

ÜBER

# BRECHUNG UND REFLEXION UNENDLICH DÜNNER STRAHLENSYSTEME AN KUGELFLÄCHEN.

VON

**F. LIPPICH**

IN PRAG.

(Mit 1 Tafel.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 9. MAI 1877.

## Vorbemerkungen.

Die Abhängigkeit zwischen Bild und Object bezüglich eines Systemes an einander gereihter durch Kugelflächen begrenzter Medien, kann bekanntlich für den Fall mit sehr geringen Hilfsmitteln entwickelt werden, als die Mittelpunkte der Kugelflächen sehr nahe an einer Geraden, der optischen Axe des Systemes, liegen und die Betrachtung auf unendlich dünne Strahlensysteme beschränkt wird, die überall der optischen Axe sehr nahe verlaufen.

In einer kleinen Schrift: *Fundamentalpunkte eines Systemes centrirter brechender Kugelflächen*<sup>1</sup> habe ich versucht, durch möglichst elementare geometrische Betrachtungen die Eigenschaften solcher axialer unendlich dünner Strahlensysteme zu ermitteln und hieran die Constructionen und metrischen Beziehungen zu fügen, welche Object- und Bildpunkte mit einander verknüpfen. Natürlich kann man von der neueren synthetischen Geometrie noch viel umfassenderen Gebrauch machen, wie dies seit Möbius von verschiedener Seite und in verschiedenem Grade geschehen ist, indem die geometrische Beziehung zwischen Bildraum und Objectraum nur ein specieller Fall der Beziehung zwischen zwei collinear verwandten Räumen ist. Um den Übergang von dem dioptrischen Probleme zu den geometrischen Eigenschaften collinearer Verwandtschaft zu vermitteln, genügt es, folgenden Satz zu erweisen:

Weist man jedem Strahl im ersten Medium als entsprechenden jenen Strahl im letzten Medium zu, der aus ersterem durch successive Brechung an den auf einander folgenden Kugelflächen hervorgeht und weist man ebenso jedem Punkte im ersten Medium jenen Punkt im letzten Medium als entsprechenden zu, welcher optischer Bildpunkt ist zu ersterem; so ist 1. der von den Strahlen und Punkten des ersten Mediums gebildete Raum

<sup>1</sup> Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark, 1871, II. Band, III. Heft.

collinear zu dem von entsprechenden Strahlen und Punkten im letzten Medium gebildeten Raume; 2. in jeder durch die optische Axe gelegten Ebene fallen zwei entsprechende Ebenen zusammen; 3. einem Kreise im ersten Raume, der seinen Mittelpunkt auf der Axe hat und dessen Ebene senkrecht zu dieser steht, entspricht ein ebenso gelegener Kreis im letzten Raume.

Der erste Theil dieses Satzes ergibt sich sofort aus dem Umstande, dass jedem einfallenden homocentrischen Strahlenbündel ein eben solcher nach beliebig vielen Brechungen entspricht; der zweite Theil, weil in einer Axenebene einfallende Strahlen durch die Brechungen nicht aus derselben heraustreten, und der dritte aus Gründen der Symmetrie.

Nummehr erkennt man leicht die specielle gegenseitige Lage der beiden collinearen Räume. In Folge 3 entspricht einer Schaar paralleler Ebenen in dem einen Raume, die senkrecht stehen zur Axe eine ebenso gelegene Schaar im zweiten. Diesen beiden Schaaren entsprechender paralleler Ebenen müssen aber auch die beiden Gegenebenen der Systeme parallel liegen, es stehen somit diese Gegenebenen oder, wie man sie in Folge ihrer optischen Bedeutung zu nennen pflegt, die Brennebenen senkrecht zur optischen Axe; die beiden sich entsprechenden, zu den Gegenebenen senkrechten Geraden aber, fallen in der optischen Axe über einander. Zwei zu den Gegenebenen parallele entsprechende ebene Systeme sind im Allgemeinen affin; wegen 2) und 3) erkennt man weiter, dass sie im gegenwärtigen Falle ähnlich sind, also wegen der parallelen Lage perspectivisch zu einander liegen und ihr perspectivisches Centrum auf der Axe haben. Dieselben Betrachtungen, durch die man ferner für zwei collineare Räume in allgemeiner Lage gegen einander die Existenz entsprechender, gleicher Punktreihen und Strahlenbüschel nachweist (mögen sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sein) und ihre Lage gegen die Gegenebenen bestimmt, führen in unserem speciellen Fall zu den entsprechenden gleichen ebenen Systemen und Strahlbündel, d. h. zu den 4 Hauptebenen und den 4 Knotenpunkten; die Doppelpunkte der in der Axe über einander fallenden projectivischen Punktreihen sind die Listing'schen symptomatischen Punkte u. s. w. Hiedurch werden schliesslich alle dioptrischen Constructionen und Formeln einfach Reproduktionen bekannter Sätze über projectivische Punktreihen und Strahlenbündel, die in gewissen specielleren gegenseitigen Lagen sich befinden.

An Stelle dieser einfachen geometrischen Beziehung zwischen Objectraum und Bildraum tritt eine sehr complicirte Abhängigkeit, sobald Strahlen in Betracht gezogen werden, die nicht mehr sehr nahe der optischen Axe verlaufen, für welche also Einfallswinkel oder Brechungswinkel nicht mehr sehr kleine Grössen erster Ordnung sind. In diesem Falle begnügt man sich meist damit, den Gang einiger weniger Strahlen durch das Linsensystem zu untersuchen und hierfür hat Seidel<sup>1</sup> sehr praktische trigonometrische Formeln aufgefunden. Aus ihnen resultirt aber unmittelbar kein einfaches Gesetz der Abhängigkeit zwischen einfallendem und austretendem Strahle wie es etwa für unendlich dünne axiale Strahlenbündel aufgestellt werden kann und es war auch gar nicht der Zweck der Seidel'schen Abhandlung zu einem solchen hinzuzuführen.

Einen solchen Zweck verfolgt eine von Zincken-Sommer unter dem Titel: „Über die Brechung eines Lichtstrahles durch ein Linsensystem“<sup>2</sup> veröffentlichte Arbeit. In dieser wird gezeigt, „dass sich die Abhängigkeit des gebrochenen Strahles vom einfallenden ohne jedwede Vernachlässigung und zwar durch sehr einfache Gesetze darstellen lässt, wenn man die Gauss'schen Definitionen derart erweitert, dass jedem Strahle je nach seiner Lage besondere Brennweiten, sowie auch besondere Brenn-, Haupt- und Kreuzungspunkte zugetheilt werden“. Um den Inhalt des von Zincken-Sommer angesprochenen Abhängigkeitsgesetzes im Zusammenhange mit dem für eine erste Näherung giltigen zu übersehen, betrachten wir zuerst ein der optischen Axe unendlich nahes Strahlensystem. Es sei  $S$  ein einfallender und  $S'$  der ihm entsprechende austretende Strahl. Diese beiden Strahlen mögen die respectiven Brenn- und Hauptebenen

<sup>1</sup> Carl's Repertorium für physikalische Technik, III. Band, p. 1867—183.

<sup>2</sup> Borchardt-Crelle Journal, LXXXII. Band, p. 31—14.

treffen in den Punkten  $f, f', e$  und  $e'$ , ferner die von Töpler<sup>1</sup> als negative Hauptebenen bezeichneten in  $g$  und  $g'$ , endlich seien  $i$  und  $i'$  die Knoten- oder Kreuzungspunkte des brechenden Systemes. Alsdann gelten die folgenden Beziehungen:

$$Eb. Si) \quad Eb. S'i', \quad ee' \parallel ii', \quad fi \parallel e'f', \quad ef \parallel f'i', \\ \varphi = fe = gf, \quad \varphi' = f'e' = g'f' \\ ei \parallel e'i', \quad g'i \parallel i'g';$$

die beiden letzten Relationen sind eine unmittelbare Folge der vorhergehenden. Genau dieselben Beziehungen gelten nach Zincken-Sommer auch wenn  $S$  und  $S'$  zwei beliebige zusammengehörige Strahlen sind ohne alle Vernachlässigungen, oder besser ausgedrückt, man kann auch dann noch auf der Axe zwei Punkte  $i$  und  $i'$ , auf den Strahlen zwei Punkte  $f$  und  $f'$  ferner zwei Längen  $\varphi$  und  $\varphi'$  angeben, von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man nach den in zweiter Reihe stehenden Gleichungen noch die Punkte  $e, g, e'$  und  $g'$  construirt auch die übrigen Relationen bestehen.

Allein es wäre unrichtig, dieses Abhängigkeitsgesetz als ein solches aufzufassen, das sein Bestehen der dioptrischen Beziehung zwischen  $S$  und  $S'$  verdankt; es gilt vielmehr ganz allgemein und in Folge dessen auch für zwei Strahlen, die in der Beziehung wie eintretender und austretender Strahl zu einander stehen. In der That, es seien  $S$  und  $S'$  zwei ganz beliebige Gerade und  $A$  eine dritte, welche  $S$  und  $S'$  nicht schneidet. Durch  $S$  legen wir eine Ebene  $E$  parallel zu  $S'$  und durch  $S'$  die Ebene  $E'$  parallel zu  $S$ . Die Ebenen  $E$  und  $E'$  mögen die Gerade  $A$  in den Punkten  $i$  und  $i'$  schneiden, dann sind diese Punkte die Kreuzungspunkte. Legt man durch diese parallele Gerade zu  $S$  und  $S'$  und sind  $f$  und  $f'$  die Durchschnittpunkte mit  $S$  und  $S'$ , so sind  $f$  und  $f'$  die früher als Brempunkte benannten Punkte und  $if = \varphi, i'f' = \varphi'$  die beiden Brempweiten. Bestimmt man mittelst derselben in der früher angegebenen Weise noch die Punkte  $e, g$  auf  $S$  und  $e', g'$  auf  $S'$ , so erkennt man zunächst, dass  $ee'$  gleich und parallel zu  $ii'$  ist. Denn es sind  $ife$  und  $i'f'e'$  zwei congruente Dreiecke, in welchen

$$if \parallel f'e' \quad \text{und} \quad ic \parallel i'f'$$

ist, es muss also auch

$$ie \parallel i'e',$$

d. h.  $ii'ee'$  ein Parallelogramm sein; die übrigen Beziehungen ergeben sich sofort.

Man kann also immer für irgend zwei Gerade  $S$  und  $S'$  in Bezug auf eine dritte Gerade ein und im Allgemeinen nur ein Punktsystem  $ifeg, i'f'e'g'$  angeben, welchem die von Zincken-Sommer für zwei Strahlen nachgewiesene Eigenschaften zukommen. Mit der Natur des brechenden Systemes und dem Brechungsgesetze stehen aber diese Eigenschaften in keinem nothwendigen Zusammenhange.

Erst der Umstand, dass für ein der optischen Axe unendlich nahes Strahlensystem die Punkte  $i$  und  $i'$  für alle Strahlen dieselben bleiben und der geometrische Ort der Punkte  $f, e, g$  u. s. w., d. h. die Brempenen die Hauptebenen etc. angegeben werden können, macht diese Punkte zu Fundamentalpunkten des brechenden Systemes. Im Falle endlicher Neigungen der Strahlen gegen die Axe, können diese Punkte für jeden Strahl erst gefunden werden, wenn die Lage des Strahles schon bekannt ist.

Herr Zincken-Sommer führt noch den Satz an: dass die Entfernungen der eintretenden und austretenden Strahlen von ihren respectiven Knotenpunkten  $i$  und  $i'$  sich verhalten wie die absoluten Brechungsindices des letzten und des ersten Mittels.

Es ist natürlich immer, und zwar auf unendlich viele Arten möglich, die Gerade  $A$  so zu wählen, dass die Entfernungen der auf ihr liegenden Punkte  $i$  und  $i'$  von den respectiven Strahlen gleich werden gegebenen Längen; man braucht nur in den ebenen  $E$  und  $E'$  parallele Gerade zu  $S$  und  $S'$  in den verlangten Distanzen zu ziehen und  $A$  so zu legen, dass sie diese Geraden schneidet. Obiger Satz an sich hat also ebenfalls keine

<sup>1</sup> Pogg. Ann. Band C XLII, p. 232.

unmittelbare Beziehung zu der dioptrischen Abhängigkeit zwischen  $S$  und  $S'$ . Dass aber jene Lagen von  $A$ , für welche der Satz gilt, bestimmt sind durch die Natur des brechenden Systemes und durch das Brechungsgesetz, gibt diesem Satze alsdann auch eine dioptrische Bedeutung. Diese Lagen von  $A$  wollen wir nun aufsuchen.

Zu diesem Zwecke sei (Fig. 1 *a*)  $a, b, c, d, e$  der Weg eines Lichtstrahles durch das brechende System,  $b, c, d$  die auf einander folgenden Einfallspunkte,  $b\beta, c\gamma, d\delta$  die Einfallsnormalen; je drei in  $b, c$  und  $d$  zusammenstossende Gerade liegen also in einer Ebene. Die absoluten Brechungsindices der auf einander folgenden Medien seien bezeichnet mit  $\nu, \nu_1, \nu_2, \nu'$ . Durch einen beliebigen Punkt  $O$  (Fig. 1 *b*) legen wir die Strahlen  $Ob, Oc, Od$  und  $Oe$  beziehungsweise parallel zu  $ab, bc, cd$  und  $de$ ; auf  $Ob$  tragen wir eine beliebige Strecke  $Ob$  von  $O$  aus auf, und machen dann der Reihe nach  $bc$  parallel zu  $b\beta, cd$  parallel zu  $c\gamma$  und  $de$  parallel zu  $d\delta$ . Die Figuren 1 *a* und 1 *b* können aufgefasst werden, als die graphische Zusammensetzung einer in  $ab$  wirkenden Kraft gleich  $Ob$  mit den in den Einfallsnormalen wirkenden Kräften  $bc, cd, de$  und es ist dann  $de$  ( $f_a$ ) die Lage der Resultante und  $Oe$  ihre Grösse. Legt man nun eine beliebige Gerade  $A$ , so muss das statische Moment von  $de$  bezüglich dieser Geraden gleich sein der Summe der statischen Momente von  $ab, b\beta, c\gamma$  und  $d\delta$ . Wir wollen die Gerade so wählen, dass bezüglich derselben die Summe der statischen Momente, der in den Einfallsnormalen wirkenden Kräfte für sich verschwindet. Bezüglich dieser Geraden ist dann das Moment von  $de$  gleich dem Momente von  $ab$ , d. h. denkt man sich in  $ab$  irgendwo die Strecke  $Ob$  abgetragen, in  $de$  die Strecke  $Oe$  und wählt auf  $A$  irgend zwei Punkte  $J$  und  $J'$  so werden die Projectionen der Dreiecksflächen  $JOb$  und  $J'Oe$  auf eine zu  $A$  senkrechte Ebene einander gleich. Lässt man weiter die Punkte  $J$  und  $J'$  zusammenfallen mit den Punkten  $i$  und  $i'$ , so werden die Dreiecksflächen  $iOb$  und  $i'Oe$  zu einander parallel und aus der Gleichheit ihrer Projectionen auf die zu  $A$  senkrechte Ebene folgt die Gleichheit der Dreiecksflächen selbst. Sind daher  $s$  und  $s'$  die Längen der von  $i$  und  $i'$ , beziehungsweise auf  $ab$  und  $de$  gefällten Senkrechten, so ist also:

$$s \cdot Ob = s' \cdot Oe.$$

In Folge des Brechungsgesetzes hat man (Fig. 1 *b*)

$$\frac{Oc}{Ob} = \frac{\nu_1}{\nu}, \quad \frac{Od}{Oe} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad \frac{Oe}{Od} = \frac{\nu'}{\nu_2}$$

und hieraus durch Multiplication

$$\frac{Oe}{Ob} = \frac{\nu'}{\nu}.$$

Mittelst dieser Gleichung ergibt sich nun sofort

$$s : s' = \nu' : \nu.$$

Es gibt also unendlich viele Gerade  $A$ , welche die Eigenschaft besitzen, dass die Entfernungen des ein- und austretenden Strahles von ihren auf  $A$  gelegenen Kreuzungspunkten sich verkehrt, verhalten wie die absoluten Brechungsindices der Medien, in denen sie verlaufen. Diese Geraden sind ihrer Lage nach abhängig von der Natur des brechenden Systemes und den dasselbe durchlaufenden Strahl; sie gehen nämlich immer hindurch durch die beiden sich nicht schneidenden Kräfte, welche man an Stelle der in den Einfallsnormalen wirkend zu denkenden Kräfte setzen kann.

Besteht das brechende System aus einem Systeme centrirter Kugelflächen,<sup>1</sup> so hat die optische Axe für alle Strahlen die ausgesprochene Eigenschaft; denn sie geht immer hindurch durch sämtliche Einfallsnormalen, die Momentensumme der in denselben wirkenden Kräfte ist also immer gleich Null. Für ein derartiges System gilt demnach der Satz:

<sup>1</sup> Oder allgemeiner aus Rotationsflächen mit gemeinsamer Rotations-Axe.

Sind  $S$  und  $S'$  eintretender und austretender Strahl bezüglich eines Systemes centrirter brechender Kugelflächen und  $i, i'$  die Durchschnittpunkte der optischen Axe mit zwei durch  $S$  und  $S'$  parallel zu  $S'$  und  $S$  gelegten Ebenen,<sup>1</sup> so verhalten sich die Abstände der Strahlen von den zugehörigen Punkten  $i$  und  $i'$  verkehrt wie die absoluten Brechungsindices der Medien, in denen sie verlaufen.

