BEITRAG
ZUR
THEORIE DER AUFLÖSUNG VON GLEICHUNGEN

MIT BEZUGNAHME AUF DIE

HILFSMITTEL DER ALGEBRAISCHEN UND GEOMETRISCHEN OPERATIONSLEHRE.

VON

D^R. LORENZ ŻMURKO,
K. K. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU LEMBERG

(Mit 6 Holzschnitten.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 17. MÄRZ 1881.

Inhalt.

I. Capitel.

Auflösung der algebraischen Gleichungen vom Standpunkte der mathematischen Operationslehre.

§. 1.

Eine Gleichung mit Einer Unbekannten ist eine gegebene feste Relation einer unbekannten Grösse zu gegebenen Bekannten, welche nur durch gewisse passende Werthe der Unbekannten erfüllt wird. Im Gegensatze zu den sogenannten identischen Gleichungen nennt man solche Gleichungen hypothetische Gleichungen.

Bei Gelegenheit der stufenweisen Entwicklung der Fundamentalprincipien der mathematischen Operationslehre macht man mehrentheils die Erfahrung, dass sehr oft sich mehrere passende Werthe für die Unbekannte ergeben, deren jeder einer und derselben Gleichung genügt und als die sogenannte Wurzel derselben gilt. Bei algebraischen Gleichungen höheren Grades ist sogar streng bewiesen, dass eine solche Gleichung geradezu so viele Wurzeln definirt, als ihr höchster bei der Unbekannten stehender Exponent Einheiten zählt.

Man braucht nur an die Discussion einiger in der Operationslehre vorkommenden symbolischen Relationen

$$
\begin{aligned}
&1.\ \sqrt[n]{k} = x, \\
&2.\ 2r\cos\varphi = x, \quad \text{sobald} \quad \cos n\varphi = k, \\
&3.\ r\,\mathrm{tang}\,\varphi = x, \quad \text{sobald} \quad \mathrm{tang}\,n\varphi = k, \\
&4.\ \log k = x,
\end{aligned}
\qquad \ldots(1)
$$

und an die dabei gemachten Erfahrungen zurückzudenken, um die Überzeugung zu gewinnen, dass bei bekannten Grössen r und k und der Unbekannten x in den Relationen 1., 2., 3. je ein System von n Werthen und in der Relation 4. sogar ein System von unendlich vielen Werthen definirt ist, welche als Wurzelwerthe der jeweiligen in (1) vorkommenden Gleichung gelten.

Beim Unternehmen, die Operationslehre durch die Theorie der Auflösung von Gleichungen zu bereichern, wird es nun vor Allem darauf ankommen, die eben notirten Fundamentalerfahrungen auszunützen, und so weit, als dies mit diesen Mitteln angeht, die Auflösung der Gleichungen zu fördern; und dann erst in analytischer Weise sich nach einem stufenweise fortschreitenden Verfahren umsehen, welches die Auffindung der Gleichungswurzeln, oder vielmehr die Zerfällung des Gleichungspolynoms in die sogenannten Wurzelfactoren vermitteln soll.

Während die erste und letzte in (1) zu Gleichungen

$$x^n - k = 0, \quad e^x - k = 1 - k + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 0 \qquad \ldots(2)$$

führt, liegt es uns ob, die den Relationen 2. und 3. entsprechenden Gleichungen stufenweise zu bilden.

Aus der Relation $2r\cos\varphi = x$ erhält man:

$$\cos\ \varphi = \frac{x}{2r},\ \sin\varphi = \sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}},$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{x^2}{4r^2} - 1 + \frac{x^2}{4r^2} = \frac{x^2}{4r^2} - 1,$$

$$\sin 2\varphi = \sqrt{1-\cos^2 2\varphi} = \sqrt{1-\left[\frac{x^4}{4r^4} - \frac{x^2}{r^2} + 1\right]} = \sqrt{\frac{x^2}{r^2}\left(1-\frac{x^2}{4r^2}\right)} = \frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}}, \qquad \ldots(3)$$

$$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi = \left(\frac{x^2}{2r^2} - 1\right)\frac{x}{2r} - \frac{x}{r}\left(1-\frac{x^2}{4r^2}\right) = \frac{x^3}{2r^3} - \frac{3x}{2r},$$

$$\sin 3\varphi = \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi = \left(\frac{x^2}{r^2} - 1\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}},$$

$$\cos 4\varphi = \cos 3\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin 3\varphi = \frac{x^4}{2r^4} - \frac{2x^2}{r^2} + 1, \text{ u. s. w.}$$

Aus (3) findet man:

$$\begin{aligned} x &= 2r\cos\varphi, \\ x^2 - 2r^2 &= 2r^2\cos 2\varphi = 2r^2 k, \\ x^3 - 3r^2 x &= 2r^3\cos 3\varphi = 2r^3 k, \\ x^4 - 4r^2 x^2 + 2r^4 &= 2r^4\cos 4\varphi = 2r^4 k, \quad \text{u. s. w.} \end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

Die in (4) angeführten Resultate, welche man auf die eben gezeigte Weise stufenweise fortentwickeln kann, sind specielle Fälle folgender für ganze positive Werthe von n uneingeschränkt giltigen Relationen (s. Ettingshausen's Vorlesungen über höhere Mathematik, Bd. I, S. 114).

$$x = 2r\cos\varphi, \qquad \overset{\frac{n}{2}|}{\underset{0}{S_s}}\left[(-1)^s \frac{n}{n-s}\binom{n-s}{s} r^{2s} x^{n-2s}\right] = 2r^n\cos n\varphi = 2r^n k, \qquad \ldots(5)$$

wo die Summirung für $s = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n}{2}|$ ausgeführt werden soll, unter dem Symbol $\frac{n}{2}|$ diejenige grösste ganze Zahl verstanden, welche in der Bruchzahl $\frac{n}{2}$ noch enthalten ist.

Aus der zweiten Gleichung in (1) hat man:

$$\tan\varphi = \frac{x}{r},$$

$$k = \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2xr}{r^2 - x^2},$$

$$k = \operatorname{tang} 3\varphi = \frac{\dfrac{2xr}{r^2-x^2} + \dfrac{x}{r}}{1 - \dfrac{2rx^2}{r(r^2-x^2)}} = \frac{3r^2x - x^3}{r^3 - 3rx^2}, \qquad \ldots(6)$$

$$k = \operatorname{tang} 4\varphi = \frac{4r^3x - 4rx^3}{r^4 - 6r^2x^2 + x^4},$$

und ebenso ganz allgemein:

$$k = \operatorname{tang} n\varphi = \frac{\binom{n}{1} r^{n-1} x - \binom{n}{3} r^{n-3} x^3 + \binom{n}{5} r^{n-5} x^5 \ldots}{r^n - \binom{n}{2} r^{n-2} x^2 + \binom{n}{4} r^{n-4} x^4 \ldots}.$$

Aus diesen Relationen findet man zur Bestimmung von $\tang\varphi = x$, die Gleichungen:

für

$k = \tang 2\varphi \ldots\ldots kx^2 + 2rx - kr^2 = 0,$

$k = \tang 3\varphi \ldots\ldots x^3 - 3krx^2 - 3r^2x + kr^3 = 0,$

$k = \tang 4\varphi \ldots\ldots kx^4 + 4rx^3 - 6kr^2x^2 - 4r^3x + kr^4 = 0,$

und allgemein für ...(7)

. . . .

$$k = \tang 2n\varphi \ldots\ldots kx^{2n} + \binom{2n}{1} rx^{2n-1} - \binom{2n}{2} kr^2x^{2n-2} - \binom{2n}{3} r^3x^{2n-3} + \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2n} kr^{2n} = 0,$$

$$k = \tang(2n+1)\varphi \,.\, x^{2n+1} - \binom{2n+1}{1} krx^{2n} - \binom{2n+1}{2} r^2x^{2n-1} + \binom{2n+1}{3} kr^3x^{2n-2} + \ldots + (-1)^{n+1} r^{2n+1} = 0.$$

Setzen wir $e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \beta$, so findet man: ...(8)

$$\beta^n = 1 \quad \text{und auch} \quad \beta^{(s-1)n} = 1.$$

Ist ausserdem x_0 der numerische Werth von $\sqrt[n]{k}$, so erhalten wir:

$$x = x_s = x_0\beta^{s-1} \qquad \ldots (9)$$

und sehen unmittelbar ein, dass das nach (9) gebildete Werthsystem $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ der ersten Gleichung in (2) als das entsprechende Wurzelsystem angehört.

Ist ebenso x_0 der primitive $\log k$, so findet man:

$$e^{x_0} - k = 0, \quad \text{aber auch} \quad e^{x_0 + (s-1)2\pi i} = e^{x_0}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^{s-1} = e^{x_0} = k,$$

demgemäss wird

$$x = x_s = x_0 + (s-1)2\pi i$$

für jeden ganzen positiven oder negativen Werth von s eine Wurzel der zweiten Gleichung in (2) vorstellen.

In (4) sehen wir algebraische Gleichungen in Bezug auf die Unbekannte x von verschiedenem Grade, sobald man r und k als bekannte Grössen voraussetzt. Deutet die gegebene Grösse k auf eine Bogenzahl $m\varphi$ hin, so wird k auch dann bei seinem Werthe sich erhalten, wenn man an die Stelle der Bogenzahl φ die Bogenzahl $\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{m}$ hinsetzt, und zwar für ein beliebiges ganze s; demgemäss wird der entsprechenden Gleichung des $m$ten Grades für beliebiges ganzwerthige s der Ausdruck

$$x = x_s = 2r\cos\left(\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{m}\right) = \qquad \ldots (10')$$

$$= \left[r\cos\left(\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{m}\right) + ir\sin\left(\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{m}\right)\right] + \left[r\cos\left(\varphi + (s-1)\frac{2\pi}{m}\right) - ir\sin\left(\varphi + (s-1)\frac{2n}{m}\right)\right] =$$

$$= re^{\varphi i}\left[e^{\frac{2\pi i}{m}}\right]^{s-1} + re^{-\varphi i}\left[e^{\frac{2\pi i}{m}}\right]^{1-s} = r\beta^{s-1}e^{\varphi i} + r\beta^{1-s}e^{-\varphi i},$$

somit der Ausdruck

$$x = x_s = r\beta^{s-1}e^{\varphi i} + r\beta^{1-s}e^{-\varphi i}, \quad \cos n\varphi = k, \ \beta = e^{\frac{2\pi i}{m}} \qquad \ldots (10)$$

als Wurzel angehören. Es genügt hier für s die Werthe $1, 2, 3, \ldots m$ anzunehmen, um ein Werthsystem $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ zu erhalten, welches das complete Wurzelsystem der nach (4) gebildeten Gleichung des $m$ten Grades ausmacht, sobald man in derselben k und r als constant voraussetzt.

In (6) sehen wir algebraische Gleichungen verschiedener Grade in Beziehung auf die Unbekannte x, sobald wir r und k als bekannte Grössen voraussetzen. Deutet die gegebene Grösse k auf die Bogenzahl $m\varphi$ hin, so wird k auch dann noch bei seinem Werthe sich erhalten, wenn man an die Stelle von φ die Bogenzahl $\varphi+(s-1)\frac{\pi}{m}$ hinsetzt, und zwar für beliebiges ganzwerthige s.

Demgemäss wird der entsprechenden Gleichung des $m$ten Grades in (6) für beliebiges ganzwerthige s der Ausdruck:

$$x=x_s=r\,\text{tang}\left(\varphi+(s-1)\frac{\pi}{m}\right)=\frac{r}{i}\,\frac{2i\sin\left(\varphi+(s-1)\frac{\pi}{m}\right)}{2\cos\left(\varphi+(s-1)\frac{\pi}{m}\right)}= \qquad \text{...(10'')}$$

$$=\frac{r}{i}\,\frac{e^{\varphi i}\left[e^{\frac{\pi i}{m}}\right]^{s-1}-e^{-\varphi i}\left[e^{\frac{\pi i}{m}}\right]^{1-s}}{e^{\varphi i}\left[e^{\frac{\pi i}{m}}\right]^{s-1}+e^{-\varphi i}\left[e^{\frac{\pi i}{m}}\right]^{1-s}}=\frac{r}{i}\,\frac{e^{\varphi i}\left[e^{\frac{2\pi i}{m}}\right]^{s-1}-e^{-\varphi i}}{e^{\varphi i}\left[e^{\frac{2\pi i}{m}}\right]^{s-1}+e^{-\varphi i}}$$

und somit der Ausdruck:

$$x=x_s=\frac{r}{i}\,\frac{\beta^{s-1}e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{\beta^{s-1}e^{\varphi i}+e^{-\varphi i}},\quad \beta=e^{\frac{2\pi i}{m}},\quad \text{tang}\,m\varphi=k \qquad \text{...(11)}$$

als Wurzel angehören, und das Werthsystem $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$ als completes Wurzelsystem der Gleichung des $m$ten Grades aus (6) liefern, sobald man k und r als gegebene constante Grössen ansieht.

Ist nun eine Gleichung

$$y^m+b_1y^{m-1}+b_2y^{m-2}+\ldots+b^{m-1}y+b_m=0 \qquad \text{...(12)}$$

zur Auflösung vorgelegt, so wäre vor Allem der Versuch angedeutet, ob das derselben angehörige Wurzelsystem sich aus irgend einem der uns eben bekannt gewordenen Wurzelsysteme ableiten liesse. Wollten wir etwa das in (10) angeführte Wurzelsystem zu diesem Zwecke verwenden, so wissen wir aus (4), dass die zugehörigen Normalgleichungen die specielle Eigenschaft besitzen, bei der Unbekannten x blos gerade Zahlen oder blos ungerade Zahlen als Exponenten zu führen. Zu diesem Zwecke müssen wir die Gleichung (12) durch Substitution $y=x-\frac{b_1}{m}$ transformiren und nachsehen, ob die nun mit der Unbekannten x hervorgehende Gleichung die erwünschte Form:

$$x^m+mpx^{m-2}+C_4x^{m-4}+C_6x^{m-6}+\ldots+2q=0 \qquad \text{...(13)}$$

annimmt, d. h. eine Form, in welcher die Coëfficienten C_1, C_3, C_5, in Folge der erwähnten Transformation wirklich verschwinden.

Ist dies der Fall, so können wir die Gleichung (13) mit der entsprechenden Gleichung aus (4), nämlich mit der Gleichung

$$\mathop{S}_{s=0}^{\frac{m}{2}}\left[(-1)^s\frac{m}{m-s}\binom{m-s}{s}r^{2s}x^{m-2s}\right]-2r^m\cos m\varphi=0 \qquad \text{...(14)}$$

vergleichen, um zu sehen, ob sich die Grössen k und r so bestimmen lassen, dass die Gleichung (14) mit der Gleichung (13) Glied für Glied coïncidirt. Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

α) Ist m eine gerade Zahl, so erscheint (14) in folgender Form:

$$x^m-mr^2x^{m-2}+\frac{m}{m-2}\binom{m-2}{2}r^4x^{m-4}-\ldots+\left[(-1)^{\frac{m}{2}}2r^m-2r^m\cos m\varphi\right]=0 \qquad \text{...(15)}$$

und wir erhalten aus der Vergleichung (13) mit (15) zunächst die Relationen:

$$-mr^2=mp,\quad 2r^m(-1)^{\frac{m}{2}}-2r^m\cos m\varphi=2q. \qquad \text{...(16)}$$

Hieraus ergibt sich

$$r = [-p]^{\frac{1}{2}} = i(p)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{...(17)}$$

und in Folge dessen gibt die Vergleichung in Bezug auf die übrigen Coëfficienten in (13) und (15)

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{m}{m-2}\binom{m-2}{2} p^2 \\ C_6 &= \frac{m}{m-3}\binom{m-3}{3} p^3 \\ C_8 &= \frac{m}{m-4}\binom{m-4}{4} p^4 \\ &\vdots \\ C_{m-2} &= \frac{m}{\frac{m}{2}+1}\binom{\frac{m}{2}+1}{\frac{m}{2}-1} p^{\frac{m}{2}-1}. \end{aligned} \qquad \text{...(18)}$$

Hat man nun auch das Stattfinden der Relationen (18) bereits constatirt, so erhalten wir aus der zweiten Relation in (16)

$$\begin{aligned} \operatorname{com}\varphi &= (p^{\frac{m}{2}} - q) : r^m,\ i\sin m\varphi = \sqrt{q^2 - 2qp^{\frac{m}{2}}} : r^m \\ e^{m\varphi i} &= \left[(p^{\frac{m}{2}} - q) + \sqrt{q^2 - 2qp^{\frac{m}{2}}}\right] : r^m = H_1 : r^m \\ e^{-m\varphi i} &= \left[(p^{\frac{m}{2}} - q) + \sqrt{q^2 - 2qp^{\frac{m}{2}}}\right] : r^m = H_2 : r^m \end{aligned} \qquad \text{...(19)}$$

$$e^{\varphi i} = \pm\sqrt[m]{H_1} : r, \quad e^{-\varphi i} = \pm\sqrt[m]{H_2} : r,$$

und demgemäss aus (10)

$$x = x_s = \beta^{s-1}\sqrt{H_1} - \beta^{1-s}\sqrt{H_2},\ y_s = x_s - \frac{b_1}{m}, \qquad \text{...(20)}$$

wo

$$\beta = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots m.$$

Hier haben wir die Ausdrücke $\sqrt[m]{H_1}$ und $\sqrt[m]{H_2}$ mit entgegengesetzten Zeichen in Verwendung genommen, weil das Product der Coëfficienten von β in (10)

$$r e^{\varphi i} \times r e^{-\varphi i} = r^2 = -p$$

gibt, und eben so erhalten wir das ähnliche Product aus (20).

$$\sqrt[m]{H_1} \times -\sqrt[m]{H_2} = -\left[(p^{\frac{m}{2}} - q)^2 - (q^2 - 2qp^{\frac{m}{2}})\right]^{\frac{1}{m}} = -\left[p^m\right]^{\frac{1}{m}} = -p,$$

wie es auch sein soll.

β) Ist m eine ungerade Zahl, so erscheint (14) in folgender Form:

$$x^m - mr^2x^{m-2} + \frac{m}{m-2}\binom{m-2}{2} r^4 x^{m-4} - \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} m r^{m-1} x - 2r^m \cos m\varphi = 0 \qquad \text{...(21)}$$

und wir erhalten aus der Vergleichung (13) mit (21) zunächst die Relationen:

$$-mr^2 = mp, \quad -2r^m \cos m\varphi = 2q, \qquad \text{...(22)}$$

Hieraus ergibt sich $r=(-p)^{\frac{1}{2}}=i(p)^{\frac{1}{2}}$ und in Folge dessen gibt die Vergleichung in Bezug auf die übrigen Coëfficienten in (13) und (21)

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{m}{m-2}\binom{m-2}{2}p^2 \\ C_6 &= \frac{m}{m-3}\binom{m-3}{3}p^3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ C_{m-1} &= mp^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned} \qquad \ldots(23)$$

Hat man nun auch das Stattfinden der Relationen in (23) bereits constatirt, so erhalten wir aus (22)

$$\cos m\varphi=-q:r^m,\ i\sin m\varphi=\sqrt{q^2+p^m}:r^m, \qquad \ldots(23')$$

$$e^{m\varphi i}=\left[-q+\sqrt{q^2+p^m}\right]:r^m,\ e^{-m\varphi i}=\left[-q-\sqrt{q^2+p^m}\right]:r^m.$$

Setzt man hier

$$-q+\sqrt{q^2+p^m}=H'_1,\ -q-\sqrt{q^2+p^m}=H'_2, \qquad \ldots(24)$$

so erhält man

$$e^{\varphi i}=\sqrt[m]{H'_1}:r,\quad e^{-\varphi i}=\sqrt[m]{H'_2}:r,$$

und schliesslich nach (10)

$$x=x_s=\beta^{s-1}\sqrt[m]{H'_1}+\beta^{1-s}\sqrt[m]{H'_2},\ \beta=e^{\frac{2\pi i}{m}}. \qquad \ldots(25)$$

Die Formeln (20) und (25) gelten in dem Falle, wo sonst alle hier beschriebenen Bedingungen in Erfüllung gehen, für jeden ganzen Werth von s. Hat man aber eine Partie von m aufeinanderfolgenden zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden ganzen Zahlen bereits erschöpft, so erhält man aus diesen Formeln ein System von m Wurzeln — welches sich ebensogut aus jeder anderen Partie von m aufeinanderfolgenden Zahlen ergeben würde, nur in einer entsprechend anderen Anordnung. Die Auflösungen mittelst der Formeln (20) und (25) heissen desswegen periodische Auflösungen.

Für die Gleichung

$$x^2+2q=0$$

haben wir

$$x=\sqrt{-2q};$$

Anderseits erhalten wir nach (20) für

$$m=2,\ s=1$$

$$x=(p-q+\sqrt{q^2-2pq})^{\frac{1}{2}}-(p-q-\sqrt{q^2-2pq})^{\frac{1}{2}}$$

und hieraus für beliebiges p folgende Relation:

$$\sqrt{-2q}=(p-q+\sqrt{q^2-pq})^{\frac{1}{2}}-(p-q-\sqrt{q^2-2pq})^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots(26)$$

Die Gleichung

$$x^4+4px^2+2q=0$$

gibt

$$x^2=-2p+\sqrt{4p^2-2q};$$

wenn man aber diese Gleichung nach (20) behandelt, so erhält man

$$m=4,\ s=1$$

setzend:

$$x=\sqrt[4]{p^2-q+\sqrt{q^2-2qp^2}}-\sqrt[4]{q-q-\sqrt{p^2-2qp^2}}$$

hiemit

$$\sqrt{-2p+\sqrt{4p^2-2q}}=\sqrt[4]{p^2-q+\sqrt{q^2-2qp^2}}-\sqrt[4]{p^2-q-\sqrt{q^2-2p^2q}}; \quad \text{...(28)}$$

$$\sqrt{4p^2-2q}=\sqrt[2]{p^2-q+\sqrt{q^2-2qp^2}}+\sqrt[2]{p^2-q-\sqrt{q^2-2qp^2}} \text{ u. s. w.} \quad \text{...(29)}$$

Bei der Gleichung des dritten Grades erhält man nach Elimination des zweiten Gliedes folgende für die Behandlung nach (25) taugliche Gleichungsform:

$$x^3+3px+2q=0 \quad \text{...(30)}$$

und erhält nach (24)

$$H_1'=-q+\sqrt{q^2+p^3},\ H_2'=-q-\sqrt{q^2+p^3},$$

somit nach (25)

$$x=x_s=\beta^{s-1}\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\beta^{1-s}\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}, \quad \text{...(31)}$$

$$\beta=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \beta^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},$$

$$\beta^{-1}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \beta^{-2}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \beta^0=1.$$

Ist hier

$$q^2+p^3>0$$

so setze man:

$$\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=u_1,\ \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=u_2 \quad \text{...(32)}$$

und erhält nach (31)

$$x_1=u_1+u_2,$$

$$x_2=-\frac{1}{2}(u_1+u_2)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-u_2), \quad \text{...(33)}$$

$$x_3=-\frac{1}{2}(u_1+u_2)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-u_2).$$

Ist jedoch p negativ und gleichzeitig

$$(q^2+p^3)<0,$$

so ist es vortheilhafter, aus den diesfälligen aus (22) stammenden Bedingungen

$$r^2=-p \qquad r^3\cos 3\varphi=-q \quad \text{...(34)}$$

die Grössen r und φ zu bestimmen, und in die diesfällig stattfindende aus (10′) stammende Formel

$$x=x_s=2r\cos\left(\varphi+(s-1)\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{...(35)}$$

die erhaltenen Werthe von r und φ zu substituiren, und schliesslich diese Formel für $s=1$, $s=2$ und $s=3$ zu berechnen, um in diesem Falle die drei reellen Wurzeln der Gleichung (30) zu erhalten. Aus (34) folgt

$$r=\sqrt{-p},\quad \cos 3\varphi=\frac{-q}{(\sqrt{-p})^3}, \quad \text{...(36)}$$

woraus die ausgesprochene Realität von r und φ und hiemit auch von x_1, x_2, x_3 hervorleuchtet.

Eine Gleichung des 4ten Grades kann wohl durch eine passende Transformation des Gliedes mit der dritten Potenz der Unbekannten entrathen, es müsste jedoch noch das Glied mit der ersten Potenz der Unbekannten gleichzeitig wegbleiben, um die so hervorgehende transformirte Gleichung nach der in (20) aufgestellten periodischen Formel zur Auflösung bringen zu können.

Es muss überhaupt eine Gleichung, deren Gradzahl die Zahl 3 um μ Einheiten überschreitet, mit ihren Coëfficienten μ bestimmte Bedingungen erfüllen, wenn diese Gleichung nach gehöriger Transformation einer periodischen Auflösung fähig sein soll.

Jetzt möge noch untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine Gleichung

$$x^m + m P x^{m-1} + \binom{m}{2} Q x^{m-2} + \mathop{S}_{3}^{m}{}_{\sigma} [H_\sigma x^{m-\sigma}] = 0 \qquad \text{...(38)}$$

nach der periodischen Formel (11) aufgelöst werden kann.

α) Für ein gerades m vergleichen wir diese Gleichung mit der vorletzten Gleichung in (7), sobald man in derselben $2n$ mit m ersetzt, d. h. mit der Gleichung

$$k x^m + \binom{m}{1} r x^{m-1} - \binom{m}{2} r^2 k x^{m-2} - \binom{m}{3} r^3 x^{m-3} + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} k r^m = 0 \qquad \text{...(39)}$$

und erhalten

$$\frac{r}{k} = P, \quad -r^2 = Q, \quad k = \operatorname{tang} m\varphi. \qquad \text{...(39')}$$

Hieraus ist

$$\frac{r}{i} = \sqrt{Q}, \quad k = \operatorname{tang} m\varphi = \frac{i\sqrt{Q}}{P}$$

$$\cos m\varphi = P : \sqrt{P^2 - Q}; \quad i \sin m\varphi = -\sqrt{Q} : \sqrt{P^2 - Q}$$

$$e^{m\varphi i} = (P - \sqrt{Q}) : \sqrt{P^2 - Q}; \quad e^{-m\varphi i} = (P + \sqrt{Q}) : \sqrt{P^2 - Q}$$

$$e^{\varphi i} = \sqrt[m]{P - \sqrt{Q}} : \sqrt[2m]{P^2 - Q}; \quad e^{-\varphi i} = \sqrt[m]{P + \sqrt{Q}} : \sqrt[2m]{P^2 - Q}$$

und hieraus nach (11)

$$x = x_s = \sqrt{Q}\, \frac{\beta^{s-1} \sqrt[m]{P - \sqrt{Q}} - \sqrt[m]{P + \sqrt{Q}}}{\beta^{s-1} \sqrt[m]{P - \sqrt{Q}} + \sqrt[m]{P + \sqrt{Q}}}, \quad \beta = e^{\frac{2\pi}{m} i}, \qquad \text{...(40)}$$

sobald für gerade g und ungerade g' die Bedingungen

$$H_g = \binom{m}{g} Q^{\frac{g}{2}}, \quad H_{g'} = (-1)^{\frac{g'+1}{2}} \binom{m}{g} P Q^{\frac{g'-1}{2}} \qquad \text{...(41)}$$

erfüllt worden sind.

