Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

DIE

LAPLACE'SCHE METHODE DER AUSGLEICHUNG VON BEOBACHTUNGSFEHLERN

BEI ZAHLREICHEN BEOBACHTUNGEN.

VON

D^R. J. DIENGER,

IN KARLSRUHE

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 8. OCTOBER 1874.

Im Folgenden soll die von Laplace in dem 4. Kapitel seiner Théorie analytique des probabilités (1812) aufgestellte Theorie verallgemeinert und in ihrer Bedeutung genau festgesetzt werden (§§. 1—6). Dieselbe soll dann mit der Methode der kleinsten Quadrate verglichen und dadurch in ihrem Werthe für die Anwendung klar gelegt werden (§§. 8 und 9). Es sind, behufs Durchführung der nöthigen Entwicklungen, in §. 3 eine Reihe allgemeiner Sätze über Umformungen nothwendig geworden, deren Aufnahme räthlich erschien. Die Art, wie man zu der Annahme in §. 5 gelangt, ist hier nicht näher erörtert. Zunächst kann man sich darauf berufen, dass für die Fälle $n=1$ und $n=2$ bereits Laplace dasselbe gethan, hier also nur die nöthige Allgemeinheit festzusetzen war; andererseits aber gibt §. 8 den eigentlichen Grund der ganzen Annahme an — Übereinstimmung mit der Methode der kleinsten Quadrate.

Selbstverständlich genügt der in den §§. 5 und 6 geführte Beweis, gleichviel, wie man zur Annahme der Gleichung (70) gelangte. Dass die Grösse h des §. 6 endgiltig nicht bestimmbar ist, liegt wohl in der Natur der Sache, und alle Wege, die man behufs Bestimmung derselben aus den gemachten Beobachtungen eingeschlagen hat, können zu keinem klaren Ziele führen. Anders verhält sich die Sache freilich in §. 9, wobei jedoch die dortige unter V. geführte Untersuchung von Bedeutung sein dürfte.

Da der Zweck der folgenden Abhandlung ein rein theoretischer war, so musste begreiflich jede Anwendung vermieden werden. Ebenso ist aber auch das Theoretische auf das Unerlässliche beschränkt, und sind Untersuchungen, die sich an das Gegebene naturgemäss anschliessen lassen würden, hier nicht eingeführt worden.

§. 1.

I. Es seien die Werthe der n Grössen

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{1}$$

zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass man für die s Grössen

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\begin{aligned} &p_1^{(1)} u_1 + p_2^{(1)} u_2 + \ldots + p_n^{(1)} u_n + A_1, \\ &p_1^{(2)} u_1 + p_2^{(2)} u_2 + \ldots + p_n^{(2)} u_n + A_2, \\ &\quad\vdots \\ &p_1^{(s)} u_1 + p_2^{(s)} u_3 + \ldots + p_n^{(s)} u_n + A_s, \end{aligned} \tag{2}$$

worin die p und A bekannte Zahlen sind, durch Beobachtung die Werthe $B_1, B_2, \ldots B_s$ erhalten habe.

Was die Zahl s der Beobachtungen betrifft, so wollen wir sofort annehmen, es sei $s > n$, d. h. die Anzahl der Beobachtungen sei grösser als die der Unbekannten. In diesem Falle müssten, wenn die gefundenen Werthe B alle genau wären, zwischen den p und A nothwendig Bedingungsgleichungen bestehen, was jedoch hier nicht vorausgesetzt wird. Da aber die B aus Beobachtungen gefunden wurden, so müssen wir voraussetzen, dass sie nicht völlig genau, sondern mit (allerdings unbekannten und auch nicht zu bestimmenden) Fehlern behaftet sind, so dass die Gleichung

$$p_1^{(r)} u_1 + p_2^{(r)} u_2 + \ldots p_n^{(r)} u_n + A_r = B_r \tag{3}$$

nicht völlig genau ist ($r = 1, 2, \ldots, s$), und also auch von einem etwaigen Widersprechen des durch (3) repräsentirten Gleichungssystems keine Rede sein kann, weil ja dieses System in Wahrheit nicht besteht.

II. Ist ε_r der Fehler, den man bei der Beobachtung, die B_r ergab, beging, so wäre

$$\varepsilon_r = p_1^{(r)} u_1 + p_2^{(r)} u_2 + \ldots + p_n^{(r)} u_n + A_r - B_r, \tag{4}$$

wenn man die richtigen Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ hier einsetzt, welche Werthe wir allerdings nicht kennen, und wie sich herausstellen wird, auch nicht zu ermitteln im Stande sein werden. Desshalb mag die Gleichung (4) einstweilen als eine Bestimmungsgleichung für die Grössen ε_r (r immer $= 1, 2, \ldots, s$) dienen, gleichviel, welche Bedeutung sonst diesen Grössen zukommen mag.

Wir setzen nun

$$E_1 = \gamma_1^{(1)} \varepsilon_1 + \gamma_2^{(1)} \varepsilon_2 + \ldots + \gamma_s^{(1)} \varepsilon_s, \ldots, E_n = \gamma_1^{(n)} \varepsilon_1 + \gamma_2^{(n)} \varepsilon_2 + \ldots + \gamma_s^{(n)} \varepsilon_s, \tag{5}$$

wo die ns Grössen γ vorläufig noch nicht bestimmt, immerhin aber als bekannt angesehen sind, und die ε sich aus (4) bestimmen, und wollen nun die u derart bestimmen, dass die E unter den gegebenen Verhältnissen die wahrscheinlichsten Werthe annehmen.

Diese Art der Bestimmung scheint zunächst eine gänzlich verfehlte, da sicherlich die eigentliche Aufgabe darin besteht, die wahrscheinlichsten Werthe der u selbst zu ermitteln. Es wird sich nun aber herausstellen (§. 8), dass bei der Allgemeinheit, in der unser Gegenstand behandelt werden soll, eine solche Bestimmung nicht möglich ist, oder doch zu nicht durchführbaren Rechnungen leitet, während die angegebene Art freilich eine Willkürlichkeit in sich schliesst, jedoch von der bessern Bestimmung nicht viel abweichen kann, und dann den Vortheil hat, auf leicht zu behandelnde Gleichungen zu führen.

Behufs unserer nachfolgenden Betrachtung sollen die positiven Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ eingeführt werden, welche die Eigenschaft haben, die Producte

$$\begin{aligned} &\beta_1 \gamma_1^{(1)}, \ \beta_1 \gamma_2^{(1)}, \ldots, \beta_1 \gamma_s^{(1)}, \\ &\quad\vdots \\ &\beta_n \gamma_1^{(n)}, \ \beta_n \gamma_2^{(n)}, \ldots, \beta_n \gamma_s^{(n)}, \end{aligned} \tag{6}$$

sämmtlich zu ganzen Zahlen zu machen, was offenbar immer möglich ist.

III. Wir nehmen an, alle Fehler, die man bei den angestellten Beobachtungen habe begehen können, liegen zwischen den Grenzen x_1, x_2, die positiv oder negativ sein können, und $x_2 > x_1$. Diese (möglichen) Beobachtungsfehler seien weiter sämmtlich Vielfache der positiven Zahl ω, wo natürlich positive und negative Vielfache zulässig sind. Da x_1, x_2 die äussersten Werthe der Fehler sind, so ist nothwendig

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$x_1 = g_1 \omega, \quad x_2 = g_2 \omega, \tag{7}$$

wo g_1, g_2 zwei ganze (positive oder negative) Zahlen sind, und $g_2 > g_1$.

Dann sei M_r die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $m\omega$ bei der Beobachtungsweise, welche B_r ergab, wo M_r als von m und r abhängig anzusehen ist (m eine ganze Zahl).

Um jedoch Verwirrung vorzubeugen, wollen wir dieselbe Grösse ω bei den n einzelnen Gruppen (5 durch $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bezeichnen, dabei aber nicht übersehen, dass wir gehalten sind, alle diese ω als einander gleich zu behandeln. Somit ist M_r die Wahrscheinlichkeit, den Fehler $m\omega$ zu begehen; natürlich ist dieselbe Grösse auch die Wahrscheinlichkeit, dass der mit $\beta_\mu \gamma_r^{(\mu)}$ multiplicirte Fehler den Werth $\beta_\mu \gamma_r^{(\mu)} m\omega$ habe.

Bezieht sich das Summirungszeichen Σ auf alle ganzen Zahlen zwischen g_1 und g_2 (die möglich sind), und bildet man das Product

$$\begin{aligned} &\Sigma M_1 t^{m\omega_1\beta_1\gamma_1^{(1)} + \ldots + m\omega_n\beta_n\gamma_1^{(n)}} \; \Sigma M_2 t^{m\omega_1\beta_1\gamma_2^{(1)} + \ldots + m\omega_n\beta_n\gamma_2^{(n)}} \ldots \\ &\qquad \ldots \Sigma M_s t^{m\omega_1\beta_1\gamma_s^{(1)} + \ldots + m\omega_n\beta_n\gamma_s^{(n)}}, \end{aligned} \tag{8}$$

so liefert dasselbe eine Reihe von Gliedern, die unter der Form

$$R t^{\mu_1\omega_1 + \ldots + \mu_n\omega_n} \tag{9}$$

auftreten. Die Glieder, welche zum Exponenten $\mu_1\omega_1$ beitragen, bestehen aus den ersten Theilen der Factoren in (8) u. s. w., und es bildet sich μ_1 aus einer Summe von Grössen $m\beta_1\gamma_1^{(1)}, \ldots, m\beta_1\gamma_s^{(1)}$, worin die m alle mögliche Werthe durchlaufen. Jedes der betreffenden Glieder in (8) ist mit der Wahrscheinlichkeit multiplicirt, es habe der Fehler ε den Werth $m\omega_1$, also auch $\beta_1\gamma_r^{(1)}\varepsilon$ den Werth $\beta_1\gamma_r^{(1)} m\omega_1$*. Würde man also in (8) die Grössen $\omega_2, \ldots, \omega_n$ ganz weglassen, so wäre R in (9) die Wahrscheinlichkeit, dass

$$\beta_1\gamma_1^{(1)}\varepsilon_1 + \ldots + \beta_1\gamma_s^{(1)}\varepsilon_s = \beta_1 E_1$$

genau den Werth $\mu_1\omega_1$ hätte. Hieraus folgt aber sofort, dass überhaupt R die Wahrscheinlichkeit gibt, es seien zugleich:

$$\beta_1 E_1 = \mu_1\omega_1, \; \beta_2 E_2 = \mu_2\omega_2, \ldots, \; \beta_n E_n = \mu_n\omega_n. \tag{10}$$

Es wurde schon oben darauf hingewiesen, dass wir gehalten sind, die sämmtlichen ω als einander gleich anzunehmen; einstweilen kommt es darauf nicht weiter an. Eine Unterscheidung, wenigstens in der Bezeichnung, war aber nothwendig, da sonst die einzelnen Glieder (9) nicht auseinander zu halten wären. Es wird sich im Nachstehenden (V.) herausstellen, dass wir immerhin gezwungen sind, die Gleichheit der ω festzuhalten.

IV. Setzen wir

$$t^{\omega_r} = e^{\theta_r i}, \tag{11}$$

so ist bekanntlich

$$R = \frac{1}{(2\pi)^n} \overline{\int \ldots \int_{-\pi}^{+\pi}} e^{-(\mu_1\theta_1 + \ldots + \mu_n\theta_n)i} P d\Theta_1 \ldots d\Theta_n, \tag{12}$$

wo

$$P = \Sigma M_1 e^{m(\beta_1\gamma_1^{(1)}\theta_1 + \ldots + \beta_n\gamma_1^{(n)}\theta_n)i} \ldots \Sigma M_s e^{m(\beta_1\gamma_s^{(1)}\theta_1 + \ldots + \beta_n\gamma_s^{(n)}\theta_n)i}.$$

Dieser Satz fordert namentlich, dass $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ganze Zahlen seien, was nach der Annahme in (6) offenbar der Fall ist. (Und blos desshalb mussten wir die fragliche Annahme machen.)

---

* Wo $\beta_1\gamma_r^{(1)} m$ eine ganze Zahl ist, also $\beta_1\gamma_r^{(1)} m\omega_1$ ein Vielfaches von ω_1. (Vergl. §. 6, VI.)

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

In (12) wollen wir für die Θ die neuen Veränderlichen α einführen, zusammenhängend mit jenen durch die Gleichungen

$$\Theta_r = \omega_r \alpha_r , \tag{13}$$

wo ω_r dieselbe Grösse wie in III. sein soll.

Ferner sei

$$\mu_r \omega_r = \beta_r q_r , \tag{14}$$

so dass die (10) heissen

$$E_r = q_r , \tag{15}$$

wo $r = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist

$$R = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\frac{\pi}{\omega_1}}^{\frac{\pi}{\omega_1}} \cdot \cdot \int_{-\frac{\pi}{\omega_n}}^{\frac{\pi}{\omega_n}} e^{-(\alpha_1 \beta_1 q_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n q_n) i} \frac{Q \beta_1 q_1}{\mu_1} \cdot \cdot \frac{\beta_n q_n}{\mu_n} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n , \tag{16}$$

wo Q der Werth ist, in den P jetzt übergeht. Diese Grösse ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass zugleich

$$E_1 = q_1 , \; E_2 = q_2 , \; \ldots , \; E_n = q_n . \tag{15}$$

Die μ in (10) sind nothwendig ganze Zahlen; also ist jede Änderung des Werthes $\beta_r E$ nothwendig ein Vielfaches von ω_r, d. h. wegen (14) von $\frac{\beta_r q_r}{\mu_r}$; die kleinste Änderung ist folglich $\frac{\beta_r q_r}{\mu_r}$, und die von E_r selbst ist $\frac{q_r}{\mu_r}$, d. h. die kleinste (zulässige) Änderung von q_r in (15′) ist $\frac{q_r}{\mu_r}$.

V. Es soll nun angenommen werden, dass alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Fehler bei einer Beobachtung überhaupt möglich sind. Dann ist ω_r überhaupt unendlich klein, und wenn

$$m \omega_r = x \; (m \text{ unendlich gross}) ,$$

so ist x eben ein Werth des Fehlers. Die Wahrscheinlichkeit M_r ist jetzt unendlich klein und eine Function von x, so dass

$$M_r = f_r(x)\, dx ,$$

wo $f_r(x)$ eine Function von x ist, welche ihre Form mit r ändert. Da zwischen x_1, x_2 überhaupt der begangene Fehler liegt, so ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f_r(x)\, dx = 1. \tag{17}$$

In (10) sind die μ unendlich gross zu denken, wenn die E endliche Werthe haben sollen, d. h. die q in (15′). Die (kleinsten) Änderungen der q sind also auch unendlich klein, wie schon aus dem zu Ende von IV. Gesagten sofort folgt, und es muss die unendlich kleine Änderung dq_r von q_r nach dem dort Gesagten gleich $\frac{q_r}{\mu_r}$ sein.

Nunmehr verwandelt sich

$$\Sigma M_r \, e^{m(\beta_1 \gamma_r^{(1)} \Theta_1 + \ldots + \beta_n \gamma_r^{(n)} \Theta_n) i}$$

in

$$\int_{x_1}^{x_1} f_r(x)\, e^{x\, i(\alpha_1 \beta_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \beta_n \gamma_r^{(n)})}\, dx ,$$

so dass

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\, e^{x\, i(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1^{(1)} + \ldots + \alpha_n \beta_n \gamma_1^{(n)})}\, dx \; \cdot \cdot \int_{2}^{x_2} f_s(x)\, e^{x\, i(\alpha_1 \beta_1 \gamma_s^{(1)} + \ldots + \alpha_n \beta_n \gamma_s^{n})}\, dx$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

und da jetzt die Grenzen in (16) unendlich werden

$$R = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-(\alpha_1 \beta_1 q_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n q_n) i} Q \beta_1 d\alpha_1 \ldots \beta_n d\alpha_n.$$

Setzt man endlich α_r für $\beta_r \alpha_r$ (β_r eine positive Zahl), so ergibt sich, dass

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-(\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n) i} P d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{18}$$

wo

$$P = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) e^{x i (\alpha_1 \gamma_1^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_1^{(n)})} dx \ldots \int_{x_1}^{x_2} f_s(x) e^{x i (\alpha_1 \gamma_s^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_s^{(n)})} dx,$$

die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, die Gleichungen (15') finden zugleich statt. Man wird beachten, dass hier nur noch die γ und q vorkommen, wie dies sein muss, da alle übrigen Grössen mit den (15') nichts zu thun hatten.

VI. Es ist selbstverständlich, dass die Grösse W in (18) einen rellen Werth hat. Dies lässt sich in folgender Weise zeigen, wobei wir eine andere, für unsere Zwecke bequemere Form jenes Integrals gewinnen.

Sei

$$\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) e^{x i (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})} dx = \rho_r (\cos \varphi_r + i \sin \varphi_r) = \rho_r e^{\varphi_r i}, \tag{19}$$

so ist (ρ_r positiv, φ_r zwischen $-\pi$ und $+\pi$)

$$\begin{gathered} \rho_r^2 = \left[\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}) x\, dx\right]^2 + \left[\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}) x\, dx\right]^2, \\ \cos \varphi_r = \frac{1}{\rho_r} \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}) x\, dx, \sin \varphi_r = \frac{1}{\rho_r} \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}) x\, dx. \end{gathered} \tag{19'}$$

Setzt man z. A. $\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)} = \delta$, so ist auch

$$\begin{aligned} \rho_r^2 &= \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos \delta x\, dx \int_{x_1}^{x_2} f_r(z) \cos \delta z\, dz + \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin \delta x\, dx \int_{x_1}^{x_2} f_r(z) \sin \delta z\, dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{x_2} dz\, f_r(x) f_r(z) \cos \delta (x - z). \end{aligned}$$

Da sicher $\cos \delta (x - z)$ zwischen -1 und $+1$, so ist also [vergl. (17)]

$$\rho_r^2 < \int_{x_2}^{x_1} f_r(x)\, dx \int_{x_1}^{x_2} f_r(z)\, dz, \quad \text{d. h.} \quad \rho_r^2 < 1. \tag{20}$$

Nur für $\delta = 0$ ist $\rho_r^2 = 1$, wo aber $\delta = 0$ offenbar nur gewissen Werthen der Elemente α entspricht.