Liegen  $S$  und  $S'$  mit  $A$  in derselben Ebene, so werden die Punkte  $i$  und  $i'$  unbestimmt. Es gibt dann unendlich viele Punktpaare  $i, i'$ , welche die eben ausgesprochene Eigenschaft besitzen und demgemäss unendlich viele aus ihnen abgeleitete Punktsysteme  $f, e, g, f', e', g'$ . Unter diesen unendlich vielen Punktpaaren  $i, i'$  wird es eines geben, das die Grenzlage hat, bezüglich zweier unendlich nahe an  $S$  und  $S'$  verlaufender, aber die Axe nicht schneidender Strahlen. Diese Punkte und die aus ihnen abgeleiteten  $f, f'$  etc. haben dann auch eine wichtige dioptrische Bedeutung.<sup>2</sup>

Eine Verallgemeinerung der für unendlich dünne Strahlensysteme, die der optischen Axe unendlich nahe verlaufen, giltigen Gesetze ist zu erwarten, für solche unendlich dünne Strahlensysteme, denen nicht mehr unendlich kleine Einfallswinkel zukommen. Solche Strahlensysteme sind für gewisse specielle Fälle bereits behandelt worden; so von Kreeh<sup>3</sup> für den Fall einer planconvexen Linse und eines im Axenpunkte der convexen Seite einfallenden homocentrischen Strahlenbündels, ferner von Hermann<sup>4</sup> für ein eben solches Strahlenbündel und eine beliebige Linse in mehr elementarer Weise.

Ein Strahlenbündel, welches aus einem homocentrischen, durch beliebig viele Brechungen in homogenen und isotropen Medien entstanden ist, hat bekanntlich die Eigenschaft, dass die sämtlichen Strahlen desselben durch zwei Linienelemente, die Brennlinien hindurch gehen; die Richtungen dieser Brennlinien stehen auf einander und auf der Richtung des Strahlenbündels oder besser ausgedrückt, auf einem mittleren Strahle desselben, den wir die Axe des Bündels nennen wollen, senkrecht; zwischen den beiden Brennlinien, auf der sogenannten Brennweite liegen die kürzesten Entfernungen der Strahlen von einander. Alle diese Eigenschaften folgen aus der allgemeinen Theorie unendlich dünner Strahlenbündel aus dem Umstande, dass die gebrochenen Strahlen immer Normalen einer Fläche, der Wellenfläche sind.<sup>5</sup> An Stelle des Bildpunktes im Falle eines der optischen Axe unendlich nahen Strahlensystemes, treten jetzt die beiden Brennlinien oder eigentlich die ganze Brennweite. Diese Brennlinien sollen Bildlinien, die Punkte, in denen sie die Axe schneiden, Bildpunkte und das zwischen beiden liegende Stück der Axe soll Bildstrecke genannt werden, indem wir die Benennungen Brennlinien, Brennpunkte und Brennweite für den Fall reserviren, als es sich um Bildlinien eines einfallenden Parallelstrahlenbündels handelt. Durch Angabe der Lage der beiden Bildlinien ist das gebrochene Strahlenbündel vollkommen bestimmt.

Die im Folgenden zunächst für eine einzige brechende Fläche entwickelten Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel werden besonders dann sehr einfach und schliessen sich den Eigenschaften der Strahlenbündel, die der optischen Axe unendlich nahe verlaufen aufs Engste an, wenn die Axe des einfallenden Bündels und folglich auch die Axen der gebrochenen in einer durch die optische Axe gehenden Ebene liegen. Dieser Fall ist bezüglich aller einfallenden Bündel vorhanden, wenn das leuchtende Object beliebig gross, die Öffnung der ihm zugekehrten vordersten Linsenfläche aber unendlich klein und in der optischen Axe gelegen ist, oder wenn das Umgekehrte stattfindet.

<sup>1</sup> In dieser Weise definiert auch Zincken-Sommer die Kreuzungspunkte gelegentlich; siehe Monatsberichte der k. preuss. Akademie, Februar 1876, p. 128.

<sup>2</sup> Sie sind nämlich alsdann wirkliche Brennpunkte, und zwar die im Folgenden als erste Brennpunkte der Strahlen bezeichneten Punkte.

<sup>3</sup> De luminis fascibus infinite tenuibus disquisitiones. Dissertatio inauguralis, Berlin 1863.

<sup>4</sup> Über den schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen, Zürich 1874.

<sup>5</sup> Vergl. z. B. Kummer, Crelle's Journal, Band LVII

### I. Brechung an einer Kugelfläche.

#### Construction des gebrochenen Strahles.

Die Darlegung der Beziehung zwischen einfallendem und gebrochenem Strahlenbündel auf geometrischem Wege, vereinfacht sich ungemein durch eine richtige Wahl der Construction des gebrochenen Strahles aus dem einfallenden; wir benützen die folgende.

Es sei  $K$  (Fig. 2) die brechende Kugelfläche vom Radius  $r$ , welche die beiden Medien  $N$  und  $N'$  trennt, deren absolute Brechungsindices mit  $\nu$  und  $\nu'$  bezeichnet seien. Zu dem im Medium  $N$  verlaufenden Strahl  $S$  gehöre als gebrochener der Strahl  $S'$ , beide treffen sich im Punkte  $m$  der Kugelfläche, deren Mittelpunkt  $K$  ist, so dass  $km=r$  die Einfallsnormale wird. Wir ziehen eine Gerade, welche  $S$ ,  $S'$  und  $r$  beziehungsweise in  $n_1$ ,  $n'_1$  und  $k_1$  schneidet, so, dass Winkel  $k_1 n_1 m$  gleich wird dem Brechungswinkel  $S'r=\beta$  und zugleich der Winkel  $k_1 n'_1 m$  gleich wird dem Einfallswinkel  $Sr=\alpha$ . Durch einen gegebenen Punkt  $k_1$  kann immer eine, aber nur eine, derartige Gerade gezogen werden. Aus den Dreiecken  $k_1 n_1 m$  und  $k_1 m n'_1$  folgt sofort:

$$\overline{k_1 n_1} = \overline{k_1 m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\nu'}{\nu} \cdot \overline{k_1 m}, \quad \overline{k_1 n'_1} = \overline{k_1 m} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\nu}{\nu'} \cdot \overline{k_1 m}.$$

Beschreibt man also aus einem Punkte der Einfallsnormale zwei Kugeln  $\Sigma_1$  und  $\Sigma'_1$ , deren Radien das  $\frac{\nu'}{\nu}$ , beziehungsweise das  $\frac{\nu}{\nu'}$ -fache sind der Entfernung dieses Punktes vom Einfallspunkte  $m$ , so findet man zu jedem in  $m$  einfallenden Strahl  $S$  den gebrochenen  $S'$ , indem man den Schnittpunkt von  $S$  und  $\Sigma_1$  mit  $k_1$  verbindet und den Durchstoßpunkt dieser Verbindungslinie mit  $\Sigma'_1$  sucht; durch diesen und  $m$  geht der gebrochene Strahl  $S'$ .

Verlegt man den Punkt  $k_1$  in den Kugelmittelpunkt  $k$ , so bleiben die zur Construction des gebrochenen Strahles jetzt in Verwendung tretenden Kugeln ganz unabhängig von der Lage des Einfallspunktes und man hat daher für die Brechung an einer Kugelfläche folgenden einfachen Satz:

- (1)... Man beschreibe aus dem Mittelpunkte  $k$  der brechenden Kugel vom Radius  $r$  zwei Kugeln  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  mit den Radien  $\frac{\nu'}{\nu}r$  und  $\frac{\nu}{\nu'}r$ . Ist  $S$  ein im Medium  $N$  verlaufender Strahl, der die brechende Kugel in  $m$ , die Kugel  $\Sigma$  in  $n$  schneidet, und sucht man den Punkt  $n'$ , in welchem die Kugel  $\Sigma'$  vom Halbstrahl  $km$  getroffen wird; so ist die Gerade  $mn'$  der im Medium  $N'$  verlaufende gebrochene Strahl  $S'$ . Von den beiden möglichen Schnittpunkten des Strahles  $S$  mit der Kugel  $\Sigma$  ist hierbei jener zu wählen, für welchen die in  $N$ , respective in  $N'$  verlaufenden Strahlentheile von  $S$  und  $S'$  auf entgegengesetzten Seiten der Einfallsnormale zu liegen kommen.

#### Abhängigkeit zwischen Object- und Bild-Punkt in einigen einfachen Fällen.

Aus der soeben angegebenen Constructionsmethode ergibt sich sofort, dass allen einfallenden Strahlen, die durch den Punkt  $n$  auf  $\Sigma$  gehen gebrochene Strahlen entsprechen, die sämtlich hindurchgehen durch den Punkt  $n'$  auf  $\Sigma'$ . Es entspricht also in diesem Falle einem einfallenden homocentrischen Strahlenbündel als gebrochenes wieder ein homocentrisches, und zwar bei endlicher Ausdehnung der Bündel. Zu irgend einem auf  $\Sigma$  gelegenen Objectpunkt gehört als Bildpunkt jener Punkt auf  $\Sigma'$ , der mit ersterem und dem Kugelmittelpunkt auf einer Geraden liegt und umgekehrt. Da diese beiden Punkte immer auf einem von  $k$  ausgehenden Halbstrahle liegen, so ist auch immer einer der beiden Punkte das virtuelle Bild des anderen und daher auch eine der beiden Kugelflächen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  das virtuelle Bild des anderen. In dem Falle  $\nu > \nu'$  z. B., welcher der Figur 2 entspricht, ist  $\Sigma$  virtuelles Bild von  $\Sigma'$ .<sup>1</sup> Um für irgend ein Paar solcher Punkte

<sup>1</sup> Dieser Satz ist auch von Hermann in der oben citirten Schrift (p. 11) gefunden worden.

jenen Theil der brechenden Kugelfläche  $K$  zu finden, der die Einfallspunkte enthält, hat man aus einem der beiden Punkte den Tangirungskegel an  $K$  zu legen (aus einem der beiden Punkte ist ein solcher immer möglich), von den beiden Theilen, in welche die Kugel  $K$  durch den Berührungskreis getheilt wird, enthält dann jener die Einfallspunkte, welcher von dem die Punkte verbindenden Halbstrahl aus  $k$  nicht getroffen wird.

Wir haben also folgenden Satz:

(2)... Die in Satz (1) erwähnten Kugelflächen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  haben die Eigenschaft, dass jedem beliebigen in  $N$  verlaufenden homocentrischen Strahlenbündel das sein Centrum auf  $\Sigma$  hat, als gebrochenes wieder ein solches in  $N'$  mit dem Centrum auf  $\Sigma'$  entspricht und umgekehrt; die beiden Centra liegen auf demselben von  $k$  ausgehenden Halbstrahl.

Wir wählen auf  $S$  einen beliebigen Punkt  $a$ , ziehen  $ak$  bis zum Durchschnittpunkt  $a'_1$  mit  $S'$  und lassen die Figur  $ama'_1$  um  $aa'_1$  rotiren; dann wird in jeder Lage  $ma'_1$  ein gebrochener Strahl sein, der zu  $am$  als einfallendem gehört.

Daraus folgt:

(3)... Sind die Strahlen eines in  $N$  verlaufenden homocentrischen Strahlenbündels gelegen auf der Oberfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Axe durch  $k$  geht, so entsprechen ihnen gebrochene Strahlen in  $N'$  die auf einem eben solchen Kegel liegen. Es liegen demnach alle Vereinigungspunkte jener gebrochenen Strahlen, die einfallenden Strahlenkegeln mit gemeinsamer Axe durch  $k$  entsprechen, auf eben dieser Axe.

Es sei in Fig. 3 wieder  $S$  der einfallende und  $S'$  der gebrochene Strahl,  $km$  die Einfallsnormale. In der Ebene  $SkS'$  construiren wir um  $km$  als Durchmesser einen Kreis  $C_1$ , der also die brechende Kugel  $K$  in  $m$  berührt und den einfallenden Strahl zum zweiten Male schneidet in  $b$ . In der Ebene  $SS'$  denken wir uns weitere einfallende Strahlen, die alle hindurchgehen durch diesen Punkt  $b$ , aber sämtlich dem Strahle  $S$  unendlich nahe liegen. Alle diese Strahlen gehen nach der Brechung hindurch durch  $b'_2$ , den zweiten Schnittpunkt des Kreises  $C$  mit  $S'$ . In der That zieht man zu den unendlich nahe an  $m$  gelegenen Einfallspunkten die Einfallsnormalen und bemerkt, dass mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung, die Einfallspunkte auf  $C$  liegend angenommen werden dürfen, so ergeben sich für alle nach  $b$  convergirende Strahlen gleiche Einfallswinkel über den Bogen  $kb$ , es müssen demnach auch sämtliche Brechungswinkel unter einander gleich sein und als Peripheriewinkel im Kreise  $C$  über denselben Bogen  $kb'_2$  stehen. Man kann demnach behaupten:

(4)... Liegt ein unendlich dünnes einfallendes Strahlenbüschel in einer durch den Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche gehenden Ebene und sein Centrum  $b$  auf jenem Kreise, der um den Einfallsradius als Durchmesser in dieser Ebene beschrieben wird, so vereinigen sich die Strahlen nach der Brechung (bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung genau) wieder in einem Punkte  $b'_2$  dieses Kreises.

Für Strahlen, welche zwar unendlich nahe an  $S$  einfallend durch  $b$  gehen, aber nicht in der Ebene  $SS'$  liegen, gilt dieser Satz, wie leicht ersichtlich, nicht mehr, weil alsdann die Einfallsebenen (die durch  $bk$  gehen) um unendlich kleine Grössen erster Ordnung von  $b'_2$  abstehen.

#### Brechung homocentrischer Strahlenbündel.

Wir denken uns in  $a$  (Fig. 2) das Centrum eines unendlich dünnen einfallenden Strahlenbündels, dessen Axe  $S$  ist. Alle seine Strahlen können so in Gruppen zusammengefasst werden, dass jede Gruppe liegt in der Oberfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Axe mit  $ak$  zusammenfällt. In Folge des Satzes (3) gehen daher alle Strahlen nach der Brechung hindurch durch ein Linienelement, gelegen auf  $aka'_1$ , von welchem  $a'_1$  ein

Punkt ist und zwar ein Punkt, in dem sich jene einfallenden Strahlen nach der Brechung vereinigen, welche in der durch Rotation von  $S$  um  $ak$  entstehenden Kegelfläche liegen. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung darf man diese Strahlen auch als gelegen annehmen in einer durch  $S$  senkrecht zur Einfallsebene  $SS'$  geführten Ebene  $P$  und ebenso die gebrochenen Strahlen, die durch  $a'_1$  gehen, in einer durch  $S'$  senkrecht zu  $SS'$  geführten Ebene  $P'$ .

Das Linienelement bei  $a'_1$  ist die eine Bildlinie des gebrochenen Strahlensystemes und zwar gehen durch dieses Element alle Strahlen genau hindurch. Errichtet man in  $a'_1$  eine Ebene  $Q$  senkrecht auf  $S'$  und bestimmt ihren Schnitt mit dem Strahlensysteme, so bemerkt man sofort, dass die Schnittpunkte aller Strahlen von dem Durchschnitte der Einfallsebene mit  $Q$  höchstens um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung abstehen können. Bis auf solche Grössen genau wird demnach das in der Einfallsebene liegende, durch  $a'_1$  senkrecht zu  $S'$  gezogene Linienelement als die eine der beiden zur Strahlenaxe senkrechten Bildlinien anzunehmen sein. Wir wollen sie die erste Bildlinie und ihren Durchschnitt mit der Strahlenaxe  $a'_1$  den ersten Bildpunkt nennen. Die zweite Bildlinie desselben Strahlensystemes wird nun durch einen gewissen Punkt  $a'_2$ , den zweiten Bildpunkt, hindurchgehen und auf der Einfallsebene senkrecht stehen. Aus Gründen der Symmetrie erkennt man sofort, dass sich in  $a'_2$  die in der Einfallsebene  $SS'$  gelegenen gebrochenen Strahlen vereinigen, also Strahlen, die vor der Brechung in derselben Ebene lagen.

(5)... Nennt man bezüglich eines einfallenden homocentrischen Strahlenbündels jenen Vereinigungspunkt gebrochener Strahlen den ersten Bildpunkt, für welchen gebrochene und folglich auch einfallende Strahlen in zur Einfallsebene senkrechten Ebenen, jenen Vereinigungspunkt gebrochener Strahlen aber den zweiten Bildpunkt, für welchen einfallende und gebrochene Strahlen in der Einfallsebene verlaufen; so liegt die erste Bildlinie in der Einfallsebene, die zweite dagegen senkrecht.

Durch Angabe der beiden Bildpunkte ist das gebrochene Strahlenbündel vollkommen bestimmt, da durch die Lage der Einfallsebene  $S'k$  auch die Lage der Bildlinien bekannt ist. Doch gilt dies natürlich nur dann, wenn das einfallende Strahlenbündel ein homocentrisches war.

Es sei  $T$  ein zweiter in  $m$  (in Fig. 2 nicht gezeichneter) einfallender Strahl, der als Axe irgend eines homocentrischen Strahlenbündels angesehen werden mag und der mit  $S$  einen Winkel bildet, unendlich klein der ersten Ordnung; dann wird von derselben Ordnung auch der Winkel sein, den der gebrochene Strahl  $T'$  mit  $S'$  bildet. Liegt nun  $T$  in der (durch  $S$  senkrecht zur Einfallsebene geführten) Ebene  $P$ , so erkennt man leicht,<sup>1</sup> dass dann mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung  $T'$  liegen wird in der (durch  $S'$  senkrecht zur Einfallsebene geführten) Ebene  $P'$  und mit demselben Grade der Genauigkeit werden auch alle jene Strahlen, die von einem auf  $T$  gelegenen Punkte ausgehend, sich nach der Brechung im ersten Bildpunkt vereinigen, gelegen sein in der Ebene  $P$ , beziehungsweise  $P'$ . Liegt aber  $T$  in der Ebene  $S'k$ , die  $E$  heissen mag, so liegt  $T'$  in der Ebene  $S'k$ , die mit  $E'$  bezeichnet sei, und alle jene Strahlen, die von einem auf  $T$  gelegenen Punkte ausgehend sich in dessen zweitem Bildpunkte nach der Brechung vereinigen, verlaufen in den zusammenfallenden Ebenen  $E$  und  $E'$ . Beschränkt man sich demnach nur auf Strahlen, die  $S$ , respective  $S'$  unendlich nahe verlaufen, so haben die ebenen Systeme  $P$  und  $P'$  die Eigenschaft, dass einem in  $P$  gelegenen homocentrischen Strahlenbündel ein eben solches in  $P'$  als gebrochenes zukommt und Gleiches gilt von den ebenen Systemen  $E$  und  $E'$ . Weist man daher jedem Strahle in  $P$  oder  $E$  den gebrochenen in  $P'$ , beziehungsweise in  $E'$  als entsprechenden, jedem Punkte in  $P$  aber in  $P'$  seinen ersten, jedem Punkte in  $E$  seinen zweiten Bildpunkt in  $E'$  als entsprechenden zu, so zeigt sich, dass  $P$  zu  $P'$  und  $E$  zu  $E'$  collinear sind, denn entsprechende Strahlen gehen durch entsprechende Punkte und entsprechende Punkte werden durch entsprechende Strahlen verbunden. Bemerkt man überdies, dass  $P$  und  $P'$  die in der zur Einfallsebene senkrechten Tangente an die brechende Kugel gelegene Reihe der

<sup>1</sup> Z. B. aus der in (1) gezeigten Construction des gebrochenen Strahles.