β) Für ein ungerades m ist die Gleichung (38) mit der Gleichung

$$x^m - \binom{m}{1} r k x^{m-1} - \binom{m}{2} r^2 x^{m-2} + \binom{m}{3} r^3 k x^{m-3} + \ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} r^m k = 0$$

zu vergleichen, und man erhält vor Allem:

$$-rk = P, \quad -r^2 = Q, \quad k = \operatorname{tang} m\varphi;$$

und hieraus

$$\frac{r}{i} = \sqrt{Q}, \quad k = \operatorname{tang} m\varphi = \frac{iP}{\sqrt{Q}}$$

$$\cos m\varphi = \sqrt{Q} : \sqrt{Q - P^2}, \quad i \sin m\varphi = -P : \sqrt{Q - P^2}$$

$$e^{m\varphi i} = [\sqrt{Q} - P] : \sqrt{Q - P^2},$$

und so fort:

$$x = x_s = \sqrt{Q}\, \frac{\beta^{s-1} \sqrt[m]{\sqrt{Q} - P} + \sqrt[m]{\sqrt{Q} + P}}{\beta^{s-1} \sqrt[m]{\sqrt{Q} - P} - \sqrt[m]{\sqrt{Q} + P}} \quad \beta = e^{\frac{2\pi}{m} i}, \qquad \text{...(42)}$$

sobald auch hier die Bedingungen (41) sämmtlich erfüllt worden sind.

Die Gleichung des zweiten Grades

$$x^2+2Px+Q=0 \qquad \text{...(43)}$$

bezieht ihre Auflösung aus (40) für $m=2$ im Folgenden:

$$x=x_s=\frac{(-1)^{s-1}\sqrt{P-\sqrt{Q}}-\sqrt{P+\sqrt{Q}}}{(-1)^{s-1}\sqrt{P-\sqrt{Q}}+\sqrt{P+\sqrt{Q}}}\sqrt{Q}$$

oder ...(44)

$$x=x_s=\frac{[(-1)^{s-1}\sqrt{P-\sqrt{Q}}-\sqrt{P+\sqrt{Q}}]^2\sqrt{Q}}{-2\sqrt{Q}}=-P+(-1)^{s-1}\sqrt{P^2-Q},$$

und zwar bedingungslos, weil in der Gleichung (43) kein einziger mit H bezeichneter Coëfficient vorkommt.

Eine Gleichung des dritten Grades benöthigt zu ihrer Darstellung eines einzigen mit H bezeichneten Coëfficienten, und muss demgemäss eine Bedingung erfüllen, welche sich nach (41) für $g'=3$ in der Relation

$$H_3=PQ \qquad \text{...(45)}$$

kundgibt, und besagt, dass die Gleichung dritten Grades nur in der speciellen Form:

$$x^3+3Px^2+3Qx+PQ=0 \qquad \text{...(46)}$$

fähig sei, die periodische Auflösung aus (42) zu beziehen.

Eine vorgelegte wie immer beschaffene Gleichung

$$y^3+3ty^2+3py+2q=0 \qquad \text{...(47)}$$

kann durch Transformation mittelst $y=x+\alpha$ für einen passenden Werth von α auf die Form (46) gebracht werden. Man erhält nämlich:

$$x^3+3(\alpha+t)x^2+3(\alpha^2+2t\alpha+p)x+(\alpha^3+3t\alpha^2+3p\alpha+2q)=0$$

und hieraus

$$\alpha+t=P,\ \alpha^2+2t\alpha+p=Q,\ \alpha^3+3t\alpha^2+3p\alpha+2p=PQ \qquad \text{...(48)}$$

$$PQ=(\alpha+t)(\alpha^2+2t\alpha+p)=\alpha^3+3t\alpha^2+3p\alpha+2q$$

oder

$$\alpha(2t^2-2p)-(2q-tp)=0$$

$$\alpha=\frac{2q-tp}{2t^2-2p}. \qquad \text{...(49)}$$

Wenn $t^2-p \gtrless 0$, so könnte man für diesen Werth von α P und Q berechnen, und dann erhält man nach (42) die Werthe von x und somit auch die Wurzeln der Gleichung (47).

Ist jedoch $t^2=p$, so erscheint die Gleichung (47) in folgender Form:

$$(y+t)^3-(t^3-2q)=0$$

und hieraus ist

$$y_s+t=\sqrt[3]{t^3-2q}.\ \beta^{s-1},\ \beta=e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ und } s=1,2,3. \qquad \text{...(50)}$$

Für die Gleichung

$$y^3+3py+2q=0,$$

welche nur ein specieller Fall von (47) ist für $t=0$, erhalten wir aus (49) und (48)

$$\alpha=-\frac{q}{p},\ y=x-\frac{q}{p}\ P=-\frac{q}{p},\ Q=\frac{p^3+q^2}{p^2}$$

und hieraus nach (42)

$$x = x_s = \frac{\sqrt{p^3+q^2}}{p} \; \frac{\beta^{s-1}\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}} - \sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}}}{\beta^{s-1}\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}} + \sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}}}, \quad \beta = e^{\frac{2\pi}{3}i} \qquad \ldots(52)$$

Multiplicirt man hier Zähler und Nenner mit dem Ausdrucke

$$\beta^{2(s-1)}(q+\sqrt{p^3+q^2})^{\frac{2}{3}} - \beta^{s-1}[q+\sqrt{p^3+q^2}]^{\frac{1}{3}}[-q+\sqrt{p^3+q^2}]^{\frac{1}{3}} + [-q+\sqrt{p^3+q^2}]^{\frac{2}{3}},$$

so erhält man nach vollbrachter Abkürzung einen in Bezug auf den Nenner rationalen Ausdruck:

$$x = x_s = \frac{q}{p} + \beta^{2(s-1)}\sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^2}} + \beta^{s-1}\sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}}$$

und demnach

$$y_s = x_s - \frac{q}{p} = \beta^{2(s-1)}\sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^2}} + \beta^{s-1}\sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^2}}$$

oder ...(53)

$$y_s = \beta^{s-1}\sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q_2}} + \beta^{s-1}\sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^2}},$$

wie wir dies bereits sub (31) gefunden haben.

Für $m > 3$ kommen in der Gleichung (38) eben so viele mit H bezeichnete Coëfficienten in Verwendung, als $m-3$ Einheiten zählt, und dies ist auch die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen, sobald eine specielle über den dritten Grad hinausreichende Gleichung mit Hilfe der periodischen Formel zur Lösung gebracht werden soll.

Sonst sind die aus den Gleichungscoëfficienten zusammengesetzten periodischen Wurzelformeln immer fähig, die zugehörigen Gleichungen zu erfüllen, mögen die Coëfficienten selbst reell oder complex sich gestalten, und auch dann, wenn die aus den Bedingungen in (16), (23′), (39′) und (41′) stammenden Werthe der goniometrischen Functionen $\cos m\varphi$, $\operatorname{tang} m\varphi$ im goniometrischen Sinne einen Sinn haben oder nicht.

Die bei der Aufstellung der eben behandelten Auflösungsmethode herrschende Grundidee besteht eigentlich in der Annahme der typischen Formen: $x = \alpha + 2r\cos\varphi$; $x = \alpha + r\operatorname{tang}\varphi$, zu dem Zwecke, um durch zweckmässige Wahl der drei in denselben vorfindigen Argumente α, r, φ, diese von uns octroirten Ausdrücke als Wurzeln den Gleichungen aufzudringen. Da aber Gleichungen, welche über den dritten Grad hinausreichen ihre Wurzeln durch ihre Coëfficienten, also jedenfalls durch eine die Zahl 3 überschreitende Anzahl von Argumenten definiren, so ist es natürlich, dass solche Gleichungen nur unter gewissen speciellen Bedingungen sich die obigen blos aus drei Argumenten α, r, φ zusammengesetzten Formen als Wurzel aufnöthigen lassen. Um nun im Geschäfte der Auflösung von den dritten Grad überschreitenden Gleichungen weiter vorzudringen, müssen wir den hier befolgten synthetischen Weg verlassen, und in analitischem Sinne mehr in das Wesen des Zusammenhanges zwischen den Gleichungen und ihren Wurzeln einzugehen uns bemühen, um durch stufenweise Fortbildung der hier einschlägigen Operationen zu einer so weit als möglich wirksamen Auflösungsmethode zu gelangen.

§. 2.

Jede Gleichung können wir als eine Gleichung vom geraden Grade ansehen. Eine Gleichung vom ungeraden Grade können wir mit der ersten Potenz der Unbekannten multipliciren, um ihren höchsten Exponenten in eine gerade Zahl zu verwandeln; hiedurch gesellt sich zu dem Complex der dieser Gleichung angehörigen Wurzeln noch die Nulle als Wurzel an.

Wenn eine Gleichung vom $2n$ten Grade eine allgemeine Auflösung besitzt, so können wir durch Specialisirung der in der Auflösung einbegriffenen vieldeutigen Operationszeichen zu ihren sämmtlichen Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2n}$ gelangen, und demzufolge eine vorgelegte Gleichung

$$f(x) = \overset{2n}{\underset{0}{S_\sigma}} [A_\sigma x^\sigma] = 0 \qquad \ldots(1)$$

in der Form

$$f(x) = A_{2n}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{2n-1})(x-x_{2n}) = 0 \qquad \ldots(2)$$

darstellen.

Die hier ersichtlichen Wurzelfactoren können wir auf verschiedene Weise je in zwei Factorengruppen zusammenstellen dergestalt, dass die zu einem und demselben Paare gehörigen Gruppen P und P' als Producte von je n Factoren betrachtet folgende Relation erfüllen:

$$f(x) = A_{2n}\,.\,P\,.\,P'. \qquad \ldots(3)$$

Bezeichnet man mit s_{2n} die Anzahl der möglichen Fälle dieser Zerlegung, so erhalten wir

$$s_{2n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1}. \qquad \ldots(4)$$

Unterscheidet man ferner die Paare von Partialproducten durch Anhängung der fortlaufenden Zeiger 1, 2, $3, \ldots s_{2n}$, so erhalten wir die selbstverständliche Relation

$$f(x) : A_{2n} = P_1 P'_1 = P_2 P'_2 = \ldots = P_{s_{2n}}\,.\,P'_{s_{2n}}, \quad \text{wo} \quad s_{2n} = \binom{2n-1}{n-1}. \qquad \ldots(5)$$

Ein jedes P erscheint nach Ausführung der Multiplication der darin enthaltenen Wurzelfactoren in folgender Form:

$$P = x^n + B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \ldots + B_1 x + B_0, \qquad \ldots(6)$$

und demgemäss

$$\frac{1}{2}(P+P') = x^n + \frac{1}{2}(B_{n-1}+B'_{n-1})x^{n-1} + \frac{1}{2}(B_{n-2}+B'_{n-2})x^{n-2} + \ldots + \frac{1}{2}(B_0+B'_0),$$

$$\frac{1}{2}(P-P') = \frac{1}{2}(B_{n-1}-B'_{n-1})x^{n-1} + \frac{1}{2}(B_{n-2}-B'_{n-2})x^{n-2} + \ldots + \frac{1}{2}(B_0-B'_0), \qquad \ldots(7)$$

oder

$$\frac{1}{2}(P-P') = x^n + m\,x^{n-1} + p\,x^{n-2} + q\,x^{n-3} + \ldots + h\,x + l,$$

$$\frac{1}{2}(P+P') = m'\,x^{n-1} + p'\,x^{n-2} + q'\,x^{n-3} + \ldots + h'\,x + l', \qquad \ldots(8)$$

und hieraus

$$f(x) : A_{2n} = PP' = \left[\frac{1}{2}(P+P')\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(P-P')\right]^2,$$

oder

$$f(x) : A_{2n} = [x^n + mx^{n-1} + px^{n-2} + \ldots + hx + l]^2 - [m'x^{n-1} + p'x^{n-2} + \ldots + h'x + l']^2 = 0, \qquad \ldots(9)$$

wo die Coëfficientengruppe $m, m', p, p', q, q', \ldots h, h', l, l'$ für jedes bestimmte Paar von Partialproducten entsprechend sich gestaltet.

Es lässt sich demgemäss ein Gleichungspolynom des $2n$ten Grades auf s_{2n} verschiedene Weisen in eine Differenz zweier Quadrate umgestalten, von welchen das positiv zu nehmende Quadrat dem $n$ten, hingegen das negativ zu nehmende Quadrat höchstens dem $(n-1)$ten Grade angehört. ...(10)

Denkt man sich in (9) die angedeutete Erhebung zu Quadraten wirklich ausgeführt und das so entstandene nach x dem $2n$ten Grade angehörige Polynom Glied für Glied mit dem Polynom $f(x):A_{2n}$ verglichen, so erhält man $2n$ Gleichungen, welche durch die Coëfficienten $m, p, q, \ldots h, l, m', p', q', \ldots h', l'$ erfüllt werden müssen.

Von den $2n$ Bedingungsgleichungen wird eine wegfallen, sobald man den Coëfficienten m gleich in der Anlage der Rechnung der Relation $m = \frac{1}{2}(A_{2n-1} : A_{2n})$ entsprechend wählt. Die übrigbleibenden $(2n-1)$ Bedingungsgleichungen können dann zur Bestimmung der $2n-1$ Coëfficienten $p, q, \ldots h, l, m', p', q', \ldots h', l'$ verwendet werden. Wenn man aus diesen Gleichungen nach Elimination der Grös- ...(11) sen $p, q, \ldots h, m', p', q', \ldots h', l'$ die blos die Unbekannte l enthaltende Endgleichung (R) sich gebildet vorstellt, so muss diese Gleichung wenigstens dem s_{2n}ten Grade in Bezug auf l angehören, weil eben diese Gleichung bestimmt ist, ein jedes von den Partialproductenpaaren $P_1, P'_1; P_2, P'_2; \ldots P_{s_{2n}}, P'_{s_{2n}}$ mit einem entsprechenden bestimmten Werthe von l zu versorgen. Dasselbe lässt sich von jeder anderen nach einem anderen unbekannten Coëfficienten geordneten Eliminationsgleichung behaupten.

Setzt man:

$$x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}x^{n-1} + p\,x^{n-2} + \ldots + hx + l = W_n \qquad \ldots(12)$$

$$m'\,x^{n-1} + p'\,x^{n-2} + \ldots + h'\,x + l' = W_{n-1},$$

so erhält man

$$f(x) : A_{2n} = W_n^2 - W_{n-1}^2 = (W_n + W_{n-1})(W_n - W_{n-1}) = P\,P' = 0$$

und hieraus

$$P = W_n + W_{n-1} = 0, \qquad \ldots(13)$$

$$P' = W_n - W_{n-1} = 0, \qquad \ldots(14)$$

zwei Gleichungen, deren jede dem $n$ten Grade angehört, und jede für sich zu n Wurzeln führt. Die so erhaltenen $2n$ Wurzeln gehören sämmtlich der Gleichung (1) an, und bilden ihre vollständige Auflösung.

Wäre man im Besitze aller Paare $P_1 P'_1, P_2 P'_2, \ldots P_{s_{2n}} P'_{s_{2n}}$ von supplementären Partialproducten, so könnte man ohne irgend welche Auflösungen der Gleichungen von der Sorte (13) (14) zu den Wurzeln der Gleichung (1) gelangen, und zwar auf folgende Weise. Man sucht zwischen zwei verschiedenartigen Partialproducten, etwa zwischen P_w und P_u das grösste gemeinschaftliche Mass $m_{w,u}$ und erhält etwa folgende Relationen:

$$P_w = p_w \cdot m_{w,u}\,, \qquad P_u = p_u \cdot m_{w,u}\,. \qquad \ldots(15)$$

Die Gradzahlen von p_w und p_u sind gleich, und stellen sich mit der Gradzahl von m_{wu} entweder gleich oder ungleich. Im ersten Falle ist ihre gemeinschaftliche Gradzahl gleich $\frac{n}{2}$, im zweiten Falle hingegen erhält man etwa v als Differenz dieser Gradzahlen. Das mit der eventuellen Gradzahl $\frac{n}{2} - v$ ausgestattete Polynom mit der Nulle verglichen, liefert möglicherweise eine tiefgradige Gleichung, die wir unmittelbar auflösen können. Auf diese Weise gelangen wir schon in Folge einer solchen Untersuchung in den Besitz von einigen der Gleichung (1) angehörigen Wurzeln. Übrigens müssen sich bei Vornahme von immer anderen und anderen Paaren verschiedenartiger Partialproducte auch solche grösste gemeinschaftliche Masse ergeben, welche je blos einen einzigen Wurzelfactor von (1) repräsentiren.

Aus der hier gepflogenen Besprechung begnügen wir uns, die Überzeugung gewonnen zu haben, dass dieses eben angeführte Verfahren der Zerlegung des Gleichungspolynoms in Partialproducte ganz gewiss zum erwünschten Wurzelsysteme der Gleichung (1) eben so gut führen muss, als dies durch unmittelbare uns vorderhand noch unbekannte unmittelbare allgemeine Auflösung der Gleichung geschehen könnte.

Die allgemeine Gleichung (1), welche mit ihren Coëfficienten keinen Nebenbedingungen unterliegt, und welche keine uns bereits bekannte periodische Auflösung zulässt, werden wir bestrebt sein, dieselbe in erwähnte Partialproducte zu zerlegen, in der Hoffnung, dass vielleicht die mit (R) bezeichnete Hilfsgleichung sich leichter als die gegebene auflösen lässt, und dass in Folge dessen die gegebene Gleichung in zwei neue Gleichungen vom tieferen Grade zerfällt, deren jede als eine vom tieferen Grade sich ebenfalls leichter behandeln lässt, und zur Erhaltung des completen der Gleichung (1) angehörigen Wurzelsystems uns verhilft.

In wie weit wir auf eine so günstige Eventualität zählen können, erfahren wir aus der näheren Würdigung der Werthe, welche die Zahl $s_{2n} = \binom{2n-1}{n-1}$ für fortlaufende Werthe von $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ bietet.

Wir erhalten:

$$s_2 = \binom{1}{0} = 1,\; s_4 = \binom{3}{1} = 3,\; s_6 = \binom{5}{2} = 10,\; s_8 = \binom{7}{3} = 35,\; s_{10} = \binom{9}{4} = 252,\; s_{12} = \binom{11}{5} = 462 \ldots,$$

folglich

$$s_2 < 2,\; s_4 < 4,\; s_6 > 6,\; s_8 > 8,\; s_{10} > 10,\; s_{12} > 12, \ldots \text{etc.} \qquad \ldots(16)$$

Im Angesichte der vorgeführten Vergleichungen können wir nur bei vorgelegten Gleichungen, welche nicht über den vierten Grad reichen, eine Hilfsgleichung (R) erwarten, welche eventuell einen tieferen Grad beurkundet, als die gegebene, und desshalb auch leichter zu behandeln wäre, als die gegebene. Für Gleichungen über den vierten Grad hinaus muss die Hilfsgleichung (R) einen höheren Grad beurkunden, als die gegebene. In Bezug auf den eben erwiesenen höheren Grad von (R) wäre schon anzunehmen, dass sie sich schwieriger behandeln lässt, als die gegebene. In Erwägung jedoch, dass (R) als Eliminationsgleichung mit ihren Coëfficienten manchen Bedingungen unterworfen sein dürfte, und gelegentlich auch solchen Bedingungen, deren Erfüllung die Hilfsgleichung zu einer solchen speciellen Gleichung gestalten, welche periodische uns bisher schon bekannte Auflösungen zulässt, müssen wir diesen Fall einer näheren Discussion unterwerfen.

Ist eine mit allgemeinen, keiner Bedingung unterworfenem Coëfficienten $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ versehene Gleichung wegen $2n > 4$, etwa wegen $2n = 3+q$ $q > 1$ in periodischen Formeln nicht auflösbar, so sind wir bemüssigt, zur Hilfsgleichung (R) unsere Zuflucht zu nehmen, welche einen die Zahl $2n$ um Q Einheiten übertreffenden Grad m beurkundet; dies gibt die Relationen

$$2n = 3+q\,,\quad m = 3+q+Q.$$

Die Coëfficienten $(C_0, C_1, C_2 \ldots C_m)$ der Hilfsgleichung (R) lassen sich im Wege der Elimination durch Coëfficienten $(a_0, a_1, \ldots a_{2n-1})$ der gegebenen Gleichung darstellen, und veranlassen die Bestimmungsgleichungen

$$C_g = \varphi_g(a_0, a_1, \ldots a_{2n-1}),\quad g = 0, 1, 2, 3 \ldots, (m-2), (m-1). \qquad \ldots(17)$$

Wenn man aus diesen m Bestimmungsgleichungen die $2n$ Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ eliminirt, so erhält man zum Resultate blos aus $C_0, C_1, C_2, \ldots C_{2n-1}$ gebaute Gleichungen, etwa in der Form

$$F_g(C_0, C_1, C_2, \ldots C_m) = 0\,,\quad g = 1, 2, 3, \ldots m-2n,$$

also jedenfalls blos $m - 2n = (3+q+Q) - (3+q) = Q$ Bedingungsgleichungen, denen die in (R) spielenden m Coëfficienten unterworfen sein können. Wären diese Bedingungen sogar solche, wie man sie für die eventuelle Möglichkeit einer periodischen Auflösung wünscht, so sind sie jedenfalls nicht in hinlänglicher Anzahl vorhanden, da die Zahl Q kleiner ist, als die Differenz $m - 3 = q + Q$, welche im vorigen Paragraphe als die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen verlangt wurde, wenn überhaupt eine periodische Auflösung als zulässig erkannt werden soll.

Aus der für s_{2n} gebildeten Zahlenreihe ersehen wir $s_4 = 3$; im nächsten Paragraphe werden wir erfahren, dass die zur Gleichung des vierten Grades sich erbietende Hilfsgleichung (R) sich wirklich als eine Gleichung vom dritten Grade, also als eine bereits periodisch aufgelöste Gleichung präsentirt, und in Folge dessen zur completen Auflösung einer allgemeinen Gleichung vom vierten Grade führt. Aber schon für die Gleichung des fünften und sechsten Grades haben wir $s_6 = 10$, und sind versichert, dass die zugehörige Hilfsgleichung (R) wenigstens die Zahl 10 als ihre Gradzahl aufweisen muss, und ganz gewiss weder eine periodische Auflösung zulässt, noch auch auf der nun möglichen Auflösung der Gleichungen des vierten Grades ihre Auflösung basiren kann. Die Auflösung dieser wenigstens zum zehnten Grade gehörigen Gleichung, wie auch der folgenden zu Gleichungen von noch höherem Grade gehörigen Hilfsgleichungen können wir von nirgends her erwarten; es hiesse dies einer Ungereimtheit, einer naturwidrigen analytischen Erscheinung das Wort reden, nach welcher die Analysis die Operationsgeschäfte niederen Ranges zu erledigen hätte, auf Grundlage der ausser allem Zusammenhange vereinzelt stehenden Auflösungen von Gleichungen, welche der Reihe (16) gemäss mit ihren Gradzahlen rascher als in einer mit dem Quotienten 3 versehenen geometrischen Progression voraneilen.

Übrigens belehrt uns der Anblick der Zahlenreihe (16), dass die Gleichungen in zwei gesonderte Partien zerfallen. Die in die erste Partie fallenden Gleichungen haben eine Hilfsgleichung (R), welche in der Gradzahl sich niedriger stellt, und desswegen leichter auflösbar ist, als die ihr zugehörige Gleichung. Die Hilfsgleichung in der zweiten Partie ist immer von höherem Grade, und desswegen schwieriger auflösbar, als die zugehörige Gleichung selbst. Namentlich sind es Gleichungen des vierten Grades, welche die erste Partie abschliessen, und wirklich eine allgemeine Auflösung zulassen.

Wollte man, dieser Thatsache entgegen, auch noch einige oder beliebig viele über den vierten Grad reichende Gleichungen als allgemein auflösbar ansehen, so hiesse dies der hier allgemein für alle Grade auf gleiche Weise angelegten Analyse den logischen Widerspruch zumuthen, dass sie in einer und derselben Partie der allgemein auflösbaren Gleichungen nur einige wenige in Schutz nimmt, und durch die Hilfsgleichung ihre Auflösung erleichtert, dagegen die übrigen ebenfalls in die Kategorie der auflösbaren Fälle gehörenden Gleichungen durch die Hilfsgleichung geradezu erschwert.

Im Angesichte dieser aus der Zahlenreihe (16) sich natürlich ergebenden Grenzmarke schliessen wir, dass im algebraischen Sinne die über den vierten Grad hinausreichenden Gleichungen keine allgemeine Auflösung besitzen.

§. 3.

Anwendung der analytischen Methode auf die Auflösung von Gleichungen.

In Bezug auf die Gleichung vom zweiten Grade

$$x^2 + 2ax + b = 0 \qquad \ldots(1)$$

haben wir $n = 1$, $s_2 = 1$ und dann nach (12)

$$x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 - m'^2 = (x+a+m')(x+a-m') = x^2 + 2ax + (a^2 - m'^2) = 0.$$

Hieraus haben wir zur Bestimmung von m' folgende Gleichung:

$$a^2 - m'^2 = b, \quad m' = \sqrt{a^2 - b}. \qquad \ldots(2)$$

Zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung (1) dienen dann die Gleichungen vom ersten Grade:

$$x + a + m' = x + a + \sqrt{a^2 - b} = 0,$$

$$x + a - m' = x + a - \sqrt{a^2 - b} = 0,$$

daher

$$x_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}, \quad x_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \ldots(3)$$

oder zusammengefasst zu der sogenannten allgemeinen Auflösung der Gleichung (1)

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}\,. \qquad \ldots(4)$$

Hier ist die Auflösung der Gleichung zweiten Grades durch Vermittlung der einfacheren zur Bestimmung von m' dienenden Hilfsgleichung (2) erfolgt.