Setzt man nun

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s = \rho, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_s = \varphi \tag{21}$$

so ist in (18)

$$P = \rho e^{\varphi i},$$

also

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} \rho e^{-(\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n - \varphi) i} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \tag{22}$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die imaginäre Grösse unter den Integralzeichen ist

$$\cos(\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n - \varphi) - i \sin(\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n - \varphi)$$
$$= \cos(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n) + i \sin(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n).$$

Sei nun

$$\overline{\underline{\int \ldots \int}}_{-\infty}^{+\infty} \rho \sin(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = B,$$

so ist nothwendig

$$\overline{\underline{\int \ldots \int}}_{+\infty}^{-\infty} \rho \sin(\varphi - \alpha_1 q_1 \ldots)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = (-1)^n B.$$

Setzt man hier $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$ für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so ändert sich der Werth von ρ nicht; $\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n$ wird $-(\varphi - \alpha_1 q - \ldots \alpha_n q_n)$, so dass

$$-\overline{\underline{\int \ldots \int}}_{-\infty}^{+\infty} \rho \sin(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots)(-1)^n\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = (-1)^n B,$$

d. h.

$$\overline{\underline{\int \ldots \int}}_{-\infty}^{+\infty} \rho \sin(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = -B, \text{ oder } B = -B.$$

Demgemäss ist $B = 0$ und folglich

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \overline{\underline{\int \ldots \int}}_{-\infty}^{+\infty} \rho \cos(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{23}$$

wodurch nun die reelle Form von (18) gefunden ist.

ρ und φ sind durch (21) und (19') ebenfalls in reeller Form bestimmt, wobei noch besonders hervorzuheben ist, dass wir ρ_r positiv und φ_r zwischen $-\pi$ und $+\pi$ voraussetzen. Daneben besteht dann die Beziehung (20). Die Auswerthung des Integrals (23) ist in der hier beliebten Allgemeinheit offenbar nicht durchführbar.

§. 2.

I. Wir wollen von jetzt an annehmen, die Zahl s der Beobachtungen sei eine sehr grosse. Diese Annahme widerstreitet den Zwecken der hier gestellten Aufgabe nicht, da von vornherein klar ist, dass diese Zwecke nur erreicht werden, wenn eben eine grosse Zahl von Beobachtungen vorliegt.

Wie in §. 1, VI. gezeigt wurde, ist ρ_r kleiner als 1, ausser wenn die dortige Grösse $\delta = 0$. Diese letztere Grösse ist aber jedenfalls Null, wenn die sämmtlichen α Null sind; sie kann allerdings, je nach den Werthen der (noch unbestimmten) γ_r, auch für andere Systeme der Werthe der α Null sein. Da aber die γ_r für die verschiedenen r keineswegs die gleichen Werthe annehmen werden (vergl. §. 5), so werden auch die verschiedenen ρ_r nicht für dieselben Systeme der α gleich 1 sein. D. h. also, ausser wenn die α Null, sind nicht alle ρ_r zugleich 1.

Ist nun aber jedes der ρ_r unter 1, so ist bei grossem s jedenfalls ρ verschwindend klein. Da überdies das Integral in (23) endlich sein muss, weil die Integrationen nach den q einen endlichen Werth liefern müssen (Wahrscheinlichkeit, dass die E zwischen bestimmten Grenzen liegen), so wird die Grösse unter dem Integralzeichen für sehr grosse α nothwendig verschwindend klein sein, was auch s sei, da sonst das Integral unendlich wäre. Daraus geht hervor, dass es genügen wird, nur auf diejenigen Elemente zu achten, in denen die α nahe an Null liegen. Selbstverständlich ist dies um so genauer, je grösser s ist, und wir wer-

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

den also wesentlich diese Bedingung zu beachten haben, so dass im Folgenden immer von einer Annäherung an die Wahrheit die Rede sein sollte.

II. In dem Integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \begin{matrix} cos \\ sin \end{matrix} (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})\, x\, dx$$

ist jetzt $\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots$ sehr klein, so dass wir den *cos* und *sin* nach den bekannten Reihen entwickeln und uns mit der zweiten Potenz jener Grösse begnügen können. Dann wird

$$\int_{x_1}^{x_2} f_r(x)\, sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)\, x\, dx = k_r(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_r(x)\, cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)\, x\, dx = 1 - \frac{k'_r}{2} (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{n})^2,$$

wenn wir (17) beachten und zugleich

$$\int_{x_1}^{x_2} x f_r(x)\, dx = k_r, \quad \int_{x_1}^{x_2} x^2 f_r(x)\, dx = k'_r \tag{24}$$

setzen. Demnach

$$\rho_r^2 = 1 + (k_r^2 - k'_r)(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)^2, \quad \rho_r = \sqrt{\rho_r^2} = 1 + \frac{1}{2}(k_r^2 - k'_r)(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2,$$

d. h. wenn noch

$$\frac{1}{2}(k'_r - k_r^2) = h_r^2\,{}^* : \tag{25}$$

$$\rho_r = 1 - h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2.$$

Bei demselben Grade der Näherung kann man dafür setzen

$$\rho_r = e^{-h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2},$$

also

$$\rho = e^{-\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2},$$

wo, wie immer, Σ sich auf $r = 1, 2, \ldots, s$ bezieht.

---

* Dass die Grösse $k'_r - k_r^2$ positiv ist, ergibt sich in folgender Weise. Es ist wegen (17)

$$k'_r - k_r^2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f_r(x)\, dx \int_{x_1}^{x_2} f_r(z)\, dz - \int_{x_1}^{x_2} x f_r(x)\, dx \int_{x_1}^{x_2} z f_r(z)\, dz$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{x_2} dz f_r(x) f_r(z)(x^2 - xz) = \int_{x_1}^{x_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx f_r(z) f_r(x)(z^2 - xz).$$

Also

$$k'_r - k_r^2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) f_r(z)(x^2 - xz),$$

$$k'_r - k_r^2 = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{x_2} dz f_r(x) f_r(z)(z^2 - xz),$$

woraus

$$2(k'_r - k_r^2) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{x_1}^{x_2} dz f_r(x) f_r(z)(x - z)^2 > 0.$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ganz ebenso ist aus (19′) φ_r klein, also

$$\varphi_r = arc\left[sin = \frac{1}{\rho_r}\int_{x_1}^{x_2} f_r(x)\, sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)\, x\, dx\right] = arc\left(sin = \frac{k_r(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)}{1 - k_r^2(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)^2}\right)$$

$$= arc\,[sin = k_r(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)] = k_r(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots),$$

und folglich

$$\varphi = \Sigma\, k_r(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(1)}),$$

so dass endlich

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-\Sigma k_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)^2} cos\,[\Sigma\, k_r(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots) - \alpha_1 q_1 - \ldots]\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Es mag hier am Platze sein, darauf hinzuweisen, dass die oben gewählte Form von ρ_r (als Exponentialgrösse) die Eigenschaft zeigt, dass bei von Null verschiedenen Werthen der α die Grösse ρ bald verschwindend klein ist.

In Wahrheit sollten wir in dem so eben angegebenen Werthe von W nur diejenigen Elemente beachten, für welche die α Null oder doch nahe an Null sind, da für alle anderen α die Elemente verschwinden. Selbst aber, wenn wir die angegebenen Grenzen beibehalten, ist das Integral, das jedenfalls positiv ist, kleiner als

$$\overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-\Sigma k_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots)^2} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \tag{26}$$

Wir werden nun später (§. 4) zeigen, dass ein vielfaches Integral dieser Art sich immer in ein anderes

$$\overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-(a_1 z_1^2 + \ldots + a_n z_n^2)} dz_1 \ldots dz_n \tag{26′}$$

umformen lässt, wo die a positive Werthe haben, und den nahe an Null liegenden α auch nahe an Null liegende z entsprechen.

Letzteres Integral ist ein Product einfacher Integrale der Formel

$$\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-az^2} dz = 2\int_0^{\infty} e^{-az^2} dz.$$

Der Werth dieses letzten Integrals wird aber mit grosser Genauigkeit schon gefunden, wenn man nur die Elemente z beachtet, die wenig von Null verschieden sind, woraus folgt, dass auch die Werthe des Integrals (26′), d. h. (26) mit eben solcher Genauigkeit gefunden werden, wenn nur diejenigen Elemente beachtet werden, für welche die α klein sind.

III. Aus diesen Untersuchungen folgt hiemit, dass bei grossem s gesetzt werden darf

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)_n} \overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-\Sigma k_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2} cos\,[\alpha_1(q_1 - \Sigma k_r \gamma_r^{(1)}) + \ldots + \alpha_n(q_n - \Sigma k_r \gamma_r^{(n)})]\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{27}$$

wodurch jetzt die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt ist, es werden die Gleichungen (15′) zugleich stattfinden. (Desto genauer, je grösser s ist.) Dabei darf nicht übersehen werden, dass diese Wahrscheinlichkeit die a priori ist, d. h. es ist die vor aller Beobachtung berechnete Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtungsfehler derart ausfallen werden, dass die E in (15′) genau die dort gemeinten Werthe q haben. Wir wollen diese Wahrscheinlichkeit die theoretische nennen. Wie dies mit den (gesuchten) Werthen der u zusammenhängt, bleibt hier noch unentschieden.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

IV. Aus (27) sollen nun zunächst diejenigen Werthe der q bestimmt werden, für welche diese Grösse ihren Maximumwerth erreicht. Aus der Form des Integrals ergibt sich sofort, dass dasselbe am grössten ist, wenn für alle Werthe der α der vorkommende Cosinus den Werth 1 annimmt. Dies ist der Fall, wenn zugleich

$$q_1 = \Sigma k_r \gamma_r^{(1)}, \quad q_2 = \Sigma k_r \gamma_r^{(2)}, \ldots, \quad q_n = \Sigma k_r \gamma_r^{(n)}, \tag{28}$$

mittelst welcher Gleichungen somit diejenigen Werthe der E gefunden werden, für welche die theoretische Wahrscheinlichkeit am grössten ist.

Aus §. 1, II. folgt

$$\begin{aligned} E_m &= \gamma_1^{(m)} (p_1^{(1)} u_1 + \ldots + p_n^{(1)} u_n + \delta_1) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \gamma_s^{(m)} (p_1^{(s)} u_1 + \ldots + p_n^{(s)} u_n + \delta_s) \\ &= u_1 \Sigma \gamma_r^{(m)} p_1^{(r)} + \ldots + u_n \Sigma \gamma_r^{(m)} p_n^{(r)} + \Sigma \gamma_r^{(m)} \delta_r, \end{aligned} \tag{5'}$$

wenn

$$\delta_r = A_r - B_r.$$

Demnach sind die Werthe der u, für welche die Summen E ihre theoretisch wahrscheinlichsten Werthe (zugleich) annehmen, bestimmt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)} + u_2 \Sigma \gamma_r^{(1)} p_2^{(r)} + \ldots + u_n \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} + \Sigma \gamma_r^{(1)} \delta_r &= \Sigma k_r \gamma_r^{(1)}, \\ u_1 \Sigma \gamma_r^{(2)} p_1^{(r)} + u_2 \Sigma \gamma_r^{(2)} p_2^{(r)} + \ldots + u_n \Sigma \gamma_r^{(2)} p_n^{(r)} + \Sigma \gamma_r^{(2)} \delta_r &= \Sigma k_r \gamma_r^{(2)}, \\ &\vdots \\ u_1 \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)} + u_2 \Sigma \gamma_r^{(n)} p_2^{(r)} + \ldots + u_n \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} + \Sigma \gamma_r^{(n)} \delta_r &= \Sigma k_r \gamma_r^{(n)}, \end{aligned} \tag{29}$$

wo das Σ-Zeichen sich immer auf $r = 1, 2, \ldots, s$ bezieht.

Die hier vorkommenden γ sind bis jetzt noch immer willkürlich. Die aus dem linearen Gleichungssysteme (29) gezogenen Werthe der u haben — wenigstens bis jetzt — keine andere Eigenschaft, als die, dass sie in die Grössen E (wie dieselben oben in (5') bestimmt wurden), eingesetzt, denselben diejenigen Werthe beilegen, die für sich die grösste theoretische Wahrscheinlichkeit haben, bei den zu machenden Beobachtungen zu erscheinen.

Hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit der u selbst ist nichts entschieden, und es ist hierbei wohl zu beachten, dass die E ihre genau richtigen Werthe annehmen, wenn die u, also auch die ε, ihre richtigen Werthe haben, dass dies aber nicht umgekehrt der Fall ist, da ganz wohl die unrichtigen Werthe der ε derart zusammentreffen können, dass sie die richtigen E liefern. Aus dem Systeme der wahrscheinlichsten Werthe der E lässt sich somit keineswegs auf die wahrscheinlichsten Werthe der u schliessen. Dies rührt hauptsächlich daher, dass die ε in weit grösserer Anzahl vorhanden sind als die E. Wir werden auf diese Frage später zurückkommen (§. 9). Im Allgemeinen, wenn eben kein anderer Weg zu betreten ist, wird man freilich die aus (29) bestimmten u immerhin als zulässige betrachten können, namentlich wenn die Festsetzung der γ vor sich gegangen ist.

V. Wir setzen in (15') allgemein

$$q_m = \Sigma k_r \gamma_r^{(m)} + \xi_m, \tag{30}$$

wo $m = 1, 2 \ldots, n$, und wo folglich der wahrscheinlichste Werth von ξ_m Null ist. Ferner wollen wir die aus (29) bestimmten Werthe der u durch

$$U_1, \ U_2, \ldots, \ U_n \tag{31}$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

bezeichnen *, und die den Werthen (30) entsprechenden u durch

$$U_1 + \eta_1, \quad U_2 + \eta_2, \ldots, \quad U_n + \eta_n. \tag{32}$$

Setzt man (30) und (32) (für q_m und $u_1, \ldots, u_n$) in E_m ein, so ergibt sich aus (5') wegen (29)

$$E_m = \eta_1 \Sigma \gamma_r^{(m)} p_1^{(r)} + \ldots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} + \Sigma k_r \gamma_r^{(m)},$$

und also ist jetzt

$$\eta_1 \Sigma \gamma_r^{(m)} p_1^{(r)} + \ldots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(m)} p_n^{(r)} = \xi_m.$$

Wird dann (30) in (27) eingesetzt, so folgt hieraus, dass

$$W = \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(2\pi)^n} \overline{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2} \cos(\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \tag{33}$$

die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, es werden die Summen E_m die in (30) gegebenen Werthe haben, wobei dann die u_m in §. 2 die Werthe $U_m + \eta_m$ annehmen, welche mit den ξ_m durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1 \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)} + \ldots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} &= \xi_1, \\ &\vdots \\ \eta_1 \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)} + \ldots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} &= \xi_n \end{aligned} \tag{34}$$

zusammenhängen.

VI. Ehe weiter gegangen wird, dürfte es bei den hier obwaltenden besonderen Schwierigkeiten angezeigt sein, die Bedeutung der (33), sowie der Grössen ξ und η wiederholt zu erörtern, um im Folgenden volle Klarheit zu haben.

Wie jeweils angemerkt wurde, drückt die Grösse W in (33) die theoretische Wahrscheinlichkeit (vor jeder Beobachtung) aus, es werden die E die durch (30) bestimmten Werthe annehmen. Sollen dann nach geschehenen Beobachtungen die E thatsächlich diese Werthe haben, so müssen die u (§. 1) die Werthe (32) haben, wo die η mit den ξ durch (34) zusammenhängen, also völlig bestimmt sind.

Die η tragen also den Charakter von Verbesserungen (Fehlern), welche an die aus (29) bestimmten Werthe von u anzubringen sind, wenn die E sich um die ξ, gegen die Werthe, welche das Maximum von W lieferten, ändern. Man hat also das Recht, zu sagen, es sei (33) auch die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass die aus (29) bestimmten Werthe der u mit den Fehlern η behaftet seien, wenn natürlich die η aus (34) bestimmt sind.

Daraus aber folgt, dass wenn man die η als neue Veränderliche, zusammenhängend mit den Veränderlichen ξ durch (34), betrachtet, und in (33) einführt, wodurch begreiflich der Werth dieser Grösse nicht geändert wird, letztere die soeben formulirte Wahrscheinlichkeit der Fehler η ausdrückt, ganz unabhängig nunmehr von den ξ. Nur muss man sich hier hüten, von wahren oder wahrscheinlichsten Werthen der u selbst zu sprechen, da sich alles nur auf die hier gewählte Art der Berechnung bezieht.

Führt man also die η in (33) mittelst (34) ein, was offenbar irgend einer Schwierigkeit nicht unterliegt, so erhält man die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass man den aus (29) nach den Grundsätzen, die zu jenen Gleichungen führten, bestimmten u noch gewisse Correctionen zufügen müsse, welche wir getrost als Fehler eben jener Werthe bezeichnen können. Da die wahrscheinlichsten Werthe der ξ Null sind, so sind auch die wahrscheinlichsten Werthe der η Null.

---

* So dass also diese Werthe gefunden werden aus Gleichungen der Form (29), in denen blos u durch U ersetzt wird.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die thatsächliche Einführung der η soll zunächst unterbleiben, da wir das Integral (33) selbst vorher auswerthen wollen.

Dazu bemerken wir, dass

$$\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \eta_r^{(1)} + \ldots + \alpha_n \eta_r^{(n)})^2 = S S A_{i,k} \alpha_i \alpha_k \tag{35}$$

gesetzt werden kann, wenn die Summenzeichen S sich auf $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots n$ beziehen und

$$A_{i,k} = \Sigma h_r^2 \eta_r^{(i)} \eta_r^{(k)}, \quad \text{also} \quad A_{i,k} = A_{k,i} \tag{36}$$

ist. In Bezug auf diese Form müssen wir nun einige Sätze aufstellen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen.

§. 3.