Einfallspunkte,  $E$  und  $E'$  aber, die in der Einfallsebene gelegene Kugeltangente entsprechend gemein haben, so ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

(6)... Schneidet man ein beliebiges, unendlich dünnes, einfallendes Strahlensystem und das durch Brechung daraus entstandene, durch zwei Ebenen  $P$  und  $P'$ , welche beziehungsweise durch die Axen  $S$  und  $S'$  der Systeme hindurchgehen und auf der Ebene  $SS'$  senkrecht stehen, so sind die ebenen Systeme  $P$  und  $P'$  zu einander perspectivisch und Gleiches gilt von den in einander liegenden ebenen Systemen  $E$  und  $E'$ , die zusammenfallen mit der Ebene  $SS'$ . Von je zwei entsprechenden Strahlen dieser Systeme ist der eine der gebrochene des anderen und von je zwei entsprechenden Punkten in  $P$  und  $P'$  ist der eine der erste Bildpunkt des anderen, der zweite Bildpunkt des anderen aber in  $E$  und  $E'$ . Es sind also auch perspectivisch die Reihen der ersten und zweiten Bildpunkte in der einen Axe zur Reihe der in der anderen Axe gelegenen Centras homocentrischer Strahlenbüschel und die beiden erstgenannten Reihen unter einander projectivisch.

Daraus, dass der zu einem Punkte  $a$  auf  $S$  gehörige erste Bildpunkt  $a_1'$  auf der Geraden  $ak$  liegt, oder dass zwei entsprechende Strahlen von  $P$  und  $P'$  mit der Einfallsnormale in einer Ebene liegen müssen, die also immer durch  $k$  geht, folgt sofort, dass der Kugelmittelpunkt  $k$  das perspectivische Centrum der Systeme  $P$  und  $P'$  ist. Es erübrigt noch, das Collineationcentrum der beiden in einander liegenden Systeme  $E$  und  $E'$  aufzufinden. Zu diesem Zwecke sei in Fig. 3  $kn'n$  die Gerade, welche mit dem einfallenden Strahle  $Sm$  bei  $n$  einen Winkel gleich dem Brechungswinkel einschliesst. Zu einer Punktreihe auf  $S$  gehören auf  $S'$  die beiden Reihen, gebildet von den ersten und zweiten Bildpunkten. Für diese in einander liegenden projectivischen Punktfolgen ist nun offenbar  $m$  ein Doppelpunkt, aber auch  $n'$  in Folge des Satzes (2), d. h. in  $m$  und in  $n'$  fallen erster und zweiter Bildpunkt zusammen. Die in  $n'$  zusammenfallenden Bildpunkte entsprechen dem Punkte  $n$  auf  $S$ , da sonach  $kn'n$  die Verbindungslinie von  $n$  mit seinem zweiten Bildpunkte in  $n'$  ist, so muss das gesuchte Centrum auf dieser Geraden liegen. Erinnern wir uns noch des Satzes (4), so ist, mit Rücksicht auf die in (5) gegebene Definition der zweiten Bildpunkte, sofort ersichtlich, dass  $b_2'$  der zweite Bildpunkt von  $b$  ist, somit liefert der Durchschnitt der Verbindungslinie  $bb_2'$  mit  $kn$  das gesuchte Collineationcentrum  $l$  der Systeme  $E$  und  $E'$ .

(7)... Die Systeme  $P$  und  $P'$  schneiden sich in einer Tangente an die brechende Kugelfläche und haben ihr perspectivisches Centrum im Mittelpunkte  $k$  derselben. Die in einander liegenden Systeme  $E$  und  $E'$  haben zur Collineationsaxe die Tangente an die brechende Kugelfläche im Einfallspunkte, ihr Collineationcentrum  $l$  liegt auf einer durch den Kugelmittelpunkt gezogenen Geraden, die mit dem einfallenden und gebrochenen Strahl Winkel bildet, die gleich sind dem Brechungs-, beziehungsweise dem Einfallswinkel und auf der Geraden, welche die Schnittpunkte eines um den Einfallsradius als Durchmesser geschlagenen Kreises mit den einfallenden und gebrochenen Strahl verbindet.

Sehr einfach und elegant wird hiernach die Construction, durch welche man zu irgend einem Objectpunkte, d. h. zu einem Centrum eines einfallenden homocentrischen Strahlenbündels die beiden Bildpunkte oder die Bildstrecke findet.

(8)... Die zu irgend einem Objectpunkte gehörige Bildstrecke ist die Centralprojection der zugehörigen Strecke  $kl$  auf die Axe des gebrochenen Strahlenbündels aus dem Objectpunkte.

Zieht man durch  $k$  und  $l$  Paralle zu  $S$  und  $S'$ , so ergeben sich die Brennpunkte und Brennweiten auf  $S$ , respective auf  $S'$ .

## Beziehung zwischen Objectraum und Bildraum.

Sind im Raume  $N$  irgendwelche reelle oder imaginäre Objectpunkte gegeben als Mittelpunkte homocentrischer Strahlenbüschel, alle gelegen unendlich nahe an  $S$ , Fig. 2, deren Strahlen einfallen in den Punkten eines Flächenelementes der brechenden Kugelfläche bei  $m$ , so soll die Beziehung ermittelt werden zwischen diesen Objectpunkten und den ihnen entsprechenden ersten und zweiten Bildpunkten im Raume  $N'$ . Durch die vorhergehenden Betrachtungen ist die Beziehung zwischen Object- und Bildpunkten nur aufgefunden worden für specielle Lagen ebener Systeme. Ausserdem war diese aufgefundenene Beziehung beschränkt durch die Annahmen, dass entsprechende Strahlen unendlich kleine Winkel bilden mit  $S$ , respective mit  $S'$ , ohne welche Beschränkung die perspectivische Lage der Systeme  $E$  und  $E'$ , wie sie in (6) und (7) ausgesprochen wurde, nicht behauptet werden könnte.<sup>1</sup>

Da einem Objectpunkte zwei Bildlinien entsprechen und jeder Punkt einer solchen Bildlinie als Bildpunkt angesehen werden kann, so ist die so eben gestellte Aufgabe keine eindeutige. Sie kann aber dadurch zu einer eindeutigen gemacht werden, dass wir eine Festsetzung darüber eintreten lassen, was wir unter der Axe des einfallenden Strahlenbündels verstehen wollen; auf dem dieser Axe entsprechenden gebrochenen Strahl, oder der Axe des gebrochenen Strahlenbündels, liegen alsdann die Bildpunkte.

Zweierlei Festsetzungen können diesbezüglich getroffen werden, die zu besonders einfachen Resultaten führen. Entweder, wir nehmen jene Strahlen der einfallenden Bündel zu Axen derselben, die durch einen und denselben Punkt  $n$  auf der Kugel  $\Sigma$ , oder aber jene Strahlen sollen Axen sein, die durch einen und denselben Punkt  $m$  auf der brechenden Kugel gehen. Wir wollen uns für die letztere Alternative entscheiden.

Zu den Punkten des unendlich dünnen Raumtheiles in  $N$ , dessen Axe  $S$  ist, suchen wir die ersten und zweiten Bildpunkte, welche gewisse unendlich dünne Raumtheile in  $N'$  erfüllen werden, deren Axe  $S'$  ist. Sowohl Objectraum  $N$  und erster Bildraum (Raum der ersten Bildpunkte)  $N'_1$  als auch Objectraum und zweiter Bildraum  $N'_2$  können collinear auf einander bezogen werden. Es ist hiefür zunächst nothwendig, dass zu Objectpunkten auf einer Geraden Bildpunkte gehören, die wieder auf einer Geraden liegen. Dies ist in der That der Fall.

Ist nämlich die Gerade, auf welcher die Objectpunkte liegen, um einen endlichen Winkel gegen  $S$  geneigt, so liegt nur ein unendlich kleines Stück derselben im Raume  $N$  und die Bildpunkte werden ebenfalls gelegen sein auf einem unendlich kleinen Curvenstück in  $N'_1$  oder  $N'_2$ , das, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung, als gerade angesehen werden darf. Ist aber die Gerade  $A$  mit der Punkteihe  $abc\dots$  um einen unendlich kleinen Winkel geneigt gegen  $S$ , so führt folgende Überlegung zum Ziele. Wir construiren zu  $A$  den gebrochenen Strahl  $A'$  und auf diesem die Reihe der ersten und zweiten Bildpunkte, sowie die Bildlinien in denselben. Zu  $abc$  sind nun aber jene ersten und zweiten Bildpunkte zu suchen, die den Strahlen  $am, bm, cm\dots$  als Axen der einfallenden Bündel entsprechen, also auf den diesen Strahlen zugehörigen gebrochenen Strahlen liegen; es sind die Schnittpunkte letzterer Strahlen mit den früher construirt gedachten Bildlinien. Aber die gebrochenen Strahlen liegen in einer Ebene, in der Ebene durch  $m$  nämlich und das von jenen Punkten  $a, b, c$  auf  $\Sigma'$  gebildete Linienelement, die behufs Construction der gebrochenen Strahlen zur Verwendung kommen. Der Schnitt dieser Ebene mit den ersten und zweiten Bildlinien gibt daher die Reihe der ersten und zweiten Bildpunkte, welche Reihen, da die ersten Bildlinien unter sich parallel sind (sie liegen in der Ebene  $AA'$  senkrecht zu  $A'$ ) und die zweiten Bildlinien ebenfalls (sie stehen senkrecht auf der Ebene  $AA'$ ) nothwendig Gerade sind.

Lässt man nun jeden Objectpunkt seinem ersten, beziehungsweise zweiten Bildpunkt entsprechen, nimmt ferner als entsprechende Gerade und Ebenen jene, welche durch entsprechende Punkte gehen, so ist der

<sup>1</sup> In der That sind zwei unendlich nahe Punkte  $ab$  in  $E$  gegeben, deren Verbindungslinie aber die Tangente in  $m$  nicht unendlich nahe an  $m$  trifft, und sucht man ihre zweiten Bildpunkte  $a'_2 b'_2$ , so darf man die Veränderlichkeit des Punktes  $l$  mit der Richtung des einfallenden Strahles nicht ausser Acht lassen, da dies in der Richtung der Verbindungslinie  $a'_2 b'_2$  einen endlichen Fehler hervorbringt.

Raum  $N$  collinear zu  $N'_1$  und zu  $N'_2$ . Jedoch ist zu bemerken, dass jetzt zwei entsprechende Gerade nicht immer in der Beziehung von einfallendem und gebrochenem Strahle stehen. Denn betrachtet man z. B. einen von  $a$  ausgehenden Strahl, der nicht in der Ebene  $P$  liegt, so geht sein entsprechender Strahl wohl durch  $a'$ , aber nicht der gebrochene; dieser geht durch einen anderen Punkt der Bildlinie in  $a'_1$ .

Die speciellere Lage dieser collinearen Räume gegen einander ergibt sich leicht aus der Bemerkung, dass für dieselben zwei sich entsprechende Ebenen angegeben werden können, die zu einander parallel sind. Die Objectpunkte nämlich in  $N$ , welche gelegen sind auf der Kugel  $\Sigma$ , erfüllen ein bei  $n$  gelegenes Flächenelement dieser Kugel und ihre ersten oder zweiten Bildpunkte ein Flächenelement bei  $n'$  auf der Kugel  $\Sigma'$ . Statt dieser Flächenelemente kann man (unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung) nun die Tangentenebenen  $T$  und  $T'$  in  $n$  und  $n'$  setzen, und dies sind also zwei entsprechende Ebenen. Diese haben an die Stelle der Kugelflächen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  zu treten, wenn man die Construction entsprechender Punkte und Strahlen auch für Punkte in endlichen Distanzen von  $S$  und  $S'$  und für Axen von endlicher Neigung gegen  $S$  und  $S'$  ausdehnen will.

Die ebenen Systeme  $T$  und  $T'$  sind ähnlich; der unendlich fernen Geraden des einen entspricht die unendlich ferne Gerade des anderen Systemes. In collinearen Räumen haben aber nur jene sich entsprechende Ebenen die Eigenschaft, dass sich ihre unendlich fernen Geraden entsprechen, die den sogenannten Gegenebenen parallel sind. Man wird also schliessen, dass in unserem Falle die Gegenebenen oder Brennebenen der collinearen Räume zu einander und zu den Tangentenebenen  $TT'$  parallel liegen.

Die Räume  $N$  und  $N'_1$  liegen überdies perspectivisch; denn Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen und denselben festen Punkte  $k$ . Die gemeinsame Ebene muss durch  $m$  gehen, da dies ein Doppelpunkt der beiden Räume ist und sie muss parallel zu  $T$  und  $T'$  liegen; sie möge mit  $H$  bezeichnet sein. In der Linie  $kn'n$  fallen zwei entsprechende Punktreihen zusammen, irgend zwei entsprechende ebene Systeme, die senkrecht stehen auf dieser Linie (parallel sind zu den Gegenebenen) sind ähnlich und ihr Ähnlichkeitspunkt liegt auf dieser Linie selbst, und weil er auch auf  $a'_1$  liegt, ist es der Punkt  $k$ . Kurz, man hat genau dieselbe Beziehung zwischen den Räumen  $N$  und  $N'_1$  wie sie auch vorhanden ist zwischen Object- und Bildraum im Falle sehr kleiner Einfallswinkel. In der That nimmt in diesem Falle auch die Ebene  $H$  eine zur Strahlenaxe senkrechte Lage an.

(9)... Wählt man jene Strahlen der einfallenden und gebrochenen Strahlenbündel zu Axen derselben, die hindurchgehen durch einen und denselben Punkt  $m$  auf der brechenden Kugelfläche, so sind der Objectraum und sein erster Bildraum perspectivisch zu einander. Das Centrum des gemeinsamen Strahlenbündels ist der Kugelmittelpunkt  $k$ , die gemeinsame Ebene  $H$  geht durch  $m$  und steht senkrecht zur Linie  $kn'n$ , welche den auf der Kugel  $\Sigma$  gelegenen Objectpunkt  $n$  für einen mittleren Strahl  $S$  mit seinem ersten Bildpunkt  $n'$  auf  $\Sigma'$  verbindet; in dieser Linie fallen jene zwei entsprechende Punktreihen über einander, die zu den Gegenebenen senkrecht stehen.

Die Räume  $N$  und  $N'_2$  jedoch befinden sich nicht in der gleichen einfachen Lage zu einander. Von der Schaar entsprechender paralleler Ebenen, die, wie oben bemerkt, zu den Ebenen  $T$  und  $T'$ , also auch zu einander parallel sind, fallen zwar auch jetzt in der durch  $m$  gehenden Ebene  $H$  zwei entsprechende ebene Systeme auf einander; allein diese Systeme decken sich nicht, sind nicht congruent, wohl aber ähnlich. Um dieses einzusehen, hat man sich zunächst zu erinnern, dass die Systeme jedenfalls affine sein müssen, und weiter zu bemerken, dass sie perspectivisch liegen. Denkt man sich nämlich zu irgend einem in  $m$  einfallenden Strahle  $A$  den gebrochenen  $A'$  construirt, so werden die Ebenen  $SA$  und  $S'A'$  die Ebene  $H$  in derselben Geraden schneiden, somit haben die beiden Systeme ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte in  $m$  entsprechend gemein, und da sich ihre unendlich fernen Geraden entsprechen, so sind die Systeme ähnlich.

Das Verhältniss zweier entsprechender Strecken lässt sich leicht angeben. Zu diesem Zwecke betrachten wir einen von  $a$  ausgehenden unendlich nahe an  $S$  verlaufenden Strahl  $aq$ , Fig. 2, in der Ebene  $SS'$  gelegen. Der ihm entsprechende Strahl, der jetzt zugleich der gebrochene ist, geht durch  $a'_2$ , aber auch durch  $q$ . Ist nun  $p$  der Schnittpunkt von  $aq$  und  $p'_2$  der Schnittpunkt von  $a'_2q$  mit  $H$ , so sind  $p$  und  $p'_2$  zwei entsprechende Punkte der in  $H$  liegenden Systeme und  $mp : mp'_2$  ist ihr Ähnlichkeitsverhältniss. Da nun  $qp$  und  $qp'_2$  als parallel anzusehen sind zum einfallenden und zum gebrochenen Strahle, so hat man aus irgend einem Punkte der in  $SS'$  gelegenen Kugeltangente eine Gerade zu ziehen in dieser Ebene und parallel zu  $H$ ; schneidet diese in den Punkten  $z$ ,  $\sigma$  und  $\sigma'$  beziehungsweise die Tangente, den einfallenden und gebrochenen Strahl, so ist das gesuchte Verhältniss das von  $z\sigma : z\sigma'$ .

Irgend zwei entsprechende ebene Systeme, die den Gegenebenen, oder was dasselbe sagt, der Ebene  $H$  parallel liegen, sind ebenfalls ähnlich. Denkt man sich nämlich zu einem Ebenenbüschel, dessen Axe  $S$  ist, das entsprechende gesucht, dessen Axe also  $S'$  sein wird, so schneiden sich zwei entsprechende Ebenen dieser Büschel in einem durch  $m$  gehenden Strahle der Ebene  $H$ . Schneidet man nun diese Büschel durch die respectiven Ebenen parallel zu  $H$ , und geführt durch die entsprechenden Punkte  $a$  und  $a'_2$  auf  $S$  und  $S'$ , so erhält man zwei congruente Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen parallel sind, denn sie sind parallel dem entsprechenden Strahle des perspectivischen Durchschnittes  $H$  der beiden Ebenenbüschel. Das Ähnlichkeitcentrum der beiden Systeme liegt demnach auf der Geraden  $aa'_2$ ; es kann leicht angegeben werden.