Bei einer Gleichung des vierten Grades

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d=0, \qquad \ldots(5)$$

haben wir

$$n=2, \quad s_4=\binom{2n-1}{n-1}=\binom{3}{1}=3,$$

und dann nach (12)

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d=(x^2+ax+p)^2-(m'x+p')^2=0. \qquad \ldots(6)$$

Aus der Vergleichung der beiderseitig zu gleichnamigen Potenzen von x gehörigen Coëfficienten erhalten wir zur Bestimmung von p, m', p' folgende Relationen:

$$2p+a^2-m'^2=b, \; ap-m'p'=c, \; p^2-p'^2=d. \qquad \ldots(7)$$

Hieraus haben wir

$$m'^2=2p^2+a^2-b, \; p'^2=p^2-d, \; m'p'=ap-c, \; m'=\frac{ap-c}{\sqrt{p^2-d}}, \qquad \ldots(8)$$

$$m'^2p'^2=(2p^2+a^2-b)(p^2-d)=(ap-c)^2$$

und schliesslich geradezu der Relation $s_4=3$ entsprechend die zur Bestimmung p dienende Gleichung:

$$2p^3-bp^2+2(ac-d)p+[d(b-a^2)-c^2]=0. \qquad \ldots(9)$$

Diese zur Auflösung der Gleichung vierten Grades dienende Hilfsgleichung (R) ist dem dritten Grad angehörig und liefert nach einer der periodischen Formeln die Wurzeln p_1, p_2, p_3. Auf Grund einer dieser drei Wurzeln etwa auf Grund von p_1 finden wir nach (8)

$$m'_1=\frac{ap_1-c}{\sqrt{p_1^2-d}}, \; p'_1=\sqrt{p_1^2-d}. \qquad \ldots(10)$$

Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung ergeben sich aus nun bekannten Partialgleichungen

$$P=x^2+(a+m'_1)x+(p_1+p'_1)=0, \qquad \ldots(11)$$
$$P'=x^2+(a-m'_1)x+(p_1-p'_1)=0,$$

im Folgenden:

$$\begin{aligned}
2x_1&=-(a+m'_1)+\sqrt{(a+m'_1)^2-4(p_1+p'_1)},\\
2x_2&=-(a+m'_1)-\sqrt{(a+m'_1)^2-4(p_1+p'_2)},\\
2x_3&=-(a-m'_1)-\sqrt{(a-m'_1)^2-4(p_1-p'_1)},\\
2x_4&=-(a-m'_1)+\sqrt{(a-m'_1)^2-4(p_1-p'_1)},
\end{aligned} \qquad \ldots(12)$$

oder alle diese Werthe in die sogenannte allgemeine Auflösung zusammengezogen:

$$2x=-\left(a+\frac{ap_1-c}{\sqrt{p_1^2-d}}\right)+\sqrt{\left(a+\frac{ap_1-c}{\sqrt{p_1^2-d}}\right)^2-4(p_1+\sqrt{p_1^2-d})}. \qquad \ldots(13)$$

Aus der letzten sogenannten allgemeinen Auflösung der Gleichungen vierten Grades erhält man alle vier Wurzeln, sobald man die darin vorkommenden zwei Gattungen von Quadratwurzeln auf alle möglichen Weisen mit den Vorzeichen $+$ und $-$ behaftet.

Für $d=0$ erhält man $p=p'$ und demgemäss aus (12) $x_4=0$, wie es sein soll, weil in diesem Falle nur die Wurzeln x_1, x_2, x_3 der diesfälligen Gleichung dritten Grades

$$x^3+2ax^2+bx+2c=0 \qquad \ldots(14)$$

angehören.

Als Hilfsgleichung (R) für die Gleichung (14) erhält man aus (9)

$$2p^3+bp^2+2acp-c^2=0\dots(R), \qquad \dots(15)$$

welche für $p=-\frac{c}{x}$ in die Gleichung (14) übergeht, und besagt, dass $-\frac{c}{x'}$ eine Wurzel der Hilfsgleichung (15) sein wird, sobald die cubische Gleichung (14) den Werth x' zur Wurzel hat.

Für $d=0$ und $p_1=-\frac{c}{x'}$ erhält man

$$m'_1=\frac{ap_1-c}{\sqrt{p_1^2-d}}=-(a+x')\sqrt{1},\; p'_1=\sqrt{p_1^2-d}=\sqrt{\frac{c^2}{x'^2}}=\frac{c}{x'}\sqrt{1}$$

und demgemäss aus (13)

$$2x=-(a-(a+x')\sqrt{1})+\sqrt{(a-(a+x')\sqrt{1})^2-\frac{4c}{x'}(-1+\sqrt{1})} \qquad \dots(16)$$

woraus durch Specialisirung der darin vorkommenden zwei Wurzelzeichen in Bezug auf die möglichen positiven und negativen Vorzeichen vier Werthe hervorgehen, von denen einer verschwindet; die drei von Null verschiedenen Werthe stellen die Wurzeln der Gleichung (14) vor. Daraus geht hervor, dass man bei einer cubischen Gleichung nach (16) je zwei Wurzeln als Functionen der dritten darstellen kann.

Nachdem wir die Auflösung der Gleichung bis zum vierten Grade einschliessig erschöpfend behandelt haben, müssen wir der Auseinandersetzung im vorigen Paragraphe gemäss von dem Austreben der allgemeinen Auflösung von Gleichungen weiterer Grade abstehen, wollen aber die hier eingeleitete Analyse befragen, ob sich nicht irgend welche speciellen Gleichungstypen ausfindig machen lassen, welche zur Auflösung gebracht werden können.

Offenbar können es nur solche Fälle sein, wo, unbekümmert um die diesfällig schwer zu bewältigende Hilfsgleichung (R), schon die ursprünglich angelegten Bedingungsgleichungen von der Art wie in (7) in Folge gewisser specieller Gleichungscoëfficienten fähig sind, uns unmittelbar zu den Werthen von $p, q, h, \dots l, m', p', q', h', \dots l'$ zu verhelfen, und auf diese Weise uns gewisse Erleichterungen in Beziehung auf die Auflösung der Gleichung selbst zu bieten. Im Nächsten wollen wir uns namentlich mit solchen Gleichungen befassen, deren Coëfficienten es zulassen, dass eine oder einige von den unbekannten Grössen $p, q, h, \dots l, m', p', q', h', \dots l'$ den Nullwerth erhalten.

Schon mit den Bedingungen (7) beginnend, suchen wir nach derjenigen Gleichungsform, welche den Werth $p=0$ zulässt.

Aus diesen Bedingungen

$$2p+a^2-m'^2=b,\; ap-m'p'=c,\; p^2-p'^2=d \qquad \dots(17)$$

folgt für $\;=0$

$$p'^2=-d,\; m'^2=a^2-b,\; m'^2p'^2=c^2,$$

daher auch

$$d(a^2-b)+c^2=0,\; b=\frac{c^2}{d}+a^2, \qquad \dots(18)$$

eine durch die Gleichungscoëfficienten a, b, c, d zu erfüllende Bedingung, wenn die Gleichung den Werth $p=0$ zulassen soll. Die dem angeführten Werthe von b entsprechende Gleichungsform ist:

(I) $$x^4+2ax^3+\left(a^2+\frac{c^2}{d}\right)x^2+2cx+d=0, \qquad \dots(19)$$

für welche wir aus (17)

$$p=0,\; p'=i\sqrt{d},\; m'=\frac{ci}{d}$$

k*

erhalten. Ihre Wurzeln ergeben sich unmittelbar aus (12)

$$2x_{1,2} = -\left(a+\frac{ci}{a}\right) \pm \sqrt{\left(a+\frac{ci}{a}\right)^2 - 4i\sqrt{d}}$$

$$2x_{3,4} = -\left(a-\frac{ci}{a}\right) \pm \sqrt{\left(a-\frac{ci}{a}\right)^2 - 4i\sqrt{d}}. \qquad \text{...(20)}$$

Für $p'=0$ erhält man nach (17)

$$p = \sqrt{d} = \frac{c}{a},\ m' = \sqrt{2\sqrt{d}+a^2-b} = \sqrt{a^2-b+\frac{c}{a}},\ d = \frac{c^2}{a^2},$$

und demgemäss die zugehörige Gleichungsform

(II) $$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}=0$$

mit den Wurzeln:

$$2x_{1,2} = -\left(a+\sqrt{a^2-b+\frac{c}{a}}\right) \pm \sqrt{\left(a+\sqrt{a^2-b+\frac{c}{a}}\right)^2 - 4\frac{c}{a}},$$

$$2x_{3,4} = -\left(a-\sqrt{a^2-b+\frac{c}{a}}\right) \pm \sqrt{\left(a-\sqrt{a^2-b+\frac{c}{a}}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}. \qquad \text{...(21)}$$

Für $m'=0$ haben wir aus (17)

$$p = \frac{c}{a} = \frac{b-a^2}{2},\ p'^2 = \frac{c^2}{a^2}-d,\ c = \frac{a}{2}(b-a^2),$$

und hieraus die Form

(III) $$x^4+2ax^3+bx^2+a(b-a^2)x+d=0$$

mit den Wurzeln:

$$2x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-4\left[\frac{1}{2}(b-a^2)-\sqrt{\frac{1}{4}(b-a^2)^2-d}\right]},$$

$$2x_{3,4} = -a \pm \sqrt{a^2-4\left[\frac{1}{2}(b-a^2)+\sqrt{\frac{1}{4}(b-a^2)^2-d}\right]}. \qquad \text{...(22)}$$

Ist

$$y^4+2a'y^3+b'y^2+2c'y+d'=0 \qquad \text{...(23)}$$

die reciproke Gleichung der Gleichung (8), so ist offenbar

$$a' = \frac{c}{d},\ b' = \frac{b}{d},\ c' = \frac{a}{d},\ d' = \frac{1}{d}. \qquad \text{...(24)}$$

Als Coëfficientenbedingungen für diese Gleichung erhält man durch Nachbildung der Bedingungen bei (I) (II) und (III) folgende:

$$b' = \frac{c'^2}{d'^2}+a'^2,\ d' = \frac{c'^2}{a'^2},\ c' = \frac{a'}{2}(b'-a'^2), \qquad \text{...(25)}$$

und durch Einführung der Werthe aus (24) erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen

$$b = \frac{c^2}{d^2}+a^2,\ d = \frac{c^2}{a^2},\ b = 2\left(\frac{ad}{c}+\frac{c^2}{2d}\right). \qquad \text{...(26)}$$

Von diesen Bedingungen ist nur die dritte von denen in (I), (II), (III) verschieden und veranlasst folgende neue specielle Gleichungsform:

(IV) $$x^4+2ax^3+2\left(\frac{ad}{c}+\frac{c^2}{2d}\right)x^2+2cx+d=0. \qquad \text{...(27)}$$

Wegen

$$c' = \frac{a'}{2}(b'-a'^2)$$

wird die Auflösung der Gleichung (23), nach den Formen in (22) gebildet, auf folgende Weise sich stellen:

$$2y_{1,2} = -a' \pm \sqrt{a'^2 - 4\left[\frac{1}{2}(b'-a'^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(b'-a'^2)^2 - d}\right.},$$

$$2y_{3,4} = -a' \pm \sqrt{a'^2 - 4\left[\frac{1}{2}(b'-a'^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(b'-a'^2)^2 - d}\right.}.$$

Führt man hier die Substitutionen

$$y = \frac{1}{x},\; a' = \frac{c}{d},\; b' = \frac{b}{d},\; c' = \frac{a}{d},\; d' = \frac{1}{d}$$

durch, so erhält man für die specielle Gleichungsform (IV) folgende Auflösung:

ad (IV)

$$\frac{2}{x_{1,2}} = -\frac{c}{d} \pm \sqrt{\frac{c^2}{d^2} - 4\left(\frac{a}{c} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - \frac{1}{d}}\right)},$$
$$\frac{2}{x_{3,4}} = -\frac{c}{d} \pm \sqrt{\frac{c^2}{d^2} - 4\left(\frac{a}{c} - \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - \frac{1}{d}}\right)}. \quad \ldots(28)$$

Die Eruirung der typischen Gleichungsformen, welche mit ihren Coëfficienten m', p', p, etwa ein paarweises Verschwinden zulassen, und in Folge dessen eine unmittelbare Auflösung besitzen, überlassen wir dem Leser, und schreiten zur ähnlichen Discussion der Gleichung vom 6ten Grade

$$f(x) = x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + dx^2 + 2ex + f = 0. \quad \ldots(29)$$

Hier ist

$$n = 3,\; s_6 = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{5}{2} = 10,$$

und

$$f(x) = [x^3 + ax^2 + px + q]^2 - [m'x^2 + p'x + q']^2 = 0. \quad \ldots(30)$$

Aus der Vergleichung der Coëfficienten bei gleichnamigen Potenzen von x in (29) und (30) erhalten wir:

$$\begin{aligned} b &= a^2 - m'^2 + 2p, \\ c &= q + ap - m'p', \\ d &= p^2 + 2aq - p'^2 - 2m'q', \\ e &= pq - p'q', \\ f &= q^2 - q'^2. \end{aligned} \quad \ldots(31)$$

1. Sollen die Gleichungscoëfficienten $m' = 0$ zulassen, so müssten durch die übrigen vier Grössen p, q, p', q' die fünf Gleichungen erfüllt werden; aus denselben erhält man für $m' = 0$

$$p = \frac{1}{2}(b-a^2),\; q = c - \frac{a}{2}(b-a^2),$$

$$p'^2 = \frac{1}{4}(b-a^2)^2 + 2ac - a^2(b-a^2) - d,$$

$$q'^2 = \left[c - \frac{a}{2}(b-a^2)\right]^2 - f, \quad \ldots(32)$$

$$p'^2q'^2 = \left[\frac{1}{2}(b-a^2)\left[c - \frac{a}{2}(b-a^2)\right] - e\right]^2 = \left\{\left[c - \frac{a}{2}(b-a^2)\right]^2 - f\right\}\left\{\frac{1}{4}(b-a^2)^2 + 2ac - a^2(b-a^2) - d\right\},$$

und hieraus die verlangte Coëfficienten-Bedingungsgleichung:

$$f = \frac{[(b-a^2)^2+8ac-4a^2b+4a^4-4d][2c-ab+a^3]^2-[(b-a^2)(2c-ab+a^2)-4e]^2}{4[(b-a)^2+8ac-4a^2b+4a^4-4d]} = (f), \quad \text{...(33)}$$

und auf Grundlage dieser Bedingungsgleichung die specielle Gleichungsform des sechsten Grades

$$\text{(I)} \qquad x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+dx^2+2ex+(f)=0, \quad \text{...(34)}$$

welche mit Hilfe der in (32) ersichtlichen Werthe von p, q, p', q' in folgende zwei Gleichungen des dritten Grades zerfällt:

$$\begin{aligned} &x^3+(a+m')x^2+(p+p')x+(q+q')=0 \\ &x^3+(a-m')x^2+(p-p')x+(q-q')=0, \end{aligned} \quad \text{...(35)}$$

aus welchen unmittelbar die specielle Gleichung (I) ihre sechs Wurzeln bezieht.

2. Um im Falle $p=0$ die Coëfficienten-Bedingungsgleichung zu finden, haben wir aus (31)

$$\begin{aligned} &m'^2 = a^2-b\,,\quad q'^2 = q^2-f \\ &p'^2 = 2aq-2\sqrt{(a^2-b)(q^2-f)}-d\,,\quad q' = \frac{q-c}{\sqrt{a^2-b}}, \\ &q'^2p'^2 = e^2 = \frac{(q^2-f)(q-c)^2}{a^2-b}, \\ &p'^2 = 2aq-d-2\sqrt{(a^2-b)(q^2-f)} = \frac{(q-c)^2}{a^2-b}. \end{aligned} \quad \text{...(36)}$$

Ordnet man die letzten zwei Gleichungen nach den Potenzen von q, so erhält man:

$$\begin{aligned} &q^4-2cq^3+(c^2-f)q^2+2cfq+[be^2-e^2a^2-c^2f]=0 \\ &q^4+Q_3q^3+Q_2q^2+Q_1q+Q_0=0 \end{aligned} \quad \text{...(37)}$$

mit den Bestimmungen

$$\begin{aligned} Q_3 &= -4(a^3-ab+c), \\ Q_2 &= 4(a^3-ab+c)^2-2(db-c^2-da^2)-4(a^2-b), \\ Q_1 &= 4(a^3-ab+c)(db-c^2-da^2), \\ Q_0 &= (db-c^2-da^2)^2+4f(a^2-b). \end{aligned} \quad \text{...(38)}$$

Der Fall $p=0$ verlangt vor Allem solche Gleichungscoëfficienten, dass die zwei Gleichungen in (37) in Bezug auf die Unbekannte q wenigstens eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Bezeichnen wir mit $[q]$ die eventuell mögliche gemeinschaftliche Wurzel, so können wir auf Grundlage ihres Werthes auch noch die Werthe von m', p', q' berechnen, und diese Werthe in die cubischen Gleichungen (35) einführen. Die sechs aus diesen cubischen Gleichungen gezogenen x-Werthe stellen dann das vollständige Wurzelsystem derjenigen speciellen Gleichung vor, welche mit ihren Coëfficienten die Existenz von $[q]$ verbürgen.

Ist

$$\varphi(a, b, c, d, e, f) = \varphi = 0 \quad \text{...(39)}$$

diejenige Gleichung, welche aus (37) durch Elimination von q hervorgeht und λ eine beliebige Grösse, so erhält man die zur Annahme $p=0$ gehörige typische Gleichung in folgender Form:

$$\text{(II)} \qquad x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+dx^2+2ex+f+\lambda\varphi=0,$$

wo λ als eine willkürliche Grösse aufgefasst wird.

3. Für $q = 0$ ist

$$\left.\begin{aligned} q'^2 &= -f, \quad p' = \frac{-c}{i\sqrt{f}} \\ p^2 &= d - \frac{e^2}{f} + 2m' i \sqrt{f} \\ p^2 &= \left(c - \frac{m' e}{c\sqrt{f}}\right)^2 \frac{1}{a^2} \\ p^2 & \frac{1}{4}\left(b - a^2 - m'^2\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(40)$$

und hieraus zur Bestimmung von m' folgendes Paar von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} & am'^2 + \frac{2e}{i\sqrt{f}} m' + (ab - a^2 - c) = 0 \\ & \frac{e^2}{f} m'^2 + 2\left(a i \sqrt{f} + \frac{c e}{\sqrt{f}}\right) m' + \left(da^2 - \frac{de^2}{f} - c^2\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(41)$$

Der Fall $q = 0$ kann nur durch solche Gleichungscoëfficienten hervorgebracht werden, welche es möglich machen, dass durch einen Werth $m' = [m']$ die Gleichungen (41) gleichzeitig erfüllt werden. Ist dies der Fall, so suche man zu dem Werthe $m' = [m']$ nach (40) die Werthe von p', q' und p, und substituire die so erhaltenen Werthe in (35), um sofort zwei bestimmte cubische Gleichungen zu erhalten, aus welchen die erhaltenen sechs Wurzelwerthe derjenigen Gleichung des 6. Grades angehören, welche mit ihren Coëfficienten den Werth $[m']$ als gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (41) veranlasst.

Ist

$$\psi(a, b, c, d, e, f) = \psi = 0 \qquad \ldots(42)$$

die Elliminationsgleichung aus (41), so gehört zur Bedingung $q = 0$ die in obiger Weise auflösbare specielle Gleichungsform

(III) $$x^6 + 2ax^5 + bx^4 + 2cx^3 + dx^2 + 2ex + f + \lambda\psi = 0, \qquad \ldots(43)$$

in welcher λ als eine willkürliche Grösse gedacht wird, welche aus der Gleichung bei Erfüllung der Coëfficientenrelation $\psi = 0$ wegbleibt.

4. Im Falle $p' = 0$ haben wir

$$\left.\begin{aligned} & p = \frac{e}{q}, \quad q' = q^2 - f, \quad m' = \frac{\frac{e^2}{q^2} + 2aq - d}{2\sqrt{q^2 - f}} \\ & p = \frac{c - q}{a}, \quad m'^2 = a^2 - b + \frac{2e}{q}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(44)$$

Hieraus

$$p = \frac{e}{q} = \frac{c - q}{a}, \quad m'^2 = a^2 - q + \frac{2e}{q} = \frac{\left[\frac{e^2}{q^2} + 2aq - d\right]}{4(q^2 - f)},$$

und zur Bestimmung von q folgendes Gleichungspaar:

$$\left.\begin{aligned} & q^2 - cq + ae = 0 \\ & 4(q^2 - f)\left(a^2 - b + \frac{2e}{q}\right) - \left[\frac{e^2}{q^2} + 2aq - d\right]^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(45)$$

Ist

$$\chi(a, b, c, d, e, f) = \chi = 0$$

die aus (45) gewonnene Eliminationsgleichung, so wird die für willkürliche λ bestehende Gleichungsform

$$\text{(IV)} \qquad x^6+2a^5x+bx^4+2cx^3+dx^2+2ex+f+\lambda\chi=0 \qquad \ldots(46)$$

eine gemeinschaftliche Wurzel $[q]$ in (45) herbeiführen, und wie üblich, mit Hilfe (45) aus den cubischen Gleichungen in (35) ihre Wurzeln beziehen.

5. Im Falle $q'=0$ hat man

$$q^2=f,\ \ p=\frac{e}{\sqrt{f}},\ \ m'^2=a^2+\frac{2e}{\sqrt{f}}-b$$

$$p'^2=\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d,\ \ m'=\left[\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}-c\right]:\sqrt{\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d}, \qquad \ldots(47)$$

daher

$$m'^2=a^2+\frac{2e}{\sqrt{f}}-b=\frac{\left[\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}-c\right]^2}{\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d},$$

woraus $\qquad \ldots(48)$

$$b=a^2+\frac{2e}{\sqrt{f}}-\frac{\left[\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}-c\right]^2}{\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}-d}=[b].$$

Wir erhalten somit die specielle Gleichungsform

$$\text{(V)} \qquad x^6+2ax^5+[b]x^4+2cx^3+dx^2+2ex+f=0, \qquad \ldots(49)$$

welche bei der Deutung von $[b]$ nach (48), aus (47) die Werthe von p, q, m', p' entnehmend für $q'=0$ in zwei bestimmte cubische Partialgleichungen (35) zerfällt, und aus denselben ihre sechs Wurzeln bezieht.

Die aus den Elementen p, q, m', p', q' gebildeten

zehn Zweiungen: $pq,\ pm',\ pp',\ pq',\ qm',\ qp',\ qq'\ m'p',\ m'q',\ p'q'$;

" Dreiungen: $\begin{cases} pqm',\ pqp',\ pqq',\ pm'p',\ pm'q',\ pp'q' \\ qm'p',\ qm'q',\ qp'q',\ m'p'q'; \end{cases}$

fünf Vierungen: $pqm'p',\ pqm'q',\ pqp'q',\ qm'p'q'$

bieten eben so viele specielle Fälle, zu welchen man die entsprechenden, nach (35) auflösbaren Gleichungsformen zu suchen hätte. Jede der so gefundenen speciellen Gleichungsformen hätte dann die Obliegenheit, mit ihren Coëfficienten in den Relationen (31) das gleichzeitige Verschwinden jener Elemente zu veranlassen, welche in der ihr entsprechenden, in (50) angeführten Gruppe enthalten sind. Im Folgenden wollen wir blos die zehn Zweiungen dazu benützen, um die entsprechenden zehn speciellen Gleichungsformen aufzustellen.