I. Sei die Grösse

$$S_i S_k A_{i,k} x_i x_k, \tag{37}$$

in welcher die Summenzeichen S sich auf $1, 2, \ldots, n$ beziehen, und

$$A_{i,k} = A_{k,i} \tag{37'}$$

ist, in

$$S_i p_i z_i^2 \tag{38}$$

umzuformen, wenn

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 + \ldots + a_{1,n} x_n &= z_1, \\ x_2 + a_{2,3} x_3 + \ldots + a_{2,n} x_n &= z_2, \\ &\vdots \\ x_n &= z_n, \end{aligned} \tag{39}$$

wo die a und p noch zu bestimmen sind. Selbstverständlich nehmen wir die Möglichkeit dieser Umformung nicht ohne Weiteres an, sondern behalten uns vor, durch das Ergebniss der Untersuchung dieselbe thatsächlich zu erweisen.

Setzt man die (39) in (38) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & p_1 (x_1 + a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 + \ldots + a_{1,n} x_n)^2 \\ & + p_2 (x_2 + a_{2,3} x_3 + \ldots + a_{2,n} x_n)^2 \\ & + \ldots \\ & \qquad \ldots \\ & \qquad\qquad + p_n x_n^2, \end{aligned}$$

welche Grösse, der Annahme nach, identisch mit (37) sein soll.

Kann man nun die p und a so bestimmen, dass diese Identität stattfindet, so ist auch die Annahme selbst gerechtfertigt.

II. Die vorausgesetzte Identität führt zu den folgenden Gleichungen:

$$p_1 a_{1,i}^2 + p_2 a_{2,i}^2 + \ldots + p_r a_{r,i}^2 = A_{i,i}, \tag{40}$$

wo i von 1 bis n geht, r jedoch nicht grösser als i sein darf. Dabei ist

$$a_{i,i} = 1 \tag{40'}$$

zu setzen. Diese Gleichung ergibt sich durch Gleichsetzen des Coëfficienten von x_i^2 in der einen und anderen Form.

Durch Gleichsetzen des Coëfficienten von $x_i x_k$ erhält man

$$p_1 a_{1,i} a_{1,k} + p_2 a_{2,i} a_{2,k} + \ldots + p_r a_{r,i} a_{r,k} = A_{i,k}, \tag{41}$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wo i und k von 1 bis n gehen, r aber nicht über i oder k hinausgehen darf, oder mit anderen Worten

$$a_{r,i} = 0 \quad \text{für} \quad r > i.$$

Es wird hinreichen, in (41) $k > i$ vorauszusetzen, was wegen (37') genügt. Diese Gleichung muss übrigens nothwendig vorausgesetzt werden, wenn (41) bestehen soll.

Die Anzahl der Gleichungen (40) ist offenbar n. Die der (41) ist, wenn i und k von 1 bis n laufen, aber $k > i$:

Für $i = 1$ geht k von 2 bis n, also $n-1$ Gleichungen,
„ $i = 2$ „ k „ 3 „ n, „ $n-2$ „
$\vdots$
„ $i = n-1$ ist $k = n$, „ 1 „

somit $1+2+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen. Die Gesammtzahl der Gleichungen (40) und (41) ist mithin $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Die Anzahl der p ist n, der a: $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, so dass die Anzahl der Unbekannten genau mit der der Bestimmungsgleichungen zusammenfällt. Dass übrigens die (40) und (41) alle aus der angenommenen Identität sich ergebenden Gleichungen vorstellen, ist leicht zu übersehen.

III. Setzt man in (40) und (41) $i = 1$, so ergibt sich wegen (40'):

$$p_1 = A_{1,1}, \quad p_1 a_{1,k} = A_{1,k},$$

d. h.

$$p_1 = A_{1,1}, \quad A_{1,1} a_{1,k} = A_{1,k}, \tag{42_1}$$

wo k von 2 bis n gehen kann.

Setzt man jetzt $i = 2$, so ergibt sich

$$p_1 a_{1,2}^2 + p_2 = A_{2,2}, \quad p_1 a_{1,2} a_{1,k} + p_2 a_{2,k} = A_{2,k},$$

und wenn obige Werthe eingeführt werden:

$$A_{1,1} p_2 = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix} a_{2,k} = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,k} \\ A_{2,1}, & A_{2,k} \end{vmatrix} \tag{42_2}$$

wobei allerdings die (37') wesentlich zu beachten ist.

Für $i = 3$ erhält man eben so, unter Beachtung des Gefundenen und der (37'):

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix} p_3 = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3} \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3} \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3} \end{vmatrix} a_{3,k} = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,k} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,k} \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,k} \end{vmatrix} \tag{42_3}$$

Hieraus scheint nun als allgemeines Gesetz zu folgen:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,i-1} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,i-1} \\ & \vdots & & \\ A_{i-1,1}, & A_{i-1,2}, & \ldots, & A_{i-1,i-1} \end{vmatrix} p_i = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,i} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,i} \\ & \vdots & & \\ A_{i,1}, & A_{i,2}, & \ldots, & A_{i,i} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,i} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,i} \\ & \vdots & & \\ A_{i,1}, & A_{i,2}, & \ldots, & A_{i,i} \end{vmatrix} a_{i,k} = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,i-1}, & A_{1,k} \\ A_{2,1}, & \ldots, & A_{2,i-1}, & A_{2,k} \\ & & & \\ A_{i,1}, & \ldots, & A_{i,i-1}, & A_{i,k} \end{vmatrix}, \tag{42_i}$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

für alle Werthe von i und k, wo aber immer $k > i$. Die Richtigkeit dieser Gleichungen wollen wir nun durch den Schluss von n auf $n+1$ erweisen, wobei wir natürlich annehmen, dass die (42_i) nicht nur für den bestimmten Werth von i (z. B. 4), sondern auch für alle kleineren Werthe erwiesen sind.

IV. Es ist aus (40)

$$p_{i+1} + p_i a^2_{i,i+1} + p_{i-1} a^2_{i-1,i+1} + \ldots + p_1 a^2_{1,i+1} = A_{i+1,i+1}.$$

Hieraus folgt wegen (42_1):

$$p_{i+1} + p_i a^2_{i,i+1} + \ldots + p_2 a^2_{2,i+1} = A_{i+1\ i+1} - \frac{A^2_{1,i+1}}{A_{1,1}} = \frac{1}{A_{1,1}} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,i+1} \\ A_{i+1,1}, & A_{i+1,i+1} \end{vmatrix}.$$

Dann wegen (42_2)

$$p_{i+1} + p_i a^2_{i,i+1} + \ldots + p_3 a^2_{3,i+1} = \frac{1}{A_{1,1}} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,i+1} \\ A_{i+1,1}, & A_{i+1,i+1} \end{vmatrix} - p_2 a^2_{2,i+1}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,i+1} \\ A_{i+1,1}, & A_{i+1,i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{1,3}, & A_{2,2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,i+1} \\ A_{2,1}, & A_{2,i+1} \end{vmatrix}^2}{A_{1,1} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}}.$$

Bezeichnen wir durch B die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,i+1} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,i+1} \\ A_{i+1,1}, & A_{i+1,2}, & A_{i+1,i+1} \end{vmatrix}$$

so ist der Zähler obigen Bruches

$$\frac{\partial B}{\partial A_{2,2}} \frac{\partial B}{\partial A_{i+1,i+1}} - \left(\frac{\partial B}{\partial A_{i+1,2}}\right)^2.$$

Nach dem in Brioschi's „Theorie der Determinanten" (Berlin, 1856) auf S. 9 als Gleichung (14) ausgesprochenen Satze ist aber

$$\frac{\partial B}{\partial A_{2,2}} \frac{\partial B}{\partial A_{i+1,i+1}} - \frac{\partial B}{\partial A_{i+1,2}} \frac{\partial B}{\partial A_{2,i+1}} = B \frac{\partial^2 B}{\partial A_{2,2}\, \partial A_{i+1,i+1}},$$

und da hier

$$\frac{\partial B}{\partial A_{i+1,2}} = \frac{\partial B}{\partial A_{2,i+1}}, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial A_{2,2}\, \partial A_{i+1,i+1}} = A_{1,1},$$

so erhält man sofort

$$p_{i+1} + p_i a^2_{i,i+1} + \ldots + p_3 a^2_{3,i+1} = \frac{B}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}}.$$

Ist weiter

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & A_{1,i+1} \\ A_{2,1}, & \cdot & \cdot & A_{2,i+1} \\ A_{3,1}, & \cdot & \cdot & A_{3,i+1} \\ A_{i+1,1}, & \cdot & \cdot & A_{i+1,i+1} \end{vmatrix} = C,$$

so ergibt sich

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$p_{i+1} + \cdots + p_4 a_{4,i+1}^2 = \frac{\dfrac{\partial C}{\partial A_{3,3}} \dfrac{\partial C}{\partial A_{i+1,i+1}} - \dfrac{\partial C}{\partial A_{i+1,3}} \dfrac{\partial C}{\partial A_{3,i+1}}}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3} \end{vmatrix}} = \frac{C}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,3} \\ A_{3,1}, & A_{3,3} \end{vmatrix}},$$

da der Zähler wieder gleich

$$C \frac{\partial^2 C}{\partial A_{3,3} \partial A_{i+1,i+1}} = C \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}$$

ist.

So fortlaufend gelangt man endlich zu

$$p_{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & \ldots, & A_{1+i}, & A_{1,i+1} \\ \vdots & & & \\ A_{i+1,1}, & \ldots, & A_{i+1,i}, & A_{i+1,i+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,i} \\ \vdots & & \\ A_{i,1}, & \ldots, & A_{i,i} \end{vmatrix}},$$

womit die allgemeine Richtigkeit des Werthes von p_i in (42_i) nachgewiesen ist. Dabei ist zu beachten, dass die $(37')$ nothwendig bestehen muss.

V. Es ist aus (41)

$$p_{i+1}\, a_{i+1,k} + p_i\, a_{i,i+1}\, a_{i,k} + \ldots + p_1\, a_{1,i+1}\, a_{1,k} = A_{i+1,k},$$

wo wir $k > i+1$ setzen. Daraus unter Beachtung von (42_1)

$$p_{i+1}\, a_{i+1,k} + \ldots + p_2\, a_{2,i+1}\, a_{2,k} = A_{i+1,k} - \frac{A_{1,i+1} A_{1,k}}{A_{1,1}} = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,k} \\ A_{i+1,1}, & A_{i+1,k} \end{vmatrix}}{A_{1,1}},$$

wo immer wieder $(37')$ vorausgesetzt ist.

Ist weiter

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,k} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,k} \\ A_{i+1,1}, & A_{i+1,2}, & A_{i+1,k} \end{vmatrix} = D,$$

so erhält man unter Beachtung von (42_2) und $(37')$

$$p_{i+1}\, a_{i+1,k} + \ldots + p_3\, a_{3,i+1}\, a_{3,k} = \frac{\dfrac{\partial D}{\partial A_{2,2}} \dfrac{\partial D}{\partial A_{i+1,k}} - \dfrac{\partial D}{\partial A_{2,k}} \dfrac{\partial D}{\partial A_{i+1,2}}}{A_{1,1} \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{D}{A_{1,1}} \frac{\dfrac{\partial^2 D}{\partial A_{2,2} \partial A_{i+1,k}}}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}} = \frac{D}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} \end{vmatrix}}.$$

Ganz wie in IV. geht man hier Schritt für Schritt weiter und gelangt so endlich zu

$$p_{i+1}\, a_{i+1,k} = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,i}, & A_{1,k} \\ \vdots & & & \\ A_{i+1,1}, & \ldots, & A_{i+1,i} & A_{i+1,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,i} \\ \vdots & & \\ A_{i,1}, & \ldots, & A_{i,i} \end{vmatrix}}.$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

wodurch dann wegen des oben gefundenen Werthes von p_{i+1} auch die allgemeine Giltigkeit der zweiten Gleichung (42_i) erwiesen ist.

VI. Hiernach also kann man aussprechen:

Hängen die x und z durch die Gleichungen (39) zusammen, so ist

$$S_i S_k A_{i,k} x_i x_k = S_i p_i z_i^2 , \tag{43}$$

wo nun p_i durch (42_i) oder kurzweg (42) gegeben ist. Die $a_{i,k}$ in (39) sind ebenfalls durch (42) genau bestimmt, und es ist bei Allem die Richtigkeit der Gleichung (37') angenommen. Die Einführung in das Integral (33), wo α an die Stelle unserer x tritt, erfordert jedoch noch wegen des dortigen trigonometrischen Factors den Ausdruck der Grössen x in z, d. h. die Umkehrung der (39).

VII. Aus diesen Gleichungen folgt offenbar

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + b_{1,2} z_1 + \ldots + b_{1,n} z_n , \\ x_2 &= \qquad\quad z_2 + \ldots + b_{2,n} z_n , \\ x_n &= \qquad\qquad\qquad\quad z_n , \end{aligned} \tag{44}$$

wo nun die b näher zu bestimmen sind.

Setzt man die Werthe (44) in (39) ein, so müssen natürlich letztere Gleichungen identisch erfüllt sein. Dies gibt

$$b_{i,k} + a_{i,i+1} b_{i+1,k} + a_{i,i+2} b_{i+2,k} + \ldots + a_{i,k-1} b_{k-1,k} + a_{i,k} = 0 , \tag{45}$$

wo nothwendig $k > i$ sein muss, sonst aber i und k alle Werthe von 1 bis n haben können.

Setzt man umgekehrt (39) in (44), so ergibt sich

$$a_{i,k} + b_{i,i+1} a_{i+1,k} + b_{i,i+2} a_{i+2,k} + \ldots + b_{i,k-1} a_{k-1,k} + b_{i,k} = 0 \tag{46}$$

mit denselben Bedingungen wie zu (45).

Die (41) geben für $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} A_{i,1} &= p_1 a_{1,i} , \\ A_{i,2} &= p_1 a_{1,i} a_{1,2} + p_2 a_{2,i} , \\ A_{i,i} &= p_1 a_{1,i} a_{1,i} + p_2 a_{2,i} a_{2,i} + \ldots + p_i a_{i,i} a_{i,i} \\ A_{i,n} &= p_1 a_{1,i} a_{1,n} + \ldots\ldots + p_i a_{i,i} a_{i,n} . \end{aligned}$$

Die k ersten dieser Gleichungen multipliciren wir mit

$$b_{1,k} , \; b_{1,k} \ldots , \; b_{k,k} ,$$

(wo auch $b_{k,k} = 1$) und addiren. Daraus folgt wegen (45):

$$A_{i,1} b_{1,k} + A_{i,2} b_{2,k} + \ldots + A_{i,k} b_{k,k} = 0 , \quad \text{wenn } k > i. \tag{47}$$

Für $k = i$ ist dagegen

$$A_{i,1} b_{1,i} + A_{i,2} b_{2,i} + \ldots + A_{i,i} b_{i,i} = p_i \tag{47'}$$

In der ersten dieser Gleichungen setzen wir $i = 1, 2, \ldots, k-1$, wo also immer $k > i$; in der zweiten $i = k$. Dadurch erfolgt:

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\begin{aligned}
&A_{1,1}\ b_{1,k} + A_{1,2}\ b_{2,k} + \ldots + A_{1,k}\ b_{k,k} = 0,\\
&A_{2,1}\ b_{1,k} + A_{2,2}\ b_{2,k} + \ldots + A_{1,k}\ b_{k,k} = 0,\\
&\vdots\\
&A_{k-1,1}\, b_{1,k} + A_{k-1,2}\, b_{2,k} + \ldots + A_{k-1,k}\, b_{k,k} = 0,\\
&A_{k,1}\ b_{1,k} + A_{k,2}\ b_{2,k} + \ldots + A_{k,k}\ b_{k,k} = p_k.
\end{aligned} \tag{48}$$

Dieses System von k Gleichungen gibt offenbar die Werthe der Grössen

$$b_{1,k},\ b_{2,k}, \ldots,\ b_{k,k},$$

(von denen freilich die letzte $=1$ sein muss). Setzt man

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, \ldots, & A_{1,k} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, \ldots, & A_{2,k} \\ \vdots & & \\ A_{k,1}, & A_{k,2}, \ldots, & A_{k,k} \end{vmatrix} = P_k, \tag{49}$$

so ist darnach

$$P_k\, b_{i,k} = p_k \frac{\partial P_k}{\partial A_{k,i}}, \tag{50}$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Dass hier $k > i$ ist aus der Natur der Sache klar. Für $k = i$ hätte man

$$P_k\, b_{k,k} = p_k \frac{\partial P_k}{\partial A_{k,k}},$$

d. h. wegen (42):

$$P_k\, b_{k,k} = \frac{P_k}{\frac{\partial P_k}{\partial A_{k,k}}} \frac{\partial P}{\partial A_{k,k}} \cdot b_{k,k} = 1,$$

wie gefordert. Es ist aus (42) klar, dass die (50) auch heissen kann:

$$\frac{\partial P_k}{\partial A_{k,k}}\, b_{i,k} = \frac{\partial P_k}{\partial A_{k,i}}, \tag{50'}$$

welche Gleichung sich aus den $k-1$ ersten (48) unmittelbar ergeben würde, worauf dann p_k aus der letzten sich ergäbe.

§. 4.

I. Wir kehren nunmehr zu dem Integral (33) zurück. Man führe in demselben an die Stelle der α die Veränderlichen z ein, so dass

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha_1 + a_{1,2}\, \alpha_2 + \ldots + a_{1,n}\, \alpha_n,\\
&\vdots\\
z_n &= \alpha_n,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= z_1 + b_{1,2}\, z_2 + \ldots + b_{1,n}\, z_n,\\
&\vdots\\
\alpha_n &= z_n,
\end{aligned}$$

wo die a und b aus §. 3 bestimmt seien, wenn $A_{i,k}$ durch (36) gegeben ist.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dann ist

$$S_i S_k A_{i,k} \alpha_i \alpha_k = S_i p_i z_i^2 :$$

$$\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n = \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \ldots + \zeta_n z_n,$$

wenn

$$\zeta_1 = \xi_1, \ \zeta_2 = \xi_2 + b_{1,2} \xi_1, \ \ldots, \ \zeta_n = \xi_n + b_{n-1,n} \xi_{n-1} + \ldots + b_{1,n} \xi_1, \tag{51}$$

und es wird das dortige Integral zu

$$\overline{\int} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\zeta_1 z_1 + \ldots + \zeta_n z_n) \, e^{-(p_1 z_1^2 + \ldots + p_n z_n^2)} \, dz_1 \ldots dz_n = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{p_1 \cdots p_n}} e^{-S \frac{\zeta_i^2}{4 p_i}},$$

eine Gleichung, die allerdings die Grössen p als positiv voraussetzt.

