230			
				12·8	59·5	202·5
				13·33	60·5	201·0

¹⁾ An den Vergleichen beteiligten sich ausser mir Herr A. Repsold und Herr U. Pohrt.

1837	t	A+B		T	G	
		m	m'		M	M'
März 13		13·5	348·7			
		122·5	198·0			
		126·0	200·3			
				12·7	85·0	175·0
				13·2	92·5	170·4
		99·0	226·8			
				12·3	44·0	217·3
				13·0		
				12·0	27·5	207·0
				12·25		
		91·7	207·0			

Die einzelnen Wiederholungen in Mitteln vereinigt, gibt

(1)	13·12	324·0	(2)	271·2	13·1
(3)	13·06	334·6	(4)	261·75	13·06
(5)	—	327·4	(6)	261·45	12·95
(7)	—	325·8	(8)	261·3	12·65
			(9)	234·5	12·13
(10)	—	298·7			

Daraus folgt

(1—2)	—	52·8	13·11		
2—3		63·4	13·08		
3—4		72·85	13·06		
4—5		65·65	13·06		
5—6		65·95	12·95		
6—7		64·35	12·95		
7—8		64·50	12·65		
9—10		64·20	12·13		
(1)		— 64·21	+ 12·87	Gewicht	8.

März 16	t	m	m'	M+M'	T
	8·50	402·8		274·7	8·30
	8·75	403·7		285·3	8·60
	8·97	411·1		289·4	8·90
	9·10	409·1		295·3	8·87
	9·30	423·0		310·6	9·20
	9·40	424·2		315·0	9·35

(1—2)	—	128·1	+ 8·40		
		129·0	8·52		
		118·4	8·70		
		125·8	8·75		
		121·7	8·93		
		119·7	8·95		
		113·8	8·98		
		127·7	9·08		
		113·0	9·25		
		114·2	9·30		
		109·2	9·37		
(2)		— 120·055	+ 8·93	Gewicht	11.

März 16	(1)	m	m'	t	M	M'	T
	(1)	141·3	421·3	+13·72	(2)	132·2	368·1 13·75
	(3)	57·0	508·3	13·90	(4)	128·6	373·2 13·75
	(5)	56·2	510·6	14·10	(6)	65·0	453·1 14·15

1-2	= - 62.3	13.73
2-3	65.0	13.82
3-4	63.5	13.83
4-5	65.0	13.87
5-6	48.7	14.12

(3) $- 60.90 + 13.874$ Gewicht 5.

März 18	(1)	65.2	377.3	12.45	(2)	63.1	462.1	12.65
	(3)	99.8	360.8	12.75	(4)	99.6	439.3	12.95
	(5)	113.8	355.4	12.95	(6)	87.9	454.3	13.06
	(7)	94.1	379.8	13.10	(8)	100.4	447.5	13.15
	(9)	95.0	376.2	13.05	(10)	95.4	447.2	13.00

1-2	- 82.7	12.55
2-3	64.6	12.70
3-4	78.3	12.85
4-5	69.7	12.95
5-6	73.0	13.00
6-7	68.3	13.08
7-8	74.0	13.12
8-9	76.7	13.10
9-10	71.4	13.01

(4) $- 73.20 + 12.93$ Gewicht 9.

				A+B					G	t
März 20	(1)	87.1	395.6	= 482.7	+ 10.55	(2)	145.8	251.6	= 397.4	10.55
	(3)	158.4	333.4	491.4	+ 10.55	(4)	145.0	250.3	395.3	10.55
	(5)	157.3	330.4	487.7	+ 10.55	(6)	155.2	237.7	392.9	10.55
	(7)	94.1	382.5	476.6	+ 10.55	(8)	100.1	289.8	389.9	10.55
	(9)	68.7	421.8	490.5	+ 10.65	(10)	87.6	311.2	389.8	10.65
	(11)	87.3	399.4	486.7	+ 10.65	(12)	80.7	309.1	389.8	10.65
	(14)	183.3	302.8	486.1	+ 10.55	(13)	78.9	309.0	387.9	10.60
	(15)	184.7	302.3	487.0	10.65	(16)	179.2	213.7	392.9	11.25

(1-2)	- 85.3	+ 10.55
2-3	94.4	10.55
3-4	96.5	10.55
4-5	92.4	10.55
5-6	94.8	10.55
6-7	83.7	10.55
7-8	86.7	10.55
8-9	100.6	10.60
9-10	100.7	10.65
10-11	96.9	10.65
11-12	96.9	10.65
13-14	98.2	10.57
15-16	94.1	10.95

(5) $- 93.94 + 10.61$ Gewicht 13.