6. Für $p=q=0$

$$\begin{cases} m'^2=b,\ \ p'=\dfrac{-c}{\sqrt{a^2-b}},\ \ q'=\dfrac{e\sqrt{a^2-b}}{e}=i\sqrt{f}, \\ p'^2=-d-2i\sqrt{f(a^2-b)},\quad \text{und hieraus} \\ c=-ei\sqrt{\dfrac{a^2-b}{f}},\ \ d=\dfrac{e^2}{f}-2i\sqrt{f(a^2-b)} \end{cases}$$

und schliesslich die entsprechende Gleichungsform:

$$\text{(VI)} \qquad x^6+2ax^5+bx^4-2ei\sqrt{\frac{a^2-b}{f}}\,x^3+\left(\frac{e^2}{f}-2i\sqrt{f(a^2-b)}\right)x^2-2ex+f=0. \qquad \ldots(52)$$

7. Für $p=m=0$

$$\begin{cases} b=a^2,\ q=c,\ p'^2=2ac-d,\ q'^2=c^2-f \\ p'=\dfrac{-c}{\sqrt{c^2-f}},\ \text{und hieraus} \\ c=a^2,\ f=c^2-\dfrac{e^2}{(2ac-d)^2} \end{cases} \qquad \ldots(53)$$

und schliesslich die entsprechende Gleichungsform:

(VII) $$x^2+2ax^5+a^2x^4+2cx^3+dx^2+2ex+\left[c^2-\frac{e^2}{(2ac-d)^2}\right]=0.$$

8. $p=p'=0$

$$\begin{cases} e=0,\ q=c,\ q'^2=c^2-f \\ m'^2=a^2-b,\ q'=[2ac-d]:2\sqrt{a^2-b},\ \text{daher} \\ f=c^2-\dfrac{(2ac-d)^2}{4(a^2-b)}, \end{cases} \qquad \ldots(54)$$

und die entsprechende Gleichungsform:

(VIII) $$x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+dx\left[c^2-\frac{(2ac-d)^2}{4(a^2-b)}\right]=0.$$

9. $p=q'=0$

$$\begin{cases} m'^2=a^2-b,\ q^2=f,\ e=0 \\ c=\sqrt{f}-p'\sqrt{a^2-b},\ d=2a\sqrt{f}-p'^2,\ \text{daher} \\ h^2=2a\sqrt{f}-d=(\sqrt{f}-c)^2:a^2-b),\ \text{hiemit} \\ e=0,\ d=2a\sqrt{f}+\dfrac{(\sqrt{f}-c)^2}{a^2-b}, \end{cases} \qquad \ldots(55)$$

und schliesslich die Gleichungsform:

(IX) $$x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+\left[2a\sqrt{f}-\frac{(\sqrt{f}-c)^2}{a^2-b}\right]x^2+f=0.$$

10. $q=m'=0$

$$\begin{cases} p=\dfrac{b-a^2}{2}=\dfrac{c}{a},\ p'^2=\dfrac{(b-a^2)^2}{4}-d,\ q'^2=-f \\ p'=\dfrac{-e}{i\sqrt{f}}=\dfrac{ie}{\sqrt{f}},\ \text{daher} \\ c=\dfrac{ab-a^3}{2},\ d=\dfrac{(b-a^2)^2}{4}+\dfrac{e^2}{f}, \end{cases} \qquad \ldots(56)$$

und die zugehörige Gleichungsform:

(X) $$x^6+2ax^5+bx^4+(ab-a^3)x^3+\left[\frac{(b-a^2)^2}{4}+\frac{c^2}{f}\right]x^2+2ex+f=0.$$

11. $q=p'=0$

$$\begin{cases} q'^2=-f,\ e=0,\ p=\dfrac{c}{a}, \\ m'^2=a^2-b+\dfrac{2c}{a}, \\ d=\dfrac{c^2}{a^2}-2\sqrt{a^2-b+\dfrac{2c}{a}}\times i\sqrt{f}, \end{cases} \qquad \ldots(57)$$

und die Gleichungsform:

(XI) $$x^6+2ax^5+bx^4+2cx^3+\left[\frac{c^2}{a^2}-2i\sqrt{f\left(a^2-b+\frac{2c}{a}\right)}\right]x^2+f=0.$$

12. $q=q'=0$ gibt $e=f=0$, und somit eine Gleichungsform, welche als Gleichung des 4ten Grades behandelt werden kann. ...(58)

13. $m'=p'=0$
$$\begin{cases} p=\dfrac{b-a^2}{2},\ q=\dfrac{2e}{b-a^2},\ q'=\sqrt{\dfrac{4e^2}{(b-a^2)^2}-f} \\ c=\dfrac{4e+a(b-a^2)^2}{2(b-a^2)},\ d=\dfrac{(b-a^2)^3+16ae}{4(b-a^2)}, \end{cases} \qquad ...(59)$$

und die Gleichungsform:

$$\text{(XII)} \qquad x^6+2ax^5+bx^4+\left[\frac{4e+a(b-a^2)^2}{b-a^2}\right]x^3+\left[\frac{(b-a^2)^3+16ae}{4(b-a^2)}\right]x^2+2ex+f=0.$$

14. $m'=q'=0$
$$\begin{cases} p=\dfrac{b-a^2}{2},\ q=\sqrt{f}, \\ p'^2=\dfrac{(b-a^2)^2}{4}+2\sqrt{f}-d, \\ c=\sqrt{f}+\dfrac{ab-a^3}{2};\ e=\dfrac{b-a^2}{2}\sqrt{f}, \end{cases} \qquad ...(60)$$

und die Gleichungsform:

$$\text{(XIII)} \qquad x^6+2ax^5+bx^4+(2\sqrt{f}+ab-a^3)x^3+dx^2+(b-a^2)\sqrt{f}x+f=0.$$

Endlich

15. $p'=q'=0$
$$\begin{cases} q=\sqrt{f},\ p=\dfrac{e}{\sqrt{f}},\ m'^2=a^2-b+\dfrac{2e}{\sqrt{f}}, \\ d=\dfrac{e^2}{f}+2a\sqrt{f},\ c=\sqrt{f}+\dfrac{ae}{\sqrt{f}} \end{cases} \qquad ...(61)$$

und die Gleichungsform:

$$\text{(XIV)} \qquad x^6+2ax^5+bx^4+2\left(\sqrt{f}+\frac{ae}{\sqrt{f}}\right)x^3+\left(\frac{e^2}{f}+2a\sqrt{f}\right)x^2+2ex+f=0.$$

Um einen von den Fällen der Dreiungen hier noch anzuführen, sei etwa

$$p=q=m=0,$$

dann ist

$$c=0,\ b=a^2,\ f=\frac{e^2}{d},\ p'=i\sqrt{d},\ q'=\frac{ie}{\sqrt{d}} \qquad ...(62)$$

und die Gleichungsform:

$$\text{(XV)} \qquad x^6+2ax^5+a^2x^4+dx^2+2ex+\frac{e^2}{d}=0.$$

Die übrigen noch ausstehenden 14 Fälle, sowie auch diejenigen, welche die zur Gleichung (29) gehörige Reciproke bieten dürfte, übergehen wir ihrer einfachen Behandlung wegen, und begnügen uns, im Vorhergehenden den Weg gewiesen zu haben, wie man solche bei Gelegenheit von praktischen Anforderungen aufzusuchen und zur Auflösung zu bringen hat.

In Bezug auf Gleichungen vom achten Grade

$$f(x)=x^8+2ax^7+bx^6+2cx^5+dx^4+2ex^3+fx^2+2gx+h=0 \qquad ...(63)$$

haben wir

$$n=4,\ s_8=\binom{2n-1}{n-1}=\binom{7}{3}=35,$$

$$f(x)=[x^4+ax^3+px^2+qx+k]^2-[a'x^3+p'x^2+q'x+k']^2=0. \qquad ...(64)$$

Aus der Vergleichung der zu gleichnamigen Potenzen von x gehörigen Coëfficienten erhalten wir:

$$\begin{aligned} b &= 2p+a'-a'^2, & f &= 2pk+q^2-2p'k'-q'^2, \\ c &= q+ap-a'p', & g &= qk-q'k', \\ d &= 2k+2aq+p^2-2a'q'-p'^2, & h &= k^2-k'^2, \\ e &= ak+pq-a'k'-p'q', & & \end{aligned} \qquad \ldots(65)$$

nebst den zur Aufsuchung der Wurzeln dienenden Gleichungen des vierten Grades:

$$\begin{aligned} &x^4+(a+a')x^3+(p+p')x^2+(q+q')x+(k+k')=0, \\ &x^4+(a-a')x^3+(p-p')x^2+(q-q')x+(k-k')=0. \end{aligned} \qquad \ldots(66)$$

Bei der Annahme des Verschwindens eines einzigen von den Elementen p, q, k, a', p', q', k' gestatten die Bedingungen (65) keine so leichte und unmittelbare Auflösung; wir werden daher hier blos einige auf das Verschwinden von zwei oder drei der erwähnten Elemente sich gründende Gleichungsformen vorführen.

Bei der Annahme $p=q=0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} &a'^2 = a^2-b, \quad p' = \frac{-c}{\sqrt{a^2-b}}, \quad q'k' = -g, \\ &ak - \sqrt{a^2-b}\,k' + \frac{cq'}{\sqrt{a^2-b}} = e, \\ &2k - 2q'\sqrt{a^2-b} - \frac{c^2}{a^2-b} = d. \end{aligned} \qquad \ldots(67)$$

Aus den zwei letzten Gleichungen k eliminirend erhalten wir:

$$q'\left[\frac{2c}{\sqrt{a^2-b}} + 2a\sqrt{a^2-b}\right] - 2k'\sqrt{a^2-b} = 2e - a\left(d+\frac{c^2}{a^2-b}\right) = 0. \qquad \ldots(68)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit k' und setzt dann an die Stelle des Productes $q'k'$ seinen Werth $-g$, so gelangt man zur folgenden Gleichung:

$$2\sqrt{a^2-b}\,k'^2 + \left[2e - a\left(d+\frac{c^2}{a^2-b}\right)\right]k' + 2g\left(\frac{c}{\sqrt{a^2-b}} + a\sqrt{a^2-b}\right) = 0. \qquad \ldots(69)$$

Auf Grund eines aus dieser Gleichung (69) gewonnenen Werthes von k' erhält man aus der ersten Zeile in (67) unmittelbar die Werthe von q', p', a' und dann aus einer der folgenden Relationen in (67) den Werth von k. Werden nun durch das gewonnene Werthsystem die sämmtlichen Relationen in (67) und (68) erfüllt, so wird eine solche Coëfficienten besitzende Gleichung eine speciell allgemein auflösbare Gleichungsform sein, welche ihre acht Wurzeln aus den Gleichungen (66) bezieht, sobald man in derselben an die Stelle von p, q, k, a', p', q', k' die aus den Relationen in (67) und (68) ernirten Werthe hineinsetzt.

Drückt man mittelst der Gleichungen (69), (68) und der letzten in (67) die Grössen k', q', k durch die Coëfficienten a, b, c, d, e, g aus, so lassen sich schliesslich auch die Coëfficienten f und h durch a, b, c, d, e, g ausdrücken, und etwa in folgender Weise bestimmen:

$$\begin{aligned} f &= \varphi(a, b, c, d, e, g) = \varphi, \\ h &= \psi(a, b, c, d, e, g) = \psi, \end{aligned} \qquad \ldots(70)$$

und die Gleichung

(I) $$x^8+2ax^7+bx^6+2cx^5+dx^4+2ex^3+\varphi x^2+2gx+\psi = 0, \qquad \ldots(71)$$

ist eben die verlangte specielle allgemein auflösbare Gleichungsform.

Bei der Annahme

$$p=k=q'=0$$

hat man nach (65)

$$\begin{aligned} a'^2&=a^2-b,\ g=0,\\ k'^2&=-h,\ e=\sqrt{h(b-a^2)},\\ c&=q-p\sqrt{a^2-b},\ d=2ag-p'^2,\\ f&=q^2-2i\sqrt{h}.p', \end{aligned} \qquad \text{...(72)}$$

hieraus zur Bestimmung von p' und q folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} p'^2-2ap'\sqrt{a^2-b}+(d^2-2ac)&=0,\\ q&=c+p'\sqrt{a^2-b}. \end{aligned} \qquad \text{...(73)}$$

Auf Grund der hier erhaltenen Werthe von p' und p erhält man aus der letzten Gleichung in (72) den Werth von f etwa in folgender Form:

$$f=\varphi(a,\,b,\,c,\,d)=\varphi, \qquad \text{...(74)}$$

und in Folge dessen die zugehörige allgemein auflösbare Gleichungsform

(II) $$x^8+2ax^7+bx^6+2cx^5+dx^4+2\sqrt{h(b-a^2)}\,x^3+\varphi x^2+h=0. \qquad \text{...(75)}$$

Die Durchführung der übrigen Combinationen der gleich Null zu setzenden Elemente dem Leser überlassend, wollen wir in Kürze eine ähnliche Discussion der Gleichung des zehnten Grades vorbereiten.

$$f(x)=x^{10}+2ax^9+bx^8+2cx^7+dx^6+2ex^5+fx^4+2gx^3+hx^2+2kx+l=0. \qquad \text{...(76)}$$

Hier haben wir zu setzen

$$f(x)=[x^5+ax^4+px^3+qx^2+rx+t]^2-[a'x^4+p'x^3+q'x^2+r'x+t']^2=0, \qquad \text{...(77)}$$

und erhalten aus der Vergleichung der zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coëfficienten folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} b&=2p+a^2-a'^2, & f&=2at+2pr+q^2-2a't'-2p'r'-q'^2,\\ c&=q+ap-a'p', & g&=tp+qr-t'p'-q'r',\\ d&=2r+2aq+p^2-p'^2-2a'q', & h&=2tq+r^2-2t'q'-r'^2,\\ e&=t+ar+pq-a'r'-p'q', & k&=tr-t'r',\ t=t^2-t'^2, \end{aligned} \qquad \text{...(78)}$$

und aus (77) die zur Bestimmung der Wurzeln von (76) dienenden Partialgleichungen im Folgenden:

$$\begin{aligned} P'&=x^5+(a+a')x^4+(p+p')x^3+(q+q')x^2+(r+r')x+(t+t')=0,\\ P''&=x^5+(a-a')x^4+(p-p')x^3+(q-q')x^2+(r-r')x+(t-t')=0. \end{aligned} \qquad \text{...(79)}$$

Der Annahme

$$p=q=r=0 \qquad \text{...(80)}$$

entsprechen folgende Bestimmungen:

$$a'^2=a^2-b,\ p'=-c:\sqrt{a^2-b},\ q'=-[d(a^2-b)+c^2]:2(a^2-b)^{\frac{3}{2}},$$

$$\left\{\begin{aligned} e&=t-r\sqrt{a^2-b}-\frac{2[d(a^2-b)+c^2]}{2(a^2-b)^2},\\ f&=2at-2t'\sqrt{a^2-b}+\frac{2c}{\sqrt{a^2-b}}-\frac{[d(a^2-b)+c^2]^2}{4(a^2-b)^3},\\ g&=\frac{et'}{\sqrt{a^2-b}}+\frac{[d(a^2-b)+c^2]}{2(a^2-b)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}\right. \qquad \text{...(81)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} h=\dfrac{[d(a^2-b)+c^2]}{(a^2-b)^{\frac{3}{2}}}-r'^2,\ k=-r't', \\ l=t^2-t'^2, \end{array}\right. \qquad \ldots(82)$$

Der Bedingung (80) gemäss sind die Grössen a', p', q' bereits in der ersten Zeile in (81) bestimmt, die noch übrigen drei Grössen t, t', r' erhält man sehr leicht aus den weiteren drei linearen Gleichungen (81).

Setzt man die so erhaltenen Werthe von t, t', r' in die drei letzten Gleichungen in (82) ein, so erhält man etwa:

$$\begin{aligned} h&=\varphi_1(a, b, c, d, e, f, g)=[h], \\ k&=\varphi_2(a, b, c, d, e, f, g)=[k], \\ l&=\varphi_3(a, b, c, d, e, f, g)=[l], \end{aligned} \qquad \ldots(83)$$

und schliesslich die der Annahme (80) entsprechende Gleichungsform

(I) $$x^{10}+2ax^9+bx^8+2cx^7+dx^6+2ex^5+fx^4+2gx^3+[h]x^2+2[k]x+[l]=0, \qquad \ldots(84)$$

deren Wurzeln aus den Gleichungen des fünften Grades in (79) gezogen werden.

Der Annahme

$$t'=r'=0 \qquad \ldots(85)$$

entsprechen folgende Bestimmungen

$$t=\sqrt{l},\ r=k:\sqrt{l},\ q=(hl-k^2):2l^{\frac{3}{2}},$$

$$p=(2l^2g-khl+k^3):2l^{\frac{5}{2}},\ a'^2=(2gl^2+k^3-khl)l^{-\frac{3}{2}}+a^2-b,$$

$$p'=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{l}}\left(\dfrac{h}{2}-\dfrac{k^2}{2l}\right)+\dfrac{a}{\sqrt{l}}\left(g-\dfrac{kh}{2l}+\dfrac{k^3}{2l^2}\right)-c}{2\sqrt{a^2-b+\left(2g+\dfrac{k^3}{l^2}-\dfrac{hk}{l}\right)l^{-\frac{1}{2}}}},\ q'=\frac{\dfrac{2k}{\sqrt{l}}+\dfrac{a}{\sqrt{l}}\left(h-\dfrac{k^2}{l}\right)+\dfrac{1}{l}\left(g-\dfrac{kh}{2l}+\dfrac{k^3}{2l^2}\right)^2-p'^2-d}{2\sqrt{a^2-b+l^{-\frac{1}{2}}\left(2g+\dfrac{k^3}{l^2}-\dfrac{kh}{l}\right)}}, \qquad \ldots(86)$$

und auf Grundlage dieser Werthe erhält man aus der vierten und fünften in (78)

$$\begin{aligned} e&=\psi_1(a, b, c, d, g, h, k, l)=[e], \\ f&=\psi_2(a, b, c, d, g, h, k, l)=[f], \end{aligned} \qquad \ldots(87)$$

und schliesslich die der Annahme (85) entsprechende Gleichungsform:

(II) $$x^{10}+2ax^9+bx^8+2cx^7+dx^6+2[e]x^5+[f]x^4+2gx^3+hx^2+2kx+l=0, \qquad \ldots(88)$$

welche auch durch Gleichungen fünften Grades aufgelöst wird.

Schon die Gleichung des zehnten Grades, wenn selbe wirklich als irgend eine specielle Gleichungsform erkannt, mit ihren Coëfficienten die Auffindung wenigstens eines Systemes von Werthen der Elemente p, q, r, t, $a'p'$, $q'r't'$ begünstigt, erscheint in Bezug auf ihre Auflösung abhängig von der Auflösung zweier Partialgleichungen, deren jede dem fünften Grade angehört.

Diese Partialgleichungen müssten nun wieder als gewisse specielle Gleichungsformen sich stellen, wenn überhaupt von einer allgemeinen Auflösung derselben die Rede sein soll.

Es kann aber auch der Fall eintreten, wo die vorgelegte Gleichung, etwa des zehnten Grades, in zweierlei Rücksicht als eine specielle Gleichungsform auftritt — vermöge welcher Eigenschaft das Gleichungspolynom sich einmal als ein Product von P und P', ein anderes Mal hingegen als ein Product von P_1 und P'_1 hinstellt — dann wird eine solche Gleichung ihre Wurzel beziehen können aus den Partialgleichungen

$$P=P_1=P'=P'_1=0 \quad \text{wo} \quad P_1P'_1=P.P'=f(x), \qquad \ldots(89)$$

von welchen eine jede ein System von fünf Wurzeln zu bieten vermag.

Schon aus dem Begriffe der Partialproducte schliesst man, dass etwa P und P_1 mit der Nulle verglichen, wenigstens eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen müssen, welche ganz gewiss auch der Gleichung

$$P-P_1=0 \qquad \ldots(90)$$

angehören muss; dass auf gleiche Weise die Gleichungen wenigstens

$$P'=0,\ P'_1=0,\ P'-P'_1=0, \qquad \ldots(91)$$

eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen müssen, welche sich sowohl in (90), als auch in (91) je aus einer Gleichung des vierten Grades bestimmen lässt. Nach Ausscheidung der nun gefundenen gemeinschaftlichen Wurzeln aus den Gleichungen

$$P=0\quad P'=0, \qquad \ldots(92)$$

verbleiben noch zwei Gleichungen vom vierten Grade, deren nun mögliche Auflösung die übrigen acht Wurzeln ergibt.

Würde man zwischen zwei Sorten von Partialgleichungspaaren noch die am Eingange dieses Paragraphes erwähnte Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Masses in Verwendung nehmen, so könnte man die allgemeine Auflösung der vorgelegten Gleichung abhängig machen von der Auflösung der Partialgleichungen noch tieferer Grade als der vierte.

Sollen Gleichungen von noch höherem Grade auf Grund der speciellen Eigenschaft ihrer Coëfficienten eine allgemeine Auflösung zulassen, so müssten solche Gleichungen nach Bedarf in mehrfacher Rücksicht als eine specielle Gleichungsform sich stellen und in nöthiger Anzahl je in zwei Partialgleichungen sich zerlegen lassen.

Bei Untersuchungen von Naturgesetzten können häufig Gleichungen höheren Grades zum Vorschein kommen, deren Coëfficienten aus weniger Parametern gebaut erscheinen, als der Grad der Gleichung hinweist. In solchen Fällen müssen diese Coëfficienten gewisse Bedingungen erfüllen, und gelegentlich auch solche, vermöge deren die Gleichungen selbst eine allgemeine Auflösung zulassen. Eben in dieser Abhandlung findet man genügende Anhaltspunkte, um in solchen speciell günstigen Fällen die mögliche allgemeine Auflösung der Gleichung wirklich zu Stande zu bringen.

§. 4.

Auflösung numerischer Gleichungen.

Zum Zwecke der Auflösung numerischer Gleichungen, gleichviel, ob mit lauter reellen oder auch complexen Coëfficienten, können wir von dieser hier vorgetragenen Methode mit grossem Vortheil Gebrauch machen.

Wie wir schon im Verlaufe dieses Capitels uns genügend überzeugt haben, sind die Bedingungsgleichungen, welche bei Gelegenheit der Umgestaltung des Gleichungspolynoms in eine Differenz zweier Quadrate zur Bestimmung der hiezu nothwendigen Coëfficienten $p, q, h, k, \ldots a', p', h', k', \ldots$ aufgestellt werden, von sehr einfacher Gestalt, sie sind nämlich durchgehends unvollständige Gleichungen des zweiten Grades.

Zur Auflösung eines solchen Gleichungssystems schreite man nach Anweisung des §. 5 meiner Abhandlung: „Studien im Gebiete numerischer Gleichungen, XXX. Band" in der Weise ein, dass man nach vorläufiger Weglassung einer Anzahl dieser Bedingungsgleichungen, an ihre Stelle ebenso viele Unbekannte gleich Null setzt, und die übrigen Unbekannten aus den beibehaltenen Gleichungen berechnet. Dieses offenbar unrichtige Werthsystem wird man dahin verbessern, dass man Eine von den ausser Acht gelassenen Gleichungen und auch eines von gleich Null gesetzten Elementen in die hiezu nöthige Rechnung einbezieht. Setzt man diese Correction stufenweise fort bis man bereits die letzte, ausser Acht gelassene Relation und auch das letzte unberücksichtigte Element in gehörige Rechnung gezogen hat, so wird das so erhaltene Werthsystem gerade dasjenige sein, welches den aufgestellten Bedingungen entspricht, und die erwünschte Aufstellung der zur Bestimmung der verlangten Wurzeln dienenden Gleichungspolynome bewirkt.

Wären die Gleichungen des vorgelegten Gleichungssystems von höherem Grade, so müsste man der so beschriebenen Correctionsstufen so viele durchmachen, als die um eine Einheit verminderte Anzahl der Unbekannten beträgt. In dem Masse würden aber auch die Correctionsrechnungen selbst zu grösseren Dimensionen anwachsen.

Glücklicherweise wissen wir aus Erfahrung, dass sogar bei Gleichungen des zehnten Grades das benöthigte System von neun Umstaltungsbedingungen es erlaubt, gleich mit sieben dieser Bedingungen den Rechnungsanfang zu machen, um schon nach zweistufiger Correctionsrechnung eines und nach Bedarf zweier Werthsysteme für die Unbekannten habhaft zu werden, welche die erwünschte Umstaltung bewirken. Bei Gleichungen des sechsten Grades lässt sich der erwünschte Zweck sogar mittelst einer einstufigen Correction erreichen.

Ist einmal die Umstaltung des Gleichungspolynoms in der nöthigen Anzahl erreicht, so gelangt man schliesslich zu Partialgleichungen, deren Auflösung man nach bekannten Gesetzen bewirken kann, unbekümmert, ob die hervorgehenden Wurzeln reell oder auch complex sich gestalten.

Bei einer Gleichung höheren Grades, welche mehr als vier complexe Wurzeln besitzt, können wir nach Ausscheidung der reellen Wurzelfactoren auf eine Gleichung mit lauter imaginären Wurzeln kommen, deren Grad der Annahme gemäss die Zahl 4 übersteigt.

In solchen Fällen sind die bisherigen Trennungsmittel von complexen Wurzeln bekanntermassen so complicirt und weitläufig, dass der Wunsch, nach weiteren neuen Erleichterungsmitteln sich umzusehen, nur allzu gerechtfertigt erscheint.

Mit der hier besprochenen Methode glaube ich zur Behebung dieser Art Unzukömmlichkeiten Einiges, wissenschaftliche Beachtung verdienendes, beigetragen zu haben.

II. Capitel.

Über die graphische Bestimmung von reellen Wurzeln der Gleichungen.

In der Abhandlung: „Studien im Gebiete numerischer Gleichungen, Denkschriften XXX. Band“ habe ich auf die Construction der sogenannten Integralcurve gewiesen, welche bei Ermittlung von reellen Wurzeln von algebraischen Gleichungen wesentliche Dienste leistet. Ihre Darstellung und Verwendung hat in letzterer Zeit einen wesentlichen Fortschritt aufzuweisen durch den von mir erfundenen Mechanismus, welcher bestimmt ist, von dem Curvenpaar: Integral- und Differentialcurve eine durch einen continuirlichen Zug darzustellen, sobald die andere bereits als ein continuirlicher Zug auf der Zeichenfläche vorliegt. Ausser dieser Vorrichtung leistet bei der Vornahme der Trennung von reellen Wurzeln auch mein Conograph und Cycloïdograph wichtige Dienste, welche bestimmt sind, bei beliebigen Parameterverhältnissen die Ellipse, Parabel, Hyperbel und Cycloide auf der Zeichenfläche zur Anschauung zu bringen. Indem ich noch auf eine reichhaltige Quelle von praktischen Constructionsmitteln hinweise, welche uns die sogenannte descriptive Geometrie bei solchen Vorgängen an die Hand bietet, will ich im Verlaufe dieser Abhandlung die mathematischen Grundlagen entwickeln, welche uns in Stand setzen, von den erwähnten Hilfsmitteln einen geregelten, möglichst vortheilhaften Gebrauch zu machen, um mittelst Zeichnung die Trennung der reellen Wurzeln bei algebraischen, wie auch bei einer gewissen Classe von transcendenten Gleichungen zu bewirken.

§. 1.

Bestimmung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Setzt man in den Gleichungen

$$\overset{2n+1}{\underset{0}{S_\sigma}}\left[A_\sigma x^{2n+1-\sigma}\right]=0,\quad \overset{2n}{\underset{0}{S_\sigma}}\left[A_\sigma x^{2n-\sigma}\right]=0, \qquad \ldots(1)$$

$$x^2=y, \qquad \ldots(2)$$

so erhält man diese Gleichungspolynome in folgender Form:

$$\begin{aligned} x[b_0y^n+b_1y^{n-1}+\ldots+b_n]-[c_0y^n+c_1y^{n-1}+\ldots+c_n]&=0,\\ x[b'_0y^{n-1}+b'_1y^{n-2}+\ldots+b'_{n-1}]-[c'_0y^n+c'_1y^{n-1}+\ldots+c'_n]&=0, \end{aligned} \qquad \ldots(3)$$

mit den Bestimmungen

$$\begin{aligned} c_0&=-A_1 \quad & c'_0&=-A_0,\\ b_0&=A_0 \quad & b'_0&=A_1, \end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

und schliesslich aus (3) und (2)

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_0y^n+c_1y^{n-1}+\ldots+c_n}{b_0y^n+b_1y^{n-1}+\ldots+b_n}; \\ x^2=y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{c'_0y^n+c'_1y^{n-2}+\ldots+c'_n}{b'_0y^{n-1}+b'_1y^{n-1}+\ldots+b'_{n-1}}, \\ x^2=y \end{cases} \qquad \ldots(5)$$

zwei Gleichungspaare mit den Unbekannten x und y, welche den in (1) vorgelegten Gleichungen entsprechend äquivalent sind, in Bezug auf die zu bestimmenden Werthe von x.

In Bezug auf ein orthogonales Axensystem xoy drückt jedes der Gleichungspaare in (5) ein Hilfscurvenpaar aus, welches durch seine Durchschnittspunkte zu solchen x-Werthen führt, welche der entsprechenden Gleichung in (1) als Wurzel angehören.

Die Parabel ($x^2=y$) nennen wir die erste Hilfscurve, dagegen die zweite in Form einer aus y gebauten Bruchfunction dargestellte Linie die zweite Hilfscurve.

Die erste Hilfscurve lässt sich sehr leicht auf der Zeichenfläche darstellen. Es handelt sich nun darum die Darstellung der zweiten Hilfscurve nach Möglichkeit zu erleichtern, um eben hiedurch in Stand gesetzt zu werden, die reellen Wurzeln der Gleichungen in (1) schnell und einfach zu bestimmen.

Man kann es immer so einrichten, dass in der gegebenen Gleichung $A_1=0$ sich ergibt; dann in (5) bei ungeradgradigen Gleichungen der Zähler der Bruchfunction wenigstens nur eine Einheit sich tiefer stellen als der Nenner; dagegen bei geradgradigen Gleichungen wird der Nenner der Bruchfunction sich wenigstens um zwei Einheiten tiefer stellen, als der Zähler.