Diese Voraussetzung ist aber aus der Gleichung

$$S S A_{i,k} \alpha_i \alpha_k = S p_i z_i^2$$

sofort als zulässig zu erkennen. Die erste Seite derselben ist, wenn die A die Bedeutung in (36) haben, jedenfalls unbedingt positiv, was auch immer die Werthe der α sein mögen, so dass es natürlich auch die ihr identisch gleiche zweite Seite sein muss. Denkt man sich also einmal die α so bestimmt, dass z_k gegen alle übrigen z weitaus überwiegt, wodurch die p, die von α ganz unabhängig sind, nicht geändert werden, so hat die zweite Seite das Zeichen von $p_k z_k^2$, und also muss p_k positiv sein.

Hiernach ist nunmehr

$$W = \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(2\sqrt{\pi})^n \sqrt{p_1 \cdots p_n}} e^{-S \frac{\zeta_i^2}{4 p_i}}, \tag{52}$$

wo die p in §. 3, ζ durch (51) gegeben sind.

Das Product im Nenner findet sich

$$p_1 \cdots p_n = P_n = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,n} \\ \vdots & & & \\ A_{n,1} & A_{n,2}, & \ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{53}$$

so dass also

$$W = \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(2\sqrt{\pi})^n \sqrt{P}} e^{-S \frac{\zeta_i^2}{4 p_i}}, \tag{52'}$$

wo wir künftig die aus n^2 Elementen bestehende Determinante (53) kurzweg durch P bezeichnen wollen. Den Coëfficienten des Elementes $A_{i,k}$ in derselben werden wir dann durch $P_{i,k}$ bezeichnen, d. h.

$$P_{i,k} = \frac{\partial P}{\partial A_{i,k}} \tag{54}$$

setzen. Bekanntlich ist, wegen (37'), auch

$$P_{i,k} = P_{k,i}. \tag{54'}$$

II. Es handelt sich nun noch um die Summe $S \frac{\zeta_i^2}{p_i}$, die nach (51) durch die ξ auszudrücken ist. Wir wollen aber einen umgekehrten Weg einschlagen, nämlich die Summe

$$S_i S_k P_{i,k} \xi_i \xi_k \tag{55}$$

in $S q_i \zeta_i^2$ umformen, wo die ξ und ζ durch die (51) zusammenhängen.

Dass eine solche Umformung durchzuführen ist, ergibt sich wohl sofort aus §. 3, I., nur hat man jetzt die x durch ξ, die z durch ζ zu ersetzen, sodann die Zeiger $1, 2, \ldots, n$ mit $n, n-1, \ldots, 1$ zu vertauschen. D. h. also man setzt

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\begin{aligned}\zeta_n &= \xi_n + a'_{n,n-1}\,\xi_{n-1} + \ldots + a'_{n,1}\,\xi_1\,,\\ \zeta_{n-1} &= \qquad\qquad \xi_{n-1} + \ldots + a'_{n-1,1}\,\xi_1\,,\\ &\vdots\\ \zeta_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \xi_1\,,\end{aligned}$$

wo wir die Bestimmung der a' und q noch durchzuführen haben.

Verfährt man wie in §. 3, II., so erhält man als Coëfficienten von $\xi_i\,\xi_k$ in $Sq_i\,\zeta_i^2$:

$$q_n\,a'_{n,i}\,a'_{n,k} + q_{n+1}\,a'_{n-1,i}\,a'_{n-1,k} + \ldots + q_k\,a'_{k,i}\,a'_{k,k} = P_{i,k}\,, \tag{56}$$

wo $k \gtreqless i$ und $a'_{k,k} = 1$ sein soll. Vergleicht man diese Gleichung mit (41), wo $r = 1$, so hat man dort zu setzen

$$\begin{array}{llll} \text{für } p, & 1, 2. \ldots n, & A_{i,k}\,, & a: \\ q, & n, n-1, \ldots 1, & P_{n-i+1,n-k+1}\,, & a'. \end{array} \tag{57}$$

da dann die (41) heisst

$$q_n\,a'_{n,n-i+1}\,a'_{n,n-k+1} + \ldots + q_{n-k+1}\,a'_{n-k+1,n-i+1} = P_{n-i+1,n-k+1}\,,$$

wo allerdings jetzt $n-k+1 > n-i+1$ sein soll. Diese Gleichung gehört offenbar unter (56), und man würde sie erhalten, wenn man den Coëfficienten von $\xi_{n-i+1}\,\xi_{n-k+1}$ suchen würde. Zu (57) ist also noch zu setzen, dass man in §. 3 die Zeiger i und k mit $n-i+1$, $n-k+1$ vertauschen muss, wie dies übrigens dort ausgedrückt ist. Nach (42) ist also

$$\begin{vmatrix} P_{n,n} & P_{n,n-1}, \ldots, & P_{n,n-i+1} \\ \vdots & & \\ P_{n-i+1,n}, & \ldots, & P_{n-i+1,n-i+1} \end{vmatrix} a'_{n-i+1,n-k+1} = \begin{vmatrix} P_{n,n}, \ldots P_{n,n-i} & P_{n,n-k+1} \\ \vdots & \\ P_{n-i+1,n}, \ldots, & P_{n-i+1,n-k+1} \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} P_{n,n}, & P_{n,n-1}, \ldots, & P_{n,r} \\ \vdots & & \\ P_{r,n}, & \ldots, & P_{r,r} \end{vmatrix} a'_{r,s} = \begin{vmatrix} P_{n,n}, \ldots, & P_{n,r-1}, & P_{n,s} \\ \vdots & & \\ P_{r,n}, & \ldots, & P_{r,s} \end{vmatrix}$$

Nach bekannten Sätzen (vergl. Baltzer, Determinanten, 1857, S. 27) folgt hieraus

$$a'_{r,s} = b_{s,r}\,, \tag{58}$$

wie begreiflich zu erwarten war.

Weiter ist dann nach (42)

$$\begin{vmatrix} P_{n,n}, & \ldots, & P_{n,r+1} \\ \vdots & & \\ P_{r+1,n}, & \ldots, & P_{r+1,r+1} \end{vmatrix} q_r = \begin{vmatrix} P_{n,n}, & \ldots, & P_{n,r} \\ \vdots & & \\ P_{r,n} & \ldots, & P_{r,r} \end{vmatrix}.$$

woraus nach denselben Sätzen folgt

$$q_r = \frac{P}{p_r}. \tag{58'}$$

Somit ist endlich

$$S\,S\,P_{i,k}\,\xi_i\,\xi_k = P\,S\,\frac{\zeta_i^2}{p_i}\,,$$

d. h.

$$S\,\frac{\zeta_i^2}{p_i} = S\,S\,\frac{P_{i,k}}{P}\,\xi_i\,\xi_k$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

und folglich

$$W = \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{(2\sqrt{\pi})^n \sqrt{P}} e^{-SS \frac{P_{i,k}}{4P} \xi_i \xi_k}. \tag{59}$$

III. In (59) führen wir nunmehr (§. 2, VI.) an die Stelle der ξ die η aus (34) ein. Dadurch wird

$$\xi_i \xi_k = (\eta_1 \Sigma \gamma_r^{(i)} p_1^{(r)} + \ldots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(i)} p_n^{(r)})(\eta_1 \Sigma \gamma_r^{(k)} p_1^{(r)} + \ldots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(k)} p_n^{(r)}),$$

wo hier immer Σ sich auf $r = 1, 2, \ldots, s$ bezieht. Hierin ist der Coëfficient von $\eta_\alpha \eta_\beta$:

$$\Sigma \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)} + \Sigma \gamma_r^{(i)} p_\beta^{(r)} \Sigma k \gamma_r^{(k)} p_\alpha^{(r)},$$

somit

$$\xi_i \xi_k = S_\alpha S_\beta \Sigma \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)} \eta_\alpha \eta_\beta,$$

wo die S sich auf $1, 2, \ldots, n$ beziehen. Endlich also

$$SS P_{i,k} \xi_i \xi_k = S_\alpha S_\beta [\eta_\alpha \eta_\beta S_i S_k P_{i,k} \Sigma_r \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma_r \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)}].$$

Dann ist

$$d\xi_1 \ldots d\xi_n = M d\eta_1 \ldots d\eta_n,$$

wo

$$M = \begin{vmatrix} \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)}, & \Sigma \gamma_r^{(1)} p_2^{(r)}, & \ldots, & \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} \\ \Sigma \gamma_r^{(2)} p_1^{(r)}, & \Sigma \gamma_r^{(2)} p_2^{(r)}, & \ldots, & \Sigma \gamma_r^{(2)} p_n^{(r)} \\ \vdots & & & \\ \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)}, & \Sigma \gamma_r^{(n)} p_2^{(r)}, & \ldots, & \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} \end{vmatrix}, \tag{60}$$

so dass

$$W = \frac{M}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{d\eta_1 \ldots d\eta_n}{\sqrt{P}} e^{-\frac{1}{4P} S_\alpha S_\beta [\eta_\alpha \eta_\beta S_i S_k P_{i,k} \Sigma \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)}]}.$$

Wir setzen z. A.

$$D_{\alpha,\beta} = S_i S_k P_{i,k} \Sigma_r \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma_r \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)}, \tag{61}$$

wo also auch

$$D_{\alpha,\beta} = D_{\beta,\alpha}, \tag{62}$$

und haben

$$W = \frac{M}{\sqrt{P}} \frac{d\eta_1 \ldots d\eta_n}{(2\sqrt{\pi})_n} e^{-\frac{1}{4P} S_\alpha S_\beta D_{\alpha,\beta} \eta_\alpha \eta_\beta}. \tag{62}$$

IV. Ehe hier weiter gegangen wird, soll noch ein für unsere Zwecke wichtiger Satz abgeleitet werden, der heisst

$$\begin{vmatrix} D_{1,1}, & D_{1,2}, & \ldots, & D_{1,n} \\ D_{2,1}, & D_{2,2}, & \ldots, & D_{2,n} \\ \vdots & & & \\ D_{n,1}, & D_{n,2}, & \ldots, & D_{n,n} \end{vmatrix} = P^{n-1} M^2. \tag{63}$$

Es sei

$$\begin{vmatrix} P_{1,1}, & \ldots, & P_{1,n} \\ \vdots & & \\ P_{n,1}, & \ldots, & P_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)}, & \ldots, & \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} \\ \vdots & & \\ \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)}, & \ldots, & \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{1,1}, & \ldots, & C_{1,n} \\ \vdots & & \\ C_{n,1}, & \ldots, & C_{n,n} \end{vmatrix},$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so ist bekanntlich

$$C_{i,k} = P_{i,1} \Sigma q_r^{(1)} p_k^{(r)} + \ldots + P_{i,n} \Sigma q_r^{(n)} p_k^{(r)} = S_\alpha P_{i,\alpha} \Sigma q_r^{(\alpha)} p_k^{(r)}.$$

Ist dann

$$\begin{vmatrix} C_{1,1}, \ldots, C_{1,n} \\ \vdots \\ C_{n,1}, \ldots, C_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma q_r^{(1)} p_1^{(r)}, \ldots, \Sigma q_r^{(1)} p_n^{(r)} \\ \vdots \\ \Sigma q_r^{(n)} p_1^{(r)}, \ldots, \Sigma q_r^{(n)} p_n^{(r)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{1,1}, \ldots, E_{1,n} \\ \vdots \\ E_{n,1}, \ldots, E_{n,n} \end{vmatrix}$$

so ist

$$E_{u,v} = C_{1,u} \Sigma q_r^{(1)} p_v^{(r)} + \ldots + C_{n,u} \Sigma q_r^{(n)} p_v^{(r)} = S_\beta C_{\beta,u} \Sigma q_r^{(\beta)} p_v^{(r)}.$$

Wird hier

$$C_{\beta,u} = S_\alpha P_{\beta,\alpha} \Sigma q_r^{(\alpha)} p_u^{(r)}$$

eingesetzt, so ist

$$E_{u,v} = S_\alpha S_\beta P_{\beta,\alpha} \Sigma q_r^{(\alpha)} p_u^{(r)} \Sigma q_r^{(\beta)} p_v^{(r)} = D_{u,v}.$$

Hiernach also ist

$$\begin{vmatrix} D_{1,1}, \ldots, D_{1,n} \\ \vdots \\ D_{n,1}, \ldots, D_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{1,1}, \ldots, P_{1,n} \\ \vdots \\ P_{n,1}, \ldots, P_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma q_r^{(1)} p_1^{(r)}, \ldots, \Sigma q_r^{(1)} p_n^{(r)} \\ \vdots \\ \Sigma q_r^{(n)} p_1^{(r)}, \ldots, \Sigma q_r^{(n)} p_n^{(r)} \end{vmatrix}^2,$$

was wegen bekannten Sätzen die (63) liefert.

V. Es wurde bereits in §. 2, VI. angegeben, dass der Ausdruck (62) die Wahrscheinlichkeit bezeichne, es seien die aus (29) bestimmten u noch mit den Verbesserungen η zu versehen. Will man hieraus nun die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass U_n mit dem Fehler η_n behaftet sei, gleichviel, welches die Werthe der übrigen Grössen η seien, so muss bekanntlich die Grösse (62) nach $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ zwischen den hier möglichen Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt werden.

Zu dem Ende werden wir die (62) umformen, indem wir für die η neue Grössen y einführen, zusammenhängend mit ersteren durch die Gleichungen (§. 3, I.)

$$\begin{aligned} \eta_1 + c_{1,2}\eta_2 + \ldots + c_{1,n}\eta_n &= y_1, \\ \eta_2 + \ldots + c_{2,n}\eta_n &= y_2, \\ &\vdots \\ \eta_{n-1} + c_{n-1,n}\eta_n &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{64}$$

wo nun die c so bestimmt werden sollen, dass

$$SS D_{i,k} \eta_i \eta_k = S q_i y_i^2,$$

wobei allerdings $y_n = \eta_n$ ist. Diese Bestimmung ist bereits in §. 3 durchgeführt, und man hat

$$\begin{vmatrix} D_{1,1}, \ldots, D_{1,i-1} \\ \vdots \\ D_{i-1,1}, \ldots, D_{i-1,i-1} \end{vmatrix} q_i = \begin{vmatrix} D_{1,1}, \ldots, D_{1,i} \\ \vdots \\ D_{i,1}, \ldots, D_{i,i} \end{vmatrix}. \tag{65}$$

Die (62) wird jetzt

$$W = \frac{M}{\sqrt{P}} \frac{dy_1 \ldots dy_{n-1}\, d\eta_n}{(2\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{1}{4P}(q_1 y_1^2 + \ldots + q_{n-1} y_{n-1}^2 + q_n \eta_n^2)}$$

und die Grenzen für $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sind ebenfalls $-\infty$ und $+\infty$. Demgemäss ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{M}{\sqrt{P}} \frac{d\eta_n}{(2\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{q_n}{4P}\eta_n^2} \sqrt{\frac{(4P\pi)^{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}}} = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{P^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{q_1 \cdots q_{n-1}}} e^{-\frac{q_n}{4P}\eta_n^2} d\eta_n. \tag{62'}$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Aber nach (65) ist

$$q_1 \cdots q_{n-1} = \begin{vmatrix} D_{1,1}, \ldots, D_{1,n-1} \\ \vdots \\ D_{n-1,1}, \ldots, D_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad q_1 \cdots q_n = \begin{vmatrix} D_{1,1}, \ldots, D_{1,n} \\ \vdots \\ D_{n,1}, \ldots, D_{n,n} \end{vmatrix},$$

d. h. wegen (63)

$$q_1 \cdots q_n = P^{n-1} M^2, \quad q_1 \cdots q_{n-1} = \frac{P^{n-1} M^2}{q_n}, \quad \sqrt{q_1 \cdots q_{n-1}} = \frac{P^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} M}{\sqrt{q_n}}.$$

Das setzt allerdings voraus, dass die sämmtlichen q positiv seien. Ganz wie in §. 4, I. kann man sich überzeugen, dass dem so sei; übrigens würde sich dies schon daraus ergeben, dass die Grösse (62) nach allen η zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt gleich 1 sein muss, da innerhalb dieser Grenzen jedenfalls alle Verbesserungen liegen. Wäre aber nur ein q negativ, so erhielte man diesen Werth nicht *. Hinsichtlich des Zeichens von M in (60) brauchen wir keine weitere Untersuchung; es ist in allen Fällen das positive zu wählen.