März 21	(1)	193.4	308	= 494.2	+ 13.12	(2)	219.8	336.8	= 556.6	
	(4)	151.3	347.0	498.3	+ 13.10	(3)	218.8	338.0	556.8	+ 13.12
	(5)	161.8	333.5	495.3	- 13.10	(6)	199.7	353.8	553.5	+ 13.0
	(8)	169.0	319.2	488.2		(7)	197.8	352.6	550.4	
	(9)	173.4	313.0	486.4		(10)	187.5	360.8	548.3	+ 12.9

	1—2	— 62·4	+ 13·12	
	3—4	58·5	13·11	
	5—6	58·2	13·05	
	7—8	62·2	12·97	
	9—10	60·9	12·92	
(6)		— 60·64	— 13·03	Gewicht 5.

Stellen wir die Mittel zusammen, so ist:

	<i>l</i>	<i>t</i>	Gew.
(1)	— 64·21	+ 12·87	8
(2)	120·05	8·93	11
(3)	60·90	13·87	5
(4)	73·20	12·93	9
(5)	93·94	10·61	13
(6)	— 60·64	+ 13·03	5

Der Mittelwerth von *l* und *t* mit Rücksicht auf Gewicht ist

VI'
$$- 84·74 + 11·57$$

Zieht man die Gleichungen (VI) ab von dem Mittel VI', so wird

	<i>dl</i>	<i>dt</i>	Gew.
(1)	— 20·53	— 1·30 δ	8
(2)	+ 35·31	+ 2·64 δ	11
(3)	— 23·84	— 2·30 δ	5
(4)	— 11·54	— 1·36 δ	9
(5)	+ 9·20	+ 0·96 δ	13
(6)	— 24·10	— 1·46 δ	5

Wo δ den Ausdehnungs-Coëfficienten von Eisen (Toise) weniger Glas (Stäbe) bezeichnet und es ist der wahrscheinlichste Werth von

$$\delta = \frac{(a \cdot n)}{(a \cdot a)}$$

Indem man jede Gleichung mit ihrem Gewicht multiplicirt, wird

	<i>n</i>	
(VIII)	10·40 δ + 164·24 = 0	
	29·04 δ + 388·41 = 0	
	11·50 δ + 119·20 = 0	
	12·24 δ + 103·86 = 0	
	12·48 δ + 119·60 = 0	
	7·30 δ + 120·50 = 0	

woraus sich derjenige Werth von δ ergibt, der, in die letzten Gleichungen substituirt, die Summe der Quadrate der restirenden Fehler zu einem Minimum macht. Es ergibt sich

(IX) $\delta_{\epsilon-g} = 12·4785$ und in Linien
 $= 0·0024850$ Ausdehnung Eisen—Glas 1°

Ausdehnung von Eisen, d. h. der Toise ist aber $= 0·0097255$

(X) Ausdehnung des Glases $\delta_g = 0·0072405$ für 1° der Toise.

Setzen wir den Werth IX ein in die Gleichung VII und multipliciren die Quadrate der Fehler mit den entsprechenden Gewichten, so ergibt sich:

148·40
61·58
118·34
265·56
100·47
172·88
—
867·23

Es ist aber der mittlere Fehler der einmaligen Beobachtung

$$= \sqrt{\frac{f^2 + f'^2 + f''^2 + \dots}{\nu - 1}}$$

Also wird dieser Fehler, da wir 51 Beobachtungen haben

$$\sqrt{17 \cdot 345} = 4 \cdot 1647 \text{ oder in Linien}$$

$$\pm = 0 \cdot 0008294 \text{ jede Beobachtung.}$$

XI } Also der mittlere Fehler der ganzen Reihe = $\pm 0 \cdot 00011614$,
 (oder der Ausdehnungs-Unterschied ist auf $\frac{1}{66}$ sicher bestimmt.

Mit dem Werthe von IX können wir berechnen, wie gross der Längen-Unterschied der Stäbe $A+B$ von G bei der Normaltemperatur ist.

Bei $+11 \cdot 57$ ist die Längendifferenz = $-84 \cdot 74$ Trommeltheilen.

(VI). Die Ausdehnungsdifferenz ist für $1^\circ = -12 \cdot 4785$,

daher hat man

$$16 \cdot 25 - 11 \cdot 57 = 4 \cdot 68 \cdot 12 \cdot 4785 = 58 \cdot 195$$

bei Normaltemp. $A+B-G = 84 \cdot 74$
 für $+4^\circ 68$ $-58 \cdot 20$
 $\hline = 26 \cdot 54$

in Linien $A+B-G = 0 \cdot 0052853$

(IV) $+G = 863 \cdot 9953$
 $\hline A+B = 864 \cdot 00059$

Man hat daher für jede Temperatur

(XII) $A+B = 864 \cdot 00059 + (t^\circ - 16 \cdot 25) (0 \cdot 00724)$
 $\pm 0 \cdot 00012.$

Die Glasstäbe A und B sind auch mit demselben Comparator unter einander verglichen. Die erheblichen Differenzen in den Vergleichen an verschiedenen Tagen zeigen, dass man grössere Fürsorge für Ausglei-chung der Temperatur nehmen muss. Da der neue Längen-Comparator in Wien eine Wiederholung dieser Bestimmung sehr leicht macht und ungemein viel grössere Genauigkeit geben wird, setzen wir die ältere Ver-gleichung hier nur als vorläufiges Ergebniss an:

Vergleichung der Halbtoisen A und B unter einander.