Wenn man ein algebraisches Polynom vom $m$ten Grade durch ein Polynom vom $(m-s)$ten Grade dividirt, und den hiebei sich ergebenden Quotus mit der nullten Potenz von y abschliesst, so erhält man einen Rest, welcher höchstens dem $(m-s-1)$ten Grade angehört. Bezeichnet man diesfällig den Zähler mit $f_m(y)$, den Nenner mit $f_{m-s}(y)$, den Quotus mit $\varphi_s(y)$, und den Rest mit $\psi_{m-s-1}(y)$, wo die angefügten Zeiger auf den jeweiligen Grad des Functionspolynoms hindeuten, so erhält man:

$$\frac{f_m(y)}{f_{m-s}(y)}=\varphi_s(y)+\frac{\psi_{m-s-1}(y)}{f_{m-s}(y)} \qquad \ldots(6)$$

oder auch

$$\frac{f_{m-1}(y)}{f_m(y)}=\frac{1}{\varphi_s(y)+\dfrac{\psi_{m-s-1}(y)}{f_{m-s}(y)}}; \qquad \ldots(7)$$

wobei die neuerdings sich ergebende Bruchfunction $\dfrac{\psi_{m-s-1}(y)}{f_{m-s}(y)}$ in der Regel nur eine einzige Einheit als Graddifferenz aufweist.

Mit Hilfe der in (6) und (7) angedeuteten Operation erhält man nun die Gleichung der zweiten Hilfscurve in den Gestalten:

$$x=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\ldots+\cfrac{1}{x_s}}}} \quad \text{oder} \quad x=x_0+\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\ldots+\cfrac{1}{x_\sigma}}}} \qquad \ldots(8)$$

je nachdem für $A_1=0$ die Gleichung aus (1) ungeradgradig oder geradgradig sich erweist.

Hiebei sind die mit x_ν bezeichneten Ausdrücke ganze algebraische nach den Potenzen von y geordnete Polynome. Bezeichnet man mit m_μ den Grad von x_μ, so muss im Allgemeinen

$$\text{für ungeradgradige Gleichungen } m_1+m_2+\ldots+m_s=n, \qquad \ldots(9)$$

$$\text{„ geradgradige „ } m_1+m_2+\ldots+m_\sigma=n,$$

sich erweisen.

Hiebei ist $\frac{1}{x_s}$ und respective $\frac{1}{x_\sigma}$ als der letzte Erzeugungsbruch des Kettenbruches anzusehen, dessen Zähler eine von y unabhängige, hiemit eine constante Grösse ist.

In dem Falle jedoch, wo der Zähler des letzten Erzeugungsbruches ein nach y geordnetes Polynom $f_q(y)$ vorstellt, könnte der Abschluss des Kettenbruches nur dann erfolgen, wenn eben die Nennerfunction des letzten Erzeugungsbruches durch das Polynom $f_q(y)$ theilbar ist. In einem solchen Falle ist der Ausdruck $f_q(y)$ ein gemeinschaftliches Mass des Zählers und Nenners des in einen Kettenbruch verwandelten Functionsbruches, bildet einen Divisor des entsprechenden Polynoms in (3), und liefert die Partialgleichung

$$f_q(y)=0, \qquad \ldots(10)$$

deren Wurzeln: $y_1, y_2, y_3, \ldots y_q$, für die vorgelegte Gleichung ein System von $2q$ Wurzeln

$$+\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_1}, +\sqrt{y_2}, -\sqrt{y_2}, \ldots, +\sqrt{y_q}, -\sqrt{y_q} \qquad \ldots(11)$$

veranlassen. In einem solchen Falle werden an die Stelle der Relation (10) die Exponentenrelationen

$$m_1+m_2+\ldots+m_\sigma=n-q$$

$$m_0+m_1+m_2+\ldots+m_s=n-q, \qquad \ldots(12)$$

treten.

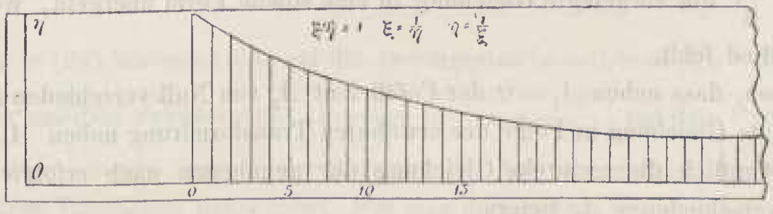
In der Regel stellen sich die Ausdrücke x_ν als dem ersten oder dem zweiten Grade angehörig; aber es sind auch Fälle denkbar, wo solche auch einen höheren Grad erreichen. Immerhin kann man in Bezug auf ein Coordinatensystem oy, ox einen Ausdruck der Form:

$$x_\nu=h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots+h_{m_\nu}y^{m_\nu} \qquad \ldots(13)$$

als eine Parabel der $m_\nu$ten Ordnung denken und auf irgend eine Weise durch einen continuirlichen Zug darstellen. Ist dies in Bezug auf ein jedes in (8) ersichtliche x_ν geschehen, so braucht man für irgend einen Werth von y nur die zugehörige, zu ox parallele Gerade zu legen, um sofort die entsprechenden Werthe aller in (8) ersichtlichen x_ν zur Anschauung zu bringen. Der Bequemlichkeit wegen kann man hiezu eine zur Axe ox parallel entsprechend dicht rastrirte Zeichenfläche in Verwendung nehmen.

Um für irgend einen Werth von y den die Ordinate x bildenden Kettenbruch durch eine entsprechende Länge darzustellen, wird man den reciproken Werth von x_s anfügen an den Endpunkt von x_{s-1}; den reciproken Werth des gefundenen Anfügungsbetrages an den Endpunkt von x_{s-2}, und sofort den reciproken Betrag des auf obige Weise veränderten x_1 an den Endpunkt von x_0. Auf diese Weise erhält man zu einem jeden Werth von y die Länge der Kettenbruchordinate x, und hiemit auch die Lage des entsprechenden Punktes (y, x) und gelangt schliesslich zur Darstellung der verlangten, in der Gleichung (8) analytisch bestimmten zweiten Hilfscurve selbst.

Fig. 1.



...(14)

In (14) sehen wir eine Linealvorrichtung, auf welcher ein auf rechtwinklige Assymptoten bezogener, der Gleichung $\xi\eta=1$ entsprechender Hyperbelast eingravirt ist. Hiebei ist das zwischen dem Hyperbelast und der Axe $o\xi$ eingeschlossene Feld mit zur $o\eta$ parallelen Geraden in lauter schmale Streifchen abgetheilt. Auf einem solchen Lineal ist es sehr leicht zu einer beliebigen in die Zirkelöffnung genommenen Länge, die zugehörige reciproke Länge unmittelbar abzugreifen, um sofort mit der so geänderten Zirkelöffnung die Länge eines in der obigen Operation an die Reihe kommenden x, entsprechend zu verändern. Überhaupt leistet ein solches Lineal sehr erspriessliche Dienste bei der angenäherten Darstellung des continuirlichen Zuges der durch obigen Kettenbruch (8) bestimmten Hilfscurve.

Die erste Hilfscurve ist offenbar eine gewöhnliche Parabel, und lässt sich ebenfalls mit meinem Instrumente (Conograph) sehr leicht durch einen continuirlichen Zug darstellen.

In den Begegnungspunkten der erwähnten Hilfscurvenpaare ergibt sich jedesmal ein Coordinatenpaar (xy), welche die Gleichungen des Hilfscurvenpaares und somit auch die vorgelegte Gleichung selbst erfüllen. Der xWerth eines jeden Begegnungspunktes der Hilfscurven stellt somit eine Wurzel der gegebenen Gleichung vor.

In dem Falle, wo sich aus dem Gleichungspolynom ein Factor $f_q(y)$ wegdividiren lässt, stellt die Gleichung der zweiten Hilfscurve blos dasjenige Gleichungspolynom vor, welches sich als Quotient bei dieser Division ergibt, und zu den in (12) erwähnten Wurzeln blos die noch übrigbleibenden Wurzeln der gegebenen Gleichung zu liefern hat.

Insolange die im Kettenbruch spielenden Functionen x, den zweiten Grad nicht überschreiten, können wir das in (13) dargestellte Parabelsystem theils aus Geraden, theils aus gewöhnlichen mit dem Conograph leicht darstellbaren Parabeln zusammensetzen. In den speciellen Fällen, wo sich die x, in höherem Grade ergeben, als im zweiten, wird es genügen, das gegebene Gleichungspolynom mit einem neuen Wurzelfactor etwa $(x-1)$ oder $(x-\alpha)$ für ein passendes α zu multipliciren, um hiedurch zu einer Gleichung zu gelangen, welche dann im Kettenbruche die missliebigen höhergradigen x, nicht mehr zum Vorschein bringt.

Nach dieser für Gleichungen beliebigen Grades sich gleichbleibenden Methode gelangen wir zur Bestimmung aller reellen positiven und negativen Wurzeln und gelegentlich in den Fällen (12) zu Paaren von einander entgegengesetzten Wurzeln, welche diesfällig auch complex sein dürfen.

In den speciellen Fällen, wo der Grad der vorgelegten Gleichung den sechsten Grad nicht überschreitet, lassen sich einige Vereinfachungen dieser Methode constatiren. Die Gleichungen, mit Einschluss deren des vierten Grades, lassen sich mit Hilfe der Begegnungspunkte von Kreisen und Ellipsen und gelegentlich auch von Geraden ausfindig machen. (Siehe meine Abhandlung: „Studien numerischer Gleichungen" im Anhang, Bd. XXX der Denkschr. d. kais. Akad. d. Wissenschaften.) Von der Behandlung dieser Gleichungen wollen wir hier absehen und unmittelbar zu Gleichungen des fünften und sechsten Grades schreiten.

Diese Gleichungen können wir immerhin in der gemeinschaftlichen Form

$$x^6+A_2x^4+A_3x^3+A_4x^2+A_5x+A_6=0, \qquad \ldots(15)$$

voraussetzen, da im Fall $A_6=0$ das gefundene Wurzelsystem dieser Gleichung nach Ausscheidung der Wurzel $x=0$ die vollständige Auflösung der Gleichung

$$x^5+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5=0,$$

bildet, und in dem Fall, wo die Gleichung der Bedingung $A_1=0$ nicht entspricht, durch eine höchst einfache Substitution $x=y-\frac{A_1}{6}$ die vorgelegte Gleichung in eine solche Form übergeht, wo, von links nach rechts gehend, das zweite Glied fehlt.

Wichtig ist es noch, dass neben $A_1=0$ der Coëfficient A_3 von Null verschieden sich gestalte. Wenn die zur Auflösung vorgelegte Gleichung in Folge der erwähnten Transformirung neben $A_1=0$ auch noch $A_3=0$ bietet, dann wird hoffentlich die reciproke Gleichung der gegebenen nach erfolgter Transformirung neben $A_1=0$ ein von Null verschiedenes A_3 liefern.

Ist jedoch die gegebene Gleichung auch bei ihrer reciproken Gleichung nicht im Stande bei obiger Transformirung neben $A_1=0$ ein von Null verschiedenes A_3 zu liefern, so wird die mittelst Substitution $x=y+\alpha$

umgestaltete gegebene Gleichung für sehr viele Werthe von α die Fähigkeit erhalten in der Transformirung ihrer reciproken Gleichung neben $A_1 = 0$ ein von Null verschiedenes A_3 zu gewähren.

Unter der nun gerechtfertigten Voraussetzung $A_3 \lessgtr 0$ erhalten wir aus (15)

$$x^2 = y, \qquad \text{...(17)}$$

setzend

$$x(A_3 y + A_5) - (-y^3 - A_2 y^2 - A_4 y - A_6) = 0. \qquad \text{...(18)}$$

Hieraus ergibt sich

$$x = \frac{-y^3 - A_2 y^2 - A_4 y - A_6}{A_3 y + A_5} = x_0 + \frac{g}{A_3 y + A_5}, \qquad \text{...(19)}$$

mit den Bestimmungen

$$x_0 = a x^2 + b y + c, \quad a = -\frac{1}{A_3}, \quad b = \frac{A_5 - A_2 A_3}{A_3^2}, \quad c = \frac{-A_5^2 + A_2 A_3 A_5 - A_4 A_3^2}{A_3^3}, \qquad \text{...(20)}$$

$$g = A_5^3 - A_2 A_3 A_5^2 + A_4 A_3^2 A_5 - A_6 A_3^3.$$

Von da an sind zwei Fälle zu berücksichtigen, je nachdem der Ausdruck g verschwindet oder nicht.

I. Ist $g = 0$, so erscheint die gegebene Gleichung oder vielmehr die Gleichung (18) in folgender Gestalt

$$x(A_3 y + A_5) - x_0 (A_3 y + A_5) = 0, \qquad \text{...(21)}$$

welche vor Allem für

$$y = -\frac{A_5}{A_3} \quad \text{hiemit} \quad x = \pm \sqrt{-\frac{A_5}{A_3}}, \qquad \text{...(22)}$$

erfüllt wird.

Nach Wegschaffung des in (21) ersichtlichen gemeinschaftlichen Factors $(A_3 y + A_5)$ erhält man aus (21) die Gleichung

$$x = x_0 = a y^2 + b y + c, \qquad \text{...(23)}$$

welche in Verbindung mit (17) zwei analytisch bestimmte mit dem Conograph darstellbare Parabelcurven vorstellt, die in den vier eventuell möglichen Begegnungspunkten zu vier reellen Werthen von x führen, welche in Verbindung mit den zwei Wurzeln in (22) das verlangte System von sechs Wurzeln der diesfälligen Gleichung (15) ausmachen.

Es können auch Fälle vorkommen, wo die Hilfscurven (17), (23) blos in zwei oder auch in gar keinem Punkte sich schneiden und den Schluss veranlassen, dass von den vier aus (17) und (23) zu ziehenden Wurzeln entweder zwei, oder auch alle vier als complexe Wurzeln sich gestalten.

II. Ist $g \lessgtr 0$, so setze man

$$\frac{g}{A_3 y + A_5} = \frac{x''}{2}, \quad x_0 = \frac{x'}{2},$$

und erhält folgende Gleichungssysteme:

$$x''(A_3 y + A_5) = 2g, \quad x' = 2ay^2 + 2by + 2c, \qquad \text{...(24)}$$

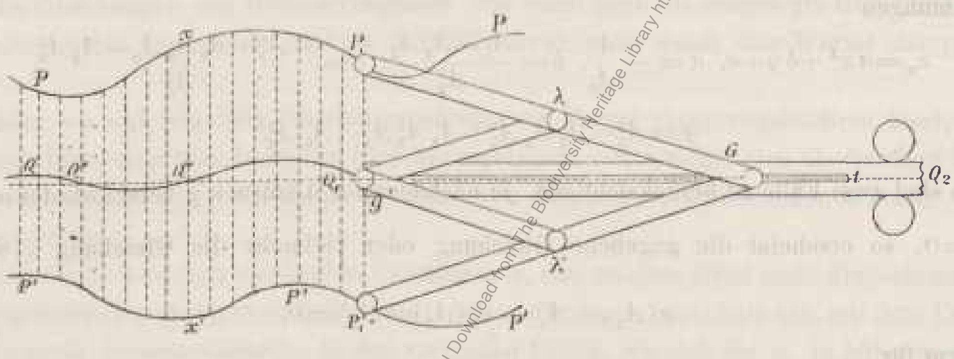
$$x = \frac{1}{2}(x' + x''), \quad x^2 - y = 0. \qquad \text{...(25)}$$

Die erste Gleichung in (24) bestimmt eine auf die Assymptoten $[x = 0,\ x = A_3 y + A_5]$ bezogene Hyperbel, die zweite hingegen eine aus dem Scheitelpunkt $\left[\xi = 2c - \frac{b^2}{2a},\ \eta = -\frac{b}{2a}\right]$ mit dem Parameter $\frac{2}{a}$ zu beschreibende Parabel, welche ihre concave Seite in der Richtung der Axe ox oder ox' hinwendet, je nachdem a ein positives oder negatives Vorzeichen beurkundet. Hat man diese zwei Curven mit dem Conograph auf einer parallel zur Ox rastrirten Zeichenfläche dargestellt, so gelangt hiedurch an jeder dieser Parallelen das dem gemeinschaftlichen y entsprechende Werthepaar x', x'' zur unmittelbaren Anschauung, und es lässt sich sehr leicht auf dieser Parallelen der zugehörige Punkt $x=\frac{x'+x''}{2}$ einzeichnen, welcher der ersten in (25) ersichtlichen Hilfscurve angehört.

Betrachtet man die zwei Kegelschnitte in (24) als Zweige einer und derselben Curve, so könnte man die in obiger Weise punktweise leicht darstellbare Hilfscurve in (25) als eine Durchmessercurve auffassen, welche das zur Ox parallele Sehnensystem der in (24) gegebenen Curvencombination gleichzeitig halbirt.

In den Begegnungspunkten der Parabel $x^2-y=0$ mit der Durchmessercurve kommen diejenigen xWerthe zum Vorschein, welche sämmtlich die verlangten reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung (15) ausmachen.

Fig. 2.



...(26)

In vorstehender Figur sehen wir die Skizze des sogenannten Bissectors, welchen ich in meinem Conograph als Regulator bei der Beschreibung der Kegelschnitte verwende. Er besteht aus zwei einfachen Zirkeln PGP' und $\lambda g\lambda'$, von welchen der grössere doppelt so lange Schenkel besitzt als der kleinere. λ und λ' sind die Drehungspunkte der Schenkelendpunkte des kleineren Zirkels. Das Lineal $Q_1\,Q_2$ mit einer Nut gt ist in g um die Axe des kleinen Zirkelkopfes drehbar verbunden, während ein Stift des Kopfes G bestimmt ist, bei verschiedenen Öffnungen des Bissectors in der Nut gt sich zu bewegen. Bei jeder Öffnung des Bissectors befinden sich die Mittelpunkte $P_1 g P_1'$ in einer geraden Linie, und g liegt in einer gleichen Distanz von P und P'. Der Bissector ist nebstdem so mechanisch construirt, dass die in P_1, g und P_1' befindlichen verticalen Stifte mit ihren Spitzen in einem Punkt zusammenkommen, sobald der Bissector geschlossen wird.

Denkt man sich das Führungslineal $Q_1\,Q_2$ zwischen die Rollen einer ortogonalen Coordinatenleitung eingespannt, so könnte man die beiden Schenkelendpunkte P_1 und P_1' in die Hände fassend, eine Bewegung des Bissectors veranlassen, dass die Stifte in P_1 und P_1' zwei auf der Zeichenfläche bereits ersichtlichen Linienzüge befahren; dann wird ein Schreibstift in g eine Curve beschreiben, welche das zur Axe ox der Coordinatenführung parallele Sehnensystem gleichzeitig halbirt, und demgemäss als eine den Zweigen PP, $P'P'$ in Bezug auf die Sehnenrichtung xx' entsprechende Durchmessercurve angesehen werden kann. Der Bissector ist hier der natürliche Durchmessercurvenzirkel. Im Angesichte der obigen Darstellung wäre nun der Beweis erbracht, dass mit Hilfe meines Conographs die grafische Auflösung der Gleichungen bis einschliesslich der Gleichungen des sechsten Grades als eine sogenannte directe (nicht tappende) angesehen werden kann.

Für $x^2=y$ erhält man aus der Gleichung des achten Grades:

$$\overset{8}{\underset{0}{S}}{}_\sigma(A_\sigma x^{8-\sigma})=0,\quad A_1=0,\quad A_3\gtrless 0, \qquad \text{...(27)}$$

$$x=\frac{-A_0 y^4-A_2 y^3-A_4 y^2-A_6 y-A_8}{A_3 y^2+A_5 y+A_7}=x_0+\frac{my+n}{A_3 y^2+A_5 y+A_7}, \qquad \text{...(28)}$$

mit der Bestimmungsform:

$$x_0=ay^2+by+c. \qquad \text{...(29)}$$

I. Für $m=n=0$ erhält man die verlangte Auflösung aus den Gleichungssystemen:

$$A_3 y^2+A_5 y+A_7=0,\quad x=\pm\sqrt{y}, \qquad \text{...(30)}$$

$$x = ay^2 + by + c, \quad x^2 - y = 0. \qquad \text{...(31)}$$

Aus (30) erhält man zwei Paare von je einander entgegengesetzten Wurzeln, die übrigen Wurzeln ergeben sich aus den eventuellen Begegnungspunkten zwischen den in (31) bestimmten mit dem Conograph zu beschreibenden Parabeln.

II. Im Fall der Theilbarkeit $A_3y^2 + A_5y + A_7 : my + n = m'y + n'$ erhält man vor Allem

$$x = \pm\sqrt{y} = \pm\sqrt{\frac{-n}{m}}, \qquad \text{...(32)}$$

und nebstdem noch die Gleichungen:

$$x^2 - y = 0, \quad x = x_0 + \frac{1}{m'y + n'}. \qquad \text{...(33)}$$

Setzt man hier $2x_0 = x'$, $\frac{2}{m'y + n'} = x''$, so erhält man aus (33) folgende Systeme:

$$x' = 2ay^2 + 2by + 2c, \quad x''(m'y + n') = 2, \qquad \text{...(34)}$$

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad x^2 - y = 0. \qquad \text{...(35)}$$

In (34) sind zwei Curven: eine gewöhnliche Parabel und eine Hyperbel bestimmt, deren in (35) bestimmte Durchmessercurve in ihren eventuellen Begegnungspunkten mit der Parabel $x^2 - y = 0$ zu solchen Werthen von x führt, welche im Verein mit dem in (32) ersichtlichen Wurzelpaar das verlangte zur diesfälligen Gleichung (27) gehörige Wurzelsystem ausmachen.

Sollte sich aus (35) die volle Zahl von sechs reellen Wurzeln nicht ergeben, so sind begreiflicherweise die fehlenden Wurzeln als complex aufzufassen.

III. Wenn endlich keiner der Fälle I. und II. eintrifft, so setze man:

$$\frac{my + n}{A_3y^2 + A_5y + A_7} = \frac{1}{x_1}, \qquad \text{...(36)}$$

und erhält:

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_0 = ay^2 + by + c, \quad x_1(my + n) - A_3y^2 - A_5y - A_7 = 0. \qquad \text{...(37)}$$

Der graphisch dargestellte Hyperbelzug x_1 und der Parabelzug x_0 setzt uns in Stand, die zweite Hilfscurve $x = x_0 + \frac{1}{x_1}$ punktweise zu bestimmen, und dann in ihren Begegnungen mit der ersten Hilfscurve zum verlangten Wurzelsysteme selbst zu gelangen.

Für die Gleichung

$$\mathop{S}_{\sigma}\limits_{0}^{10} [A_\sigma x^{10-\sigma}] = 0, \quad A_1 = 0, \qquad \text{...(38)}$$

hat man für $x^2 = y$ die Gleichung der zweiten Hilfscurve:

$$x = -\frac{A_0y^5 + A_2y^4 + A_4y^3 + A_6y^2 + A_8y + A_{10}}{A_3y^3 + A_5y^2 + A_7y + A_9} = x_0 + \frac{my^2 + ny + h}{A_3y^3 + A_5y^2 + A_7y + A_9}, \qquad \text{...(39)}$$

mit der Bestimmungsform:

$$x_0 = ay^2 + by + c. \qquad \text{...(40)}$$

Hier unterscheiden wir vier Hauptfälle und zwar in Bezug auf den Ausdruck $R = my^2 + ny + h$,

Fall I. . . $R = 0$ (identisch),
„ II. . . $R =$ constant,
„ III. . . $R =$ Function von y des ersten Grades,
„ IV. . . $R =$ „ „ y „ zweiten „ , ...(41)

Im Fall I erhält man aus den Gleichungen

$$A_3 y^3 + A_5 y^2 + A_7 y + A_9 = 0, \quad x = \pm\sqrt{y} \qquad \text{...(42)}$$

eine Partie von sechs Wurzeln, und dann aus den Gleichungen

$$x = x_0 = ay^2 + by + c, \quad x^2 - y = 0,$$

die letzte Partie von vier Wurzeln der gegebenen Gleichung (48).

Im Fall II erhält man die Parabeln zweiter und dritter Ordnung

$$x_0 = ay^2 + by + c; \quad hx_1 = A_3 y^3 + A_5 y^2 + A_7 y + A_9, \qquad \text{...(43)}$$

deren graphische Darstellung zur punktweisen Bestimmung der zweiten Hilfscurve

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad \text{...(43)}$$

verhelfen, die in ihren Begegnungen mit der Parabel $x^2 = y$ auf die verlangten Wurzeln der Gleichung (38) hindeutet. Bevor man die zweite Parabel in (43) darstellt, stelle man vorerst ihre Differentialcurve als gewöhnliche Parabel graphisch dar, und leite daraus auf bekannte Weise die Integralcurve ab, welche schon die in (43) verlangte Parabel der dritten Ordnung bildet.

Im Fall III bilde man

$$x = \frac{1}{x_1 + \frac{w}{ny+h}}, \quad x_1 = a'y^2 + b'y + c', \qquad \text{...(44)}$$

und erhält für $w = 0$ den Fall III', und für $w \gtrless 0$ den Fall III''.

Im Fall III' erhält man aus den Gleichungen

$$ny + h = 0, \quad x = \pm\sqrt{y}, \qquad \text{...(45)}$$

die erste Partie von zwei Wurzeln, und die zwei gewöhnlichen Parabeln

$$x_0 = ay^2 + by + c, \quad x_1 = a'y^2 + b'y + c', \qquad \text{...(46)}$$

werden uns zur punktweisen Darstellung der zweiten Hilfscurve

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad \text{...(47)}$$

verhelfen, welche in den Begegnungspunkten mit $(x^2 = y)$ zu der zweiten Partie von acht eventuell möglichen reellen Wurzeln der Gleichung (38) führt.

Im Fall III'' setze man

$$w = x_2(ny + h), \qquad \text{...(48)}$$

und erhält die Hiperbelcurve (48), welche mit den Parabelcurven (46) zur punktweisen Bildung der zweiten Hilfscurve

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1 + x_2} \qquad \text{...(49)}$$

verhelfen, welche in ihren Begegnungen mit $x^2 - y = 0$ zu allen reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung (38) führt.