Sucht man nämlich zu einem anderen Punkte  $b$  der Ebene durch  $a$  den zweiten Bildpunkt  $b'_2$ , so liegen die Strahlen  $bm$  und  $mb'_2$  in einer durch  $km$  gehenden Ebene, die Verbindungslinien  $bb'_2$  und  $aa'_2$  können sich daher nur schneiden auf  $km$  im Punkte  $z$ , Fig. 2. Sollen die beiden ebenen Systeme congruent sein, so muss das Ähnlichkeitcentrum unendlich weit liegen. Zieht man demnach durch  $l$  eine Parallele zu  $km$ , welche  $S$  und  $S'$  schneidet in den Punkten  $p$  und  $p'_2$ , Fig. 4, so werden die beiden durch  $p$  und  $p'_2$  parallel zu  $H$  gelegten Ebenen die verlangte Eigenschaft besitzen.

Die beiden einander entsprechenden, zu den respectiven Gegenebenen senkrechten Geraden  $X_1$   $X'_2$  fallen nicht zusammen. Um sie zu bestimmen, kann man Gebrauch machen von dem Umstande, dass jedem Parallelstrahlenbündel in  $N$  ein Strahlenbündel in  $N'_2$  entspricht, das sein Centrum auf der Gegen- oder Brennebene dieses Raumes hat. Ziehen wir durch  $l$ , Fig. 4, Parallele zu  $S$  und  $S'$ , welche diese Strahlen in  $f'_2$  und  $f_2$  treffen, so sind diese Punkte die zweiten Brennpunkte der Strahlen und die durch sie parallel zu  $H$  gelegten Ebenen  $F'_2$  und  $F_2$  sind die Brennebenen. Sucht man zu dem Strahle  $ms$  in  $N$ , der senkrecht steht auf  $T$ , den entsprechenden, so geht letzterer durch  $m$  und durch den Punkt  $s'$  auf  $T'$ , der mit  $s$  und  $k$  auf derselben Geraden liegt. Der Schnitt von  $ms'$  mit  $F'_2$  oder  $\varphi'_2$  ist also das Centrum jenes Strahlenbündels in  $N'_2$ , welches dem auf den Brennebenen senkrechten Parallelstrahlenbündel entspricht. Durch diesen Punkt normal zu  $F'_2$  geht also die Gerade  $X'_2$ . Durch das gleiche Verfahren gelangt man zu  $\varphi_2$  und  $\gamma_2$ , indem man  $mt's$  als Strahl in  $N'_2$  betrachtet und seinen entsprechenden in  $N$  sucht. Die Punkte  $X_2T$  und  $X'_2T'$  liegen natürlich mit  $k$  auf einer Geraden.

Durch  $l$  geht die zweite Doppelebene parallel zu  $H$  hindurch; in der That, verschiebt man den Raum  $N'_2$  parallel zu sich selbst und zur Ebene  $H$ , bis  $X'_2$  auf  $X_2$  fällt, so wird  $q$  ein Doppelpunkt der zusammenfallenden Reihen und der zweite Doppelpunkt  $r$  muss von  $F'_2$  denselben Abstand haben wie  $q$  von  $F_2$ ; es liegt also  $r$  mit  $l$  in einer zu  $H$  parallelen Ebene, weil  $l$  der Construction nach so liegt, dass  $lf'_2 = f_2m$ .

Würde man den Raum  $N'_2$  parallel zu sich selbst so verschieben, dass  $p'_2$  auf  $p$  fällt, so wären die Räume  $N$  und  $N'_2$  in perspectivische Lage gebracht, die Ebene durch  $p$  parallel zu  $H$  wäre die Collineationsebene und das Collineationcentrum wäre, wie leicht zu übersehen, der Schnittpunkt von  $mk$  mit  $X_2$ .

(10)... Unter den gleichen Annahmen, wie in (9) werden Objectraum und sein zweiter Bildraum collinear, die Brenn- oder Gegenebenen parallel zu einander; in der Ebene  $H$  fallen zwei ähnliche Systeme über einander, deren Ähnlichkeitcentrum der Punkt  $m$  ist. Irgend zwei entsprechende zu  $H$  parallele ebene Systeme sind

ähnlich. Die Räume  $N$  und  $N'_2$  können durch eine blosse Translation in perspectivische Lage gebracht werden.

Betrachtet man endlich in  $N_1$  und  $N'_2$  je zwei Punkte dann als entsprechende, wenn sie erster und zweiter Bildpunkt eines und desselben Objectpunktes in  $N$  sind, so werden  $N'_1$  und  $N'_2$  ebenfalls collinear. Überdies liegen diese Räume perspectivisch; denn in  $T'$  fallen die ersten und zweiten Bildpunkte zusammen. Da ferner die Verbindungslinien entsprechender Punkte alle durch  $m$  gehen, so ist dieser Punkt das Centrum des beiden Räumen gemeinsamen Strahlenbündels. In der Ebene  $II$  fallen zwei ähnliche Systeme zusammen, deren Ähnlichkeitsverhältniss dasselbe ist wie für die Räume  $N$  und  $N'_2$ , weil ja in  $II$  die Objectpunkte mit ihren ersten Bildpunkten zusammenfallen. Auch die Brenn- oder Gegenebenen können leicht angegeben werden. Zu diesem Zwecke ziehen wir aus  $k$  und  $l$ , Fig. 5, Parallele zu  $S'$ , welche  $S$  in den Brennpunkten  $f_1$  und  $f_2$ , dem ersten und zweiten Brennpunkte des Strahles  $S$ , schneiden. Zieht man alsdann die Gerade  $f_1l$ , welche  $S'$  schneiden mag in  $f'_2$ , so ist dies ein Punkt der Gegenebene von  $N'_2$ , denn es ist jener zweite Bildpunkt, für welchen der erste Bildpunkt im Unendlichen liegt; ebenso ist der Schnitt  $f'_1$  von  $kf_2$  mit  $S'$  ein Punkt der Gegenebene von  $N'_1$ . Diese Gegenebenen sind parallel zu  $II$  und die beiden zu ihnen senkrechten entsprechenden Geraden fallen zusammen in der zu  $II$  senkrechten Linie  $mt'$ .

Der erste Bildraum und der zweite liegen perspectivisch zu einander, die beiden gemeinsame Ebene ist die Tangentenebene an die Kugel  $\Sigma$  im Schnittpunkt mit dem Strahle  $S'$ , und das beiden gemeinsame Strahlenbündel hat sein Centrum in  $m$ , dem Punkte der brechenden Kugelfläche, durch welchen die Axen der einfallenden Strahlenbündel hindurchgehen.

Die aufgefundenen Beziehungen gestatten die Aufgabe: zu einem gegebenen Objectpunkte die beiden Bildpunkte zu finden, in sehr mannigfacher Weise zu lösen, namentlich genau nach demselben Verfahren mit Benützung der Brenn- und Hauptebenen wie der Knotenpunkte, welches aus der Theorie unendlich dünner, einfallender Strahlenbündel mit sehr kleinem Einfallswinkel bekannt ist. Da jedoch im gegenwärtigen Falle die Beziehung zwischen den Punktreihen auf  $S$  und  $S'$  mittelst der Punkte  $k$  und  $l$  in sehr einfacher Weise gegeben ist, kann auch die folgende Construction angewendet werden.

Um zum Objectpunkt  $b$  die Bildpunkte zu finden, ziehe man durch  $b$  eine Parallele zu  $II$ , welche  $S$  schneidet in  $a$ . Zieht man durch  $a$  die Strahlen  $ak$  und  $al$ , welche auf  $S'$  die beiden Bildpunkte  $a'_1$  und  $a'_2$  bestimmen, so lege man durch diese Punkte Parallele zu  $ba$ ; dann ist der Schnitt von  $bk$  mit der Parallelen aus  $a'_1$  der erste Bildpunkt  $b'_1$  von  $b$ , der Schnittpunkt von  $bz$ , Fig. 2, oder auch von  $b'_1m$  mit der Parallelen durch  $a'_2$  aber der zweite Bildpunkt  $b'_2$ .

Die Punkte  $b$ ,  $b'_1$ ,  $b'_2$  liegen in Wirklichkeit unendlich nahe an  $S$  und  $S'$ ; allein wegen der Ähnlichkeit der durch  $a$   $a'_1$  und  $a'_2$  gehenden parallelen ebenen Systeme wird das Verhältniss der Längen  $ba$ ,  $b'_1a'_1$  und  $b'_2a'_2$  zu einander dasselbe sein, wenn die obige Construction ausgeführt wird für irgend einen in  $ba$  gelegenen Punkt, der von  $S$  eine endliche Entfernung besitzt. Hierdurch ist die rein constructive Lösung der verschiedenen einschlägigen Probleme ermöglicht so weit sich dieselben auf die Beziehungen zwischen Object- und Bildpunkten erstrecken. Was jedoch die Abhängigkeit zwischen einfallenden und gebrochenen Strahlen anbelangt, so wird man sich zu erinnern haben, dass entsprechende Gerade in den früher genannten Räumen  $N_2$ ,  $N'_1$ ,  $N'_2$  nur dann in der Beziehung von einfallenden und gebrochenen Strahlen stehen, wenn sie gelegen sind entweder, bezüglich der Räume  $N$  und  $N'_2$  in der Ebene  $SS'$ , oder bezüglich der Räume  $N$  und  $N'_1$  in den zu  $SS'$  senkrechten Ebenen  $P$  und  $P'$ . Im Allgemeinen aber geht der zum Strahle  $bc$  gehörige gebrochene Strahl wohl durch die Bildlinien von  $b$  und  $c$ , nicht aber durch ihre Bildpunkte.

In den oben construirten Bildpunkten  $b_1$  und  $b'_2$  können die Bildlinien leicht angegeben werden; die erste Bildlinie liegt in der Ebene  $b'_1mk$ , die zweite steht senkrecht zu ihr und beide stehen senkrecht auf dem Strahle  $b'_1m$ .

## Bemerkung über anderweitige Beziehungen zwischen Object- und Bildraum.

Eine collineare Beziehung zwischen Objectraum und den zugehörigen Bildräumen würde auch dann erhalten worden sein, wenn wir als Axen der einfallenden Strahlbüchel jene Strahlen gewählt hätten, die hindurchgehen durch den Punkt  $n$  auf  $\Sigma$ , Fig. 2, so dass die Axen der gebrochenen Bündel alle hindurchgehen durch  $n'$  auf  $\Sigma'$ . Die Räume  $N$  und  $N_1'$  würden alsdann wieder perspectivisch liegen, hätten das Strahlenbüchel durch  $k$  gemeinsam, ihre gemeinsame Ebene wäre aber jetzt die tangirende Ebene an die brechende Kugel in  $m$ . Die Beziehung der ebenen Systeme  $P$  und  $P'$  bleibt dieselbe wie früher, was seinen Grund darin hat, dass die ersten Bildlinien die Ebene  $P'$  schneiden und diese Schnittpunkte, d. h. die ersten Bildpunkte in  $P'$  demnach auch auf den jetzt gewählten Axen liegen müssen.

Weil nun die zweiten Bildlinien senkrecht stehen auf der Ebene  $SS'$ , so erkennt man sofort, dass auch die Beziehung der beiden in  $SS'$  gelegenen ebenen Systeme von  $N$  und  $N_1'$  bei der gegenwärtigen Art, die Axen zu wählen, dieselbe bleibt wie früher; entsprechende Punktreihen durch  $a$  und  $a_2'$ , die parallel zu  $H$  liegen, sind ähnlich und ihr Ähnlichkeitscentrum ist der Schnittpunkt  $z$ .

Ferner entspricht einer Ebene in  $N$ , die parallel zu  $H$  ist, eine ebenso gelegene Ebene in  $N_2'$ , aber diese ebenen Systeme sind nicht mehr ähnlich, sondern affin. Man erkennt nämlich sofort, dass einer Punktreihe durch  $a$  senkrecht zu  $SS'$  eine projectivisch ähnliche ebenso gelegene durch  $a_2'$  entspricht, das Ähnlichkeitscentrum ist jedoch nicht in  $z$ , sondern in  $l$ , denn durch  $kn'n$  gehen alle Ebenen, welche die Axen der einfallenden und gebrochenen Bündel enthalten.

## Allgemeine Beziehung zwischen einfallendem und gebrochenem Strahl.

Es ist wiederholt hervorgehoben worden, dass die aufgefundenen Beziehungen zwischen den Räumen  $N$ ,  $N_1'$  und  $N_2'$  nur dann aus einem einfallenden Strahl den gebrochenen als entsprechenden zu construiren gestatten, wenn der einfallende Strahl entweder gelegen ist in der Ebene  $P$  (durch  $S$  senkrecht zu  $SS'$ ) oder in der Ebene  $SS'$ . Um die Aufgabe in dem allgemeinsten Falle zu lösen, verfahren wir wie folgt. Es sei  $A$  irgend ein einfallender Strahl, der dem Strahle  $S$  unendlich nahe liegt; durch  $A$  und  $k$  legen wir eine Ebene  $L$ , welche  $P$  schneiden mag in der Geraden  $A_1$ . Die ihr im Raume  $N_1'$  entsprechende Ebene  $L_1'$  geht ebenfalls durch  $k$  und schneide  $P'$  in der Geraden  $A_1'$ ; alsdann ist  $A_1'$  der zu  $A_1$  gehörige gebrochene Strahl und  $A_1'$  schneidet  $S'$  im ersten Bildpunkte des Schnittpunktes  $A_1S$ . Die Ebenen  $L$  und  $L_1'$  sind als normal zu den Ebenen  $P$ , respective  $P'$  anzusehen. Da nun die zu den Punkten von  $A$  gehörigen ersten Bildlinien in der Ebene  $L_1'$  liegen, so liegt auch der zu  $A$  gehörige gebrochene Strahl  $A'$  in der Ebene  $L_1'$ . Legen wir ferner durch  $A$  eine Ebene  $M$  senkrecht zu  $E$  (oder  $SS'$ ), so ist die ihr entsprechende  $M_2'$  im Raume  $N_2'$  senkrecht zu  $E$  (oder  $SS'$ ), und da  $M_2'$  die zu den Punkten von  $A$  gehörigen zweiten Bildlinien enthält, so liegt auch der zu  $A$  gehörige gebrochene Strahl in dieser Ebene. Sind  $A_2$  und  $A_2'$  die Schmitte von  $M$  und  $M_2'$  beziehungsweise mit  $E$  und  $E'$ , so sind  $A_2$  und  $A_2'$  entsprechende Strahlen und der Schnittpunkt  $A_2'S'$  der zweite Bildpunkt zu  $A_2S$ . Man hat also folgenden Satz:

- (12)... Projicirt man irgend einen einfallenden unendlich nahe an  $S$  verlaufenden Strahl  $A$  auf die Ebenen  $P$  und  $E$  und sucht zu den Projectionen die beziehungsweise in  $P'$  und  $E'$  gelegenen Strahlen, so sind diese Strahlen die Projectionen des zu  $A$  gehörigen gebrochenen Strahles.

## Brechung eines nicht homocentrischen Strahlenbüschels.

Es soll nunmehr die allgemeinere Aufgabe gelöst werden, zu einem einfallenden allgemeinen Strahlenbüchel, gegeben durch seine Axe und die beiden Brenn- oder Bildlinien, das gebrochene zu bestimmen, d. h. seine beiden Bildlinien anzugeben.

Es sei in Fig. 6  $S$  die Axe des einfallenden,  $S'$  die Axe des gebrochenen Bündels,  $H$  die Schnittlinie der Ebene  $H$  mit der Ebene  $SS'$ ,  $Q$  der Schnitt der beiden Ebenen  $P$  und  $P'$ . Es seien ferner  $a$  und  $b$  die Schnittpunkte der beiden Bildlinien des einfallenden Bündels mit der Axe. Nehmen wir auf der Bildlinie durch  $b$

irgend einen Punkt  $\beta$  und ziehen von ihm aus die Strahlen nach den Punkten der anderen Bildlinie, so bilden diese ein ebenes Strahlenbüschel, das  $L$  heißen mag. Nach der Brechung gehen diese Strahlen hindurch durch die Bildlinien des gebrochenen Büschels und zugleich durch den Schnitt der Ebene  $L$  mit der Tangentenebene an die Kugel in  $m$ . Da nun dieser Schnitt im Allgemeinen zu keiner der letztgenannten Bildlinien parallel ist, so liegen die gebrochenen Strahlen nicht mehr in einer Ebene, und es muss daher unter ihnen zwei Strahlen geben, von denen der eine durch den einen, der andere durch den anderen Schnittpunkt der Bildlinien des gebrochenen Bündels mit seiner Axe geht. Wenn wir demnach die Aufgabe lösen: unter allen zum Strahlenbüschel in  $L$  gehörigen gebrochenen Strahlen jene beiden zu finden, welche die Axe  $S'$  schneiden, so haben wir hiedurch die Orte der beiden Bildlinien bestimmt.

Nehmen wir irgend einen Strahl des Büschels  $L$ , welcher hindurehgehen mag durch den Punkt  $\alpha$  der Bildlinie in  $a$ . Diesen Strahl projectiren wir auf die Ebenen  $P$  und  $E$  nach  $\beta'\alpha'$  und  $\beta''\alpha''$ , wobei  $\alpha'\alpha''$   $\beta'\beta''$  die entsprechenden Projectionen der Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  vorstellen. Suchen wir zum Schnittpunkte  $u$  von  $\alpha'\beta'$  mit  $S$  den ersten Bildpunkt  $u'_1$ , zum Schnittpunkte  $v$  von  $\alpha''\beta''$  mit  $S$  den zweiten  $v'_2$ , so gehen nach (12) die Projectionen des gebrochenen Strahles auf  $P'$  und  $E'$ , beziehungsweise durch  $u'_1$  und  $v'_2$ , und der gebrochene Strahl schneidet die Axe  $S'$  nur dann, wenn diese beiden Punkte zusammenfallen.