Somit ist obige Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\sqrt{q_n}}{2\sqrt{\pi P}} e^{-\frac{q_n}{4P}\eta_n^2} d\eta_n.$$

Setzen wir noch

$$\eta_n \sqrt{\frac{q_n}{4P}} = \zeta_n, \quad \eta_n = \zeta_n \sqrt{\frac{4P}{q_n}},$$

so drückt also

$$\frac{e^{-\zeta_n^2} d\zeta_n}{\sqrt{\pi}} \tag{66}$$

die Wahrscheinlichkeit aus, der Fehler in u_n sei

$$\frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{q_n}} \zeta_n. \tag{66'}$$

VI. Soll dieselbe Beziehung für u_r erhalten werden, so hat man offenbar nur die Zeiger n und r in obigen Untersuchungen zu vertauschen, und zwar in (62'), d. h. statt der Ordnung $1, 2, \ldots, r-1, r, \ldots, n$ der Zeiger ist jetzt $1, \ldots, r-1, n, r+1, \ldots, n-1, r$ einzuführen, so dass η_r das letzte Element wird. Die Grösse M ändert dabei höchstens ihr Zeichen, und dasselbe gilt von P. Endlich wandelt sich q_n in q'_r um, wo

$$\frac{\partial T}{\partial D_{r,r}} q'_r = T = \begin{vmatrix} D_{1,1}, \ldots, D_{1,n} \\ \vdots \\ D_{n,1}, \ldots, D_{n,n} \end{vmatrix}, \tag{67}$$

welche Gleichung auch zugleich T definiren soll. Somit wird wegen (63) jetzt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_r^2} d\zeta_r \tag{68}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der aus (29) bestimmte Werth von u_r mit dem Fehler

$$\frac{2\zeta_r}{M P^{\frac{n}{2}-1}} \sqrt{\frac{\partial T}{\partial D_{r,r}}} \tag{68'}$$

---

* Die wirkliche Integration gibt den Werth $\frac{M\sqrt{P^{n-1}}}{\sqrt{q_1 \cdots q_n}}$, und da dies $= 1$ sein soll, so erhält man geradezu den Satz (63), den wir oben unmittelbar nachgewiesen haben.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

behaftet sei, wo M, P, T durch die Gleichungen (60), (53) und (67) definirt sind, während $D_{i,k}$ aus

$$D_{i,k} = S_\alpha S_\beta P_{\alpha,\beta} \Sigma_r \gamma_r^{(\alpha)} p_i^{(r)} \Sigma_r \gamma_r^{(\beta)} p_k^{(r)}$$

folgt, wo immer die Summenzeichen S sich auf $1, \ldots, n$, die Σ auf $1, \ldots, s$ beziehen. Endlich ist

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{\partial P}{\partial A_{\alpha,\beta}}.$$

Selbstverständlich ist (68′) auch

$$2\zeta_r \sqrt{P \frac{\partial T}{\partial D_{r,r}}}{T}. \tag{68''}$$

VII. Hieraus folgt nun endlich, dass, wenn die u aus (29) bestimmt werden, man die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho_r} e^{-z^2} dz \tag{69}$$

habe, es werde die an u_i anzubringende Verbesserung zwischen

$$-2\rho_r \sqrt{\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}} \quad \text{und} \quad +2\rho_r \sqrt{\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}} \tag{69'}$$

liegen. Die Grössen P, T, $\frac{\partial T}{\partial T_{i,i}}$ sind ihrer Natur nach positiv; ρ_r ist ebenfalls eine positive (sonst beliebige) Grösse. Willkürlich sind nun noch die sämmtlichen Grössen γ, die übrigens in P gleichfalls vorkommen.

§. 5.

I. Wie so eben bemerkt, ist hinsichtlich der Grössen γ (der Anzahl nach ns) noch keine Entscheidung getroffen. Wir wollen nun einmal, gleichgiltig vorerst, aus welchem Grunde, setzen

$$\gamma_r^{(i)} = \frac{\mu\, p_i^{(r)}}{h_r^2}, \tag{70}$$

wo μ eine von i und r unabhängige Zahl, h_r^2 durch (25) gegeben ist, und i von 1 bis n, r von 1 bis s geht.

Jetzt wird

$$A_{i,k} = \mu^2 \Sigma_r \frac{p_i^{(r)} p_k^{(r)}}{h_r^2}; \quad \Sigma_r \gamma_r^{(i)} p_k^{(r)} = \mu\, \Sigma_r \frac{p_i^{(r)} p_k^{(r)}}{h_r^2}.$$

Demnach, wenn

$$M' = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{p_1^{(r)} p_1^{(r)}}{h_r^2}, & \Sigma \frac{p_1^{(r)} p_2^{(r)}}{h_r^2}, \ldots, & \Sigma \frac{p_1^{(r)} p_n^{(r)}}{h_r^2} \\ \vdots & & \\ \Sigma \frac{p_n^{(r)} p_1^{(r)}}{h_r^2}, & \ldots\ldots\ldots, & \Sigma \frac{p_n^{(r)} p_n^{(r)}}{h_r^2} \end{vmatrix}, \tag{71}$$

so wird

$$M \text{ zu } \mu^n M', \quad P \text{ zu } \mu^{2n} M'.$$

Wird z. A. gesetzt

$$\rho_{i,k} = \Sigma_r \frac{p_i^{(r)} p_k^{(r)}}{h_r^2}, \tag{72}$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so ist

$$M' = \begin{vmatrix} \rho_{1,1}, & \rho_{1,2}, \ldots \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1}, & \rho_{2,2}, \ldots \rho_{2,n} \\ \vdots & \\ \rho_{n,1}, & \rho_{n,2}, \ldots \rho_{n,n} \end{vmatrix}, \quad \rho_{i,k} = \rho_{k,i}, \tag{73}$$

und es wird

$$P_{\alpha,\beta} \text{ zu } \mu^{2n-2} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}},$$

$$\Sigma_r \gamma_r^{(\alpha)} p_i^{(r)} \Sigma_r \gamma_r^{(\beta)} p_k^{(r)} \quad \text{zu} \quad \mu^2 \rho_{\alpha,i} \rho_{\beta,k},$$

$$P_{\alpha,\beta} \Sigma \gamma_r^{(\alpha)} p_i^{(r)} \Sigma \gamma_r^{(\beta)} p_k^{(r)} \quad \text{zu} \quad \mu^{2n} \rho_{\alpha,i} \rho_{\beta,k} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}};$$

also

$$S_\alpha P_{\alpha,\beta} \Sigma \gamma_r^{(\alpha)} p_i^{(r)} \Sigma \gamma_r^{(\beta)} p_k^{(r)} \quad \text{zu} \quad \mu^{2n} \rho_{\alpha,i} \left[\rho_{1,k} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,1}} + \ldots + \rho_{n,k} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,n}} \right],$$

welche Grösse Null ist, ausser für $\alpha = k$, wo sie $= M'$. Demnach wird

$$S_\alpha S_\beta P_{\alpha,\beta} \Sigma \gamma_r^{(\alpha)} p_i^{(r)} \Sigma \gamma_r^{(\beta)} p_k^{(r)}, \text{ d. h. } D_{i,k} \text{ zu } \mu^{2n} \rho_{k,i} M'.$$

Die Grösse $T = P^{n-1} M^2$ wird zu $\mu^{2n^2} M'^{n+1}$ und

$$\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}} \text{ zu } \mu^{2n^2-2n} M'^{n-1} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}},$$

und also endlich

$$\frac{P \dfrac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T} \quad \text{zu} \quad \frac{1}{M'} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}}. \tag{74}$$

II. Für unsere nächsten Zwecke ist es nun noch von Wichtigkeit, zu untersuchen, welchen Werth der Differentialquotient der so eben betrachteten Grösse nach $\gamma_u^{(\nu)}$ für die Werthe (70) annimmt.

Es ist nun (u geht von 1 bis s, ν von 1 bis n)

$$A_{i,k} = \Sigma_r h_r^2 \gamma_r^{(i)} \gamma_r^{(k)},$$

so dass

$$\frac{\partial A_{i,k}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} = 0, \text{ wenn weder } i \text{ noch } k \text{ gleich } \nu;$$

$$\frac{\partial A_{i,k}}{\partial \gamma_u^{(i)}} = h_u^2 \gamma_u^{(k)}, \quad \frac{\partial A_{i,k}}{\partial \gamma_u^{(k)}} = h_u^2 \gamma_u^{(i)},$$

$$\frac{\partial A_{i,i}}{\partial \gamma_u^{(i)}} = 2 h_u^2 \gamma_u^{(i)}.$$

Demnach ist

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial A_{1,1}} \dfrac{\partial A_{1,1}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} + \ldots + \dfrac{\partial P}{\partial A_{1,n}} \dfrac{\partial A_{1,n}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \\ + \vdots \\ + \dfrac{\partial P}{\partial A_{n,1}} \dfrac{\partial A_{n,1}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} + \ldots + \dfrac{\partial P}{\partial A_{n,n}} \dfrac{\partial A_{n,n}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \end{array} \right.$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$= h_u^2 \left(\frac{\partial P}{\partial A_{\nu,1}} \gamma_u^{(1)} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial A_{\nu,n}} \gamma_u^{(n)} \right)$$

$$+ h_u^2 \left(\frac{\partial P}{\partial A_{1,\nu}} \gamma_u^{(1)} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial A_{n,\nu}} \gamma_u^{(n)} \right),$$

da nur die νte Horizontal- und Verticalreihe stehen bleiben und das Glied $\frac{\partial P}{\partial A_{\nu,\nu}}$ thatsächlich zweimal vorkommt.

Demnach ist

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} = 2 h_u^2 (P_{\nu,1} \gamma_u^{(1)} + \ldots + P_{\nu,n} \gamma_u^{(n)}),$$

und wird also für die Werthe (70) zu

$$2\mu^{2n-1} \left(\frac{\partial M'}{\partial \rho_{\nu,1}} p_1^{(u)} + \ldots + \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\nu,n}} p_n^{(u)} \right) = \mu^{2n-1} h_u^2 \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}},$$

wie sich ganz in derselben Weise aus (73) ergibt.

Das Letztere war unmittelbar zu erwarten. Denn P enthält kein p; somit ist das Einsetzen der (70) ein einfaches Umformen, und

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} = \frac{\partial P}{\partial p_\nu^{(u)}} \frac{\partial p_\nu^{(u)}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} = \mu^{2n} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}} \frac{h_u^2}{\mu} = \mu^{2n-1} h_u^2 \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}}.$$

Da $P_{\alpha,\beta}$ ganz in derselben Lage ist, so wird

$$\frac{\partial P_{\alpha,\beta}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \quad \text{zu} \quad \mu^{2n-3} h_u^2 \frac{\partial}{\partial p_\nu^{(u)}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}}.$$

III. Anders verhält sich die Sache bei T. Bezeichnen wir durch Ansetzen des Accentes überhaupt den Werth einer Grösse, in der die γ aus (70) ersetzt sind, so ist

$$\frac{\partial T'}{\partial p_\nu^{(u)}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \right)' \frac{\mu}{h_u^2} + \left(\frac{\partial T}{\partial p_\nu^{(u)}} \right)',$$

wo es sich offenbar nur um die letzte Grösse handelt, da T' bekannt ist $(= \mu^{2n^2} M'^{n+1})$. Wir untersuchen zuerst $\frac{\partial M}{\partial p_\nu^{(u)}}$. Nach (60) ist dies

$$\frac{\partial M}{\partial \Sigma \gamma_r^{(1)} p_\nu^{(r)}} \gamma_u^{(1)} + \ldots + \frac{\partial M}{\partial \Sigma \gamma_r^{(n)} p_\nu^{(r)}} \gamma_u^{(n)},$$

also

$$\left(\frac{\partial M}{\partial p_\nu^{(u)}} \right)' = \mu^{n-1} \left(\frac{\partial M'}{\partial \rho_{1,\nu}} \frac{\mu p_1^{(u)}}{h_u^2} + \ldots + \frac{\partial M'}{\partial \rho_{n,\nu}} \frac{\mu p_n^{(u)}}{h_u^2} \right)$$

$$= \frac{\mu^n}{h_u^2} \left(p_1^{(u)} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{1,\nu}} + \ldots + p_n^{(u)} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{n,\nu}} \right) = \frac{\mu^n}{2} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}}.$$

Somit

$$\frac{\partial T}{\partial p_\nu^{(u)}} = \frac{\partial (P^{n-1} M^2)}{\partial p_\nu^{(u)}} = 2 P^{n-1} M \frac{\partial M}{\partial p_\nu^{(u)}},$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)' = 2\,(I^{n-1})'\,(M)'\left(\frac{\partial M}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)'*$$

$$= 2\mu^{2n^2-2n}\,M'^{n-1}\,\mu^n\,M'\,\frac{\mu^n}{2}\,\frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}} = \mu^{2n^2}\,M'^n\,\frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}}.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial T'}{\partial p_\nu^{(u)}} = (n+1)\,\mu^{2n^2}\,M'^n\,\frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}},$$

so dass endlich

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \gamma_u^{(\nu)}}\right)' = n\,\mu^{2n^2-1}\,h_u^2\,M'^n\,\frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}},$$

wo natürlich unter M' der Werth (73) gemeint ist [nicht aber $(M)'$].

IV. Bezeichnen wir

$$\frac{\partial T}{\partial D_{i,k}} \quad \text{durch} \quad T_{i,k},$$

so ist nunmehr noch $T_{m,m}$ näher zu untersuchen. Wieder ist

$$\frac{\partial T'_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}} = \left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial \gamma_u^{(\nu)}}\right)'\frac{\mu}{h_u^2} + \left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)',$$

wo es sich abermals nur um die letzte Grösse handelt.

Die Elemente von $T_{m,m}$ sind die $D_{i,k}$, wo jedoch alle fehlen, in denen i oder k gleich m. Die Grösse $p_\nu^{(u)}$ kommt vor in den Elementen

$$D_{1,\nu}, \ldots, D_{n,\nu};\quad D_{\nu,1}, \ldots, D_{\nu,n},$$

und es ist

$$\frac{\partial D_{i,\nu}}{\partial p_\nu^{(u)}} = S_\alpha\,S_\beta\,P_{\alpha,\beta}\,\Sigma_r\,\gamma_r^{(\alpha)}\,p_i^{(r)}\cdot\gamma_u^{(\beta)},$$

$$\left(\frac{\partial D_{i,\nu}}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)' = S_\alpha\,S_\beta\,\mu^{2n-2}\,\frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}}\,\mu\,\Sigma\,\frac{p_\alpha^{(r)}\,p_i^{(r)}}{h_r^2}\,\frac{\mu\,p_\beta^{(u)}}{h_u^2}$$

$$= \mu^{2n}\,S_\alpha\,S_\beta\,\rho_{\alpha,i}\,\frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}}\,\frac{p_\beta^{(u)}}{h_u^2}.$$

Aber

$$S_\alpha\,\rho_{\alpha,i}\,\frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}} = 0, \quad \text{wenn nicht } i = \beta,$$

so dass obige Grösse =

$$\mu^{2n}\,S_\alpha\,\rho_{\alpha,i}\,\frac{\partial M'}{\partial \rho_{\alpha,\beta}}\,\frac{p_i^{(u)}}{h_u^2} = \mu^{2n}\,M'\,\frac{p_i^{(u)}}{h_u^2}.$$

Ebenso

$$\left(\frac{\partial D_{\nu,i}}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)' = \mu^{2n}\,M'\,\frac{p_i^{(u)}}{h_u^2}.$$

---

* Es ist hier zu beachten, dass nicht unser obiges M' der Werth von M ist, wenn die (70) eingesetzt werden. Heisst letzterer $(M)'$, so ist $(M)' = \mu^n M'$. Darauf haben wir wesentlich zu achten.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Demnach

$$\frac{\partial T_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}} = \frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{1,\nu}} \frac{\partial D_{1,\nu}}{\partial p_\nu^{(u)}} + \ldots + \frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{n,\nu}} \frac{\partial D_{n,\nu}}{\partial p_\nu^{(u)}}$$

$$+ \frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{\nu,1}} \frac{\partial D_{\nu,1}}{\partial p_\nu^{(u)}} + \ldots + \frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{\nu,n}} \frac{\partial D_{\nu,n}}{\partial p_\nu^{(u)}},$$

wo jedoch die Grössen

$$\frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{m,\nu}} \frac{\partial D_{m,\nu}}{\partial p_\nu^{(u)}}, \quad \frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{\nu,m}} \frac{\partial D_{\nu,m}}{\partial p_\nu^{(u)}}$$

fehlen. Weiter ist offenbar

$$\left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{i,\nu}}\right)' = \frac{\partial T'_{m,m}}{\partial D'_{i,\nu}}, \quad D'_{i,\nu} = \mu^{2n} \rho_{i,\nu} M',$$

$$T'_{m,m} = \begin{vmatrix} D'_{1,1}, & \ldots, & D'_{1,n} \\ \vdots & & \\ D'_{n,1}, & \ldots, & D'_{n,n} \end{vmatrix},$$

wenn die $m$te Horizontal- und Verticalreihe weggelassen werden, d. h. unter denselben Bedingungen

$$T'_{m,m} = \begin{vmatrix} M' \rho_{1,1}, & \ldots, & M' \rho_{1,n} \\ \vdots & & \\ M' \rho_{n,1}, & \ldots, & M' \rho_{n,n} \end{vmatrix} \mu^{2n(n-1)},$$

so dass

$$\left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial D_{i,\nu}}\right)' = \mu^{2n(n-2)} \frac{\partial}{\partial (M' \rho_{i,k})} \begin{vmatrix} M' \rho_{1,1}, & \ldots, & M' \rho_{1,n} \\ \vdots & & \\ M' \rho_{n,1}, & \ldots, & M' \rho_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \mu^{2n(n-2)} M'^{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho_{i,\nu}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{m,m}} = \mu^{2n(n-2)} M'^{m-2} \frac{\partial}{\partial \rho_{m,m}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,\nu}}$$

Somit endlich

$$\left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)' = \frac{\mu^{2n(n-1)} M'^{n-1}}{h_u^2} \frac{\partial}{\partial \rho_{m,m}} \left[\frac{\partial M'}{\partial \rho_{1,\nu}} p_1^{(u)} + \ldots + \frac{\partial M'}{\partial \rho_{n,\nu}} p_n^{(u)}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\nu-1}} p_1^{(u)} + \ldots + \frac{\partial M'}{\partial \rho_{\nu,n}} p_n^{(u)}\right],$$

wo man das Wegfallen nicht zu betonen braucht; d. h. nun

$$\left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)' = \mu^{2n(n-1)} M'^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho_{m,m}} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}}.$$

Mithin endlich

$$\left(\frac{\partial T_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}}\right)' = \frac{h_u^2}{\mu} \left[\mu^{2n(n-1)} \frac{\partial}{\partial p_\nu^{(u)}} \left(M'^{n-1} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{m,m}}\right) - \mu^{2n(n-1)} M'^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho_{m,m}} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}}\right]$$

$$= \mu^{2n(n-1)-1} h_u^2 \frac{\partial M'}{\partial \rho_{m,m}} \frac{\partial}{\partial p_\nu^{(u)}} (M'^{n-1}).$$

Für $\nu = m$ kann man beachten, dass oben das letzte Glied $\frac{\partial T_{m,m}}{\partial p_\nu^{(u)}}$ Null ist, also

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \gamma_u^{(m)}}\right)' = \frac{h_u^2}{\mu}\frac{\partial T'_{m,m}}{\partial p_m^{(u)}} = \mu^{2n(n-1)-1} h_u^2 \frac{\partial (M'^{n-1})}{\partial p_m^{(u)}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{m,m}}$$

ganz wie vorhin (für $\nu = m$), wie begreiflich, da oben keine Ausnahme zu machen war.