Datum	Halbtoise A $m \quad m'$	Halbtoise B $M \quad M'$	$(m+m')+(M+M')$	Abw. vom Mittel	
1837 März 1	27.42 51.38	44.82 51.37	78.8 -96.2 = -17.4	Tr 4.7	
	26.9 51.38	42.5 51.4	78.3 93.9 -15.6	6.5	
	22.2 53.3	39.8 54.2	75.5 94.0 18.5	3.6	
	21.3 53.3	40.3 59.6	74.6 99.9 25.3	3.2	
	4.0 43.1	23.3 42.5	47.1 65.8 18.7	3.4	
	4.5 46.9	25.7 46.9	51.4 72.6 21.2	0.1	
	3.7 46.9	23.7 46.9	50.6 70.6 20.0	2.1	
	4.6 47.9	23.2 47.8	2.5 71.0 18.5	3.6	
	2	75.8 38.9	88.3 46.9	114.7 -135.2 -20.5	1.6
		69.6 42.8	80.7 48.4	112.4 129.0 -16.7	5.4
		57.7 47.4	72.8 51.6	105.1 124.4 -19.3	2.8
		54.2 49.3	70.0 52.8	103.5 122.8 -19.3	2.8
	3	80.2 95.4	86.2 120.6	175.6 206.8 -31.2	9.1
		80.4 96.8	87.3 121.3	177.2 208.6 -31.4	9.3
78.9 98.9		86.6 120.7	177.8 207.3 -30.2	8.1	
80.5 98.4		85.2 119.1	178.9 204.3 25.4	3.3	
4	45.8 80.0	65.1 82.8	125.8 147.9 -22.1	0.0	
	45.5 79.2	65.9 81.5	124.7 147.4 22.7	0.6	
	45.4 77.5	64.5 81.7	122.9 146.2 -23.3	1.2	
	44.8 77.1	64.5 81.9	121.9 146.4 -24.5	2.5	
			442.0	7.39	
			-22.10	$\pm 3 \cdot 695$ **	
				jede Beob.	
			$10 \pm 0 \cdot 8$	$\pm 0 \cdot 0007$	

Auch hier gilt derselbe Factor 0·000199145, welcher die Trommeltheile in Linien verwandelt. Es ist also

$$\begin{aligned} A - B &= -22 \cdot 1 = -0 \cdot 00440 \\ A + B &= 864 \cdot 00059 \\ 2 A &= 863 \cdot 99619 \\ 2 B &= 864 \cdot 00499 \\ A &= 431 \cdot 99809 \\ B &= 432 \cdot 00249 \end{aligned}$$

und bei jeder Temperatur

$$A = 431 \cdot 99809 + (t - 16 \cdot 25) (0 \cdot 00362)$$

(XIII)

$$B = 432 \cdot 00249 + (t - 16 \cdot 25) (0 \cdot 00362)$$

**Der mittlere Fehler der einmaligen Vergleichung ist

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\Pi}{2}} \frac{\Sigma f}{\sqrt{v(v-1)}} \\ &= (1, 253) \frac{(73 \cdot 90)}{\sqrt{380}} (0 \cdot 00019914) = 0 \cdot 000946, \end{aligned}$$

der mittlere Fehler der Reihe = 0·00021.

Die Zahlenwerthe XII und XIII sind noch nicht als definitiv zu betrachten. Sie werden noch eine kleine Änderung erleiden durch die Bestimmung der absoluten Ausdehnung des Glases, aus welchem die Stäbe *A* und *B* bestehen. Ist nämlich dieses Element für sich bekannt, so ergibt sich daraus die Ausdehnung der Besselschen Toise *G*, die wir gleich der von *P* anzunehmen bisher genöthigt waren. Diese Bestimmung wird eben so einen kleinen Einfluss auf die Copie des Glasmeters *GII* haben. Da diese Messungen von mir jetzt eingeleitet sind, hoffe ich das Ergebniss zugleich mit der Vergleichung der Halbtoise und des Meters als 3. Theil der ganzen Untersuchung in Kurzem nachliefern zu können.



ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl.
Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt:
Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1870

Band/Volume: [30_1](#)

Autor(en)/Author(s): Steinheil Carl August von

Artikel/Article: [Copie der Bessel'schen Toise du Pérou in zwei Glasstäben. 21-28](#)