Sucht man zu jedem Strahle von  $L$  die zugehörigen Punkte, wie  $u$  und  $v$  zu dem Strahle  $\beta\alpha$ , so wird die Punktreihe  $u$  projectivisch zur Punktreihe  $v$ , und  $a$   $b$  sind die Doppelpunkte dieser in einander liegenden Punktreihen, denn die Punktreihen  $\alpha'$  und  $\alpha''$  sind ähnlich und daher die Strahlbüschel aus  $\beta'$  und  $\beta''$  projectivisch. Nun hat man die Punktreihe  $u$  durch  $k$ , die Punktreihe  $v$  durch  $l$  auf  $S'$  zu projectiren, um die jedem Strahle von  $L$  entsprechenden Punkte  $u'_1$  und  $v'_2$  zu erhalten; diese Punktreihen sind demnach auch projectivisch. Es werden also zweimal  $u'_1$  und  $v'_2$  zusammenfallen in den Doppelpunkten, und diese können aus drei Paaren entsprechender Punkte construirt werden. Da  $a$  und  $b$  Doppelpunkte der Punktreihen  $u$  und  $v$  sind, so hat man durch ihre Bildpunkte  $a'_1, a'_2, b'_1, b'_2$  bereits zwei Paare entsprechender Punkte auf  $S'$  gegeben und dann nur noch für einen Strahl des übrigens ganz beliebig anzunehmenden Büschels  $L$ , d. h. für einen beliebigen Strahl des einfallenden Büschels die Punkte  $u$  und  $v$  zu suchen. Behufs Construction dieser Punkte darf dieser Strahl unter einem endlichen Winkel gegen  $S$  geneigt angenommen werden.

(13)... Um die Bildpunkte eines Strahlenbüschels, dessen Axe  $S'$ , zu bestimmen, das durch Brechung eines beliebigen Strahlenbüschels, dessen Axe  $S$ , entstanden ist, suche man zu den Bildpunkten  $a, b$  des einfallenden Bündels die ersten und zweiten Bildpunkte  $a'_1, a'_2, b'_1, b'_2$ , ausserdem zum Schnittpunkte  $u$  der Projection eines beliebigen einfallenden Strahles auf  $P$  mit  $S$  den ersten Bildpunkt  $u'_1$ , zum Schnittpunkte  $v$  der Projection desselben Strahles auf  $E$  mit  $S$  den zweiten Bildpunkt  $v'_2$ ; dann sind die gesuchten Bildpunkte die Doppelpunkte der durch die Punktepaare  $a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, u'_1, v'_2$  bestimmten projectivischen Punktreihen auf  $S'$ .

Da immer, wenn  $v$  zwischen  $aq$  liegt,  $u$  ausserhalb  $ab$  liegen muss und umgekehrt, wegen der zu einander senkrechten Richtungen der Bildlinien, so ist ersichtlich, dass die Punktreihen  $a b u, a b v$  entgegengesetzten Sinn haben, folglich auch die Punktreihen  $a'_1, b'_1, u'_1, a'_2, b'_2, v'_2$ . Die Doppelpunkte sind daher immer reell, wie es ja sein muss, weil die Strahlen des gebrochenen Büschels Normalen eines stetig gekrümmten Flächenstückes sind.

Die Bestimmung der Punkte  $u'_1$  und  $v'_2$  kann man verschiedentlich vereinfachen, z. B. indem man den Strahl  $\beta\alpha$  so wählt, dass seine Projection auf  $E$  parallel zu  $S$  wird, dann ist  $v'_2$  der zweite Brennpunkt auf  $S'$ , und  $u$  liegt zwischen  $ab$  so, dass  $au:ab$  gleich ist  $1:\tan^2 i$ , wenn  $i$  den Winkel bedeutet, um welchen die Bildlinie in  $a$  gegen die Ebene  $P$  geneigt ist.

Es erübrigt noch, die Richtungen der Bildlinien in den Bildpunkten des gebrochenen Bündels anzugeben. Sind in Fig. 7  $uq$  und  $vh$  die Projectionen eines unendlich nahe an  $S$  verlaufenden Strahles des einfallenden Bündels, und  $qu'_1, hv'_2$  die Projectionen des gebrochenen Strahles, so hat man nur in dem Bildpunkte  $A'$  die

Senkrechte  $n$  zu  $S'$  zu ziehen in den Ebenen  $P'$  und  $E'$ . Schneidet die Senkrechte in der Ebene  $P'$  die Gerade  $qu'_1$  in dem Punkte  $\gamma'$ , die Senkrechte in der Ebene  $E'$  die Gerade  $h'v'_2$  in dem Punkte  $\gamma''$ , so ist  $\gamma''a' : \gamma'a'$  die Tangente des Neigungswinkels der Bildlinie in  $a'$  gegen die Ebene  $P'$ ; die Richtung der Bildlinie in  $B'$  ist hiermit ebenfalls gegeben, da sie auf der Richtung der eben bestimmten Bildlinie senkrecht steht.

Um die Bildlinien durch blosse Construction zu finden, ist es zweckmässig, für  $r'_2$  den zweiten Brennpunkt zu wählen, somit  $vh$  zu  $S$  parallel. Wir ziehen dann  $vh_1$  parallel zu  $S$  in einem beliebigen Abstände von dieser Axe, so dass derselbe etwa das  $\mu$ -fache des Abstandes der Geraden  $vh$  von  $S$  ist, und suchen die Projection  $uq_1$  jenes Strahles durch die Bildlinien in  $a$  und  $b$  auf die Ebene  $P$ , dessen Projection auf  $E$  eben  $vh_1$  ist. Zu  $uq_1$  und  $vh_1$  construiren wir die gebrochenen Strahlen  $q_1u'_1$  und  $h'_1v'_2$ , ziehen in  $A'$  die Gerade  $A'\delta$  parallel zu  $H$ , so dass  $\delta$  auf  $h'_1v'_2$  liegt und bestimmen auf der Verlängerung von  $a'\gamma''$  den Punkt  $\gamma''_1$ , wobei  $\delta\gamma''_1$  parallel zu  $S'$  sein soll; die Verlängerung von  $a'\gamma''$  schneide  $q_1u'_1$  in  $\gamma'_1$ . Nun ist, wie leicht ersichtlich,  $mq_1 = \mu \cdot mq$  und daher auch  $A'\gamma'_1 = \mu \cdot A'\gamma''$ ; ferner ist  $mh_1 = \mu \cdot mh$  und wegen der Ähnlichkeit der Punktreihen auf  $H$  auch  $mh_1 = \mu \cdot mh'$ , womit in Folge der Construction auch  $A'\gamma''_1 = \mu \cdot A'\gamma''$ . Die Diagonale des über  $A'\gamma'_1$  und  $A'\gamma''_1$  construirten Rechteckes hat daher die Richtung der Bildlinie in  $A'$ .

Sehr einfach werden die Beziehungen, wenn die Bildlinien des einfallenden Bündels in den Ebenen  $P$  und  $E$  liegen; alsdann sind in diesem einfallenden Bündel zwei ebene Büschel mit den Centras in  $b$  und  $a$  enthalten, die in den Ebenen  $P$  und  $E$  liegen und nach der Brechung zwei Büschel erzeugen, respective gelegen in  $P'$  und  $E'$ ; es ergibt sich daher folgender Satz:

(14)... Liegt im einfallenden Strahlenbündel die Bildlinie durch den Bildpunkt  $a$  in der Ebene  $E$ , die durch den Bildpunkt  $b$  also in der Ebene  $P$ , so sind der erste Bildpunkt  $a'_1$  von  $a$  und der zweite  $b'_2$  von  $b$  die Bildpunkte des gebrochenen Bündels; die Bildlinie durch  $a'_1$  liegt in  $E'$ , die durch  $b'_2$  also in  $P'$ .

Die Punkte  $a'_1b'_1$ ,  $a'_2b'_2$  sind demnach die Grenzlagen für die Bildpunkte des gebrochenen Bündels, wenn man das einfallende um seine Axe  $S$  dreht, und zwar  $a'_1b'_2$  für jene Stellung, bei welcher die Bildlinie durch  $a$  in  $E$  liegt,  $a'_2b'_1$  für die darauf senkrechte Stellung. Hierbei wandern beim Drehen die Bildpunkte aus der einen Grenzlage in die andere entweder innerhalb der Strecken  $a'_1b'_1$  und  $a'_2b'_2$  oder aber ausserhalb; im letzteren Falle gehen sie durch den unendlich fernen Punkt. Um zu entscheiden, wann letzterer Fall eintreten könne, nehmen wir an, es liege der Bildpunkt  $A'$  des gebrochenen Bündels im Unendlichen. Zieht man von diesem Punkte nach irgend einem Punkte der Bildlinie in  $b'$  einen Strahl, so werden dessen Projectionen auf die Ebenen  $P'$  und  $E'$  parallel zu  $S'$ ; der einfallende Strahl, durch dessen Brechung der eben betrachtete entstanden, liefert demnach auf  $P$  und  $E$  projectirt Gerade, die beziehungsweise durch den ersten und zweiten Brennpunkt von  $S$  hindurchgehen. Sollen nun diese Projectionen einem Strahl des einfallenden Bündels mit den Bildpunkten  $ab$  angehören, so muss, wie schon früher bemerkt, ein Schnittpunkt der beiden Projectionen mit  $S$  innerhalb, der andere ausserhalb  $ab$  liegen. Es kann also der angenommene Fall nur eintreten, wenn einer der Brennpunkte innerhalb, der andere ausserhalb  $ab$  liegen. Die Lage der Bildlinien in  $a$  und  $b$  lässt sich leicht bestimmen; aus Fig. 6 folgt ganz allgemein, wenn  $i$  den Neigungswinkel der Bildlinie in  $a$  gegen die Ebene  $P$  bedeutet, dass  $bu \cdot av : bv \cdot au = \tan^2 i$ , und hieraus findet man im gegenwärtigen Falle  $i$ , wenn man  $u$  und  $v$  mit den Brennpunkten  $f_1$  und  $f_2$  von  $S$  (siehe Fig. 4) zusammenfallen lässt.

Es kann also bei gehöriger Wahl bezüglich der Bildpunkte des einfallenden Bündels der merkwürdige Fall eintreten, dass durch blosse Drehung desselben um seine Axe, die eine oder die andere Bildlinie des gebrochenen Bündels ins Unendliche rückt.

Ist umgekehrt einer von den Bildpunkten des einfallenden Bündels unendlich weit, so liegt einer von den Bildpunkten des gebrochenen Bündels innerhalb der Brennpunkte  $f'_1, f'_2$  von  $S'$ , der andere ausserhalb.

## Brechung an einer Ebene.

Wird der Radius der brechenden Kugel unendlich gross, so rückt mit  $k$  zugleich  $l$  ins Unendliche, und somit auch die Brennebenen; die Räume  $N_1$ ,  $N'_1$ ,  $N'_2$  werden affin zu einander. Die zu  $II$  parallelen entsprechenden Ebenen werden congruent für die Räume  $N$  und  $N'_1$ , entsprechende Punkte dieser Räume liegen auf einer zur Einfallsnormale Parallelen. In den Räumen  $N$   $N'_2$  und  $N'_1$   $N'_2$  bleiben hingegen entsprechende parallele Ebenen ähnlich, mit den Ähnlichkeitspunkten in  $z$  und  $m$ . Das Ähnlichkeitsverhältniss der in  $II$  liegenden Systeme ist das gleiche wie im Falle eines endlichen Kugelradius, denn es ist unabhängig von diesem Radius (siehe p. 12). Um zu irgend einem Punkte  $a$  auf  $S$  den zweiten Bildpunkt  $a'_1$  auf  $S'$  angeben zu können, muss man die Richtung von  $ml$  für den Fall eines unendlich grossen Kugelradius bestimmen, denn dieser Richtung parallel wird die Linie  $aa'_2$  verlaufen.

Zu diesem Zwecke machen wir folgende Überlegung. Es werde in Fig. 3 aus einem beliebigen Punkte  $k_0$  von  $mk$  eine Parallele zu  $kn'n$  gezogen und dann auf derselben der Punkt  $l_0$  durch dieselbe Construction mit Hilfe eines über  $mk_0$  als Durchmesser geschlagenen Kreises bestimmt, durch welche  $l$  bestimmt wurde vermitteltst des Kreises  $C$  auf der Geraden  $kn'n$ . Aus der Ähnlichkeit der Figuren bezüglich des Centrums  $m$  folgt dann sofort, dass  $ml_0$  auf einer Geraden liegen und die Richtung von  $ml$  unabhängig ist vom Radius  $mk$ . Somit kann auf die angegebene Weise die Richtung  $ml$  auch für den Fall als der Punkt  $l$  im Unendlichen liegt, construirt werden.

Auch der gebrochene Strahl  $S'$  kann für den Fall einer Ebene auf ähnliche Weise construirt werden, wie für den Fall einer Kugel, man hat sich nur der in II. angegebenen, allgemeineren Fassung des Satzes zu bedienen, welche hingeführt hat zum Satze (1). Wir wollen aus diesen Bemerkungen ausdrücklicher den folgenden Satz hervorheben:

(15)... Die beiden Bildpunkte  $a'_1$   $a'_2$  auf einem an einer Ebene gebrochenen Strahle  $S'$ , die zu einem Punkte  $a$  des einfallenden Strahles gehören, liegen auf zwei durch letzteren Punkt gezogenen Geraden, die parallel laufen zu zwei festen Geraden, deren Richtung nämlich unabhängig ist von der Lage des Punktes  $a$ ; und zwar ist  $aa'_1$  parallel zur Einfallsnormale,  $aa'_2$  aber parallel zur Verbindungslinie des Einfallspunktes  $m$  mit einem Punkte  $l_0$ , der bezüglich eines beliebigen Punktes  $k_0$  der Einfallsnormale ebenso gefunden wird, wie der Punkt  $l$  bezüglich des Kugelmittelpunktes  $k$  nach der in (7) angegebenen Construction.

## II. Reflexion an einer Kugelfläche.

## Übergang von der Brechung zur Reflexion.

Hält man für einfallenden und reflectirten Strahl dieselbe Art der Winkelzählung fest wie für einfallenden und gebrochenen Strahl, so kann der reflectirte Strahl aufgefasst werden als ein gebrochener, für welchen der Brechungswinkel gleich ist  $180^\circ$  weniger dem Einfallswinkel. Die Kugeln  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ , somit auch die Punkte  $n$  und  $n'$ , sowie die Ebenen  $T$  und  $T'$  (Fig. 2) verlieren im gegenwärtigen Falle ihre Bedeutung; deshalb werden von den früher für den Fall der Brechung entwickelten Eigenschaften nur jene erhalten bleiben, welche von diesen Elementen und ihrer speciellen Lage unabhängig sind. Hieher gehören vor Allem: die collinearen Beziehungen zwischen Objectraum  $N$  und seinen Bildräumen  $N'_1$   $N'_2$ ; die perspectivische Lage der Räume  $N$  und  $N'_1$  mit dem Collineationseentrum in  $k$  und die gleiche Lage der Räume  $N'_1$  und  $N'_2$  mit dem Centrum in  $m$ . Aber die Bestimmung der Lage der Brennebenen, die früher mit Hilfe der Ebenen  $T$  und  $T'$  möglich wurde, bedarf nunmehr speciellerer Betrachtungen.

## Beziehung zwischen Objectraum und Bildraum.

Construiren wir zuerst für die beiden perspectivischen Räume  $N$  und  $N'_1$  die Brennebenen. Ein Punkt  $f'_1$  der Brennebene des Raumes  $N'_1$  wird erhalten als Schnitt der aus  $k$ , Fig. 8, zu  $S$  gezogenen Parallelen mit  $S'$ ;

da das Dreieck  $kf_1m$  gleichschenkelig ist für irgend einen in  $m$  einfallenden Strahl und dem zugehörigen reflectirten, so liegen alle Brennpunkte auf einer zum Einfallsradius  $km$  senkrechten, diesen halbirenden Ebene und in dieselbe Ebene fällt auch die Brennebene  $F_1$  des Raumes  $N$ . Die beiden Räume  $N$  und  $N'_1$  liegen demnach involutorisch; irgend einem Elemente entspricht immer dasselbe gleichartige, mag ersteres als dem Raume  $N$  oder dem Raume  $N'_1$  angehörig betrachtet werden. Namentlich liegen auch die Punktreihen auf  $mk$  involutorisch,  $\varphi_1\varphi'_1$  ist der Mittelpunkt  $m$  und  $k$  sind die Doppelpunkte. Durch diese gehen die Doppelsebenen hindurch senkrecht zu  $mk$ . Nun gibt es im perspectivischen collinearen Raume immer zwei Paare entsprechender ebener Systeme, die den zugehörigen Brennebenen parallel liegen und congruent sind, in dem einen Paar sind entsprechende Punktreihen gleichlaufend, in dem anderen Paare von entgegengesetztem Sinne; und in dem einen wie in dem anderen Raume liegen die beiden Ebenen zu beiden Seiten der zugehörigen Brennebenen in gleichem Abstände. Da nun in  $k$  zwei ebene Systeme zusammenfallen, für welche entsprechende Punkte symmetrisch liegen bezüglich  $k$ , wie aus der Lage der Schnittpunkte dieser Ebenen mit einem einfallenden Strahle  $S$  und dem ihm entsprechenden reflectirten  $S'$  hervorgeht, die entsprechenden Punktreihen demnach congruent sind aber von entgegengesetztem Sinne, so müssen in  $m$  zwei congruente Systeme zusammenfallen, die sich decken, wie dies übrigens direct aus der perspectivischen Lage folgt.

Man bemerkt, dass die erste Brennebene für ein beliebiges Strahlenbündel zusammenfällt mit der Brennebene eines normal einfallenden.