Im Fall IV bilde man

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1} + \frac{m'y + n'}{my^2 + ny + h}, \quad x_0 = ay^2 + by + c; \quad x_1 = a'y + b', \qquad \text{...(50)}$$

und erhält den Fall IV' wenn $m'y + n' =$ identisch Null, und den Fall IV'', wenn $m'y + n' \gtrless 0$. ...(51)

Im Fall IV' erhält man aus den Gleichungen

$$my^2+ny+h=0,\quad x=\pm\sqrt{y}, \qquad \text{...(52)}$$

die erste Partie von vier Wurzeln, und ausserdem die Linienzüge

$$x_0=ay^2+by+c,\quad x_1=a'y+b', \qquad \text{...(53)}$$

welche zur punktweisen Bestimmung der zweiten Hilfscurve

$$x=x_0+\frac{1}{x_1}, \qquad \text{...(54)}$$

verhelfen, welche in ihren Begegnungen mit $x^2-y=0$ zu der Restpartie der Wurzeln der Gleichung (38) führt.

Im endlichen Falle IV'' setze man:

$$\frac{m'y+n'}{my^2+ny+h}=\frac{1}{x_2} \qquad \text{...(55)}$$

und erhält eine Hyperbel x_2, welche im Verein mit den Linienzügen (53) zur punktweisen Bestimmung der zweiten Hilfscurve

$$x=x_0+\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2}}, \qquad \text{...(56)}$$

verhelfen, welche in den Begegnungspunkten mit $x^2-y=0$ zu allen reellen Wurzeln der Gleichung (38) führt.

Mit der hier gepflogenen Discussion schliessen wir, weil schon hieraus der Weg ersichtlich ist, wie man die Discussion der Gleichungen von noch höherem Grade einzurichten habe, um die graphische Darstellung ihrer reellen Wurzeln gehörig vorzubreiten.

§. 2.

Graphische Auflösung einer gewissen Form von transcendenten Gleichungen.

Eine transcendente hier zu behandelnde Gleichung schreiben wir in folgender Form:

$$\overset{m}{\underset{0}{S}}{}_{\sigma}\,[A_{\sigma,\varphi}\,\varphi^{m-\sigma}]=0, \qquad \text{...(1)}$$

und sagen, dass diese Gleichung dem $m$ten Grade angehört, sobald die mit $A_{s,\varphi}$ bezeichneten Coëfficienten algebraische ganze mit ganzen positiven Exponenten in Beziehung auf $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ bis zum $s$ten Grade reichende Polynome vorstellen. In Beziehung auf die Anzahl der zum Aufbaue von $A_{s,\varphi}$ nöthigen Zahlencoëfficienten ist es selbstverständlich, dass wir diese Anzahl ad minimum reduciren. Zu diesem Zwecke schaffen wir aus $A_{s,\varphi}$ mittelst der Relation $\cos\varphi^{2p}=[1-\sin^2\varphi]^p$ alle höheren Potenzen von $\cos\varphi$ weg, und erhalten schliesslich den Coëfficienten $A_{s,\varphi}$ in folgender Form:

$$A_{s,\varphi}=a_{s,0}+\overset{s}{\underset{1}{S}}{}_p\,[a_{s,p}\sin^p\varphi+a'_{s,p}\sin^{p-1}\varphi\cos\varphi]. \qquad \text{...(2)}$$

Hieraus findet man für specielle Werthe von φ und $s>0$

$$A_{s,0}=a_{s,0}+a'_{s,1},\quad A_{s,\pi}=a_{s,0}-a'_{s,1},$$

$$A_{s,\frac{\pi}{2}}=a_{s,0}+\overset{s}{\underset{1}{S}}{}_p\,(a_{s,p}),\quad A_{s,-\frac{\pi}{2}}=a_{s,0}-\overset{s}{\underset{1}{S}}{}_p\,(a_{s,p}), \qquad \text{...(3)}$$

$$A_{s,\frac{\pi}{4}}=a_{s,0}+\overset{s}{\underset{1}{S}}{}_p\,(a_{s,p}+a'_{s,p})\,2^{-\frac{p}{2}},\quad A_{s,-\frac{\pi}{4}}=a_{s,0}+\overset{s}{\underset{1}{S}}{}_p\,(a_{s,p}-a'_{s,p})(-1)^p\,2^{-\frac{p}{2}},\ \text{etc.}$$

dem Gesetze (2) nachbildend, können wir schreiben:

$$B_{s,\varphi} = b_{s,0} + \overset{s}{\underset{1}{S_p}} [b_{s,p} \sin^p \varphi + b'_{s,p} \sin^{p-1} \varphi \cos \varphi], \qquad \ldots(4)$$

$$C_{s,\varphi} = c_{s,0} + \overset{s}{\underset{1}{S_p}} [c_{s,p} \sin^p \varphi + c'_{s,p} \sin^{p-1} \varphi \cos \varphi], \ldots \text{etc.}$$

Im Verlaufe dieser Abhandlung werden wir eine Methode feststellen, welche uns in Stand setzt, Gleichungen der Form (1) für $m=1$ und $m=2$ graphisch aufzulösen, und auf diese Weise die diesen Gleichungen zukommenden reellen Wurzelwerthe der unbekannten Grösse φ angenähert zu bestimmen. Auf Grund einer leicht aufzustellenden Methode lassen sich dann die durch Zeichnung erlangten Initialwurzelwerthe mit jeder erwünschten Genauigkeit durch Rechnung ermitteln.

Für $m > 2$ werden wir die Auflösung nur in den speciellen Fällen vermitteln, wo solche Gleichungspolynome sich als Producte darstellen lassen aus ähnlichen Polynomen, welche höchstens dem zweiten Grade angehören.

Im Falle der möglichen Zerfällung der Gleichung (1) in zwei Factoren der Form:

$$(\varphi + B_{1,\varphi}) \quad \text{und} \quad (A_{0,\varphi}\varphi^{m-1} + C_{1,\varphi}\varphi^{m-2} + C_{2,\varphi}\varphi^{m-3} + \ldots + C_{m-2,\varphi}\varphi + C_{m-1})$$

erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$A_{s,\varphi} = C_{s,\varphi} + B_{1,\varphi} C_{s-1,\varphi} \quad \text{für} \quad s = 1, 2, \ldots m. \qquad \ldots(5)$$

Hieraus erhalten wir wegen $C_0 = A_0$ folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
C_{1,\varphi} &+ B_{1,\varphi} A_0 &- A_{1,\varphi} &= 0, \\
C_{2,\varphi} &+ B_{1,\varphi} C_{1,\varphi} &- A_{2,\varphi} &= 0, \\
C_{3,\varphi} &+ B_{1,\varphi} C_{2,\varphi} &- A_{3,\varphi} &= 0, \\
C_{m-2,\varphi} &+ B_{1,\varphi} C_{m-3,\varphi} &- A_{m-2,\varphi} &= 0, \\
C_{m-1,\varphi} &+ B_{1,\varphi} C_{m-2,\varphi} &- A_{m-1,\varphi} &= 0, \\
& B_{1,\varphi} C_{m-1,\varphi} &- A_{m,\varphi} &= 0.
\end{aligned} \qquad \ldots(6)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$(-1)^0 B_{1,\varphi}^{m-1}, \; (-1)' B_{1,\varphi}^{m-2}, \; (-1)^2 B_{1,\varphi}^{m-3}, \ldots (-1)^{m-3} B_{1,\varphi}^{2}, (-1)^{m-2} B'_{1,\varphi} . (-1)^{m-1} B_{1,\varphi}^{0},$$

so erhält man folgende von den mit C bezeichneten Coëfficienten freie Gleichung:

$$u_\varphi = A_0 B_{1,\varphi}^{m} - A_{1,\varphi} B_{1,\varphi}^{m-1} + A_{2,\varphi} B_{1,\varphi}^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} A_{m-1,\varphi} B_{1,\varphi} + (-1)^m A_{m,\varphi} = 0, \qquad \ldots(7)$$

welche aus der vorgelegten Gleichung hervorgeht, wenn in derselben die Potenzen von φ durch entsprechende Potenzen des Ausdrucks $-B_{1,\varphi}$ ersetzt werden.

Liefert diese Gleichung die Werthe von $-B_{1,\varphi}$ in endlicher Form und zwar in der Form

$$[b_{1,0} + b_1, \sin\varphi + b'_1, \cos\varphi],$$

so erhält man für jeden so erhaltenen Wurzelwerth die Gleichung:

$$\varphi + b_{1,0} + b_{1,1} . \sin\varphi + b'_{1,1} . \cos\varphi = 0, \qquad (\ldots 8)$$

welche in Beziehung auf die Unbekannte φ zu solchen Wurzeln φ leitet, die auch der Gleichung (1) angehören.

Die in der vorausgesetzten Form möglichen Auflösungen der Gleichung (7) müssen für jeden möglichen Werth von φ der Gleichung (7) genügen, und nur in Beziehung auf die Coëfficienten $b_{1,0}$, $b_{1,1}$, $b'_{1,1}$ bestimmte Zahlenwerthe erhalten.

Hieraus leitet sich ein einfaches und zwar folgendes Verfahren ab:

Aus (7) erhält man für $\varphi = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$ folgende Zahlengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0 \ldots \text{zur Bestimmung von } B_{1,0} = b_{1,0}+b'_{1,1},\\ u_\pi &= 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad B_{1,\pi} = b_{1,0}-b'_{1,1},\\ u_{\frac{\pi}{2}} &= 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad B_{1,\frac{\pi}{2}} = b_{1,0}+b_{1,1},\\ u_{-\frac{\pi}{2}} &= 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad B_{1,-\frac{\pi}{2}} = b_{1,0}-b_{1,1}, \end{aligned}\right\} \ldots(9)$$

nebst der leicht ersichtlichen Probegleichung:

$$B_{1,0}+B_{1,\pi} = B_{1,\frac{\pi}{2}}+B_{1,-\frac{\pi}{2}} = 2b_{1,0}. \qquad \ldots(10)$$

Die vier, zu dem $m$ten Grade gehörigen Gleichungen liefern je m Werthe von $B_{1,0}$, $B_{1,\pi}$, $B_{1,\frac{\pi}{2}}$, $B_{1,-\frac{\pi}{2}}$, welche der Probe (10) entsprechend zusammengesucht zur Bestimmung der Coëfficienten $b_{1,0}$, $b_{1,1}$, $b'_{1,1}$ in folgender Weise verwendet werden;

$$\left.\begin{aligned} b_{1,0} &= \frac{1}{2}(B_{1,0}+B_{1,\pi}) = \frac{1}{2}(B_{1,\frac{\pi}{2}}+B_{1,-\frac{\pi}{2}}),\\ b'_{1,1} &= \frac{1}{2}(B_{1,0}-B_{1,\pi}),\\ b_{1,1} &= \frac{1}{2}(B_{1,\frac{\pi}{2}}-B_{1,-\frac{\pi}{2}}), \end{aligned}\right\} \ldots(11)$$

Die auf diese Weise gewonnenen Werthsysteme von zusammengehörigen Zahlen $b_{1,0}$, $b_{1,1}$, $b'_{1,1}$, bilden jedesmal einen Factor

$$(\varphi+b_{1,0}+b_{1,1}\sin\varphi+b'_{1,1}\cos\varphi),$$

von (1), wenn der entsprechende Ausdruck

$$B_{1,\varphi} = b_{1,0}+b_{1,1}\sin\varphi+b'_{1,1}\cos\varphi, \qquad \ldots(12)$$

der Gleichung (7) Genüge leistet.

Beispielweise lässt sich die Gleichung

$$A_0\varphi^3+A_{1,\varphi}\varphi^2+A_{2,\varphi}\varphi+A_{3,\varphi} = 0, \qquad \ldots(13)$$

mit den Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 1,\\ A_{1,\varphi} &= 6+5\sin\varphi-\cos\varphi,\\ A_{2,\varphi} &= 10+24\sin\varphi-2\cos\varphi-3\sin^2\varphi-4\sin\varphi\cos\varphi,\\ A_{3,\varphi} &= 2+22\sin\varphi+2\cos\varphi+16\sin^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi-19\sin^3\varphi-17\sin^2\varphi\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \ldots(14)$$

in folgender Weise behandeln:

Man findet:

$$\left.\begin{aligned} A_{1,0} &= 5, & A_{2,0} &= 8, & A_{3,0} &= 4,\\ A_{1,\pi} &= 7, & A_{2,\pi} &= 12, & A_{3,\pi} &= 0,\\ A_{1,\frac{\pi}{2}} &= 11, & A_{2,\frac{\pi}{2}} &= 31, & A_{3,\frac{\pi}{2}} &= 21,\\ A_{1,-\frac{\pi}{2}} &= 1, & A_{2,-\frac{\pi}{2}} &= 17, & A_{3,-\frac{\pi}{2}} &= 15, \end{aligned}\right\} \ldots(15)$$

und hieraus

$$\begin{array}{llllll} u_0 & = B^3-\ 5B^2+\ 8B-\ 4=0 & \text{mit den Wurzeln} & 1,\ 2,\ 2, & & 1,\ 2,\ 2, \\ u_\pi & = B^3-\ 7B^2+12B\quad\ =0 & \text{„ „ „} & 0,\ 3,\ 4, & \text{oder} & 3,\ 4,\ 0, \\ u_{\frac{\pi}{2}} & = B^3-11B^2+31B-21=0 & \text{„ „ „} & 1,\ 3,\ 7, & & 7,\ 1,\ 3, \\ u_{-\frac{\pi}{2}} & = B^3-\ \ B^2-17B-15=0 & \text{„ „ „} & -1,\ -3,\ 5, & & -3,\ 5,\ -1, \end{array} \qquad \ldots(16)$$

In der letzten Anordnung der Wurzeln sind je vier untereinanderstehende Werthe von B der Probegleichung (10) angemessen zusammengefunden, und man findet schliesslich nach Anweisung in (11) für das System $b_{1,0}$, $b_{1,1}$, $b'_{1,1}$, folgende Zahlengruppen:

$$\begin{aligned} b_{1,0} &= \ \ 2,\ \ 3,\ 1, \\ b_{1,1} &= \ \ 5,\ -2,\ 2, \\ b'_{1,1} &= -1,\ -1,\ 1, \end{aligned} \qquad \ldots(17)$$

und demgemäss für das Polynom (13) folgende drei Factoren:

$$(\varphi+2+5\sin\varphi-\cos\varphi),\ (\varphi+3-2\sin\varphi-\cos\varphi);\ (\varphi+1+2\sin\varphi+\cos\varphi),$$

deren jeder mit einem der Gleichung

$$\varphi^3-A_{1,\varphi}\varphi^2+A_{2,\varphi}\varphi+A_{3,\varphi}=0,$$

genügenden $B_{1,\varphi}$ ausgestattet ist.

Die aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi+2+5\sin\varphi-\cos\varphi &= 0, \\ \varphi+3-2\sin\varphi-\cos\varphi &= 0, \\ \varphi+1+2\sin\varphi+\cos\varphi &= 0, \end{aligned} \qquad \ldots(18)$$

auf irgend eine Weise gezogenen Werthe von φ gelten als eben so viele Wurzeln der Gleichung (13).

Schwieriger ist die Absonderung eines möglichen dem zweiten Grad angehörigen Factors. Das hier einschlägige Verfahren wollen wir hier bei einer Gleichung vom vierten Grad andeuten.

Soll die Zerlegung des Polynoms

$$\varphi^4+A_{1,\varphi}\varphi^3+A_{2,\varphi}\varphi^2+A_{3,\varphi}\varphi+A_{4,\varphi}=0, \qquad \ldots(19)$$

in die Factoren

$$(\varphi^2+B_{1,\varphi}\varphi+B_{2,\varphi}) \quad \text{und} \quad (\varphi^2+C_{1,\varphi}\varphi+C_{2,\varphi})$$

möglich sein, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} A_{1,\varphi} &= C_{1,\varphi}+B_{1,\varphi}, \\ A_{2,\varphi} &= C_{2,\varphi}+C_{1,\varphi}B_{1,\varphi}+B_{2,\varphi}, \\ A_{3,\varphi} &= C_{3,\varphi}B_{1,\varphi}+C_{1,\varphi}B_{2,\varphi}, \\ A_{4,\varphi} &= C_{4,\varphi}B_{2,\varphi}. \end{aligned} \qquad \ldots(20)$$

Die Elimination von $C_{1,\varphi}$, $C_{2,\varphi}$ aus den Gleichungen 1, 2, 3 in (20) gibt

$$\Delta_\varphi = \begin{vmatrix} 0, & 1, & (B_{1,\varphi}-A_{1,\varphi}) \\ 1, & B_{1,\varphi}, & (B_{2,\varphi}-A_{2,\varphi}) \\ B_{1,\varphi}, & B_{2,\varphi}, & -A_{3,\varphi} \end{vmatrix} = 0. \qquad \ldots(21)$$

Ebenso gibt die Elimination dieser Grössen aus 1, 3, 4 in (20)

$$\delta_\varphi = \begin{vmatrix} 1, & B_{1,\varphi}, & (B_{2,\varphi}-A_{2,\varphi}) \\ B_{1,\varphi}, & B_{2,\varphi}, & -A_{3,\varphi} \\ B_{2,\varphi}, & 0, & -A_{4,\varphi} \end{vmatrix} = 0. \qquad \ldots(22)$$

Für

$$\varphi = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},$$

erhält man aus (21) und (22) folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llllll}
\Delta_0 & = \mathfrak{d}_0 & = 0 \text{ zur Bestimmung von } & B_{1,0} = b_{1,0}+b'_{1,1}, & B_{2,0} = b_{2,0}+b'_{2,1}, & \\
\Delta_\pi & = \mathfrak{d}_\pi & = 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & B_{1,\pi} = b_{1,0}-b'_{1,1}, & B_{2,\pi} = b_{2,0}-b'_{2,1}, & \\
\Delta_{\frac{\pi}{2}} & = \mathfrak{d}_{\frac{\pi}{2}} & = 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & B_{1,\frac{\pi}{2}} = b_{1,0}+b_{11}, & B_{2,\frac{\pi}{2}} = b_{2,0}+b_{2,1}+b_{22}, & \ldots(23) \\
\Delta_{-\frac{\pi}{2}} & = \mathfrak{d}_{-\frac{\pi}{2}} & = 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & B_{1,-\frac{\pi}{2}} = b_{1,0}-b_{1,1}, & B_{2,-\frac{\pi}{2}} = b_{2,0}-b_{2,1}+b_{22}, &
\end{array}$$

nebst den Probegleichungen:

$$B_{1,0}+B_{1,\pi} = B_{1,\frac{\pi}{2}}+B_{1,-\frac{\pi}{2}} = 2b_{1,0}. \qquad \ldots(24)$$

Die vier Systeme von je zwei Gleichungen liefern verschiedene Werthsysteme von $B_{1,0}$, $B_{2,0}$; $B_{1,\pi}$, $B_{2,\pi}$; $B_{1,\frac{\pi}{2}}$, $B_{2,\frac{\pi}{2}}$; $B_{1,-\frac{\pi}{2}}$, $B_{2,-\frac{\pi}{2}}$, welche der Probegleichung entsprechend zusammengesucht zur Bestimmung der Zahlencoëfficienten $b_{1,0}$, $b_{1,1}$, $b'_{1,1}$, $b_{2,0}$, $b_{2,1}$, $b'_{2,1}$, $b_{2,2}$, $b'_{2,2}$ in folgender Weise verwendet werden.

$$\begin{aligned}
b_{1,0} &= \frac{1}{2}(B_{1,0}+B_{1,\pi}) = \frac{1}{2}(B_{1,\frac{\pi}{2}}+B_{1,-\frac{\pi}{2}}), \\
b_{2,0} &= \frac{1}{2}(B_{2,0}+B_{2,\pi}), \\
b'_{1,1} &= \frac{1}{2}(B_{1,0}-B_{1,\pi}), \\
b'_{2,1} &= \frac{1}{2}(B_{2,0}-B_{2,\pi}), \qquad \ldots(25) \\
b_{2,1} &= \frac{1}{2}(B_{1,\frac{\pi}{2}}-B_{1,-\frac{\pi}{2}}), \\
b_{2,1} &= \frac{1}{2}(B_{2,\frac{\pi}{2}}-B_{2,-\frac{\pi}{2}}), \\
b_{2,2} &= \frac{1}{2}[(B_{2,\frac{\pi}{2}}+B_{2,-\frac{\pi}{2}})-(B_{2,0}+B_{2,\pi})]
\end{aligned}$$

und schliesslich erhält man aus der Gleichung

$$\mathfrak{d}_{\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad \ldots(26)$$

die noch unbekannte Grösse b'_{22}.

Ein in dieser Weise zusammengestellter Ausdruck

$$\varphi^2+B_{1,\varphi}\varphi+B_{2,\varphi}$$

bildet auf Grund des in (25) und (26) gewonnenen Coëfficientensystems $[b_{1,0},\ b'_{2,2},\ b_{1,1},\ b'_{1,1},\ b_{2,0},\ b_{2,1},\ b'_{2,1},\ b_{2,2}]$ nur dann einen wirklichen endlichen Factor des Gleichungspolynoms (19), wenn die zugehörigen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
B_{1,\varphi} &= b_{1,0}+b_{1,1}\sin\varphi+b'_{1,1}\cos\varphi \\
B_{2,\varphi} &= b_{2,0}+b_{2,1}\sin\varphi+b'_{2,1}\cos\varphi+b_{2,2}\sin^2\varphi+b'_{2,2}\cos\varphi\sin\varphi,
\end{aligned}$$

den Gleichungen (21) und (22) genügen.

Manchmal gewährt es einen Vortheil, die Gleichung (1) zu transformiren, indem man in derselben die Unbekannte φ durch $(\psi+\alpha)$ ersetzt.

Eine derartige Transformation wollen wir beispielweise bei einer Gleichung zweiten Grades durchführen. Zu diesem Zwecke erhalten wir:

$$A_{1,\psi+\alpha} = a_{10} + [a_{1,1}\cos\alpha - a'_{1,1}\sin\alpha]\sin\psi + [a_{1,1}\sin\alpha + a'_{1,1}\cos a]\cos\psi,$$

$$\begin{aligned} A_{2,\psi+\alpha} = a_{2,0} + \frac{1}{2}a_{2,2} - \frac{1}{2}(a_{2,2}\cos 2\alpha - a'_{22}\sin 2\alpha) + (a_{2,1}\cos\alpha - a'_{2,1}\sin\alpha)\sin\psi + \\ + (a_{21}\sin 2\alpha + a'_{2,1}\cos\ \alpha)\cos\psi + (a_{22}\cos 2\alpha - a'_{12}\sin 2\alpha)\sin^2\psi + \\ + (a_{22}\sin\ \alpha + a'_{2,2}\cos 2\alpha)\cos\psi\sin\psi, \end{aligned} \qquad \ldots(27)$$

und schliesslich die dem zweiten Grade angehörige Gleichung

$$A_0\varphi^2 + A_{1,\varphi}\varphi + A_{2,\varphi} = 0 \qquad \ldots(28)$$

in folgender Form:

$$B_0\psi^2 + B_{1,\psi}\psi + B_{2,\psi} = 0 \qquad \ldots(29)$$

mit den Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ b_{1,0} &= 2\alpha A_0 + a_{1,0}, \\ b_{1,1} &= a_{1,1}\cos\alpha - a'_{1,1}\sin\alpha, \\ b'_{1,1} &= a_{1,1}\sin\alpha + a'_{1,1}\sin\alpha, \\ b_{2,0} &= \alpha^2 A_0 + \alpha a_{1,0} + a_{2,0} + \frac{1}{2}a_{22} + \frac{1}{2}(a'_{22}\sin 2\alpha - a_{22}\cos 2\alpha), \\ b_{2,1} &= \cos\alpha(\alpha a_{1,1} + a_{2,1}) - \sin\alpha(\alpha a'_{1,1} + a'_{2,1}), \\ b'_{2,1} &= \cos\alpha(\alpha a'_{1,1} + a'_{2,1}) + \sin\alpha(\alpha a_{1,1} + a_{2,1}), \\ b_{2,2} &= a_{2,2}\cos 2\alpha - a'_{2,2}\sin 2\alpha, \\ b'_{2,2} &= a_{2,2}\sin 2\alpha + a'_{2,2}\cos 2\alpha. \end{aligned} \qquad \ldots(30)$$

Die Wurzeln der Gleichung (29) gestalten sich zu eben so vielen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung (28), sobald man eine jede derselben um den Bogen α verlängert.

§. 3.

Fortsetzung.

Die Gleichung

$$\overset{n}{\underset{0}{S}}{}_{\sigma}[A_{\sigma,\varphi}\varphi^{n-\sigma}] = 0, \qquad \ldots(1)$$

lässt sich als ein Resultat der Coexistenz der Gleichungen:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ x &= f_1(\sin\varphi, \cos\varphi), \\ y &= f_2(\sin\varphi, \cos\varphi), \\ z &= f_3(\sin\varphi, \cos\varphi) \end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

auffassen, sobald alle diese Functionsformen in Bezug auf die drei Variabeln φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ algebraische ganze mit ganzen und positiven Exponenten versehene Polynome darstellen.

Die erste der Gleichungen stellt mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von x, y, z bezogen auf ein beliebigwinkliges Axensystem eine Fläche vor, während die drei übrigen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit x, y, z, φ eine Curve im Raume repräsentiren. Ein jeder der Fläche und der räumlichen Curve gemeinschaftlich angehörige Punkt liefert bestimmte Werthe von x, y, z, welche wieder mit Hilfe Einer der drei letzten Gleichungen zu Werthen der Bogenzahl φ führen, welche die Gleichung (1) erfüllen und demgemäss als Wurzeln dieser Gleichung auftreten.

Gelingt es, die Gleichungen (2) derart zu bestimmen, dass man mit der Darstellung der Fläche und Curve weiter keine Schwierigkeit hat, so wird es auch leicht sein, mit Hilfe der beschreibenden Geometrie ihre sämmtlichen gemeinschaftlichen Punkte ausfindig zu machen, und schliesslich auch das vollständige der Gleichung (1) angehörige System von reellen Wurzeln darzustellen, sobald wenigstens Eine der drei letzten Gleichungen in (2) eine unmittelbare Auflösung in Bezug auf die Bogenzahl φ gestattet.

Der eben besagten Forderung gemäss liesse sich eines von den Gebilden (Fläche, Curve) nämlich die Curve durch die sehr einfachen Gleichungen.

$$x = \varphi - \rho \sin\varphi,\ y = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi \qquad \ldots(3)$$

fixiren, und denselben gemäss in die Gleichung (1) die Substitutionen

$$\sin\varphi = \frac{z}{\rho},\ \cos\varphi = \frac{y}{\rho},\ \varphi = x + z \qquad \ldots(4)$$

durchführen, um sofort zur Gleichung der zur constructiven Auflösung der Gleichung (1) erforderlichen Fläche zu gelangen.