V. Endlich wollen wir noch den Werth

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \frac{P\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}\right)' \tag{75}$$

untersuchen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_u^{(\nu)}}\left(\frac{P\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}\right) = \left[\frac{\partial P}{\partial \gamma_u^{(\nu)}}\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}} T + P\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_u^{(\nu)}}\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}\right) T - P\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}\frac{\partial T}{\partial \gamma_u^{(\nu)}}\right]\frac{1}{T^2}.$$

Also wird, wenn wir den Nenner T^2 weglassen, die (75) zu

$$\mu^{2n-1} h_u^2 \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}} \mu^{2n(n-1)} M'^{n-1} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}} \mu^{2n^2} M'^{n+1} + \mu^{2n} M' \mu^{2n(n-1)-1} h_u^2 \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}} \frac{\partial M'^{n-1}}{\partial p_\nu^{(u)}} \mu^{2n^2} M'^{n+1}$$

$$-\mu^{2n} M' \mu^{2n(n-1)} M'^{n-1} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}} n \mu^{2n^2-1} M'^{n} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}}$$

$$= \mu^{4n^2-1} h_u^2 \left[M'^{2n} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}} + (n-1) M'^{2n} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}} - n M'^{2n} \frac{\partial M'}{\partial p_\nu^{(u)}} \frac{\partial M'}{\partial \rho_{i,i}}\right],$$

d. h. es ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \frac{P\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}\right)' = 0. \tag{75'}$$

§. 6.

I. In §. 4 haben wir gesehen, dass die dortige Grösse (69) die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, es liegen die Änderungen, welche an u_i anzubringen sind (in Folge der Änderungen der E), innerhalb der durch (69') gegebenen Grenzen. In letzteren Ausdrücken sind die Grössen γ noch unbestimmt.

Es sollen letztere nunmehr so bestimmt werden, dass bei unverändertem Werthe von ρ_τ diese Grenzen möglichst enge sind. Dass ein Minimum in dieser Beziehung besteht, liegt wohl in der Natur der Sache, so dass eine weitere Untersuchung desshalb zu führen unnöthig ist. Für dieses Minimum muss nun die Grösse

$$\frac{P\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T} \tag{76}$$

nach jedem γ differenzirt, Null gesetzt werden, d. h. es ist $\gamma_u^{(\nu)}$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_u^{(\nu)}} \frac{P\frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T} = 0$$

ist. Nach den Untersuchungen in §. 5 ist dies der Fall, wenn die γ aus (70) bestimmt werden, wo dann (76) den Werth (74) annimmt. Die dortige Grösse μ bleibt ganz willkürlich, fällt aber in den Endergebnissen überall weg. Es ist natürlich an und für sich gleichgiltig, wie man zu den (70) gelangt. Thatsächlich geschieht dies am besten auf dem Wege der Induction, indem die Fälle $n = 1$ oder 2 zuerst besonders untersucht werden.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Wir setzen nun noch

$$h_r^2 = \frac{h^2}{g_r}, \tag{77}$$

wo h^2 von r unabhängig ist, und haben dann

$$\rho_{i,k} = \frac{1}{h^2} \Sigma_r g_r p_i^{(r)} p_k^{(r)}, \quad \Sigma_r k_r \eta_r^{(i)} = \frac{\mu}{h^2} \Sigma_r g_r p_i^{(r)} k_r,$$

$$\Sigma_r \delta_r \eta_r^{(i)} = \frac{\mu}{h^2} \Sigma g_r \delta_r p_i^{(r)}, \quad \Sigma_r \eta_r^{(i)} p_k^{(r)} = \frac{\mu}{h^2} \Sigma_r g_r p_i^{(r)} p_k^{(r)}.$$

II. Aus allem Vorstehenden ziehen wir nun das folgende Hauptergebniss.

Bestehen s Beobachtungsgleichungen (3) (also $r = 1, 2, \ldots, s$), in denen die B durch unmittelbare Beobachtungen gefunden wurden, und wo die durch (4) bestimmten ε die Beobachtungsfehler darstellen werden, wenn die u genau bekannt sind, und will man nun die u so bestimmen, dass n lineare Functionen (5) dieser Beobachtungsfehler ihre theoretisch wahrscheinlichsten Werthe [die (28)] annehmen, so wird dies am zweckmässigsten geschehen aus folgendem System:

$$\begin{aligned} u_1 \eta_{1,1} + u_2 \eta_{1,2} + \ldots + u_n \eta_{1,n} &= \Sigma_r g_r p_1^{(r)} (k_r - \delta_r), \\ u_1 \eta_{2,1} + u_2 \eta_{2,2} + \ldots + u_n \eta_{2,n} &= \Sigma_r g_r p_2^{(r)} (k_r - \delta_r), \\ &\vdots \\ u_1 \eta_{n,1} + u_2 \eta_{n,2} + \ldots + u_n \eta_{n,n} &= \Sigma_r g_r p_n^{(r)} (k_r - \delta_r), \end{aligned} \tag{78}$$

wenn

$$\eta_{i,k} = \Sigma_r g_r p_i^{(r)} p_k^{(r)}, \quad \delta_r = A_r - B_r;$$

g_r aus (77), h_r und k_r aus (24) und (25) bestimmt. Die Summirung nach dem Zeichen Σ_r bezieht sich überall auf $r = 1, 2, \ldots, s$ und es ist vorausgesetzt, dass s eine grosse Zahl sei.

III. Weichen die linearen Formen (5) etwas von ihren wahrscheinlichsten Werthen ab, so werden auch die u andere Werthe annehmen, als die soeben bestimmten; es ist aber theoretisch

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha_i} e^{-z^2} dz \tag{79}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Änderung von u_i zwischen

$$\pm 2\alpha_i h \sqrt{\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \eta_{i,i}}} \tag{80}$$

liegen werde, wenn

$$N = \begin{vmatrix} \eta_{1,1}, & \eta_{1,2}, \ldots, & \eta_{1,n} \\ \eta_{2,1}, & \eta_{2,2}, \ldots, & \eta_{2,n} \\ \vdots & & \\ \eta_{n,1}, & \eta_{n,2}, \ldots, & \eta_{n,n} \end{vmatrix} \tag{81}$$

ist. Diese Grenzen sind für alle möglichen Formen der linearen Gleichungen (5) die engsten, und desshalb ist die in II. angegebene Bestimmung die zweckmässigste.

Damit ist natürlich die eigentliche Aufgabe der ganzen Untersuchung erledigt.

Sind die Functionen f_r in §. 1, V. bekannt, so ist auch Alles, was hier vorkommt, bekannt, und man kann dann ganz wohl $h = 1$ setzen, so dass eben

$$g_r = \frac{1}{h_r^2}.$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Dabei ist, wie aus (24) und (25) sofort folgt, k_r der mittlere Werth eines Beobachtungsfehlers bei derjenigen Beobachtungsmethode, welche den $r$ten Beobachtungswerth B_r lieferte; und wenn k'_r den mittleren Werth des Quadrates des Beobachtungsfehlers bei derselben Methode, so ist

$$k_r^2 = \frac{1}{2}(k'_r - k_r^2). \tag{25}$$

IV. Leider ist in den meisten Fällen die Function f_r des §. 1 nicht gegeben, und wir werden desshalb hier noch einige weitere Betrachtungen anknüpfen müssen, namentlich zunächst über die Bedeutung der durch (77) eingeführten Grössen g.

Es liegt auf der Hand, dass, da über h^2 zu verfügen ist, die g sämmtlich als ganze (natürlich positive) Zahlen angesehen werden dürfen. Sei nun einmal z. B. $g_m = 1$, ein andermal $g_m = 3$, so ergibt sich aus (78) und der Bedeutung von $\eta_{i,k}$ ganz offenbar, dass Alles sich jetzt so verhalte, als wenn in dem System der Beobachtungsgleichungen (3) das eine Mal die $m$te Beobachtung nur ein-, das andere Mal aber dreimal vorkäme, wobei allerdings jedesmal $g_m = 1$ sein müsste.

Daraus folgt also, dass, wenn bei einer Beobachtungsweise ein gewisses g_m vorhanden ist, jede nach derselben Weise gemachte Beobachtung den Werth von g_m Beobachtungen hat, gemacht nach einer Weise, deren g gleich 1 ist. Desshalb nennen wir g_r das Gewicht der $r$ten Beobachtungsweise (welcher h_r entspricht).

Die Gewichte g_r sind hiernach relative Zahlen, die h_r aber absolute. Dabei ist h der Werth letzterer Zahl bei dem Gewichte 1. Da

$$\frac{g_u}{g_s} = \frac{h_s^2}{h_u^2},$$

so treten hiernach die Grössen $\frac{1}{h_r^2}$ als ein absolutes Maass der Genauigkeit der verschiedenen Beobachtungsweisen (denen die verschiedenen f_r zukommen) auf.

Man kann hier noch aussprechen, dass, wenn alle Beobachtungsweisen als vom Gewichte 1 (absolutem Maasse der Genauigkeit $\frac{1}{h^2}$) angenommen würden, sich Alles so verhielte, als wenn die erste Beobachtung $g_1$mal, ..., die $s$te aber $g_s$mal (natürlich je mit denselben Coëfficienten p, A, B) vorkäme. Doch wollen wir hierauf kein zu grosses Gewicht legen, da die früheren Formeln die Aufgabe lösen und ganz unabhängig von derartigen Betrachtungen sind.

Aber so viel ist klar, dass, wenn man den relativen Werth der verschiedenen Beobachtungsweisen zum Voraus irgendwie ermitteln kann (vielleicht auch nur abschätzen), man die g kennen wird, und folglich oben nur noch die Grösse h zu bestimmen bliebe. Aber auch das ist für die Ermittlung der u, wenn man sich hierauf einschränkt, nicht nöthig. Die Kenntniss der g reicht dazu völlig aus.

V. Einen Fall wollen wir hier noch besonders betrachten, der, weil er wohl in den meisten Beobachtungsweisen eintreffen wird, von Wichtigkeit ist. Es ist dies derjenige, da die sämmtlichen f_r in §. 1 die durch die Gleichung

$$f_r(-x) = f_r(+x) \tag{82}$$

ausgedrückte Eigenschaft haben, d. h. dass gleich grosse positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sind. Dann ist natürlich auch

$$x_1 + x_2 = 0,$$

so dass wir etwa

$$x_1 = -a, \quad x_2 = +a \tag{83}$$

setzen können, wobei $\pm a$ die äussersten Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler bezeichnen (a positiv).

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Jetzt ist

$$k_r = \int_{-a}^{+a} x f_r(x)\,dx = 0\,,\ k_r' = \int_{-a}^{+a} x^2 f_r(x)\,dx = 2\int_0^a x^2 f_r(x)\,dx\,,\ h_r^2 = \frac{1}{2}k_r' = \int_0^a x^2 f_r(x)\,dx. \tag{84}$$

In den (78) fällt jetzt auf den zweiten Seiten die Grösse k_r überall weg; alles Übrige behält sonst dieselbe Form. Wir werden diesen Fall künftig blos dadurch bezeichnen, dass wir sagen, es sei $k_r = 0$. Es ist allerdings denkbar, dass auch noch für andere Formen der f_r dies der Fall sein kann; wir wollen uns aber hier nicht auf diese Untersuchung einlassen, sondern immer nur eben diese Form meinen, bei der f_r sonst nicht näher bestimmt zu sein braucht. Bei wirklichen Beobachtungen liegt es wohl immer in der Natur der Sache, so dass $f_r(x)$ abnimmt mit wachsendem x. Doch sind wir zu dieser Annahme nirgends genöthigt worden.

Man wird bemerken, dass jetzt die theoretisch wahrscheinlichsten Werthe der E des §. 1 sämmtlich Null sind (bei grossem s).

VI. Es dürfte nicht unpassend sein, hier noch gelegentlich anzumerken, dass in §. 1 im Wesentlichen vorausgesetzt ist, dass in den (5) alle ε vorkommen, also wenn auch einige γ Null sein sollten (was nicht ausgeschlossen ist), doch nicht z. B. alle γ_m in dieser Lage sein dürfen, da sonst ε_m ganz wegfiele. Es hiesse das die $m$te Beobachtung ganz weglassen, so dass auch in (8) M_m ganz wegzufallen hätte. Das ist aber in §. 2 entschieden nicht zulässig, ganz abgesehen davon, dass ein solches willkürliches Weglassen nicht gestattet sein kann. Nach (70) würden alle γ_m nur wegfallen, wenn alle $p^{(m)}$ Null wären, was nach der Form (2) nicht möglich ist.

§. 7.

I. Man kann zu der in §. 6 gefundenen Auflösung noch auf einem ganz anderen Wege gelangen.

Sind nämlich wie in §. 1: $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ die Beobachtungsfehler, die wirklich begangen werden, so hätte man

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= p_1^{(1)} u_1 + \ldots + p_n^{(1)} u_n + \delta_1, \\ &\vdots \\ \varepsilon_s &= p_1^{(s)} u_1 + \ldots + p_n^{(s)} u_n + \delta_s, \end{aligned} \tag{85}$$

wenn hier die (absolut) wahren Werthe von u eingesetzt werden, die man freilich nicht zu ermitteln weiss.

Multiplicirt man die (85) mit den noch unbestimmten Coëfficienten $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ und addirt, so erhält man

$$\Sigma\,\alpha_r \varepsilon_r = u_1 \Sigma\, p_1^{(r)} \alpha_r + \ldots + u_n \Sigma\, p_n^{(r)} \alpha_r + \Sigma\,\alpha_r \delta_r. \tag{86}$$

Wir bestimmen die α nur derart, dass

$$\Sigma\, p_1^{(r)} \alpha_r = 0, \ldots,\ \Sigma\, p_{k-1}^{(r)} \alpha_r = 0,\ \Sigma\, p_k^{(r)} \alpha_r = 1,\ \Sigma\, p_{k+1}^{(r)} \alpha_r = 0, \ldots,\ \Sigma\, p_n^{(r)} \alpha_r = 0, \tag{87}$$

und haben dann

$$\Sigma\,\alpha_r \varepsilon_r = u_k + \Sigma\,\alpha_r \delta_r. \tag{88}$$

Die Gleichungen (87) sind des ersten Grades in Bezug auf die α, jedoch nur in der Zahl n, bestimmen also die α nicht völlig, so dass wir zu dieser Bestimmung noch weitere Bedingungen zufügen können. Aber auch wenn die α bestimmt wären, würde die (88) noch die ε enthalten.

Wir wollen nun in (88) für $\Sigma\,\alpha_r \varepsilon_r$ den mittleren Werth dieser Grösse wählen, welcher

$$\int_{x_1}^{x_2} \cdots \int f_1(\varepsilon_1) \ldots f_s(\varepsilon_s)\, \Sigma(\alpha_r \varepsilon_r)\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_s,$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

d. h. wegen (17) und (24) gleich $\Sigma\, \alpha_r k_r$ ist. Hiernach wäre

$$u_k = \Sigma\, \alpha_r (k_r - \delta_r). \tag{89}$$

II. Wie bereits gesagt, sind die α durch die (87) nicht völlig bestimmt. Es soll nun als weitere Bedingung zugefügt werden, dass der mittlere Werth von $\Sigma\, \alpha_r^2 \varepsilon_r^2$ ein Minimum sei, wobei natürlich die α den (87) zu genügen haben.

Dieser mittlere Werth ist aber

$$\overline{\int \cdot\cdot \int_{x_1}^{x_2}} f_1(\varepsilon_1) \ldots f_s(\varepsilon)\, \Sigma(\alpha_{sr}^2\, \varepsilon_r^2)\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_s = \Sigma\, \alpha_r^2 k_r',$$

und man hat folglich zur Bestimmung der α, wenn $4\rho_1, \ldots, 4\rho_n$ ebenfalls unbekannte Zahlen sind:

$$\begin{aligned}
p_1^{(1)}\, \alpha_1 + \ldots + p_1^{(s)}\, \alpha_s &= 0, \\
&\vdots \\
p_{k-1}^{(1)} \alpha_1 + \ldots + p_{k-1}^{(s)} \alpha_s &= 0, \\
p_k^{(1)}\, \alpha_1 + \ldots + p_k^{(s)}\, \alpha_s &= 1, \\
p_{k+1}^{(1)} \alpha_1 + \ldots + p_{k+1}^{(s)} \alpha_s &= 0, \\
&\vdots \\
p_n^{(1)}\, \alpha_1 + \ldots + p_n^{(s)}\, \alpha_s &= 0, \\
\alpha_1\, k_1' + 2\rho_1\, p_1^{(1)} + \ldots + 2\rho_n\, p_n^{(1)} &= 0, \\
&\vdots \\
\alpha_s\, k_s' + 2\rho_1\, p_1^{(s)} + \ldots + 2\rho_n\, p_n^{(s)} &= 0,
\end{aligned} \tag{90}$$

ein System von $n+s$ Gleichungen ersten Grades für die $n+s$ Unbekannten α und ρ.