Schlagen wir um  $mk$  als Durchmesser einen Kreis, der vom einfallenden Strahle geschnitten wird in  $b$ , vom reflectirten in  $b'_2$ . Wie im Falle der Brechung, bemerkt man auch hier, dass alle unendlich nahe an  $S$  in der Ebene  $SS'$  einfallenden Strahlen, die hindurchgehen durch  $b$ , nach der Reflexion hindurchgehen durch  $b'_2$ . Es ist demnach  $b'_2$  der zweite Bildpunkt von  $b$ , und auf der Verbindungslinie  $bb'_2$  liegt der perspectivische Mittelpunkt  $l$  der Punktreihe auf  $S$  und der ihr entsprechenden Reihe der zweiten Bildpunkte auf  $S'$ . Sind nun  $a$  und  $a'_2$  zwei entsprechende Punkte und sucht man zu diesen die bezüglich  $km$  symmetrisch gelegenen Punkte  $c'$  auf  $S'$  und  $c_2$  auf  $S$ , so ist aus Gründen der Symmetrie offenbar  $c'$  der zweite Bildpunkt von  $c_2$ ; aber die gegen  $mk$  symmetrisch gelegenen Verbindungslinien  $aa'_2$  und  $c'e_3$  müssen durch  $l$  gehen, daher muss  $l$  auf  $km$  selbst liegen, ist also der Schnitt von  $bb'$  mit  $km$ .

Um die zweite Brennebene  $F'_2$  zu finden genügt es, ihren Durchschnitt mit der Ebene  $SS'$  anzugeben, auf welcher Ebene sie senkrecht steht. Einen Punkt dieser Schnittlinie  $F'_2$  (Fig. 8) erhält man sofort, indem man aus  $l$  eine Parallele zu  $S$  zieht und ihren Durchschnitt  $f'_2$  mit  $S'$  sucht; dieser Punkt ist der Halbirungspunkt von  $mb'_2$ . Weitere Punkte von  $F'_2$  werden demnach erhalten als die Halbirungspunkte jener Sehnen des Kreises  $C$ , welche den anderweitigen in  $m$  reflectirten Strahlen entsprechen. Da diese Strahlen unendlich nahe an  $S'$  verlaufen, können ihre Schnittpunkte mit  $C$  unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung auf der Kreistangente in  $b'_2$  liegend angenommen werden; daher ist die gesuchte Gerade  $F'_2$  parallel zu dieser Tangente und ihre Neigung gegen den reflectirten Strahl beträgt somit einen Rechten weniger dem Einfallswinkel.  $F_2$  liegt natürlich symmetrisch zu  $F'_2$  bezüglich der Einfallsnormale.

Nehmen wir ferner ein beliebiges einfallendes Strahlenbündel, dessen Centrum  $m$  ist und das entsprechende reflectirte, und drehen alsdann den Raum  $N'_2$  um die Einfallsnormale um  $180^\circ$ , so wird jeder der in  $m$  reflectirten Strahlen mit dem ihm entsprechenden einfallenden sich decken. In dieser Lage haben also die Räume  $N$  und  $N'_2$  das durch  $m$  gehende Strahlenbündel entsprechend gemein, sie liegen perspectivisch zu einander und zugleich bemerkt man, dass die Brennebenen zusammenfallen. Daher liegen die beiden Räume wieder involutorisch; die eine Doppelsebene  $H_2$  geht durch  $m$  parallel zu  $F_2$ , die andere ist die Tangentenebene  $T$  in  $b$ , und die in dieser Ebene zusammenfallenden ebenen Systeme  $T$  und  $T'_2$  sind congruent und decken sich; zwei entsprechende ebene Systeme, von denen das eine parallel zu  $F_2$ , das andere parallel zu  $F'_2$  ist, sind ähnlich und die in  $H_2$  zusammenfallenden Ebenen  $H_2$  und  $H'_2$  durch  $m$  und parallel zu  $F_2$  und  $F'_2$  sind ebenfalls congruente Systeme, in welchen aber entsprechende Punkte symmetrisch liegen bezüglich  $m$ . Es ergibt sich dies sofort, wenn man bemerkt, dass der Punkt  $n$ , in welchem  $T$  von der auf  $F'_2$  senkrechten Axe  $N_2$  geschnitten wird, hier dieselbe Rolle spielt, wie der Punkt  $m$  früher bezüglich der Räume  $N$  und  $N'_1$ .

Die Räume  $N'_1$  und  $N'_2$  liegen perspectivisch und ihr perspectivischer Mittelpunkt ist  $m$ ; denn ein erster und zweiter Bildpunkt, die zu demselben Objectpunkte gehören, liegen auf einem durch  $m$  gehenden Strahle. Die beiden Reihen der ersten und zweiten Bildpunkte auf  $S'$  haben nur einen Doppelpunkt, in  $m$  gelegen. Gleichweit von diesen entfernt zu beiden Seiten desselben müssen die Gegen- oder Fluchtpunkte  $f'_1$  und  $f'_2$  liegen; man findet sie als die Schnitte der Verbindungslinien  $kf_2$  und  $f_1t$  mit  $S'$ . Durch diese Punkte gehen die Gegenebenen der Räume  $N'_1$  und  $N'_2$ , deren Lage noch näher bestimmt werden soll. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass bezüglich der beiden in die Tangentenebene durch  $m$  fallenden Systeme  $H_1$  und  $H'_1$ , da sie sich decken, die unendlich ferne Gerade von  $H_1$  zusammenfällt mit der unendlich fernen Geraden von  $H'_1$ ; suchen wir nun zur unendlich fernen Geraden von  $H_1$  angehörig dem Raume  $N$  die entsprechende Gerade im Raume  $N'_2$ , so muss dieselbe liegen in der Brennebene  $F'_2$  dieses Raumes, aber auch in der Ebene  $H_1$ , weil jedem Objectpunkte in  $H_1$  ein zweiter Bildpunkt entspricht, der wieder in  $H_1$  liegt. Die gesuchte Gerade ist somit der Schnitt  $v$  der Ebenen  $F'_2$  und  $H_1$ ; da aber diese Gerade gleichzeitig das zweite Bild ist dessen zugehöriges erstes Bild im Unendlichen liegt, so ist sie eine Gerade der Gegenebene von  $N'_2$  und diese sonach bestimmt durch den Punkt  $f'_2$  und die Gerade  $v$ . Die Gegenebene von  $N'_1$  ist ebenso bestimmt durch  $f'_1$  und die Schnittlinie  $u$  der Ebenen  $F_2$  und  $H_1$ ; die Gegenebenen sind also zu einander parallel wie es sein muss wegen der perspectivischen Lage von  $N'_1$  und  $N'_2$ . In einer durch  $m$  parallel zu den Gegenebenen gelegten Ebene fallen erste und zweite Bildpunkte zusammen. Die zu irgend einer geraden Punktreihe in  $N$  gehörigen ersten und zweiten Bilder sind im Allgemeinen nicht parallel zu einander, sie werden es aber, wenn eines der Bilder parallel liegt zur Gegenebene von  $N'_2$  oder  $N'_1$ , denn alsdann muss das andere Bild in der That dem ersten parallel sein, wegen der Ähnlichkeit entsprechender ebener Systeme, die den Gegenebenen parallel liegen.

Wir können die gefundenen Raumbeziehungen in folgendem Satze aussprechen:

(16)... Im Falle der Reflexion liegen die Räume  $N$  und  $N'_1$  perspectivisch involutorisch, ihr Centrum ist der Mittelpunkt  $k$  der reflectirenden Kugel, die Involutionsebene die Tangentenebene an die Kugelfläche im Einfallspunkte  $m$ ; die beiden Brennebenen  $F_1$  und  $F'_1$  halbiren also den Einfallsradius und stehen auf diesem senkrecht. Die Räume  $N$  und  $N'_2$  liegen nicht perspectivisch; dreht man jedoch den einen Raum um die Einfallsnormale um  $180^\circ$ , so werden sie in perspectivisch involutorische Lage gebracht. In dieser Lage ist dann der Einfallspunkt  $m$  das Involutioncentrum und die Involutionsebene steht senkrecht auf der Ebene  $SS'$  des einfallenden und reflectirten Strahles und tangirt den um den Einfallsradius als Durchmesser beschriebenen Kreis  $C$  im Schnittpunkte mit den nach der Drehung zusammenfallenden Strahlen  $SS'$ . Die in dieser Lage zusammenfallenden Brennebenen  $F_2$  und  $F'_2$  halbiren somit den Abstand des Punktes  $m$  von der Involutionsebene und sind letzterer parallel. Die Räume  $N_1$  und  $N'_2$  liegen wieder perspectivisch, das Centrum liegt in  $m$ , durch diesen Punkt geht auch die Ebene, in welcher zwei entsprechende Systeme übereinander fallen, parallel zu den gleich weit abstehenden Gegenebenen, und letztere gehen durch die Gegenpunkte auf  $S'$  und durch die Schnittlinien der Brennebenen  $F_2$  und  $F'_2$  mit der Tangentenebene in  $m$ .

In Figur 8 sind die verschiedenen Punkte und Ebenen in Übereinstimmung mit den für die Brechung giltigen Figuren 4 und 5 eingetragen und bezeichnet worden.

### III. Einige metrische Relationen.

In den folgenden Formeln soll der Einfallswinkel des Strahles  $S$  mit  $\varepsilon$ , der Brechungswinkel von  $S'$  mit  $\varepsilon'$  bezeichnet werden. Wir machen ferner Gebrauch von jener Definition der Brennweiten, wie sie für ein centrirtes Linsensystem und ein auf dasselbe axial auffallendes Strahlenbündel gebräuchlich ist, verstehen also unter Brennweite eines Raumes die Entfernung seiner Brennebene von seiner Hauptebene und zwar

positiv gerechnet, wenn die Brennebene gegen die Hauptebene im Sinne der Lichtbewegung vorausliegt. Unter den Hauptebenen sind die Ebenen der sich entsprechenden congruenten Systeme der in Betracht kommenden collinearen Räume gemeint. In gleicher Weise wird man von Haupt- und Brennlinsen einer Ebene, Haupt- und Brennpunkten eines Strahles sprechen können und darunter die Schmitte der Ebene oder des Strahles mit der Haupt- und Brennebene des zugehörigen Raumes verstehen, sowie unter Brennweite einer Ebene und eines Strahles die Entfernungen der genannten Schmitte von einander.<sup>1</sup>

#### Die Raumbeziehungen bestimmende Grössen.

Für die Räume  $N$  und  $N'$  fallen die Hauptebenen zusammen in der Ebene  $H$ , welche die Axe  $N_1 N'_1$  schneidet in  $o$ , Fig. 4, so dass  $o\pi_1$  und  $o\pi'_1$  die Brennweiten dieser Räume sind, welche wir mit  $\varphi$  und  $\varphi'$  bezeichnen; die entsprechenden Brennweiten einer Ebene oder eines Strahles unterscheiden wir durch Indices. Setzen wir demnach

$$mf_1 = \varphi_s, mf'_1 = \varphi'_s$$

so findet sich aus den Dreiecken  $mkf'_1$  und  $mkf_1$

$$f_1 m = mk \frac{\sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon - \varepsilon')}, mf_1 = mk \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \varepsilon')}.$$

Rechnen wir den Radius  $mk = r$  positiv, wenn der Kugelmittelpunkt im zweiten Medium liegt, d. h. in dem Medium, in welches hinein der einfallende Strahl sich nach der Brechung (Reflexion) fortsetzt, so ist ganz allgemein für die ersten Brennweiten des einfallenden und gebrochenen Strahles

$$\begin{aligned} 1. \dots \quad \varphi_s &= \varphi_p = \frac{r \sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon' - \varepsilon)} = \frac{r}{\cos \varepsilon - \sqrt{\frac{v'^2}{v^2} - \sin^2 \varepsilon'}} \\ \varphi'_s &= \varphi'_p = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \varepsilon')} = \frac{r}{\cos \varepsilon' - \sqrt{\frac{v^2}{v'^2} - \sin^2 \varepsilon'}} \\ &\quad \frac{\varphi_s}{v} + \frac{\varphi'_s}{v'} = 0, \end{aligned}$$

wo mit  $\varphi_p$  und  $\varphi'_p$  die Brennweiten der ebenen Systeme  $P$  und  $P'$  bezeichnet sind.

Weiter ist

$$\begin{aligned} 2. \dots \quad \varphi &= \varphi_s \cos \varepsilon' = \varphi_s \sqrt{1 - \frac{v^2}{v'^2} \sin^2 \varepsilon'}, \quad \varphi' = \varphi'_s \cos \varepsilon = \varphi'_s \sqrt{1 - \frac{v'^2}{v^2} \sin^2 \varepsilon'}, \\ &\quad \frac{\varphi \cos \varepsilon}{v} + \frac{\varphi' \cos \varepsilon'}{v'} = 0. \end{aligned}$$

Für den Fall der Reflexion hat man  $\varepsilon' = \pi - \varepsilon$  zu setzen und erhält

$$1. \dots \quad \varphi_s = -\varphi'_s = \frac{r}{2 \cos \varepsilon}, \quad \varphi = -\varphi' = \frac{r}{2}.$$

Die Räume  $N$  und  $N'_2$  betreffend, folgt zunächst aus der Construction des Punktes  $l$ , Fig. 3,

$$\varepsilon' = \sphericalangle kmn' = \sphericalangle kbl$$

und somit steht  $bl$  senkrecht auf  $kn'n$ , daher wird

$$3. \dots \quad kl = r \sin \varepsilon \sin \varepsilon' = r \frac{v}{v'} \sin^2 \varepsilon = r \frac{v'}{v} \sin^2 \varepsilon'.$$

Als Hauptebenen sind jetzt die beiden congruenten und parallel liegenden ebenen Systeme durch  $p$  und  $p'_2$ , Fig. 4, zu betrachten, für welche die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel zu  $pp'_2 l$  oder zu  $mk$  werden. Setzen wir

$$pf_2 = \psi_s, p'_2 f'_2 = \psi'_s,$$

<sup>1</sup> Diese Definitionen sind für die aufgefundenen Beziehungen der Räume  $N, N_1, N_2$  gestattet, da die Existenz entsprechender congruenter Ebenen nachgewiesen wurde, wären aber nicht im Allgemeinen für zwei collineare Räume zulässig.

so folgt sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $plf_2$ ,  $mkf_1$  und  $p_2'f_2'$ ,  $mkf_2'$

$$\psi_s = \varphi_s \frac{pl}{r}, \quad \psi_s' = \varphi_s' \frac{p_2'l}{r}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $pln$ ,  $mkn$  und  $p_2'n'$ ,  $mkn'$  folgt weiter

$$\frac{pl}{r} = \cos^2 \varepsilon', \quad \frac{p_2'l}{r} = \cos^2 \varepsilon,$$

somit werden die Brennweiten der Strahlen, die zugleich die Brennweiten  $\psi_e$  und  $\psi_e'$  der ebenen Systeme  $E$  und  $E'$  sind:

$$\psi_s = \psi_e = \varphi_s \cos^2 \varepsilon' = \varphi_s \left( 1 - \frac{\nu^2}{\nu'^2} \sin^2 \varepsilon \right),$$

4. . .

$$\psi_s' = \psi_e' = \varphi_s' \cos^2 \varepsilon = \varphi_s' \left( 1 - \frac{\nu'^2}{\nu^2} \sin^2 \varepsilon' \right).$$

Die Brennweiten  $\psi$ ,  $\psi'$  der Räume  $N$  und  $N_2'$  werden aus diesen durch Multiplication mit  $\cos \varepsilon'$  und  $\cos \varepsilon$  erhalten, sind demnach wegen 2

$$5. . . \quad \psi = \varphi \left( 1 - \frac{\nu^2}{\nu'^2} \sin^2 \varepsilon \right), \quad \psi' = \varphi' \left( 1 - \frac{\nu'^2}{\nu^2} \sin^2 \varepsilon' \right).$$

Ferner ist in Folge der für die Brennpunkte  $f_2, f_2'$  der Strahlen  $S$  und  $S'$  giltigen Construction:

$$lf_2' = kf_1 \frac{ln'}{kn'} = kf_1 \frac{p_2'l}{mk}, \quad f_2 l = f_1 k \frac{ln}{kn} = f_1 k \frac{pl}{mk},$$

und wenn man die früher gefundenen Werthe berücksichtigt

$$6. . . \quad mf_1 = \varphi_s \cos^2 \varepsilon, \quad mf_2' = \varphi_s' \cos^2 \varepsilon'.$$

Für die Entfernungen der Punkte  $p$  und  $p_2'$  von  $m$  ergibt sich dann

$$mp = \varphi_s (\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varepsilon'), \quad mp_2' = \varphi_s' (\cos^2 \varepsilon' - \cos^2 \varepsilon),$$

und für die Entfernungen der Hauptebenen vom Punkte  $m$

$$mp \cdot \cos \varepsilon' = \varphi \left( \frac{\nu^2}{\nu'^2} - 1 \right) \sin^2 \varepsilon,$$

7. . .

$$mp_2' \cdot \cos \varepsilon = \varphi' \left( \frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1 \right) \sin^2 \varepsilon'.$$

Es erübrigt noch, die Entfernungen  $x, x'$  der Axen  $X_2$  und  $X_2'$  vom Punkte  $m$  zu berechnen, welche die Ebene  $H$  durch  $m$  in den Punkten  $q$  und  $q_2'$  treffen, die Brennebenen  $F_2$  und  $F_2'$  in den Brennpunkten  $\pi_2$  und  $\pi_2'$ . Die Entfernung des Mittelpunktes  $\varepsilon$  von der auf  $H$  senkrechten Geraden  $mt's$  ist  $r \sin (\varepsilon + \varepsilon')$  und es folgt dann weiter aus der für die Bestimmung der Brennpunkte  $\pi_2$  und  $\pi_2'$  gegebenen Construction:

$$x = st \cdot \frac{mf_2 \cos \varepsilon'}{ms}, \quad x' = t's' \cdot \frac{mf_2' \cos \varepsilon}{mt'}$$

und ferner

$$st \approx r \sin (\varepsilon + \varepsilon') \frac{nn'}{kn}, \quad t's' \approx r \sin (\varepsilon + \varepsilon') \frac{n'n}{kn'}.$$

Substituiert man hierin noch

$$ms = kn + r \cos (\varepsilon + \varepsilon'), \quad mt' = kn' + r \cos (\varepsilon + \varepsilon'),$$

so erhält man schliesslich mit Rücksicht auf die Werthe von  $kn$  und  $kn'$  nach einigen Reductionen:

$$8. . . \quad x = \varphi_s \left( \frac{\nu}{\nu'} - \frac{\nu'}{\nu} \right) \cos^2 \varepsilon \sin \varepsilon, \quad x' = \varphi_s' \left( \frac{\nu'}{\nu} - \frac{\nu}{\nu'} \right) \cos^2 \varepsilon' \sin \varepsilon'.$$