Aus (4) hat man

$$z^2 + y^2 = \rho^2, \qquad \ldots(5)$$

und sieht ein, dass die in (3) dargestellte Curve sich auf die Ebene yz als eine mit ρ beschriebene Kreislinie, und auf die Ebene xy als eine mit dem Cycloïdalradius ρ mit meinem Cycloïdograph sehr leicht graphisch darstellbare Cycloïde projicirt. Mit Hilfe der elementarsten Anweisung der beschreibenden Geometrie bestimmt sich unmittelbar die Projection dieser Curve auf die Bildebene xz.

Über den Radius ρ lässt sich derart verfügen, dass hiedurch die Darstellbarkeit der resultirenden Hilfsfläche erleichtert wird.

Für den speciellen Fall einer Gleichung des ersten Grades

$$A_0\varphi + A_{1,\varphi} = 0 \qquad \ldots(6)$$

erhält man in Folge der Substitutionen (4)

$$A_0(x+z) + a_{1,0} + a_{1,1}\frac{z}{\rho} + a'_{1,1}\frac{y}{\rho} = 0,$$

$$A_0 x + \frac{a'_{1,1}}{\rho}y + \left(A_0 + \frac{a_{1,1}}{\rho}\right)z + a_{1,0} = 0, \qquad \ldots(7)$$

für beliebiges ρ die Gleichung einer Ebene, welche die obenerwähnte Curve in Punkten begegnet, deren entsprechende Werthe von φ eben so viele Wurzeln der vorgelegten Gleichung (6) ausmachen.

Dieselbe Methode auf die transformirte Gleichung

$$A_0\left(\varphi' + \frac{\pi}{2}\right) + A_{1,\left(\varphi'+\frac{\pi}{2}\right)} = 0 \qquad \ldots(8)$$

angewendet, liefert die Gleichung der Ebene

$$A_0 x + \frac{a_{1,1}}{\rho}y + \left(A_0 - \frac{a'_{1,1}}{\rho}\right)z + \left(A_0\frac{\pi}{2} + a_{1,0}\right) = 0, \qquad \ldots(9)$$

welche durch ihre Begegnung mit der Hilfscurve zu den um $\frac{\pi}{2}$ verminderten Wurzeln von (6) führt.

Da in (6) von den Coëfficienten $a_{1,1}$ und $a'_{1,1}$ wenigstens Einer als von Null verschieden gedacht wird, so lässt sich durch schickliche Wahl von ρ die erhaltene Gleichung der Ebene (7) und beziehungsweise (9) dahin vereinfachen, dass in derselben der Coëfficient von z verschwindet. Demgemäss erhält man für $a_{1,1} \lesseqgtr 0$, $\rho = -\frac{a_{1,1}}{A_0}$ aus (7)

$$A_0 x - A_0\frac{a'_{1,1}}{a_{1,1}}y + a_{1,0} = 0. \qquad \ldots(10)$$

Ebenso für $a'_{1,1} \gtrless 0$ $\rho = -\frac{a'_{1,1}}{A_0}$ aus (19)

$$A_0 x + A_0 \frac{a_{1,1}}{a'_{1,1}} y + \left(A_0 \frac{\pi}{2} + a_{1,0}\right) = 0, \qquad \ldots(11)$$

in jedem Falle also die Gleichung einer zur z-Axe parallelen Ebene, welche nebstdem auf die Axe ox senkrecht zu stehen kommt, sobald in (10) $a'_{1,1} = 0$, oder in (11) $a_{1,1} = 0$ ausfällt.

Durch die Wahl eines solchen Werthes von ρ ergibt sich die Auflösung der Gleichung (6) als eine Folge der sehr einfachen Bestimmung der Durchschnittspunkte der Geraden (10) und beziehungsweise der Geraden (11) mit der nun leicht darzustellenden Cycloïde ...(12)

$$[x = \varphi - \rho \sin\varphi,\ y = \rho\cos\varphi].$$

Eine Gleichung der Form:

$$A_0\varphi + A_1, \cos^2\varphi + A_2 \sin^2\varphi + A_3 = 0 \qquad \ldots(13)$$

lässt sich bei constanten Zahlenwerthen A_0, A_1, A_2, A_3 auch so schreiben:

$$\frac{A_0}{2}(2\varphi) + \frac{A_1}{2}(1+\cos(2\varphi)) + \frac{A_2}{2}(1-\cos(2\varphi)) + A_3 = 0,$$

oder für $2\varphi = \varphi'$

$$A_0\varphi' + (A_1 - A_2)\cos\varphi' + (A_1 + A_2 + 2A_3) = 0, \qquad \ldots(14)$$

welche Form dann ebenso, wie die Gleichung (1) aufgelöst solche Werthe von φ' liefert, welche halbirt die verlangten Wurzeln der Gleichung (13) ausmachen.

Für $A_0 = 0$ erscheint die Gleichung (1) in der Form:

$$a_{1,0} + a_{1,1}\sin\varphi + a'_{1,1}\cos\varphi = 0, \qquad \ldots(15)$$

welche für $\cos\varphi = y$ $\sin\varphi = z$ zum Systeme von folgenden zwei Gleichungen führt:

$$a_{1,0} + a_{1,1} z + a'_{1,1} y = y^2 + z^2 - 1 = 0, \qquad \ldots(16)$$

wodurch besagt wird, dass zwei mögliche Durchschnittspunkte zwischen den in (16) bestimmten Gebilden (Gerade und Kreislinie) zu ebenso vielen entsprechenden Bogenzahlen φ verhelfen, welche die Auflösung der Gleichung (15) bilden. Erfolgt zwischen der Geraden und der Kreislinie kein Durchschnitt, dann sind die Wurzeln der Gleichung (15) complex.

Für die Gleichung zweiten Grades:

$$A_0\varphi^2 + A_{1,\varphi}\varphi + A_{2,\varphi} = 0. \qquad \ldots(17)$$

findet man in Folge der Substitutionen (4)

$$u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + u_{33}z^2 + 2u_{12}xy + 2u_{23}yz + 2u_{31}zx + 2u_1x + 2u_2y + 2u_3z + u_0 = 0, \qquad \ldots(18)$$

mit den Bestimmungsgleichungen:

$$u_{11} = A_0,\ u_{22} = -\frac{(a_{1,1}\rho + a_{2,2})}{\rho^2},\ u_{33} = A_0,\ 2u_{12} = \frac{a_{1,1}}{\rho},\ 2u_{23} = \frac{(a'_{1,1}\rho + a'_{2,2})}{\rho^2},$$

$$2u_{31} = \frac{2A_0\rho + a_{11}}{\rho},\ 2u_1 = a_{1,0},\ 2u_2 = \frac{a'_{2,1}}{\rho},\ 2u_3 = a_{1,0} + \frac{a_{2,1}}{\rho},\ u_0 = a_{2,0} + a_{2,2} + \rho a_{1,1}. \qquad \ldots(19)$$

Für die complementäre Gleichung

$$A_0\left(\varphi' + \frac{\pi}{2}\right)^2 + A_{1,(\varphi'+\frac{\pi}{2})}\left(\varphi' + \frac{\pi}{2}\right) + A_{2,(\varphi'+\frac{\pi}{2})} = 0$$

oder

$$B_0 \varphi'^2 + B_{1,\varphi'} \varphi' + B_{2,\varphi'} = 0, \qquad \text{...(20)}$$

wo

$$B_0 = A_0,\; b_{1,0} = \pi A_0 + a_{1,0},\; b_{1,1} = -a'_{1,1},\; b'_{1,1} = a_{1,1},$$

$$b_{2,0} = A_0 \frac{\pi^2}{4} + a_{1,0}\frac{\pi}{2} + a_{2,0} + a_{2,2},$$

$$b_{2,1} = -\frac{\pi}{2} a'_{1,1} - a'_{2,1},\; b'_{2,1} = \frac{\pi}{2} a_{1,1} + a_{2,1}, \qquad \text{...(21)}$$

$$b_{2,2} = -a_{2,2},\; b'_{2,2} = -a'_{2,2}$$

und demgemäss

$$u'_{11} x^2 + u'_{22} y^2 + u'_{33} z^2 + 2u'_{12} xy + 2u'_{23} yz + 2u'_{31} zx + 2u'_1 x + 2u'_2 y + 2u'_3 z + u'_0 = 0 \qquad \text{...(22)}$$

mit den Bestimmungsgleichungen:

$$u'_{11} = A_0,\; u'_{22} = \frac{a'_{1,1}\rho + a_{2,2}}{\rho^2},\; u'_{33} = A_0,$$

$$2u'_{12} = \frac{a_{1,1}}{\rho},\; 2u'_{23} = \frac{a_{1,1}\rho - a'_{2,1}}{\rho^2},\; 2u'_{3,1} = \frac{2A_0\rho - a'_{1,1}}{\rho},$$

$$2u'_1 = \pi A_0 + a_{1,0},\; 2u'_2 = \frac{\pi a_{1,1} + 2a_{2,1}}{2\rho},\; 2u'_3 = \frac{\rho[\pi A_0 + a_{1,0}] - \left(a'_{1,1}\frac{\pi}{2} + a'_{2,1}\right)}{\rho}, \qquad \text{...(23)}$$

$$u'_0 = A_0 \frac{\pi^2}{4} + a_{1,0}\frac{\pi}{2} + a_{2,0} - a'_{1,1}\rho.$$

Die Gleichungen in (18) und (22) deuten je auf eine Fläche zweiter Ordnung, welche mit ihren Durchschnittspunkten mit der oben erwähnten Hilfscurve zu entsprechenden Bogenzahlen φ und beziehungsweise zu den Bogenzahlen φ' führen. Nach Erschöpfung aller Begegnungspunkte bilden die Werthe von φ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (17). Die Bogenzahlen φ' werden es erst dann sein, wenn man jede derselben um $\frac{\pi}{2}$ vergrössert.

Nun handelt es sich um die zweckmässigste Wahl von ρ, um hiedurch eine möglichst leicht darstellbare Hilfsfläche zweiter Ordnung zu erhalten.

I. Ist in der vorgelegten Gleichung (17) A_0 von Null verschieden, so können wir $A_0 = 1$ setzen. Sei nun

$$A_0 = 1,\; a_{11} \gtrless 0. \qquad \text{...(24)}$$

Hier setze man:

$$u_{3,1} = \frac{2A_0\rho + a_{1,1}}{\rho} = 0,$$

und erhält

$$\rho = \frac{-a_{1,1}}{2}, \qquad \text{...(25)}$$

und in Folge dessen die Hilfsfläche (18) als eine solche, welche parallel zur Bildebene xz geschnitten, lauter Kreislinien liefert.

Für

$$A_0 = 1,\; a_{11} \gtrless 0 \;\text{ und }\; \rho = \frac{a'_{1,1}}{2}, \qquad \text{...(25)}'$$

wird die Hilfsfläche (22) parallel zur Bildebene xz in lauter Kreislinien geschnitten.

Für irgend einen Werth von y etwa $y = \eta$ erhält man aus (18) die Kreisschnittlinie

$$x^2 + z^2 + 2x(u_{12}\eta + u_1) + 2z(u_{23}\eta + u_3) + [a_{22}\eta^2 + 2u_2\eta + u_0] = 0, \qquad \text{...(26)}$$

und ihren Mittelpunkt (ξ, ζ) durch die Gleichungen:

$$\xi + u_{12}\eta + u_1 = 0, \ \zeta + u_{23}\eta + u_3 = 0 \qquad \ldots(27)$$

bestimmt.

Betrachtet man $(\xi\ \eta\ \rho)$ als laufende Coordinaten, so drücken die Gleichungen (27) diejenige Gerade aus, in welcher die Mittelpunkte der sämmtlichen Kreisschnitte liegen.

Bezeichnet man mit λ, μ, ν die Cosinuse derjenigen Winkel, welche irgend eine Richtung mit den Axen ox, oy, oz einschliesst, so hat man vor Allem die Gleichung der zur Richtung λ, μ, ν conjugirten Durchmesserebene

$$(u_{11}\lambda + u_{12}\mu + u_{13}\nu)x + (u_{21}\lambda + u_{22}\mu + u_{2,3}\nu)y + (u_{31}\lambda + u_{32}\mu + u_{33}\nu)z + (u_1\lambda + u_2\mu + u_3\nu) = 0. \qquad \ldots(28)$$

Soll diese Ebene zur xz parallel sein, so erhält man zur Bestimmung der zur xz-Ebene zugehörigen conjugirten Richtung λ, μ, ν folgende Gleichungen:

$$u_{11}\lambda + u_{12}\mu + u_{13}\nu = u_{3,1}\lambda + u_{32}\mu + u_{33}\nu = 0. \qquad \ldots(29)$$

Da diesfällig

$$u_{3,1} = 0, \ u_{11} = u_{33} = 1,$$

so erhält man aus (29)

$$\frac{\lambda}{\mu} = -u_{12}\, \frac{\nu}{\mu} = -u_{23}, \qquad \ldots(30)$$

woraus ersichtlich ist, dass diese Richtung mit der Richtung der Mittelpunktsgeraden (27) übereinstimmt.

Die durch die zweite Gleichung in (27) gegebene Ebene enthält in sich die Mittelpunktsgerade und ist zur Axe ox parallel. Schneidet man mit dieser Ebene die Hilfsfläche (18), so erhält man die Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene xy, indem man aus (18) und der Gleichung $z + u_{23}y + u_3 = 0$ die Ordinate z eliminirt. Dies gibt:

$$x^2 + (u_{22} - u_{23}^2)y^2 + 2u_{12}xy + 2u_1x + 2(u_2 - u_3u_{23})y + (u_0 - u_3^2) = 0. \qquad \ldots(31)$$

Bezieht man die durch diese Gleichung gegebene Projectionslinie auf die Axen $ox' \,||\, ox$ und $oy' \,||\, [x + u_{12}y + u_1 = 0]$, so erhält man die entsprechende Transformirte von (31) im Folgenden:

$$(x' + u_1)^2 + \frac{(u_{22} - u_{12}^2 - u_{23}^2)}{1 + u_{12}^2}\, y'^2 + \frac{2(u_2 - u_1u_{12} - u_3u_{23})}{(1 + u_{22}^2)^{\frac{1}{2}}}\, y' + (u_0 - u_3^2 - u_{12}^2) = 0. \qquad \ldots(32)$$

Dieses offenbar auf conjugirte Axenrichtungen bezogene Gebilde deutet im Allgemeinen auf eine Ellipse oder Hyperbel hin, je nachdem der Ausdruck $(u_{22} - u_{12}^2 - u_{23}^2)$ positiv oder negativ sich gestaltet. Wird jedoch $u_{22} - u_{12}^2 - u_{32}^2 = 0$, so entspricht die Gleichung (32) einer Parabel. In jedem dieser Fälle sind die in den erwähnten conjugirten Axenrichtungen liegenden Parameter leicht zu construiren, und man erfährt schliesslich, ob die Curve (32)

im 1. Falle als eine wirkliche Ellipse oder vielleicht als eine Kreislinie, ein Punkt oder gar als eine imaginäre Ellipse;

im 2. Falle als eine gewöhnliche Hyperbel oder als ein Paar zweier sich schneidenden Geraden:

im 3. Falle als eine gewöhnliche Parabel, oder als ein Paar paralleler oder auch zusammenfallender Geraden, oder endlich als ein Paar von parallelen imaginären Geraden sich gestaltet.

Deutet nun die Gleichung (32) auf ein reelles Gebilde hin, so bildet dieses Gebilde die Projection der Leitlinie, längs welcher die veränderliche, parallel sich verschiebende Kreislinie die Hilfsfläche (18) beschreibt. Ist hingegen das Gebilde in (32) imaginär, so fällt auch die Hilfsfläche (18) imaginär aus, und die Gleichung (17) besitzt in einem solchen Falle gar keine reelle Wurzel. Die Gleichung (17) hat auch dann keine reelle Auflösung, wenn eine wirklich existirende Hilfsfläche (18) von der Hilfscurve gar nicht getroffen wird.

In Bezug auf die reelle, bereits dargestellte Leitlinienprojection ist noch für den Zeichner der besondere Vortheil zu notiren, dass dann jede ihrer zur ox parallelen Sehnen schon die Länge des zugehörigen Erzeugungs-Kreisdurchmessers angibt.

Im Falle der nothwendig einzubeziehenden Hilfsfläche (22) bezieht man die Leitlinienprojection ebenfalls aus (32), sobald man die mit u bezeichneten Coëfficienten je mit einem Striche behaftet sich ...(33) denkt, und ihre Werthe aus (23) berechnet.

Diesfällig wären hiemit für die beschreibende Darstellung alle Vorbereitungen erschöpft, auf deren Grundlage man sehr leicht zu den Durchschnittspunkten der Hilfsfläche mit der Hilfscurve und schliesslich zu den entsprechenden sämmtlichen reellen Wurzeln der Gleichung (17) gelangt.

(I)'. Für $A_0 = 1$, $a_{1,1} = a'_{1,1} = 0$ und $a_{22} < 0$ setze man:

$$u_{22} = -a_{22} : \rho^2 = 1\,, \quad \rho = \sqrt{-a_{22}} \qquad \text{...(34)}$$

und erhält in (18) eine Hilfsfläche, welche parallel zur Ebene xy in Kreislinien geschnitten wird. Für $a_{22} > 0$ erhält man $\rho = \sqrt{a_{22}}$, und es wird diesfällig die Hilfsfläche (22) parallel zur Ebene xy in Kreislinien geschnitten. Der Fall $A_0 = 1$, $a_{1,1} = a'_{1,1} = a_{2,2} = 0$ und $u'_{2,2} \gtrless 0$ gibt nach (30) für $\varphi = \varphi' \pm \frac{\pi}{4}$ $b_{22} = \mp a'_{22}$ und hiemit eine zum Fall (I)' gehörige Hilfsfläche.

(I)''. Im Fall $A_0 = 1$, $a_{1,1} = a'_{1,1} = a_{2,2} = a'_{2,2} = 0$ erscheint für beliebig gewähltes ρ die Hilfsfläche als ein parabolischer Cylinder und lässt sich leicht als eine Folge congruenter Parabeln, oder als eine Folge von parallelen Geraden darstellen.

Ist überhaupt $u_{1,1} = u_{3,3}$, und $\pm \frac{u_{1,3}}{u_{1,1}} < 1$, so setze man $u_{1,3} = u_{1,1} \cos\beta$, um auf Grund des Axensystems

$$\cos \sphericalangle xoy = \cos \sphericalangle yoz = 0\,, \quad \cos \sphericalangle xoz = \cos\beta = u_{1,3} : u_{1,1} \qquad \text{...(35)}$$

zu einer Hilfsfläche zu gelangen, welche parallel zur Ebene, xz in Kreisen geschnitten wird.

Beispielsweise erhält man aus

$$u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + u_{33}z^2 + 2u_{12}xy + 2u_{23}yz + 2u_{31}zx + 2u_1x + 2u_2y + 2u_3z + u_0 \qquad \text{...(36)}$$

und etwa den Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &u_{11} = u_{22} = 1,\ u_{33} = -\frac{a_{22}}{4},\ 2u_{12} = 0,\ 2u_{23} = \frac{a'_{22}}{4},\ 2u_{31} = 1, \\ &2u_1 = a_{1,0},\ 2u_2 = \frac{a'_{2,1}}{2},\ 2u_3 = a_{1,0} + \frac{a_{2,1}}{2},\ u_0 = a_{2,0} + a_{22}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(37)}$$

als Gleichung der Hilfsfläche:

$$x^2 + z^2 + 2\cos 60^\circ . zx + a_{1,0}x + \left(\frac{a'_{22}}{4}y + a_{1,0} + \frac{a_{2,1}}{2}\right)z + \left[-\frac{a_{22}}{4}y^2 + \frac{a'_{2,1}}{2}y + (a_{2,0} + a_{2,2})\right] = 0. \qquad \text{...(38)}$$

Für ein beliebiges y etwa $y = \eta$ erhält man die zu xz parallel geführte Durchschnittslinie durch die Gleichung

$$x^2 + z^2 + 2\cos 60^\circ\, zx + a_{1,0}x + \left(\frac{a'_{2,2}}{4}\eta + a_{1,0} + \frac{a_{2,2}}{2}\right)z + \left[-\frac{a_{2,2}}{2}\eta^2 + \frac{a'_{2,1}}{2}\eta + (a_{2,0} + a_{2,2})\right] = 0. \qquad \text{...(39)}$$

Einer aus dem Mittelpunkte (ξ, ζ) mit dem Radius r beschriebene Kreislinie entspricht wegen $\sphericalangle xoz = \beta = 60^\circ$ folgende Gleichung:

$$(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2 + (x-\xi)(z-\zeta) = r^2$$

oder ...(40)

$$x^2 + z^2 + 2\cos 60^\circ\, xz + x[-2\xi - \zeta] + z[-2\zeta - \xi] = r^2 - \xi^2 - \zeta^2 - \xi\zeta.$$

Die Gleichung (39) mit (40) verglichen, gibt die Relationen:

$$
\begin{aligned}
&-2\xi-\zeta = a_{1,0},\\
&-2\zeta-\xi = a_{1,0}+\frac{a_{2,1}}{2}+\frac{a'_{2,2}}{4}\eta, \\
&-\frac{a_{2,2}}{4}\eta^2+\frac{a'_{2,1}}{2}\eta+a_{2,0}+a_{2,2} = \xi^2+\zeta^2+\xi\zeta-r^2,
\end{aligned}
\qquad \text{...(41)}
$$

aus welcher auf Grund eines angenommenen η die Werthe von ξ, ζ, r berechnet werden können.

Hieraus ist zu ersehen, dass die Hilfsfläche (38) parallel zur Ebene xz des in (34) angenommenen Axensystemes in lauter nach (41) näher zu bestimmenden Kreislinien geschnitten wird.

Die ersten zwei Gleichungen in (41) bestimmen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Coordinaten ζ, η, ξ diejenige Gerade, welche die Mittelpunkte sämmtlicher oben erwähnter Durchschnittskreislinien verbindet. Aus denselben erhält man für diese Mittelpunktsgerade die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen xy, yz, xz im Folgenden:

$$
\begin{aligned}
12\xi-a'_{2,2}\eta &= 2a_{2,1}-4a_{1,0},\\
6\zeta+a'_{2,2}\eta &= -2a_{1,0}-2a_{2,1},\\
\zeta+2\xi &= -a_{1,0}.
\end{aligned}
\qquad \text{...(42)}
$$

Nachdem wir die Mittelpunktslinie bereits besitzen, suchen wir für den Veränderlichen parallel zur zx-Ebene sich bewegenden Erzeugungskreis die zugehörige Leitlinie, damit er während der Bewegung die Hilfsfläche (38) beschreibe.

Zu diesem Zwecke schneiden wir die Fläche (38) mit der durch die zweite der Gleichungen (42) bestimmten, die Mittelpunktslinie enthaltenden, zur ox parallelen Ebene, und suchen die Projection dieser Schnittlinie auf die xy-Ebene. Diese erhält man, wenn man aus der Gleichung $6z+a'_{2,2}y = -2(a_{1,0}+a_{2,1})$ und der Gleichung (38) die Ordinate z elliminirt. Hiedurch erhalten wir:

$$
x^2-\frac{(18a_{2,2}+a'^2_{2,2})}{72}y^2-\frac{a'_{2,2}}{6}xy+\frac{(2a_{1,0}-a_{2,1})}{3}x+\frac{(18a'_{2,1}-a'_{2,2}(5a_{1,0}+2a_{2,1}))}{36}y+
$$
$$
+\left[a_{2,0}+a_{2,2}-\frac{1}{18}[4a^2_{1,0}+a^2_{2,1}+5a_{1,0}a_{2,1}]\right] = 0. \qquad \text{...(43)}
$$

Transformirt man diese Gleichung auf die Axen $ox' \parallel ox$ und $oy' \parallel \{12x-a'_{2,2}y = 2a_{2,1}-4a_{1,0}\}$, so erhält man für $v^2 = 144+a'^2_{22}$

$$
x^2-\frac{3y^2}{v^2}(a'^2_{2,2}+12a_{2,2})+(2a_{1,0}-a_{2,1})\frac{x}{3}+(6a'_{2,1}-a'_{2,2}(a_{1,0}+a_{2,1}))\frac{y}{v}+
$$
$$
+\left[a_{2,0}+a_{2,2}-\frac{(4a^2_{1,0}+a^2_{2,1}+5a_{1,0}a_{2,1})}{18}\right] = 0. \qquad \text{...(44)}
$$

Hieraus ersieht man, dass die in (43) oder (44) bestimmte Projection der Leitlinie die Richtung der Axe ox und die Richtung der Mittelpunktlinienprojection als conjugirte Richtungen besitzt, und dass eben die Projection $[12x-a'_{2,2}y = 2a_{2,1}-4a_{1,0}]$ den Durchmesser der Linie (34) ausmacht. Jede zu (34) gehörige zur ox parallele Sehne stellt die wahre Länge des Durchmessers des zugehörigen Erzeugungskreises vor und bietet bei der Ausmittlung der Begegnungspunkte der Hilfsfläche mit der Hilfscurve dieselben Vortheile, wie die oben beschriebenen Sehnen der Linie (32).

(I)'''. Zu den besonders günstigen Fällen gehört derjenige hin, wo in (18) für ein passendes ρ die Coëfficienten u_3, u_{31}, u_{32} gleichzeitig verschwinden.

Diesfällig bestehen folgende Relationen:

$$
a_{1,0}\rho+a_{2,1} = 2A_0\rho+a_{1,1} = a'_{1,1}\rho+a'_{2,2} = 0, \qquad \text{...(45)}
$$

und im Gefolge derselben:

$$\rho = -\frac{a_{2,1}}{a_{1,0}} = -\frac{a_{1,1}}{2A_0} = -\frac{a'_{2,2}}{a'_{1,1}},$$

$$a_{1,0}a_{1,1} = 2A_0 \,.\, a_{2,1};\ a_{1,1}a'_{1,1} = 2A_0 a'_{2,2}. \qquad \text{...(46)}$$

Setzt man in diesem Falle $z^2 = \rho^2 - y^2$, so nimmt die Gleichung (18) folgende Gestalt an:

$$A_0 x^2 + A_0 \frac{(a^2_{1,1} - 4A_0 a_{2,2})}{a^2_{1,1}} y^2 + 2A_0 \frac{a'_{1,1}}{a_{1,1}} xy + 2A_0 \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} x - 2A_0 \frac{a'_{2,1}}{a_{1,1}} y + \left(a_{2,0} + a_{2,2} - \frac{a^2_{1,1}}{2A_0}\right) = 0. \qquad \text{...(47)}$$

Hier findet man

$$\sigma = u_{11}u_{22} - u^2_{1,2} = \frac{A^2_0}{u^2_{1,1}}(a^2_{1,1} - a'^2_{1,1} - 4a_{2,2}A_0), \qquad \text{...(48)}$$

und schliesst, dass diesfällig die Hilfsfläche eine elliptische hyperbolische oder parabolische Cylinderfläche sein wird, je nachdem der Ausdruck $[a^2_{1,1} - a'^2_{1,1} - 4a_{2,2}A_0]$ positiv, negativ oder verschwindend ausfällt.