Wir wollen nunmehr die Voraussetzung des §. 6, V. machen, wonach

$$h_r' = 2h_r^2, \quad k_r = 0.$$

Dann zieht man aus (90):

$$\alpha_r = -\frac{1}{h_r^2}\left(\rho_1\, p_1^{(r)} + \ldots + \rho_n\, p_n^{(r)}\right),$$

und also werden die n ersten Gleichungen

$$\rho_1\, \Sigma\, \frac{p_1^{(r)}\, p_1^{(r)}}{h_r^2} + \ldots + \rho_n\, \Sigma\, \frac{p_1^{(r)}\, p_n^{(r)}}{h_r^2} = 0,$$

$$\rho_1\, \Sigma\, \frac{p_n^{(r)}\, p_1^{(r)}}{h_r^2} + \ldots + \rho_n\, \Sigma\, \frac{p_n^{(r)}\, p_n^{(r)}}{h_r^2} = 0,$$

wo in der $k$ten Gleichung die zweite Seite 1 heisst. Wegen (77) heissen dieselben auch

$$\begin{aligned}
\rho_1\, \eta_{1,1} + \ldots + \rho_n\, \eta_{1,n} &= 0, \\
&\vdots \\
\rho_1\, \eta_{n,1} + \ldots + \rho_n\, \eta_{n,n} &= 0,
\end{aligned}$$

wo wieder die zweite Seite der $k$ten Gleichung h^2 heisst.

Hieraus folgt

$$\rho_m = \frac{h^2}{N}\, \frac{\partial N}{\partial \eta_{m,k}},$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\alpha_r = -\frac{h^2}{Nh_r^2}\left(p_1^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}} + \ldots + p_n^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\right), \quad \frac{h^2}{h_r^2} = g_r,$$

$$\Sigma\,\alpha_r\,\delta_r = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}}\,\Sigma\,\delta_r p_1^{(r)} g_r + \ldots + \frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\,\Sigma\,\delta_r p_n^{(r)} g_r\right).$$

Die zweite Seite ist aber genau der Werth von u_k, wie er aus (70) ($k_r = 0$) folgt.

Demnach sind die jetzt bestimmten Werthe von u genau dieselben, wie sie aus §. 6 folgen. Die Bedingung eines grossen s ist nicht nothwendig.

III. Die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass

$$\Sigma\,\alpha_r\,\varepsilon_r = \xi,$$

ist nach (27) wegen $k_r = 0$

$$w = \frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u\xi)\, e^{-\Sigma h^2_r u^2 \alpha^2_r}\, du = \frac{d\xi}{2\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\Sigma h_r^2 \alpha_r^2}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\Sigma h^2_r \alpha^2_r}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\Sigma h\,\alpha_r^2}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\Sigma h^2_r \alpha_r}}\, d\xi.$$

Setzt man

$$\frac{\xi}{2\sqrt{\Sigma h_r^2 \alpha_r^2}} = \zeta,$$

so ist also

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\zeta^2} d\zeta \text{ die Wahrscheinlichkeit, dass } \Sigma\,\alpha_r\,\varepsilon_r = 2\zeta\sqrt{\Sigma h_r^2 \alpha_r^2},$$

und folglich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho} e^{-\zeta^2} d\zeta \text{ die Wahrscheinlichkeit, dass } \Sigma\,\alpha_r\,\varepsilon_r \text{ zwischen } \pm 2\rho\sqrt{\Sigma h_r^2 \alpha_r^2}.$$

Wegen (88) kann man aber offenbar $\Sigma\,\alpha_r\,\varepsilon_r$ als eine Art Fehler ansehen, wenn man $u_k = -\Sigma\alpha_r\,\delta_r$ annimmt, und es ist folglich wesentlich, die Grösse $\Sigma h_r^2 \alpha_r^2$ so klein als möglich anzunehmen. Dies ist in II. geschehen, da $\alpha_r^2 k'_r = 2\alpha_r^2 h_r^2$. Unsere Bestimmung der u ist also hier wieder die zweckmässigste.

Übrigens ist

$$\alpha_r^2 h_r^2 = \frac{g_r^2 h_r^2}{N^2}\left(p_1^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}} + \ldots + p_n^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\right)^2$$

$$= \frac{g_r h^2}{N^2}\left(p_1^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}} + \ldots + p_n^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\right)^2.$$

Ferner

$$\Sigma\, g_r\left(p_1^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}} + \ldots + p_n^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\right)^2 = \Sigma\, g_r\left(p_1^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}} + \ldots\right)\left(p_1^{(r)}\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}} + \ldots\right) =$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}}\left(\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}}\,\eta_{1,1} + \ldots + \frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\,\eta_{1,n}\right) + \ldots + \frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\left(\frac{\partial N}{\partial \eta_{1,k}}\,\eta_{1,n} + \ldots + \frac{\partial N}{\partial \eta_{n,k}}\,\eta_{n,n}\right)$$

$$= N\frac{\partial N}{\partial \eta_{k,k}},$$

also

$$\Sigma\, h_r^2 \alpha_r^2 = \frac{h^2}{N}\,\frac{\partial N}{\partial \eta_{k,k}}.$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so dass ein völliges Zusammenfallen mit (81) stattfindet. Die hier bestimmten u haben also alle Eigenschaften der in §. 6 bestimmten (immer für $k_r = 0$). Natürlich wird man sich wieder hüten müssen, von wahrscheinlichsten Werthen der u selbst sprechen zu wollen.

IV. Endlich mag es noch von Interesse sein, zu bemerken, dass, wenn man die u des §. 1 so bestimmt, dass die Grösse

$$\Sigma g_r \varepsilon_r^2 \tag{91}$$

ein Minimum wird, man geradezu die Gleichungen (78) erhält, immer jedoch mit der Einschränkung, dass $k_r = 0$. Die Grösse (91) spielt in der Methode der kleinsten Quadrate eine wichtige Rolle, und es geht aus dem soeben Gesagten hervor, dass die aus (78) bestimmten u (für k_r) dieselben Grössen sind, wie diejenigen, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert. Wenn wir hier noch keineswegs auf wissenschaftlichem Wege zur Grösse (91) gelangt sind, so ist doch das vorhin Ausgesprochene schon desshalb von Werth, weil sich die Bildung der Gleichungen (78) dadurch auch für das Gedächtniss bequem formuliren lässt.

§. 8.

I. Es wurde im Laufe dieser Untersuchung vielfach darauf hingewiesen, dass die gefundenen Werthe der Unbekannten u mit den wahrscheinlichen Werthen eben dieser Grössen nicht zu verwechseln seien. Diese Frage soll nunmehr etwas genauer erörtert werden.

Denken wir uns unter den u in (4) bestimmte Werthe, so nehmen (für die gefundenen B) die ε ebenfalls bestimmte Werthe an. Man kann nun fragen, welches unter den überhaupt möglichen Systemen der Werthe der u, auf Grund der gemachten Beobachtungen, die grösste Wahrscheinlichkeit für sich habe.

Wählt man ein bestimmtes System der u als das wahre, so nehmen die ε in (4), wo die B beobachtet sind, bestimmte Werthe an, die sich ändern, wenn jenes System sich ändert. Will man nun die Wahrscheinlichkeit finden, welche jenes bestimmte System der u für sich hat, gerade das wahre System dieser Grössen zu sein, so hat man nach einem der Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst die theoretische Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass unter der Annahme dieses Systems die sämmtlichen B erhalten werden, d. h. die Werthe der ε (der Fehler) erscheinen werden, die man aus (4) findet, wenn man die gewählten u und die (beobachteten) B einsetzt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Systems der u ist dieser so berechneten Wahrscheinlichkeit proportional (vergl. unten IV.).

Letztere ist

$$f_1(\varepsilon_1) \ldots f_s(\varepsilon_s)\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_s\,,$$

wo, wie mehrfach gesagt, die ε_r aus (4) zu entnehmen sind. Demgemäss ist dasjenige System der u das wahrscheinlichste, für welches

$$f_1(\varepsilon_1) f_2(\varepsilon_2) \ldots f_s(\varepsilon_s)$$

ein Maximum ist.

Differenzirt man diese Grösse in Bezug auf $u_1, \ldots, u_n$, und setzt die Differentialquotienten Null, so erhält man folglich die zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der u nöthigen Gleichungen. Dieselben sind

$$\frac{1}{f_1(\varepsilon_1)} \frac{df_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} p_r^{(1)} + \ldots + \frac{1}{f_s(\varepsilon_s)} \frac{df_s(\varepsilon_s)}{d\varepsilon_s} p_r^{(s)} = 0\,, \tag{92}$$

wenn hier $r = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird [und zugleich ε_r aus (4)]. Wären die f auch ihrer Form nach bekannt, was man eigentlich vorauszusetzen hat, so würde doch in den seltensten Fällen dieses Gleichungssystem zur wirklichen Bestimmung der u dienen können, und man würde also wieder auf eine andere Methode zurückgreifen müssen.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

II. Sollten die aus (92) bestimmten u mit den aus (78) bestimmten zusammenfallen, so müsste also die Grösse

$$u_1 \eta_{m,1} + u_2 \eta_{m,2} + \ldots + u_n \eta_{m,n} - \Sigma g_r p_m^{(r)} (k_r - \delta_r)$$

identisch sein mit

$$\frac{1}{f_1(\varepsilon_1)} \frac{df_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} p_m^{(1)} + \ldots + \frac{1}{f_s(\varepsilon_s)} \frac{df_s(\varepsilon_s)}{d\varepsilon_s} p_m^{(s)}$$

oder höchstens durch einen allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor sich davon unterscheiden. Erstere Grösse heisst auch

$$u_1 \Sigma g_r p_m^{(r)} p_1^{(r)} + \ldots + u_n \Sigma g_r p_m^{(r)} p_n^{(r)} - \Sigma g_r p_m^{(r)} (k_r - \delta_r),$$

d. h.

$$g_1 \varepsilon_1 p_m^{(1)} + \ldots + g_s \varepsilon_s p_m^{(s)},$$

vorausgesetzt, dass $k_r = 0$ (§. 6, V.). Hiernach muss

$$\frac{1}{f_m(\varepsilon_m)} \frac{df_m(\varepsilon_m)}{d\varepsilon_m} = 2\mu g_m \varepsilon_m$$

sein, wenn 2μ ein von m unabhängiger Factor ist. Dies liefert

$$l f_m(\varepsilon_m) = \mu g_m \varepsilon_m^2 + c, \quad f_m(\varepsilon_m) = c\, e^{\mu g_m \varepsilon_m^2},$$

wo c eine Constante. Da hier $f_m(-\varepsilon_m) = f_m(+\varepsilon_m)$, so sind wirklich die $k_r = 0$.

Da aus der Natur der Sache folgt, dass $f_m(\varepsilon_m)$ mit wachsendem ε_m abnimmt, so ist μ negativ und also allgemein

$$f_r(x) = c\, e^{-\mu g_r x^2}. \tag{93}$$

Nur bei dieser Form von $f_r(x)$ stimmen die wahrscheinlichsten Werthe der u mit den aus (78) für $k_r = 0$ gefundenen überein. Bekanntlich gehört diese Form der Methode der kleinsten Quadrate zu.

Man wird beachten, dass jetzt

$$f_1(\varepsilon_1) \ldots f_s(\varepsilon_s) = c_1 \ldots c_s\, e^{-\mu \Sigma g_r \varepsilon_r^2}.$$

ist, wo $c_1 \ldots c_s$ gewisse Constanten. Diese Grösse erreicht ihren grössten Werth, wenn $\Sigma g_r \varepsilon_r^2$ ein Minimum ist (§. 7, IV.), was wieder zu den (78) führt. Dabei ist jetzt die Voraussetzung eines grossen s (§. 2) nicht nothwendig.

III. Die Grössen c und μ in (93) lassen sich bestimmen, wenn man als zulässig findet, dass sich die Beobachtungsfehler innerhalb der Grenzen $\pm\infty$ bewegen können. Dann muss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(x)\, dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu g_r x^2}\, dx = 1$$

sein, d. h.

$$\frac{c\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu g_r}} = 1, \quad c = \frac{\sqrt{\mu g_r}}{\sqrt{\pi}}, \quad f_r(x) = \frac{\sqrt{\mu g_r}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu g_r x^2}.$$

Setzt man weiter nach (24)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_r(x)\, dx = 2h_r^2 = \frac{2h^2}{g_r},$$

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

so ist

$$\frac{\sqrt{\mu g_r}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\mu g_r x^2} dx = \frac{2h^2}{g_r}, \quad \frac{1}{2\mu g_r} = \frac{2h^2}{g_r}, \quad \mu = \frac{1}{4h^2},$$

so dass also genauer

$$f_r(x) = \frac{\sqrt{g_r}}{2h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{g_r x^2}{4h^2}} \tag{93'}$$

sein muss.

IV. In genauem mathematischen Ausdruck ist die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmt gewähltes System der u sei das richtige, auf Grund der gemachten Beobachtungen:

$$\frac{f_1(\varepsilon_1) \cdot \cdot \cdot f_s(\varepsilon_s)}{\Sigma \ldots \Sigma f_1(\varepsilon_1) \ldots f_s(\varepsilon_s)},$$

wo die Summirungszeichen des Nenners bedeuten, man solle alle überhaupt möglichen Systeme der u einsetzen. Da die u offenbar auch zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwanken können, wie dies in III. von den ε angenommen wurde, so ist unter Beachtung der (93') diese Grösse

$$\frac{e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r \varepsilon_r^2} du_1 \ldots du_n}{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r \varepsilon_r^2} du_1 \ldots du_n}, \tag{94}$$

wo die ε_r aus (4) einzusetzen sind.

Wir wollen nunmehr an die Stelle von u_m den Werth, wie ihn die (87) liefern ($k_r = 0$), vermehrt um ζ_m setzen. Dann ist ζ_m als der Fehler anzusehen, den man begeht, wenn man den aus (78) gezogenen Werth von u_m als den wahren annimmt.

Alsdann ist

$$\Sigma g_r \varepsilon_r^2 = \Sigma g_r [p_1^{(r)}(u_1 + \zeta_1) + \ldots + p_n^{(r)}(u_n + \zeta_n) + \delta_r]$$

$$= \Sigma g_r (p_1^{(r)} u_1 + \ldots + p_n^{(r)} u_n + \delta_r)^2 + 2\Sigma g_r (p_1^{(r)} u_1 + \ldots + p_n^{(r)} u_n + \delta_r)(p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n) + \Sigma g_r (p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n)^2.$$

Da hier die $u_1 \ldots u_n$ die aus (78) gezogenen Werthe sind, so ist also

$$\Sigma g_r \varepsilon_r^2 = A + \Sigma g_r (p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n)^2, \tag{95}$$

da

$$\Sigma g_r (p_1^{(r)} u_1 + \ldots + p_n^{(r)} u_n + \delta_r) p_m^{(r)} = u_1 \eta_{m,1} + \ldots + u_n \eta_{m,n} + \Sigma g_r \delta_r p_m^{(r)} = 0,$$

und wo A den Werth von $\Sigma g_r \varepsilon_r^2$ für die aus (78) gezogenen u bedeutet.

Die (94) wird jetzt

$$\frac{e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r (p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n)^2} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r (p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n)^2} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}, \tag{94'}$$

und bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein angenommenes System der Fehler ζ das richtige sei (d. h. dass die um die ζ corrigirten Werthe u, wie sie aus (78) sich fanden, die richtigen Werthe der u des §. 1 liefern).

Das Integral des Nenners hat genau die Form des Integrals (33), wenn man in letzterem die $\xi = 0$ setzt, sodann

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$h_r^2 = \frac{g_r}{4h^2}, \quad \gamma_r^{(m)} = p_m^{(r)}, \quad \alpha = \zeta.$$

Dann wird das dortige

$$A_{i,k} = \frac{1}{4h^2} \Sigma g_r p_i^{(r)} p_k^{(r)} = \frac{\gamma_{i,k}}{4h^2}$$

also P in (53) $= \frac{1}{(4h^2)^n} N$ und folglich das Integral nach §. 4, I.

$$\frac{(\sqrt{\pi})^n \sqrt{(4h^2)^n}}{\sqrt{N}} = \frac{(2h\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{N}},$$

so dass endlich

$$\frac{\sqrt{N}}{(2h\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{1}{4h^2} \Sigma g_r (p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n)^2} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n \tag{96}$$

die Wahrscheinlichkeit darstellt, ein gewisses System der ζ sei das wahre System der Fehler in u.

Es ist in (96)

$$\Sigma g_r (p_1^{(r)} \zeta_1 + \ldots + p_n^{(r)} \zeta_n)^2 = S_i S_k \gamma_{i,k} \zeta_i \zeta_k = q_1 y_1^2 + \ldots + q_{n-1} y_{n-1}^2 + q_n \zeta_n^2,$$

wenn man ζ und y in der durch (64) bezeichneten Weise zusammenhängen lässt. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, der Werth ζ_n sei der richtige Werth des Fehlers in u_n, was auch immer sonst die übrigen Fehler sind, ist

$$\frac{\sqrt{N}}{(2h\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{q_n \zeta_n^2}{4h^2}} d\zeta_n \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\frac{1}{4h^2}(q_1 y_1^2 + \ldots + q_n y_{n-1}^2)} dy_1 \ldots dy_{n-1}$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{(2h\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{q_n \zeta_n^2}{4h^2}} \frac{(2h\sqrt{\pi})^{n-1}}{\sqrt{q_1 \cdots q_{n-1}}} = \frac{\sqrt{N}}{2h\sqrt{\pi}\sqrt{q_1 \cdots q_{n-1}}} e^{-\frac{p_n \zeta_n^2}{4h^2}},$$

wo nun

$$\frac{\partial N}{\partial \gamma_{n,n}} q_n = N, \quad q_1 \cdots q_n = N, \quad q_1 \cdots q_{n-1} = \frac{\partial N}{\partial \gamma_{n,n}},$$

und also ist die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\sqrt{N}}{2h\sqrt{\pi}\sqrt{N_{n,n}}} e^{-\frac{N\zeta_n^2}{4h^2 N_{n,n}}} d\zeta_n, \quad N_{n,n} = \frac{\partial N}{\partial \gamma_{n,n}}.$$

Setzt man endlich

$$\frac{\sqrt{N}}{2h\sqrt{N_{n,n}}} \zeta_n = \xi_n,$$

so ist

$$\frac{\partial \xi_n}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi_n^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in u_n sei

$$\frac{2h\sqrt{N_{n,n}}}{\sqrt{N}} \xi_n.$$

Das stimmt nun genau mit dem Ausdruck (80), natürlich unter der Annahme, dass h in beiden Fällen dasselbe sei.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Damit ist die völlige Übereinstimmung der Resultate des §. 6 (der „zweckmässigsten" Werthe der u) mit den aus der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen, nachgewiesen.