Das Verhältniss der gefundenen Entfernungen wird wegen 2

$$\frac{x}{x'} = -\frac{\varphi_s \nu' \cos^2 \varepsilon}{\varphi_s' \nu \cos^2 \varepsilon'} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon'}$$

und weil die Schnittpunkte  $q, q'$  der Axen  $X_2, X_2'$  mit  $H$  zwei entsprechende Punkte der in  $H$  fallenden ähnlichen Systeme sind, so muss obiges Verhältniss das Ähnlichkeitsverhältniss dieser Systeme sein. Dieses Ähnlichkeitsverhältniss wurde oben gleich gefunden  $z\sigma : z\sigma'$ , wenn  $z\sigma, \sigma'$  die Punkte sind, in welchen eine zu  $H$  Parallele beziehungsweise die Kugeltangente, den einfallenden und gebrochenen Strahl schneidet; nun findet man in der That

$$\frac{z\sigma}{z\sigma'} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon'}$$

Nimmt man den Winkel, welchen  $ml$ , Fig. 3, mit der Richtung  $kn$  einschliesst  $\alpha$ , so ergibt sich aus dem Dreiecke  $mk$

$$\frac{mk}{kl} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varepsilon + \varepsilon' - \alpha)}$$

und hieraus

$$9. \dots \quad \text{tng } \alpha = \text{tng } \varepsilon + \text{tng } \varepsilon'.$$

Im Falle der Reflexion sind die durch  $m$  gehenden Ebenen  $H_2$  und  $H_2'$ , Fig. 8, als die Hauptebenen anzusehen, welche mit dem Einfallsradius  $mk$  den Winkel  $90^\circ - 2\varepsilon$  einschliessen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Ebenen sind parallel zu  $mk$ . Für die Brennweiten der Strahlen erhält man

$$\psi_s = -\psi_s' = \frac{r}{2} \cos \varepsilon,$$

und für die Brennweiten der Räume  $N$  und  $N_2'$

$$\psi = -\psi' = \frac{r}{2} \cos^2 \varepsilon.$$

Für die perspectivisch liegenden Räume  $N_1'$  und  $N_2'$  endlich mögen die Brennweiten, oder, in diesem Falle besser gesagt, die Entfernungen der Gegenpunkte des Strahles  $S'$  von  $m'$ , dem Punkte, in welchem die zusammenfallenden Hauptebenen diesen Strahl schneiden, mit  $\chi_s$  und  $\chi_s'$  bezeichnet sein, so dass (Fig. 5)

$$n'f_1' = \chi_s, \quad n'f_2' = \chi_s'.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $kn'f_1', kl'f_2'$  und  $ln'f_2', lk'f_1'$  folgt dann mit Benützung von 1 und 4

$$10. \dots \quad \chi_s = +\varphi_s \frac{\nu}{\nu'} \cotg^2 \varepsilon', \quad \chi_s' = -\varphi_s' \frac{\nu'}{\nu} \cotg^2 \varepsilon,$$

und hieraus die Entfernungen der Gegenebenen von den zusammenfallenden Hauptebenen, indem man mit  $\cos \varepsilon$  multiplicirt

$$\chi = \varphi' \frac{\nu^2}{\nu'^2} \cotg^2 \varepsilon', \quad \chi' = \varphi' \cotg^2 \varepsilon,$$

welche Ausdrücke mit Benützung der früheren Gleichungen noch in verschiedene andere Formen gebracht werden können.

Im Falle der Reflexion gehen die zusammenfallenden Hauptebenen der perspectivisch gelegenen Räume  $N_1'$  und  $N_2'$  durch  $m$ , Fig. 8. Die Gegenpunkte  $f_1'$  und  $f_2'$  ergeben sich wieder als Schnittpunkte von  $S'$  mit den Geraden  $k'f_2'$  und  $f_1'l$ , und da diese Punkte als Specialfälle der entsprechenden Punkte für die Brechung erhalten werden, so gelten auch für die Entfernungen der Gegenpunkte von  $m$  die Gleichungen 10, wenn man  $\varepsilon' = \pi - \varepsilon$  setzt; es wird so:

$$10'. \dots \quad \chi_s = -\chi_s' = \varphi_s \cotg^2 \varepsilon,$$

worin für  $\varphi_s$  der Werth aus 1' zu substituiren kommt. In der That findet man auch durch directe Berechnung dieselben Werthe für diese Entfernungen.

Die Gegenebenen gehen durch  $f'_2$  und  $f_2$ , sowie durch die auf  $SS'$  senkrechten Geraden  $u$  und  $v$  hindurch. Nennt man  $\eta$  den Winkel dieser Ebenen mit der Einfallsnormalen, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Beziehungen

$$mu = \frac{1}{2} \frac{\psi_s}{\sin \varepsilon}, \quad \chi_s = \frac{\psi_s}{\sin^2 \varepsilon}$$

aus der Betrachtung des Dreiekes  $f_1 m u$  für diesen Winkel

$$\text{tng } \eta = \frac{1}{2} \text{tng } \varepsilon,$$

und hiemit ferner

$$\chi = -\chi' = \frac{r}{2} \frac{\text{cotg}^2 \varepsilon}{\sin \varepsilon \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varepsilon}}.$$

### Relationen zwischen entsprechenden Punkten und Geraden.

Nachdem im Vorhergehenden die fraglichen Raumbeziehungen durch Angabe der Brenn- und Hauptebenen, sowie der zu ihnen senkrechten Axen vollkommen bestimmt sind, können sofort die aus der collinearen Verwandtschaft fließenden metrischen Relationen auf sie angewendet werden. Hierbei sollen die Formeln in möglichstem Anschluss an die Theorie axialer Strahlenbündel eines centrirten Systemes ausgewählt werden.

Es seien irgend zwei collineare Räume gegeben, von denen wir aber conform mit den aufgefundenen Beziehungen voraussetzen, dass je zwei entsprechende ebene Systeme, die den respectiven Brennebenen parallel liegen, ähnlich sind. Die Brennebenen seien mit  $F$  und  $F'$ , die Hauptebenen mit  $H$  und  $H'$ , die Brennweiten mit  $\rho$  und  $\rho'$  bezeichnet. Ferner mögen die zu  $F$  und  $F'$  senkrechten entsprechenden Geraden oder die Axen der Räume  $X$  und  $X'$  ihre Schnitte mit den Haupt- und Brennebenen  $\mu, \mu', \pi, \pi'$  heissen, so dass also

$$\mu \pi = \rho, \quad \mu' \pi' = \rho'$$

ist. Bestimmen wir auf den Axen zwei Punkte  $z, z'$  so, dass

$$z \pi = \pi' \mu', \quad z' \pi' = \pi \mu$$

ist, wobei die Richtungen  $\pi \mu, \mu' \pi'$  als die positiven Richtungen der Axen genommen werden, so erhalten wir die Listing'schen Knotenpunkte, welche Mittelpunkte congruenter Strahlenbündel sind, und zwar fallen diese Bündel zusammen, wenn man die Räume so über einander legt, dass die Hauptebenen und die positiven Axenrichtungen sich decken. Auch die Töppler'schen Hauptebenen und Knotenpunkte können für die allgemeine Lage der Räume sofort bestimmt werden.

Ferner seien  $U$  und  $U'$  irgend zwei entsprechende Gerade, ihre Haupt- und Brennpunkte, d. h. die Schnitte mit den zugehörigen Haupt- und Brennebenen  $h, f, h', f'$ , ihre Brennweiten  $\rho_u$  und  $\rho'_u$ . Für irgend zwei entsprechende Punktepaare  $a, b, a', b'$ , hat man dann bekanntlich

$$af \cdot f' a' = bf \cdot f' b' = -\rho_u \rho'_u,$$

$$\frac{bf}{ab} + \frac{b'f'}{a'b'} = -1,$$

12...

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{af}{f'b'} = \frac{bf}{f'a'}$$

Wir legen durch einen Punkt  $a$  auf  $U$  eine Ebene  $A$  parallel zur Brennebene  $F$ , die entsprechende Ebene  $A'$  durch  $a'$  ist dann parallel zur Brennebene  $F'$ ;  $A$  und  $A'$  mögen die zugehörigen Axen  $X$  und  $X'$  schneiden in den Punkten  $a_0$  und  $a'_0$ . Vermöge der dritten der Gleichungen 12 hat man

$$\frac{\alpha_0 z}{\alpha'_0 z'} = \frac{\alpha_0 \pi}{\pi' z'}, \quad \frac{\alpha_0 \mu}{\alpha'_0 \mu'} = \frac{\alpha_0 \pi}{\pi' \mu'}$$

und hieraus

$$\frac{\alpha_0 z}{\alpha'_0 z'} = - \frac{\rho' \alpha_0 \mu}{\rho \alpha'_0 \mu'}$$

Nun sind  $\rho, \alpha_0 \mu, \rho', \alpha'_0 \mu'$  die Projectionen von  $\rho_u, ah, \rho'_u, a'h'$  auf die respectiven Axen, daher kann man für obige Gleichung auch schreiben

$$13... \quad \frac{\alpha_0 z}{\alpha'_0 z'} = - \frac{\rho'_u ah}{\rho_u a'h'}$$

Vom Punkte  $a$  aus verzeichnen wir in der Ebene  $A$  die Strecke  $\alpha$  und nennen die ihr entsprechende, im Punkte  $a'$  beginnende, welche in der Ebene  $A'$  gelegen sein wird  $\alpha'$ . Verbinden wir die Endpunkte von  $\alpha$  mit  $z$ , die von  $\alpha'$  mit  $z'$ , so erhalten wir zwei Dreiecke, deren Winkel bei  $z$  und  $z'$  wegen der Eigenschaft dieser Knotenpunkte einander gleich sind und wenn man die Räume so übereinander legt, dass  $z$  und  $z'$  und die Axen der Räume sich decken, so fallen die Ebenen der Dreiecke und die ans  $zz'$  laufenden Seiten zusammen, während  $\alpha$  und  $\alpha'$  zu einander parallel werden. Es ist somit

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\alpha_0 z}{\alpha'_0 z'}$$

und der links stehende Quotient wird zu bezeichnen sein als das Bildgrössenverhältniss der Geraden  $UU'$  in den Punkten  $a, a'$ . Nach den früher aus 12 gefolgerten Relationen hat man für dieses Verhältniss

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\alpha_0 \pi}{\pi' z'} = \frac{z \pi}{\pi' a_0}$$

oder, indem man zu den entsprechenden Strecken auf  $U$  und  $U'$  übergeht

$$14... \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{af}{\rho_u} = \frac{\rho'_u}{a'f'}$$

In der Theorie axialer Strahlenbündel steht das Bildgrössenverhältniss in einer einfachen Beziehung zum Verhältniss der Neigungstangenten entsprechender Strahlen; auch dieser Beziehung entspricht eine analoge im gegenwärtigen allgemeineren Falle. Um sie zu erhalten, ziehen wir aus  $a$  eine beliebige Gerade  $l$ , welche die Hauptebene  $H$  treffe im Punkte  $h_1$ , die entsprechende Gerade  $l'$  durch  $a'$  trifft dann die Hauptebene  $H'$  in einem Punkte  $h'_1$  so, dass  $hh_1 = h'h'_1$  wegen der Eigenschaft dieser Ebenen. Es mögen nun die Winkel  $hah_1$  und  $h'a'h'_1$  beziehungsweise mit  $a$  und  $a'$ , die äusseren Winkel der Dreiecke  $hah_1$  und  $h'a'h'_1$  bei  $h$  und  $h'$  beziehungsweise mit  $\alpha$  und  $\alpha'$  bezeichnet, ferner die Quotienten

$$\frac{hh_1}{ah}, \quad \frac{h'h'_1}{a'h'}$$

genannt werden die Tangenten der Winkel  $\alpha$  und  $\alpha'$  für die Basis  $a$  und  $a'$ , wie solches bereits mehrfach geschehen, und hierfür die Bezeichnung gewählt werden

$$\frac{hh_1}{ah} = {}^a \text{Tng } \alpha, \quad \frac{h'h'_1}{a'h'} = {}^{a'} \text{Tng } \alpha'$$

Nach der früher aus 12 gezogenen Gleichung 13 hat man dann

$$\frac{{}^{a'} \text{Tng } \alpha'}{{}^a \text{Tng } \alpha} = \frac{ah}{a'h'} = - \frac{\rho_u \alpha_0 z}{\rho'_u \alpha'_0 z'}$$

<sup>1</sup> Siehe z. B. die Theorie goniometrischen und trigonometrischen Quaternionen von K. W. Unverzagt. Wiesbaden, bei C. W. Kreidel. 1876.

hieraus wegen 14

$$15 \dots \frac{{}^a \text{Tng} a'}{{}^a \text{Tng} a} = - \frac{af}{\rho_u} = - \frac{\rho_u}{a'f'}$$

und endlich die Beziehung:

$$16 \dots \rho_u \alpha {}^a \text{Tng} a + \rho'_u \alpha' {}^a \text{Tng} a' = 0.$$

Ist  $bb'$  ein zweites Paar entsprechender Punkte auf  $U$  und  $U'$  und stellt man für dasselbe die zu 14 und 15 analogen Gleichungen auf, so hat man

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha' \cdot \beta'} = \frac{\rho'_u}{\rho_u} \frac{af}{b'f'}, \quad \frac{{}^a \text{Tng} a' \cdot {}^b \text{Tng} b'}{{}^a \text{Tng} a \cdot {}^b \text{Tng} b} = \frac{\rho_u}{\rho'_u} \cdot \frac{af}{b'f'};$$

wegen der dritten der Gleichungen 12 ist aber

$$\frac{af}{b'f'} = - \frac{ab}{a'b'}$$

somit folgen die Relationen:

$$17 \dots \frac{\rho_u \alpha \beta}{ab} + \frac{\rho'_u \alpha' \beta'}{a'b'} = 0,$$

$$ab \cdot \rho_u {}^a \text{Tng} a {}^b \text{Tng} b + a'b' \cdot \rho'_u {}^a \text{Tng} a' {}^b \text{Tng} b' = 0.$$

Wir wollen noch einige Specialisirungen hervorheben, die sich durch Anwendung der gefundenen Formeln auf die Räume  $N_1$ ,  $N'_1$  und  $N'_2$  ergeben. Zunächst erhalten wir aus 12, indem wir  $U$ ,  $U'$  mit  $S$  und  $S'$  zusammenfallen lassen und für  $bb'$  den Doppelpunkt  $m$  nehmen, d. h. den Einfallspunkt, in welchem der Objectpunkt sowohl mit seinem ersten als auch mit seinem zweiten Bildpunkt zusammenfällt, Beziehungen zwischen den Entfernungen eines Objectpunktes  $a$  und seiner Bildpunkte  $a'_1$ ,  $a'_2$  von  $m$ , und zwar mit Benützung der Gleichungen 1 und 6

$$12' \dots \frac{1}{ma'_1} = \frac{1}{\varphi'_s} + \frac{\nu}{\nu'} \frac{1}{ma'}$$

$$\frac{1}{ma'_2} = \frac{1}{\varphi'_s \cos^2 \varepsilon'} + \frac{\nu \cos^2 \varepsilon}{\nu' \cos^2 \varepsilon'} \frac{1}{ma};$$

wenn man jedoch die Entfernungen der Punkte  $a$  und  $a'_2$  von den Hauptpunkten  $p$  und  $p'_2$  zählt, wegen der Gleichungen 4

$$12'' \dots \frac{1}{p'_2 a'_2} = \frac{1}{\varphi'_s \cos^2 \varepsilon} + \frac{\nu \cos^2 \varepsilon'}{\nu' \cos^2 \varepsilon} \frac{1}{pa}.$$

Für das Bildgrößenverhältniss  $\alpha : \alpha'_1$  oder das Ähnlichkeitsverhältniss zweier paralleler entsprechender Ebenen der Räume  $N$  und  $N'$  findet man aus 13 und 14 die erste der folgenden Gleichungen

$$14' \dots \frac{\alpha}{\alpha'_1} = \frac{\nu'}{\nu} \cdot \frac{am}{a'_1 m} = \frac{\alpha f_1}{\varphi_s} = \frac{\varphi'_s}{a'_1 f'_1},$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'_2} = - \frac{\psi'_s a p}{\psi_s a'_2 p} = \frac{\alpha f_2}{\psi_s} = \frac{\psi'_s}{a'_2 f'_2},$$

die zweite ist analog gebildet für die Räume  $N$  und  $N'_2$ . Übrigens ist auch

$$\frac{\alpha f_2}{\psi_s} = \frac{\varphi'_s \alpha f_2}{\varphi_s m f'_2} = - \frac{\varphi'_s}{\varphi_s} \cdot \frac{am}{a'_2 m} = - \frac{\nu'}{\nu} \frac{am}{a'_2 m}$$

wie aus den Gleichungen 4 und 6 und Benützung der dritten der Gleichungen 12 sich ergibt, und dieser Werth von  $\alpha : \alpha'_2$ , sowie der ihm analoge von  $\alpha : \alpha'_1$  hätte sich leicht direct ableiten lassen mit Hilfe der Ähnlichkeitseentra  $z$  und  $k$  der ebenen Systeme, um die es sich hier handelt.