§. 9.

I. In den Formeln (80), sowie in den so eben erhaltenen, steckt noch der Werth h, welcher mit dem mittleren Werthe des Quadrates des Fehlers zusammenhängt (§. 6, III., IV.). Die Grössen g haben wir geradezu als bekannt angenommen, und in Wahrheit sollten wir dies auch in Bezug auf h thun dürfen, da wir ja im Grunde die Functionsform f des §. 1 als gegeben ansehen. Wie bereits in §. 6, IV. bemerkt, ist dies immer, oder wohl in den meisten Fällen, nicht zulässig, und es bleibt also in der gesammten Rechnung endgiltig die eine nicht ermittelte Grösse h. Sie in dem Falle des §. 6 zu ermitteln, sind wir einstweilen nicht in der Lage, während sich die Sache im Falle des §. 8 etwas anders gestaltet. Unter Annahme des Fehlergesetzes (93) war die Wahrscheinlichkeit, die Beobachtungsfehler $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ zu begehen,

$$\frac{\sqrt{g_1 \cdots g_s}}{(2h\sqrt{\pi})^s}\, e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r \varepsilon_r^2}\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_s. \tag{97}$$

Dies setzt voraus, dass sowohl die u als h ihre richtigen Werthe haben.

Würden für die u und h andere Werthe gesetzt, so erhält auch der Ausdruck (97) einen andern Werth, und da diese Grösse sich auf wirkliche Beobachtungen bezieht (natürlich der B in §. 1), so folgt daraus, dass die Wahrscheinlichkeit, das gewählte System der $h, u_1, \ldots, u_n$ sei das der richtigen Werthe, ist

$$\frac{h^{-s}\, e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r \varepsilon_r^2}\, d\,h\, du_1 \ldots du_n}{\int_0^\infty h^{-s}\, dh \overline{\int \cdot\cdot \int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r \varepsilon_r^2}\, du_1 \ldots du_n}$$

da h nur von 0 bis ∞ gehen kann.

Führt man wie in §. 8, IV. für die jetzigen u die dortigen $u+\zeta$ ein, so wird dieser Ausdruck

$$\frac{h^{-s}\, e^{-\frac{A}{4h^2}}\, e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r (p_1^{(r)}\zeta_1 + \cdots + p_n^{(r)}\zeta_n)^2}\, dh\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{\int_0^\infty h^{-s}\, e^{-\frac{A}{4h^2}}\, dh \overline{\int \cdot\cdot \int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r (\zeta_1 p_1^{(r)} \cdots)^2}\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}$$

Nach §. 8 ist

$$\overline{\int \cdot\cdot \int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r (p_1^{(r)}\zeta_1 + \cdots)^2}\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n = \frac{(2\sqrt{\pi})^n\, h^n}{\sqrt{N}},$$

so dass das Integral des Nenners ist

$$\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{N}} \int_0^\infty h^{-(s-n)}\, e^{-\frac{A}{4h^2}}\, dh.$$

Setzt man hier

$$\frac{A}{4h^2} = z^2, \quad h = \frac{\sqrt{A}}{2z}, \quad dh = -\frac{\sqrt{A}}{2z^2}\, dz,$$

so wird dasselbe

$$\frac{2^{s-1}(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{N}\sqrt{A}^{s-n-1}} \int_0^\infty z^{s-n-2}\, e^{-z^2}\, dz,$$

oder wenn

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$z^2 = u\,,\quad z = \sqrt{u}\,,\quad dz = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}:$$

$$\int_0^\infty z^{s-n-2}\, e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{s-n}{2}-\frac{3}{2}}\, e^{-u}\, du = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right),$$

so dass endlich

$$\frac{\sqrt{NA^{s-n-1}}}{2^{s-2}\sqrt{\pi^n}}\;\frac{h^{-s}}{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\, e^{-\frac{A}{4h^2}}\, e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r\,(p_1^{(r)}\zeta_1+\dots+p_n^{(r)}\,\zeta_n)^2}\; dh\, d\zeta_1\dots d\zeta_n \tag{98}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, die gewählten h und ζ seien die richtigen Werthe. Integrirt man hier nach $\zeta_1\dots\zeta_n$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so erhält man als Wahrscheinlichkeit, der gewählte Werth von h sei der wahre

$$\frac{\sqrt{A^{s-n-1}}\, h^{-(s-n)}\, e^{-\frac{A}{4h^2}}\, dh}{2^{s-n-1}\,\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{99}$$

Der Werth von h, für den die grösste Wahrscheinlichkeit besteht, findet sich aus

$$\frac{\partial}{\partial h}\, h^{-(s-n)}\, e^{-\frac{A}{4h^2}} = 0\,,\quad -(s-n)\,h^2 + \frac{A}{2} = 0\,,$$

d. h., wenn wir denselben h_0 nennen, so ist

$$h_0^2 = \frac{A}{2(s-n)}. \tag{100}$$

II. Setzen wir in (99) nunmehr $h = h_0 + \tau$, so ist τ der Fehler, den man begeht, wenn man h_0 für h nimmt. Dadurch wird aber (99) zu

$$\frac{\sqrt{A^{s-n-1}}}{2^{s-n-2}\,\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\;\frac{1}{(h_0+\tau)^{s-n}}\, e^{-\frac{A}{4(h_0+\tau)^2}}\, d\tau\,,$$

und gibt die Wahrscheinlichkeit an, τ sei der wahre Werth des Fehlers. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, der Fehler τ liege zwischen $-\rho$ und $+\rho$ gleich

$$\frac{\sqrt{A^{s-n-1}}}{2^{s-n-2}\,\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\int_{-\rho}^{+\rho}\frac{e^{-\frac{A}{4(h_0+\tau)^2}}\, d\tau}{(h_0+\tau)^{s-n}}. \tag{101}$$

Setzen wir

$$\frac{A}{4(h_0+\tau)^2} = u^2\,,\quad h_0+\tau = \frac{\sqrt{A}}{2u}\,,$$

so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, der Fehler τ liege zwischen $\pm\rho$:

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\int_{\frac{\sqrt{A}}{2(h_0+\rho)}}^{\frac{\sqrt{A}}{2(h_0-\rho)}} u^{s-n-2}\, e^{-u^2}\, du.$$

Diesen Ausdruck können wir hier nicht weiter behandeln. In (101) können wir wegen (100) übrigens setzen

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$A = 2(s-n)h_0^2,$$

und erhalten

$$\frac{(s-n)^{\frac{s-n-1}{2}} h_0^{s-n-1}}{2^{\frac{s-n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{e^{-\frac{(s-n)h_0^2}{2(h_0+\tau)^2}}}{(h_0+\tau)^{s-n}} d\tau.$$

Setzen wir noch

$$\tau = h_0 u,$$

so ist diese Grösse

$$\frac{(s-n)^{\frac{s-n-1}{2}}}{2^{\frac{s-n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)} \int_{-\frac{\rho}{h_0}}^{\frac{\rho}{h_0}} \frac{e^{-\frac{s-n}{2(1+u)^2}}}{(1+u)^{s-n}} du;$$

oder endlich, es ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in h_0 zwischen $\pm h_0\rho$ liege

$$\frac{(s-n)^{\frac{s-n-1}{2}}}{2^{\frac{s-n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)} \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{e^{-\frac{s-n}{2(1+u)^2}}}{(1+u)^{s-n}} du. \tag{101'}$$

III. Wir denken uns nun einmal $s-n$ sehr gross. Dann ist sicher ρ sehr klein, so dass wir in der Grösse unter dem Integralzeichen die Potenzen von u, welche über die zweite gehen, vernachlässigen können.

Dadurch wird

$$\frac{e^{-\frac{s-n}{2(1+u)^2}}}{(1+u)^{s-n}} = \frac{e^{-\frac{s-n}{2}(1+u)^{-2}}}{e^{(s-n)\,l(1+u)}} = \frac{e^{-\frac{s-n}{2}(1-2u+3u^2)}}{e^{(s-n)(u-\frac{1}{2}u^2)}} = e^{-\frac{s-n}{2}} e^{-(s-n)u^2},$$

so dass obiges Integral zu

$$\frac{(s-n)^{\frac{s-n-1}{2}} e^{-\frac{s-n}{2}}}{2^{\frac{s-n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-(s-n)u^2} du$$

wird. Daraus dann, wenn

$$(s-n)u^2 = z^2, \quad u = \frac{z}{\sqrt{s-n}},$$

es ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in h_0 zwischen $\pm \frac{h_0\rho}{\sqrt{s-n}}$ liege,

$$\frac{(s-n)^{\frac{s-n}{2}-1} e^{\frac{s-n}{2}}}{2^{\frac{s-n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-z^2} dz = \sqrt{2}\,\frac{\left(\frac{s-n}{2}\right)^{\frac{s-n}{2}-1} e^{-\frac{s-n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}-\frac{1}{2}\right)} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-z^2} dz.$$

Es bleibt uns nun noch die näherungsweise Berechnung des constanten Factors. Zu dem Ende unterscheiden wir zwei Fälle.

Es sei erstlich $s-n$ eine gerade Zahl $=2r$. Dann ist derselbe

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\frac{r^{r-1}\,e^{-r}}{\Gamma\left(r-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{2}=\frac{r^{r-1}\,e^{-r}\sqrt{2}\,e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi}}\left(r-\frac{1}{2}\right)^{-(r-1)}$$

für ein sehr grosses r. Dies ist aber auch

$$\frac{e^{-r}\,e^{r-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2r}\right)}{\sqrt{\pi}\left(1-\frac{1}{2r}\right)}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

so dass die fragliche Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho} e^{-z^2}\,dz. \tag{112}$$

Ist zweitens $s-n$ eine ungerade Zahl $=2r+1$, so ist jener Factor

$$\frac{\sqrt{2}\left(\frac{2r+1}{2}\right)^{r-\frac{1}{2}}e^{-(r+\frac{1}{2})}}{\Gamma(r)}=\frac{\sqrt{2}\left(r+\frac{1}{2}\right)^{r-\frac{1}{2}}e^{-(r+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{+r}\,r^{-(r+\frac{1}{2})}=\frac{\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{r}\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

so dass wieder die (102) erscheint.

IV. Hieraus also folgt, dass für ein sehr grosses $s-n$ die Grösse (102) die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, es liege der wahre Werth von h (auf Grund der gemachten Beobachtungen) zwischen

$$h_0\left(1+\frac{\rho}{\sqrt{s-n}}\right)\ \text{und}\ h_0\left(1-\frac{\rho}{\sqrt{s-n}}\right). \tag{103}$$

Damit ist natürlich unsere jetzige Aufgabe erledigt.

Wie schon oben bemerkt, ist die Grösse h in §. 6 auf Grund der gemachten Beobachtungen und der erhaltenen Werthe der u nicht bestimmbar, da dort die u keineswegs die wahrscheinlichsten Werthe sind. Eine solche Bestimmung ist glücklicher Weise, wenn man — was ja die Hauptsache ist — die u ermitteln will, auch nicht nöthig, da h in den Formeln (78) nicht mehr vorkommt.

Will man immerhin einen Werth von h haben, der aber, wie gesagt, eigentlich zwecklos ist, so müsste man sich an die so eben durchgeführte Bestimmung halten, da ja sonst alle übrigen Beziehungen dieselben sind. Bewiesen kann dies aber wohl nicht werden.

Ein weiteres Eingehen auf die erhaltenen Resultate liegt ausserhalb der hier gestellten Aufgabe, und gehört einem Werke über die Methode der kleinsten Quadrate zu.

V. Dagegen wird es von Interesse sein, nachzusehen, ob das Ergebniss des § 8, V. jetzt, da auch noch h als zu bestimmen angenommen ist, sich wieder findet.

Integrirt man (98) nach h zwischen 0 und ∞, nach $\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1}$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der gewählte Werth von ζ_n der richtige sei.

Wie in §. 8, V. ist aber

$$\overline{\int\cdot\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}} e^{-\frac{1}{4h^2}\Sigma g_r\left(p_1^{(r)}\zeta_1+\ldots+p_n^{(r)}\zeta_n\right)^2}\,d\zeta_1\ldots d\zeta_{n-1}=\frac{(2h\sqrt{\pi})^{n-1}}{\sqrt{N_{n,n}}}\,e^{-\frac{N\zeta_n^2}{4h^2\,N_{n,n}}},$$

und also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\frac{\sqrt{NA^{s-n-1}}}{2^{s-2}\sqrt{\pi^n}}\,\frac{(2\sqrt{\pi})^{n-1}\,d\zeta_n}{\sqrt{N_{n,n}}\,\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}\int_0^\infty h^{-(s-n+1)}\,e^{-\frac{A}{4h^2}}\,e^{-\frac{N\zeta_n^2}{4h^2\,N_{n,n}}}\,dh$$

$$=\sqrt{\frac{A^{s-n-1}\,N}{N_{n,n}}}\,\frac{d\zeta_n}{2^{s-n-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}\int_0^\infty h^{-(s-n+1)}\,e^{-\left(A+\frac{N\zeta_n^2}{N_{n,n}}\right)\frac{1}{4h^2}}\,dh.$$

Das hier vorkommende Integral gibt, wenn

$$\left(A+\frac{N\zeta_n^2}{N_{n,n}}\right)\frac{1}{4h^2}=u:$$

$$\frac{2^{s-n+1}}{\left(A+\frac{N\zeta_n^2}{N_{n,n}}\right)^{\frac{s-n}{2}}}\,\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right),$$

so dass die fragliche Wahrscheinlichkeit ist

$$\sqrt{\frac{A^{s-n-1}\,N}{\pi N_{n,n}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}\,\frac{d\zeta_n}{\left(A+\frac{N\zeta_n^2}{N_{n,n}}\right)^{\frac{s-n}{5}}}=\sqrt{\frac{N}{\pi A\,N_{n,n}}}\,\frac{2\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}\,\frac{d\zeta_n}{\left(1+\frac{N\zeta_n^2}{AN_{n,n}}\right)^{\frac{s-n}{2}}}.$$

Setzt man hier $A=2(s-n)h_0^2$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{\pi N_{n,n}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right)}{\sqrt{\frac{s-n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}\,\frac{d\zeta_n}{h_0\left(1+\frac{N\zeta_n^2}{2(s-n)h_0^2\,N_{n,n}}\right)^{\frac{s-n}{2}}}.$$

Für ein sehr grosses $s-n$ ist nahezu

$$\left(1+\frac{N\zeta_n^2}{2(s-n)\,h_2^2\,N_{n,n}}\right)^{\frac{s-n}{2}}=e^{\frac{N\zeta_n^2}{4h_0^2\,N_{n,n}}}.$$

Ferner, wenn $s-n=2r$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right)}{\sqrt{\frac{s-n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(r)}{\sqrt{r}\,\Gamma\left(r-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-r}\,r^{r-\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}\,\sqrt{2\pi}\,e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)}\,r^{r-1}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2r}\right)^{r-1}}=1.$$

Für $s-n=2r+1$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s-n}{2}\right)}{\sqrt{\frac{s-n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s-n-1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2r+1}{2}}\,\Gamma(r)}=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{2r+1}{2}}\left(\frac{2r+1}{2}\right)^r}{\sqrt{\frac{2r+1}{2}}\,\sqrt{2\pi}\,e^{-r}\,r^{r-\frac{1}{2}}}=1.$$

Somit ist für ein grosses $s-n$ jene Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\sqrt{N}}{2h_0\sqrt{\pi\,N_{n,n}}}\,e^{-\frac{N\zeta_n^2}{4h_0^2\,N_{n,n}}}\,d\zeta_n,$$

was mit dem in §. 8, V. erhaltenen Ausdrucke stimmt, wenn h dort durch h_0 (also den wahrscheinlichsten Werth) ersetzt wird.

Digitised by the Harvard University, Download from The BHL http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Hieraus aber folgt, dass die Bestimmung von h überhaupt nur bei sehr grossem $s-n$ zuverlässig (und auch zulässig) ist. Dies ist natürlich in dem Sinne aufzufassen, der sich aus der soeben geführten Untersuchung klar ergibt, dass nämlich nur dann die Ergebnisse des §. 8, V., die aus der Natur der Sache hervorgehen, mit der gebrauchten Art der Bestimmung von h zusammenstimmen.

VI. Dass man hiernach bei der Anwendung von h (bei dem sogenannten wahrscheinlichen Fehler) einige Vorsicht anempfehlen darf, liegt auf der Hand.

Überhaupt wird man sich immer vergegenwärtigen müssen, dass die Formeln (87) für $k_r=0$ nur dann die wahrscheinlichsten Werthe der u geben, wenn das durch (93') ausgedrückte Gesetz gilt. Man wird aber wohl nie so ohne Weiteres aussprechen können, dass dies der Fall sei, und es liegt also immerhin bei allen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate die willkürliche Annahme zu Grunde, jenes Gesetz habe Geltung. Der gebräuchlicher Weise als wahrscheinlicher Fehler (in den u oder h) angegebene Werth ist sonach keineswegs in dem Sinne zu verstehen, wie dies wohl meistens gemeint ist, d. h., dass derselbe als richtig zu betrachten sei. Die willkürliche Annahme des Gesetzes (93') macht ihn offenbar selbst zu einer ziemlich willkürlichen Grösse.

Die Darstellung, welche zu den (87) geführt, ist frei von der Willkür in Bezug auf die Annahme des Fehlergesetzes, wenn auch allerdings in der ersten Feststellung wieder eine Willkür liegt. Man wird eben bei der hier behandelten Aufgabe von einer oder der anderen Willkür sich nicht ganz freimachen können.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.

Jahr/Year: 1875

Band/Volume: 34_2

Autor(en)/Author(s): Dienger Joseph

Artikel/Article: Die LaplaceÅ½sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen. 21-62