Die Gleichungen 15 und 16 auf die ebenen Systeme  $P$  und  $P'$  angewendet, liefern, wenn z. B. diese Ebenen als den Räumen  $N$  und  $N'_1$  angehörig betrachtet werden,

$$16' \dots \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha'_1}{\operatorname{tg} \alpha} = - \frac{af'_1}{\varphi'_s} = - \frac{\varphi_s}{a'_1 f'_1} = \frac{\nu}{\nu'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'},$$

denn in diesen Ebenen ist  $a = a' = \frac{\pi}{2}$  zu setzen; ebenso wird die zweite der Gleichungen 17

$$17' \dots \quad \nu \cdot ab \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \nu' \cdot a' b'_1 \operatorname{tg} \alpha'_1 \operatorname{tg} b'_1.$$

Für die ebenen Systeme  $E$  und  $E'$  hingegen wäre zu setzen

$$a = \frac{\pi}{2} - \varepsilon', \quad a' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

und die Gleichungen 15, 16 und 17 vereinfachen sich nur für den Fall, als die Winkel  $\alpha, \alpha'_1, \alpha'_2 \dots$  unendlich klein werden, denn in diesem Falle kann man setzen

$${}^a \operatorname{Tng} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin a}$$

Speziell für die Räume  $N$  und  $N'_2$  ergeben sich entsprechend den Ebenen  $E$  und  $E'$  die Relationen aus 15 und 16

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha'_2}{\operatorname{tg} \alpha} = - \frac{af'_2}{\varphi'_s \cos \varepsilon \cos \varepsilon'} = - \frac{\varphi_s \cos \varepsilon \cos \varepsilon'}{a'_2 f'_2} = \frac{\nu \cos \varepsilon'}{\nu' \cos \varepsilon} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'};$$

und aus der zweiten Gleichung 17

$$17'' \dots \quad \nu \cdot a b \cdot \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \nu' \cdot a' b'_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha'_2 \operatorname{tg} b'_2.$$

Man kann also für die Ebenen  $E E'$  angehörig den Räumen  $N$  und  $N'_2$  dieselbe Relation aufstellen, wie für die Ebenen  $P P'$ , angehörig den Räumen  $N$  und  $N'_1$ , allein während 17' ganz allgemein gilt, ist 17'' nur für unendlich kleine Neigungswinkel richtig.

Für irgend zwei entsprechende ebene Systeme kann man ganz in derselben Weise wie im Raume entsprechende Punkte angeben, welche die Eigenschaft der Knotenpunkte besitzen, d. h. Mittelpunkte entsprechender congruenter ebener Strahlenbüschel sind; sie liegen natürlich auf den zu den Hauptlinien der Systeme senkrechten entsprechenden Geraden und in dem einen Systeme von seinem Brennpunkte um die Brennweite des anderen Systemes entfernt. So liegen z. B. für die Ebenen  $P$  und  $P'$  diese Knotenpunkte auf den Strahlenachsen  $S$  und  $S'$ , für die Ebenen  $E$  und  $E'$  fallen sie zusammen mit den Knotenpunkten der Räume selbst.

Legen wir durch zwei entsprechende Gerade  $U, U'$  zwei entsprechende Ebenen  $L, L'$  und nehmen zwei Punkte  $e, e'$  auf  $U, U'$ , für welche bezüglich der in  $L, L'$  verlaufenden Strahlen

$${}^e \operatorname{Tng} e = \pm {}^{e'} \operatorname{Tng} e',$$

so sind  $e, e'$  entsprechende Punkte, die vermöge 15 von den Brennpunkten die Entfernungen haben

$$ef = \pm \rho'_u, \quad e'f' = \pm \rho_u.$$

Die Lage dieser Punkte also gegen die Brennpunkte der Strahlen ist durch dasselbe Gesetz bestimmt, wie die Lage der Knotenpunkte räumlicher oder ebener Systeme, allein sie sind nicht mehr Mittelpunkte congruenter Strahlenbüschel.

Erfüllt man in 15 die Relation

$$\operatorname{tg} e = \pm \operatorname{tg} e'$$

so führt dieselbe nur dann auf zwei feste Punkte  $c, c'$  auf  $U$  und  $U'$ , wenn die Winkel  $c, c'$  unendlich klein sind und als Entfernungen dieser Punkte von den Brennpunkten findet man

$$cf = \pm \rho_u \frac{\sin c}{\sin c'}, \quad c'f = \pm \rho_u \frac{\sin c'}{\sin c},$$

also z. B. für die Systeme  $E, E'$ , angehörig den Räumen  $N$  und  $N'_2$  und den in ersteren liegenden Strahlen  $S$  und  $S'$ :

$$cf_2 = \pm \psi_s \frac{\cos \varepsilon'}{\cos \varepsilon}, \quad c'_2 f'_2 = \pm \psi_s \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varepsilon'}.$$

Diese Punkte hätten daher für unendlich kleine Strahlenneigungen die Eigenschaft der gewöhnlichen Knotenpunkte, allein ihre Lage gegen die Brennpunkte der Strahlen ist nicht mehr durch das im Raume oder in der Ebene gültige Gesetz bestimmt.

### Brechung eines nicht homocentrischen Strahlenbündels.

Zur Bestimmung der beiden in einander liegenden Punktreihen auf  $S'$ , deren Doppelpunkte die Bildpunkte des gebrochenen Büschels sind, haben wir für drei Strahlen des einfallenden Büschels die Projectionen auf die Ebenen  $P$  und  $E$  zu suchen, die Schnittpunkte  $u$  und  $v$  dieser Projectionen mit  $S$  und endlich zu  $u$  die ersten, zu  $v$  die zweiten Bildpunkte. Ist  $i$  der Neigungswinkel der Bildlinie  $\alpha$  in  $a$  (Fig. 6) gegen die Ebene  $P$ , also  $\pi - i$  die entsprechende Neigung der Bildlinie  $\beta$  in  $b$ , und sucht man für irgend einen Strahl die Beziehung zwischen den Punkten  $u$  und  $v$  als Schnitte seiner Projectionen auf  $P$  und  $E$  mit  $S$ , so erhält man hiefür

$$18. \dots \quad au \cdot bv \sin^2 i + av \cdot bu \cos^2 i = 0.$$

Die Bestimmung der Bildpunkte  $A'$  und  $B'$  gestattet eine Vereinfachung dadurch, dass man die Fluchtpunkte der Punktreihen  $u'_1 \dots u'_2 \dots$  einführt. Um den Fluchtpunkt  $x'_1$  der Punktreihe  $u'_1 \dots$  zu erhalten, muss jener Strahl des einfallenden Büschels genommen werden, dessen Projection auf  $E$  durch  $f_2$  geht, denn diesem Punkte entspricht in der That als zweiter Bildpunkt der unendlich ferne Punkt auf  $S'$ ; ist  $x$  der Schnittpunkt der Projection dieses Strahles auf  $P$  mit  $S$ , so folgt aus 18

$$18' \dots \quad ax \cdot bf_2 \sin^2 i + af_2 \cdot bx \cos^2 i = 0.$$

Lässt man hingegen die Projection auf  $P$  durch  $f_1$  gehen, so geht die Projection auf  $E$  durch einen Punkt  $y$  auf  $S$ , und der zweite Bildpunkt  $y'_2$  von  $y$  ist der Fluchtpunkt der Punktreihe  $u'_2 \dots$ . Zur Bestimmung von  $y$  hat man:

$$18'' \dots \quad ay \cdot bf_1 \sin^2 i + af_1 \cdot by \cos^2 i = 0.$$

Zur Bestimmung von  $x'_1$  und  $y'_2$  benützen wir die zweite der Gleichungen 12, bemerkend, dass der erste Bildpunkt von  $f_2$  der Punkt  $\tilde{f}'_1$  (Fig. 5), der zweite Bildpunkt von  $f_1$  der Punkt  $\tilde{f}'_2$  ist, somit die Beziehungen gelten:

$$19 \dots \quad \frac{f_2 f_1}{x f_2} + \frac{\tilde{f}'_1 f_1}{x_1 \tilde{f}'_1} = -1,$$

$$\frac{f_1 f_2}{y f_1} + \frac{\tilde{f}'_2 f_2}{y_2 \tilde{f}'_2} = -1,$$

und dass ferner aus 18' und 18'', indem man setzt

$$ax = af_2 + \tilde{f}_2 x, \quad bx = bf_2 + \tilde{f}_2 x,$$

$$by = bf_1 + f_1 y, \quad ay = af_1 + f_1 y$$

folgt:

$$\frac{1}{xf_2} = \frac{\sin^2 i}{af_2} + \frac{\cos^2 i}{bf_2},$$

20...

$$\frac{1}{yf_1} = \frac{\sin^2 i}{bf_1} + \frac{\cos^2 i}{af_1}.$$

Durch Substitution dieser Werthe und der weiteren aus 1, 6 und 10 folgenden

$$f_1 f_2 = f_1 m + m f_2 = -\varphi_s \sin^2 \varepsilon,$$

$$m n' = \varphi'_s + \frac{\nu}{\nu'} \varphi'_s,$$

$$\tilde{f}'_1 f'_1 = \tilde{f}'_1 n' + n' m + m f'_1 = -\varphi_s \frac{1}{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'},$$

$$\tilde{f}'_2 f'_2 = \tilde{f}'_2 n' + n' m + m f'_2 = \varphi_s \frac{\cos^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon'}{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'},$$

in die Gleichungen 19 wird schliesslich

$$\frac{1}{x'_1 \tilde{f}'_1} = \frac{\nu'}{\nu} \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varepsilon' \left( \frac{1}{\varphi_s \sin^2 \varepsilon} + \frac{\sin^2 i}{af_2} + \frac{\cos^2 i}{bf_2} \right),$$

21...

$$\frac{1}{y'_1 \tilde{f}'_2} = \frac{\nu'}{\nu} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \operatorname{tg}^2 \varepsilon' \left( \frac{1}{\varphi_s \sin^2 \varepsilon} + \frac{\sin^2 i}{bf_1} + \frac{\cos^2 i}{af_1} \right),$$

wodurch die Lage der Fluchtpunkte in einfacher Weise durch lauter unmittelbar gegebene Grössen ausgedrückt erscheint.

Da  $a$  und  $b$  Doppelpunkte der Punktreihen  $u \dots v \dots$  sind, so hat man weiter zur Bestimmung der Doppelpunkte  $A'$  und  $B'$  der Reihen  $u' \dots v' \dots$  die Gleichung

22...

$$A' x'_1 \cdot y'_2 A' = a'_1 x'_1 \cdot y'_2 a'_2.$$

Durch Anwendung der dritten der Gleichungen 12 erhält man weiter

$$a'_1 x'_1 = \frac{ax \cdot f_1 x'_1}{af_1}, \quad f'_1 x'_1 = \frac{f_2 f_1 \cdot \tilde{f}'_1 x'_1}{\tilde{f}'_2 x},$$

$$a'_2 y'_2 = \frac{ay \cdot f_2 y'_2}{af_2}, \quad f'_2 y'_2 = \frac{f_1 f_2 \cdot \tilde{f}'_2 y'_2}{f_1 y}$$

und daher

$$a'_1 x'_1 \cdot y'_2 a'_2 = (f_1 f_2)^2 \frac{ax \cdot ay}{xf_2 \cdot yf_1} \cdot \frac{x'_1 \tilde{f}'_1 \cdot y'_2 \tilde{f}'_2}{af_1 \cdot af_2}.$$

Die Gleichungen 18' und 18'' liefern ferner in Verbindung mit 20 die Beziehungen:

$$\frac{ax}{xf_2} = \frac{ab \cdot \cos^2 i}{bf_2}, \quad \frac{ay}{yf_1} = \frac{ab \cdot \sin^2 i}{bf_1},$$

so dass die Potenz der projectivischen Beziehung sein wird:

23...

$$a'_1 x'_1 \cdot y'_2 a'_2 = \frac{\varphi_s^2 a b^2 \sin^4 \varepsilon \sin^2 2i}{4a f_1 \cdot af_2 \cdot bf_1 \cdot bf_2} x'_1 \tilde{f}'_1 \cdot y'_2 \tilde{f}'_2.$$

Die Gleichungen 21, 22 und 23 lösen somit die gestellte Aufgabe, die Bildpunkte des gebrochenen Strahlenbündels zu finden, und es erübrigt nur noch, die Stellung der Bildlinien in den Bildpunkten  $A'$  und  $B'$  anzugeben. Die diesbezüglichen Formeln erhält man leicht auf dem Wege der oben gezeigten Construction, oder aber, in besserem Anschlusse an die eben entwickelten Gleichungen, auf folgende Art.

Ein Strahl des gebrochenen Bündels, dessen Projection auf  $E'$  parallel zu  $S'$  verläuft, gibt auf  $I''$  projectirt eine durch  $x'_1$  gehende Gerade und ebenso ist  $y'_2$  der Schnittpunkt der Projection auf  $E'$  dessjenigen

Strahles, dessen Projection auf  $P''$  parallel zu  $S'$  ist. Bezeichnet  $i'$  den Winkel der Bildlinie in  $A'$  mit der Ebene  $P''$ , so gilt für einen beliebigen Strahl des gebrochenen Büschels die mit 18 conforme Gleichung:

$$A' u' \cdot B' v' \sin^2 i' + A' v' \cdot B' u' \cos^2 i' = 0,$$

wo  $u'$  und  $v'$  die Schnittpunkte der Strahlenprojectionen mit  $S'$  sind. Lässt man nun  $v'$  ins Unendliche rücken, so hat man gleichzeitig für  $u'$  zu setzen  $x'_1$  und die obige Gleichung liefert

$$A' x'_1 = A' B' \cos^2 i',$$

wenn aber  $u'$  ins Unendliche rückt und folglich  $v'$  nach  $y'_2$ , so wird

$$A' y'_2 = A' B' \sin^2 i',$$

und somit ist

$$24 \dots A' x'_1 \cdot y'_2 A' = -\frac{1}{4} A' B'^2 \sin^2 2 i',$$

welcher Ausdruck in Verbindung mit 22 und 23 die Gleichung zur Berechnung von  $i'$  liefert. Wird  $i' = \frac{\pi}{2}$ , so wird  $i' = \frac{\pi}{2}$  oder  $= 0$ , ersteres wenn man unter  $A'$  den ersten Bildpunkt von  $a$ , letzteres, wenn man unter  $A'$  den zweiten Bildpunkt von  $b$  versteht. Setzt man fest, dass unter  $A'$  jener Bildpunkt verstanden ist, welcher stetig in den ersten Bildpunkt von  $a$  übergeht, während  $i$  stetig bis  $\frac{\pi}{2}$  wächst, so sind  $i$  und  $i'$  immer gleichzeitig in demselben Quadranten liegend anzunehmen.

### Schlussbemerkung.

An die vorstehenden Untersuchungen hätten sich naturgemäss anschliessen die analogen für ein System von Kugelflächen; diese letzteren bleiben einer späteren Mittheilung vorbehalten. Doch mag schon hier kurz einer Abhandlung von Most Erwähnung geschehen, die während der Ausarbeitung der vorliegenden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband VIII, p. 299—348, unter dem Titel: „Über ein dioptrisches Fundamentalgesetz“ erschienen ist, und welche gleichfalls unendlich dünne Strahlensysteme mit endlichem Einfallswinkel und Brechungswinkel in Betracht zieht. Es wird darin unter Anderem der Gang der Strahlen untersucht in einem Systeme centrirter Kugelflächen für den Fall, als die Axe des einfallenden Bündels und somit auch die Axen aller gebrochenen mit der optischen Axe in einer Ebene liegen und zwar speciell für Strahlen, die in dieser Ebene verlaufen oder in Ebenen, die durch die Axen der Bündel senkrecht zu dieser Ebene gelegt, enthalten sind. Es sind somit die ebenen Systeme  $EE'$  und  $PP'$  analogen, die näher untersucht werden und die in dem angeführten Falle für ein System centrirter Kugelflächen ganz ähnliche Beziehungen aufweisen, wie für den Fall einer einzigen Kugelfläche.

Das „Fundamentalgesetz“, welches Most ableitet, ist für die in einander liegenden Systeme  $E$  und  $E'$  durch die Gleichung 17'', für die Systeme  $P$  und  $P'$  durch die Gleichung 17' des Artikels IV dargestellt. In diese Gleichung werden dann zur Vereinfachung die Knoten- und Hauptpunkte eingeführt, indem das Verhältniss der Neigungstangenten in conjugirten Punkten einmal gleich  $\pm 1$ , das andere Mal gleich  $\pm \frac{v'}{v}$  genommen wird, und weiter durch entsprechende Betrachtungen die Brennpunkte.

Es ist nun zunächst klar, dass dieses Fundamentalgesetz allein ganz ungeeignet ist, die Beziehungen der ebenen Systeme auf die es angewendet wird, zu erschliessen, denn es enthält nur Grössen, die auf Punkte in den Axen und auf Strahlen, die unendlich kleine Neigungen gegen die Axen haben, Bezug nehmen. Für Punktsysteme ausserhalb der Axen, für das Bildgrössenverhältniss, die Richtungen der Haupt- und Brennlinien u. s. f., kurz für alle Fälle, in denen endliche Strahleneigungen gegen die Axen interveniren, muss dieses Fundamentalgesetz noch sehr wesentlich durch anderweitige Betrachtungen ergänzt werden.

In der That kann als umfassendes Fundamentalgesetz, durch welches die allgemeinen Beziehungen der genannten ebenen Systeme dargestellt wird, der Satz gelten, dass die Systeme *collinear* sind; die Gleichungen 17' und 17'' sind aber nur speciellere Folgerungen aus dieser Beziehung. Für die Systeme *P* und *P''* gilt 17' in aller Strenge auch für endliche Strahlenneigungen; für die Systeme *E* und *E'* hingegen müsste an die Stelle von 17'' die zweite der Gleichungen 17 treten. Auf den Axen gelegene Knotenpunkte, d. h. Mittelpunkte congruenter entsprechender Strahlenbündel gibt es in diesen Systemen gar nicht, und die Anwendungen, welche Most von seinem Fundamentalgesetze auf diese Systeme macht, sind unrichtig, weil hiebei die Giltigkeit der Gleichungen 17'' für endliche Strahlenneigungen vorausgesetzt wird, wie für die Gleichung 17', oder mit anderen Worten, vorausgesetzt wird: für die Systeme *E* und *E'* stehen ähnliche entsprechende Punktreihen senkrecht zu den Axen, wie für die Systeme *P* und *P'*. Wie ferner aus den Specialisirungen der Gleichungen 15 und 16 für die Systeme *E* und *E'* im Artikel IV hervorgeht, sind die Most'schen Hauptpunkte gar nicht Hauptpunkte im gewöhnlichen Sinne, d. h. nicht Axenpunkte, durch welche congruente entsprechende Punktreihen hindurchgehen. — Ein weiteres Eingehen in die citirte Abhandlung würde zu sehr die Grenzen der vorstehenden Untersuchungen überschreiten.





# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1878

Band/Volume: [38\\_2](#)

Autor(en)/Author(s): Lippich Ferdinand (Franz)

Artikel/Article: [Über Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen. \(Mit 1 Tafel.\) 163-192](#)