Da die Gleichung (47) von z frei ist, so kann man sich die Hilfscurve auf die in der xy-Ebene mit ρ beschriebene Cycloïde reducirt denken, und die Durchschnittspunkte bestimmen, in welchen die gedachte Cycloïde von der Kegelschnittslinie (47) getroffen wird. Die zugehörigen Bogenlängen φ bilden dann das Wurzelsystem der Gleichung (17) in dem Falle, wo ihre Coëfficienten die zwei Bedingungen in (46) erfüllen.

Die unter Bedingungen (46) erfolgte Auflösung verdient vornehmlich den Namen einer directen (nicht tappenden) Lösung der transcendenten Gleichung, da mit meinen mechanischen Vorrichtungen die Cycloïde sowohl, sowie auch ein jeder Kegelschnitt in continuirlichen Zügen dargestellt werden kann.

Zunächst wollen wir nachsehen, wie sich die transformirte Gleichung (29) §. 2 in Bezug auf die ähnlichen aus der Transformirten gezogenen Bedingungen

$$b_{1,0}b_{1,1} - 2A_0 b_{2,1} = b_{1,1}b'_{1,1} - 2A_0 b'_{2,2} = 0, \qquad \text{...(49)}$$

verhält.

Wenn man in die eventuellen Bedingungsgleichungen (49) die Coëfficienten durch die ursprünglichen, mit a bezeichneten Coëfficienten nach den Transformationsgesetzen (30), §. 2 ausdrückt, so erhält man die Gleichungen:

$$(a_{10}a_{1,1} - 2A_0 a_{2,1})\cos\alpha - (a_{1,0}a'_{1,1} - 2A_0 a'_{2,1})\sin\alpha = 0,$$

$$\left(\frac{1}{2}(a^2_{1,1} - a'^2_{1,1}) - 2A_0 a_{2,2}\right)\sin 2\alpha - [2A_0 a'_{2,2} - a_{1,1}a_{1,1}]\cos 2\alpha = 0. \qquad \text{...(50)}$$

Das Stattfinden einer dieser Relationen können wir mittelst eines passenden Werthes von α veranlassen. Wird dann mit diesem Werthe von α auch der zweiten in (50) Genüge geleistet, so erhält die transformirte Gleichung die Eignung, mit Hilfe der Durchschnittspunkte zwischen einer passenden Cycloïde und einem zugehörigen Kegelschnitt ihre sämmtlichen Wurzeln zu liefern. Wenn man nun in die Gleichung:

$$\text{tang}\, 2\alpha = 2\,\text{tang}\,\alpha : (1 - \text{tang}^2\alpha)$$

die aus (50) gezogenen Werthe von $\text{tang}\,\varphi$ und $\text{tang}^2\varphi$ hineinsetzt, so erhält man schliesslich die einzige Bedingungsgleichung:

$$\frac{2A_0 a'_{2,2} - a_{1,1}a'_{1,1}}{\frac{1}{2}(a^2_{1,1} - a'^2_{1,1}) - 2A_0 a_{2,2}} = \frac{2(a_{1,0}a_{1,1} - 2A_0 a_{2,1})(a_{1,0}a'_{1,1} - 2A_0 a'_{2,1})}{a^2_{1,0}(a'^2_{1,1} - a^2_{1,1}) + 4A^2_0(a'^2_{2,1} - a^2_{2,1}) - 4A_0 a_{1,0}(a'_{1,1}a'_{2,1} - a_{1,1}a_{2,1})}, \qquad \text{...(51)}$$

deren Erfüllung dafür bürgt, dass die zugehörige transcendente Gleichung, oder vielmehr ihre transformirte mit Hilfe einer passenden Cycloïde und des zugehörigen Kegelschnittes gelöst werden kann.

Indem wir den Fall, wo von den Coëfficienten $A_0, A_{1,\varphi}, A_{2,\varphi}$ blos der Coëfficient A_0 verschwindet, für den nächsten Paragraphen aufheben, wollen wir hier diejenigen Fälle erledigen, wo von diesen Coëfficienten blos $A_{1,\varphi}$ oder $A_{2,\varphi}$ identisch nicht verschwindet.

Die Gleichungen

$$A_{1,\varphi}=a_{1,0}+a_{1,1}\sin\varphi+a'_{1,1}\cos\varphi=0, \qquad \ldots(52)$$

$$A_{2,\varphi}=a_{2,0}+a_{2,1}\sin\varphi+a'_{2,1}\cos\varphi+a_{2,2}\sin^2\varphi+a'_{2,2}\sin\varphi\cos\varphi=0 \qquad \ldots(52)'$$

geben für $\sin\varphi=y,\ \cos\varphi=x,$

$$a_{1,0}+a_{1,1}y+a'_{1,1}x=0, \qquad \ldots(53)$$

$$a_{2,0}+a_{2,1}y+a'_{2,1}x+a_{2,2}y^2+a'_{2,2}xy=0, \qquad \ldots(54)$$

und nebstdem noch die Gleichung

$$x^2+y^2=1. \qquad \ldots(55)$$

Die Begegnungspunkte der Geraden (53) mit dem Kreise (55) führen zur Auflösung der Gleichung (52); die Begegnungspunkte des Kegelschnittes (54) mit dem Kreise (55) geben die Auflösung der Gleichung (52)';

Wählt man ein positives s derart an, dass in numerischer Beziehung $2s>\frac{a'_{2,2}}{a_{2,2}}$ ausfällt, so können wir die mit $s\,a_{2,2}$ multiplicirte Gleichung (55) zur Gleichung (54) addiren und erhalten die Gleichung:

$$(a_{2,0}-sa_{2,2})+a'_2x+a_{2,1}y+a'_{2,2}xy+a_{2,2}(s+1)y^2+sa_{22}x^2=0, \qquad \ldots(56)$$

welche auf eine Ellipse deutet, und bei der zu unternehmenden Auflösung der (52)' an die Stelle der Gleichung (54) gesetzt werden kann.

§. 4.

Fortsetzung und Schluss.

Um auch in dem Falle $A_0=0$ für den Zeichner einige Vortheile zu erringen, denken wir uns die Gleichungen der Hilfsfläche (18) und (22) auf folgende Weise geordnet:

$$u_{11}x^2+u_{22}y^2+u_{33}z^2+2u_{12}xy+2u_{23}yz+2u_{31}2x+2u_1x+2u_2y+2u_3z+u_0=0, \qquad \ldots(1)$$

$$u'_{11}x^2+u'_{22}y^2+u'_{33}z^2+2u'_{12}xy+2u_{23}yz+2u'_{31}2x+2u'_1x+2u'_2y+2u'_3z+u'_0=0, \qquad \ldots(2)$$

mit den Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
u_{11}&=0, & u'_{11}&=0,\\
u_{22}&=0, & u'_{22}&=0,\\
u_{33}&=\frac{a_{1,1}}{\rho}+\frac{a_{2,2}}{\rho^2}, & u_{33}&=\frac{b_{1,1}}{\rho'}+\frac{b_{2,2}}{\rho'^2},\\
2u_{12}&=\frac{a_{1,1}}{\rho}, & 2u'_{12}&=\frac{b'_{1,1}}{\rho'},\\
2u_{23}&=\frac{a'_{1,1}}{\rho}+\frac{a'_{2,2}}{\rho^2}, & 2u_{23}&=\frac{b'_{1,1}}{\rho'}+\frac{b'_{2,2}}{\rho^2},\\
2u_{31}&=\frac{a_{1,1}}{\rho}, & 2u'_{31}&=\frac{b_{1,1}}{\rho'},\\
2u_1&=a_{1,0}, & 2u'_1&=b_{1,0},\\
2u_2&=\frac{a_{2,1}}{\rho}, & 2u'_2&=\frac{b_{2,1}}{\rho'},\\
2u_3&=a_{1,0}+\frac{a_{2,1}}{\rho}, & 2u'_2&=b_{10}+\frac{b'_{2,1}}{\rho'},\\
u_0&=a_{2,0}, & u'_0&=b_{2,0},
\end{aligned} \qquad \ldots(3)$$

wo die mit b bezeichneten Coëfficienten aus den a-Coëfficienten nach dem Transformationsschema (30) §. 2 gebildet werden.

Da nach dem Transformationsschema die Relation:

$$b'_{1,1} = a_{1,1}\sin\alpha + a'_{1,1}\cos\alpha, \quad \text{für} \quad b'_{1,1} = 0,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{a'_{1,1}}{a_{1,1}} \qquad \ldots(4)$$

gibt, so existirt neben $a'_{1,1} \gtrless 0$ immerhin ein von Null verschiedener Vermittlungswinkel α, welcher das Verschwinden von $b'_{1,1}$ veranlasst. Hiedurch wird besagt, dass das Product $u_{12}u'_{12} = \frac{a_{1,1}b'_{1,1}}{\rho\rho'}$ entweder schon von Natur aus verschwindet, oder erst mittelst eines passenden Werthes von α zum Verschwinden gebracht werden kann.

Im Fall $a'_{1,1} = 0$ hat man aus (1) die Hilfsflächengleichung

$$z(2a_{31}x + 2a_{32}y + u_{33}z + 2u_3) + [2u_1x + 2u_2y + u_0] = 0. \qquad \ldots(5)$$

Im Falle $a'_{1,1} \gtrless$ kann mit dem Winkel aus (4) $b'_{1,1} = 0$ veranlasst werden, und dann ist die Gleichung der Hilfsfläche

$$z(2u'_{31}x + 2u'_{32}y + u'_{33}z + 2u'_3) + (2u'_1x + 2u'_2y + u'_0) = 0. \qquad \ldots(6)$$

In jedem dieser Fälle ist die Hilfsfläche im Allgemeinen ein hyperbolisches Paraboloïd, oder ein hyperbolischer oder parabolischer Cylinder und gelegentlich auch ein System von Ebenen. Immerhin ist es eine Fläche, welche sich durch Bewegung einer Geraden beschreiben lässt. Wenn $a_{2,2}$ und $a_{1,1}$ nicht verschwinden, so könnte man $\rho = -\frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}$ setzen, und dadurch in (5) den Coëfficienten von z, nämlich u_{33}, zum Verschwinden bringen. In diesem Falle wäre für das Gebilde (5) die Richtung der Axe oz zur Richtung der Ebene xy conjugirt.

Um die descriptive Methode für die Darstellung des hyperbolischen Paraboloïds zu gewinnen, sei ganz allgemein:

$$\begin{aligned} w_s &= m_s x + n_s y + r_s z + g_s \\ w'_s &= m_s x' + n_s y' + r_s z' + g_s \\ w''_s &= m_s x'' + n_s y'' + r_s z'' + g_s \end{aligned} \qquad \ldots(7)$$

und die Gleichung

$$w_1 w_2 + w_3 = 0,$$

oder auch

$$(w_1 - 1)w_2 + (w_2 + w_3) = 0, \qquad \ldots(8)$$

charakterisiren diesfällig das hyperbolische Paraboloïd.

Zwei Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$, welche den Gleichungen

$$w'_1 = w'_3 = w'_2 - q = 0,$$
$$w''_1 - 1 = w''_2 + w''_3 = w'_2 - q = 0, \qquad \ldots(9)$$

genügen, müssen ganz gewiss in der Fläche (8) enthalten sein. Wir wollen noch zeigen, dass auch die durch $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ gelegte Gerade L_q mit ihren sämmtlichen Punkten in der Fläche (8) enthalten ist.

In der That erhält man aus den der L_q angehörigen Gleichungen

$$\frac{x-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y''-y'} = \frac{z-z'}{z''-z'} = h = \text{bei gegebenem Punkte } (xyz) \text{ constant.} \qquad \ldots(10)$$

$$h = \frac{m_s(x-x') + n_s(y-y') + r_s(z-z')}{m_s(x''-x') + n_s(y''-y') + r_s(z''-z')} = \frac{w_s - w'_s}{w''_s - w'_s},$$

und demgemäss für $s = 1, 2, 3$, wegen (9)

$$h = \frac{w_1}{1} = \frac{w_2 - q}{q - q} = \frac{w_3}{-q},$$

und auch

$$w_1 = h,\ w_2 = q,\ w_3 = -qh,$$

und hieraus unmittelbar

$$w_1 w_2 + w_3 = 0, \qquad \text{...(11)}$$

zum Beweise, dass L_q ganz in (8) enthalten ist.

Anstatt die Punktepaare $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ für jedesmaligen Werth von q nach (9) durch Rechnung zu suchen, kann man dies durch Zeichnung auf folgende Weise bewerkstelligen:

Man betrachte die Gleichungen

$$w_1 = w_3 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ l_0, \qquad \text{...(12)}$$

als analytische Darstellung der Leitlinie l_0, und ebenso die Gleichungen

$$w_1 - 1 = w_2 + w_3 = 0 \ \ldots\ldots\ l_1, \qquad \text{...(13)}$$

als analytische Darstellung der zweiten Leitlinie l_1, so findet man ihre Projection auf die Ebenen xy, zx im Folgenden:

$$\begin{aligned}
&l_0,\ xy \ \ldots\ (r_1 m_3)x + (r_1 n_3)y + (r_1 g_3) = 0,\\
&l_0,\ xz \ \ldots\ (n_1 m_3)x + (n_1 r_3)z + (n_1 g_3) = 0,\\
&l_1,\ xy \ \ldots\ [(r_1 m_2) + (r_1 m_3)]x + [(r_1 n_2) + (r_1 n_3)]y + [(r_1 g_2) + (r_1 g_3) + r_2 + r_3] = 0, \qquad \text{...(14)}\\
&l_1,\ xz \ \ldots\ [(n_1 m_2) + (n_1 m_3)]x + [(n_1 r_2) + (n_1 r_3)]z + [(n_1 g_2) + (n_1 g_3) + n_2 + n_3] = 0,
\end{aligned}$$

wo die Ausdrücke der Form $(a_s b_t)$ nach der Relation

$$(a_s b_t) = a_s b_t - a_t b_s$$

zu deuten sind.

Die jedesmalige Ebene

$$E_q \ldots w_2 - q = m_2 x + n_2 y + r_2 z + g_2 - q = 0 \qquad \text{...(15)}$$

ist in Bezug auf die Richtungen ihrer Spuren in xy und zx von q unabhängig, und liefert durch ihre Begegnung mit den constanten Leitlinien l_0, l_1 ein Punktepaar $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ und demgemäss eine Gerade Lq, welche das Punktepaar verbindet und mit ihren sämmtlichen Punkten in (8) enthalten ist. Die Fläche (8) ergibt sich als eine Aufeinanderfolge von solchen auf den Leitlinien l_0, l_1 gleitenden Geraden Lq, Lq', Lq'', ... welche zur Richtebene $w_2 = 0$ parallel verbleiben. Die mit veränderlichem q aufgefasste Gerade Lq wird aus diesem Grunde die Erzeugende der Fläche (8) genannt.

In (8) könnte man auch

die Gerade $w_2 = w_3 = 0$ als Leitlinie l'_0 und die Gerade $w_2 - 1 = w_1 + w_3 = 0$ als Leitlinie l'_1 an- ...(16) sehen, und dann die Ebene $w_1 - q = 0$ als die zugehörige Richtebene der Erzeugenden $L'q$ verwenden.

Vergleicht man unsere Fläche (6) mit (8), so erhält man die Relationen:

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2u_{31}x + 2u_{32}y + u_{33}z + 2u_3 = a_{1,1}\rho x + a'_{22}y + (a_{1,1}\rho + a_{2,2})z + (a_{10}\rho^2 + a_{2,1}\rho) = 0,\\
w_2 &= z = 0, \qquad \text{...(17)}\\
w_3 &= 2u_1 x + 2u_2 y + u_0 = a_{1,0}\rho x + a'_{2,1}y + \rho a_{2,0} = 0,
\end{aligned}$$

und hieraus nach (14)

$$\begin{aligned}
&l_0,\ xy = \rho a_{1,0}x + a'_{2,1}y + \rho a_{2,0} = 0,\\
&l_0,\ zx = \rho(a_{10}a'_{22} - a_{11}a'_{21})x - (a_{1,1}\rho + a_{2,2})a'_{2,1}z + \rho[a_{2,0}a'_{22} - a'_{2,1}(a_{1,0}\rho + a_{2,1})] = 0,\\
&l_1,\ xy = [-a_{11}\rho + \rho a_{10}(a_{1,1}\rho + a_{2,2})]x + [a'_{2,1}(a_{11}\rho + a_{22}) - a'_{22}]y + [\rho(a_{11}\rho + a_{22})a_{2,0} - (a_{10}\rho^2 + a_{21}\rho - 1)] = 0,\\
&l_1,\ zx = \rho(a_{11}a'_{21} - a_{10}a'_{2,2})x + [a'_{2,1}(a_{1,1}\rho + a_{22}) - a'_{22}]z + [a'_{21}(a_{10}\rho^2 + a_{2,1}\rho - 1) - \rho a_{20}a'_{22}] = 0, \qquad \text{...(18)}\\
&E_q = z - q = 0.
\end{aligned}$$

Die Richtebene E_q ist hier stets parallel zur xy und projicirt jede Lage der erzeugenden L_q auf die Ebene zx in eine zur ox parallele Lage. Hat man einmal die Projectionen von l_0, l_1 bereits in der Zeichnung eingetragen, so kann man in xz ein System von zu ox parallelen Geraden annehmen, und dieselben als Projectionen der Erzeugenden auf xz ansehen. Hieraus erhält man unmittelbar die entsprechenden Projectionen von L_q auf die Ebene xy.

Die hier eingeleitete, für den Zeichner äusserst bequeme Erzeugung des hyperbolischen Paraboloïdes macht diese Fläche geeignet, ihre Begegnung mit der Hilfscurve sehr leicht darzustellen, und eben hiedurch die geförderte Lösung der gegebenen transcendenten Gleichung herbeizuführen. Dem eventuell möglichen Parallelismus zwischen den Ebenen $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, kann man durch schickliche Wahl von ρ steuern, und hiedurch den Charakter der Hilfsfläche unverrückbar festhalten. Liesse sich jedoch die Wahl des Werthes von ρ in der Weise veranlassen, dass hiedurch die Fläche (6) sich als Eine Ebene oder als ein Gebilde von zwei sich schneidenden Ebenen hinstellt, so wird man eine solche Hilfsfläche dem hyperbolischen Paraboloïd vorziehen, weil hiedurch die weitere Construction der verlangten Begegnungspunkte zwischen Hilfsfläche und Hilfslinie sich noch einfacher ergibt.

Einen solchen, für den Zeichner sehr günstigen Fall bietet die aufzulösende Gleichung:

$$\varphi + a_{2,0} + a_{21} \sin\varphi + a'_{21} \cos\varphi + a_{22} \sin^2\varphi = 0. \qquad \ldots(19)$$

In Folge der Substitution:

$$\cos\varphi = \frac{y}{\rho}, \ \sin\varphi = \frac{z}{\rho}, \ \varphi = x + z,$$

haben wir

$$x + z + a_{2,0} + a_{2,1}\frac{z}{\rho} + a'_{2\cdot 1}\frac{y}{\rho} + a_{22}\frac{z^2}{\rho^2} = 0.$$

Hieraus erhält man für $\rho = -a_{2,1}$ und $z^2 = \rho^2 - y^2$

$$x + a_{2,0} - \frac{a'_{2,1}}{a_{2,1}} y + a_{22} - \frac{a_{22}}{a_{21}^2} y^2 = 0$$

oder

$$a_{2,2} y^2 - a_{2,1}^2 x + a'_{2,1} a_{2,1} y - a_{2,1}^2 (a_{2,0} + a_{2,2}) = 0$$

und schliesslich:

$$\left[y + \frac{a_{2,1} a'_{21}}{2a_{2,2}}\right]^2 = \frac{a_{2,1}^2}{a_{22}}\left(x + \left[a_{2,0} + a_{2,2} + \frac{a'^2_{2,1}}{4a_{2,2}}\right]\right). \qquad \ldots(20)$$

Da hier nur der Fall $a_{2,1} a_{2,2} \gtrless 0$ gedacht werden kann, so erscheint in (26) als Hilfsgebilde eine Parabel, deren Begegnungspunkte mit der Cycloïde $y = -a_{2,1}\cos\varphi$, $x = \varphi + a_{2,1}\sin\varphi$ zum Wurzelsysteme der Gleichung (19) führen.

Zum Schlusse wollen wir noch einige specielle Fälle vornehmen, welche noch durch andere auf speciellen Anschauungen gegründete Mittel zur Auflösung gebracht werden können.

Von gleich in Anwendung zu bringenden Constructionsmitteln führen wir in Kürze folgende an:

1. Es lässt sich sehr leicht von einem gegebenen Punkte $(\xi\eta)$ aus, ein geradlinig geschnittener Papierstreifen, auf dessen Rand zwei Marken u, v in der Distanz $uv = \rho$ angebracht sind, in eine solche Lage bringen, dass der Streifen mit u in die Axe ox, mit v in den Umfang einer mit ρ beschriebenen Cycloïde $[y = \rho\cos\varphi,\ x = 1 - \rho\sin\varphi]$ einspiele, und gleichzeitig durch den Punkt $(\xi\eta)$ hindurchgehe;

2., 3.... Es ist eben so leicht von einem Punkte $(\xi\eta)$ aus, diejenigen Punkte einer mit ρ beschriebenen Cycloïde ausfindig zu machen, wo die zugehörige Berührende oder Normallinie der Cycloïde durch $(\xi\eta)$ hindurchgeht. ...(21)

Die drei Sorten von Cycloïdalpunktenbestimmung wollen wir zur Auflösung von entsprechenden speciellen Gleichungen benützen.

Ad 1. Schliesst der dem Wälzungswinkel entsprechende Cycloïdalradius ρ mit der Axe ox den Winkel ψ ein, so hat man offenbar $\varphi-\psi=\frac{1}{2}\pi$. Da der Voraussetzung gemäss der verlängerte Cycloïdalradius durch den gegebenen Punkt $\xi\eta$ hindurchgeht, so erhält man

$$\operatorname{tang}\psi=\operatorname{tang}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\varphi=\frac{y-\eta}{x-\xi},$$

wo (xy) einen dem Wälzungswinkel φ entsprechenden, in der Cycloïde liegenden Punkt andeutet. Für $y=\rho\cos\varphi$, $x=\varphi-\rho\sin\varphi$ erhält man:

$$-\operatorname{cotg.}\varphi=\frac{\rho\cos\varphi-\eta}{\varphi-\rho\sin\varphi-\xi},$$

oder die Gleichung

$$\varphi-\eta\operatorname{tang}\varphi-\xi=0, \qquad \text{...(22)}$$

welche, mit der Gleichung

$$\varphi+A\operatorname{tang}\varphi+B=0 \qquad \text{...(23)}$$

verglichen, für ξ und η die Werthe

$$\xi=-B,\ \eta=-A \qquad \text{...(24)}$$

liefert, und für beliebige Werthe von ρ gilt.

Eine Gleichung von der Gestalt (23) wird aufgelöst, indem man von dem in (24) bestimmten Punkte aus, nach 1. die entsprechenden Umfangspunkte einer beliebigen Cycloïde aufsucht, und die entsprechenden Werthe von φ bestimmt.

Ad 2. Ist ψ der Winkel, welchen eine zum Cycloïdalpunkte (xy) gehörige durch den Ausgangspunkt $(\xi\eta)$ gehende Berührende mit der Axe ox einschliesst, so hat man:

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{y-\eta}{x-\xi}=\frac{dy}{dx}=\frac{-\rho\sin\varphi}{1-\rho\cos\varphi}=\frac{\rho\cos\varphi-\eta}{\varphi-\rho\sin\varphi-\xi},$$

und hieraus die Gleichung

$$\varphi+(\eta+1)\cot\varphi-\frac{(\eta+\rho^2)}{\rho}\operatorname{cosec}\varphi-\xi=0, \qquad \text{...(25)}$$

welche, mit der Gleichung

$$\varphi+P\cot\varphi+Q\operatorname{cosec}\varphi+R=0, \qquad \text{...(26)}$$

verglichen, die Werthe

$$\left.\begin{aligned}\xi&=-R,\\ \eta&=P-1,\\ \rho&=\frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4(P-1)}}{2}\end{aligned}\right\} \qquad \text{...(27)}$$

liefert.

Die Gleichung (26) wird aufgelöst, wenn von dem in (27) bestimmten Punkte $(\xi\eta)$ aus, an die ebenfalls in (27) bestimmte Cycloïde alle möglichen Tangenten legt, und zu den Berührungspunkten die zugehörigen Wälzungswinkel bestimmt.

Ad 3. Ist ψ der Winkel, welchen eine zum Cycloïdalpunkte (xy) gehörige, durch $(\xi\eta)$ gehende Normalgerade mit der Axe ox einschliesst, so hat man:

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{y-\eta}{x-\xi}=-\frac{dx}{dy}=\frac{1-\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi}=\frac{\rho\cos\varphi-\eta}{\varphi-\rho\sin\varphi-\xi},$$

und hieraus die Gleichung

$$(\varphi-\xi)[\rho\cot\varphi-\operatorname{cosec}\varphi]+\rho(1-\eta)=0, \qquad \text{...(28)}$$

welche, mit der Gleichung

$$(\varphi+P)(Q\cot\varphi+R\operatorname{cosec}\varphi)+T=0 \qquad \text{...(29)}$$

verglichen, die Werthe:

$$\xi = -P,\ \eta = 1 - \frac{T}{Q},\ \rho = -\frac{Q}{R} \qquad \text{...(30)}$$

liefert.

Eine Gleichung vom Typus (29) wird aufgelöst, wenn man, von dem in (30) bestimmten Punkte $(\xi\eta)$ aus, an die ebenfalls in (30) bestimmte Cycloïde alle möglichen Normalgeraden legt, und zu den normalgetroffenen Punkten die entsprechenden Wälzungswinkel φ als Bogenzahlen berechnet.

Die Gleichung

$$\varphi + B\sin\varphi = B_0 + B_1\cos\varphi + B_2\cos^2\varphi + \ldots + B_{n-1}\cos^{n-1}\varphi + B_n\cos^n\varphi, \qquad \text{...(31)}$$

geht in Folge Substitution

$$x = \varphi - \rho\sin\varphi,\ y = \rho\cos\varphi,\ \rho = -B$$

in folgende über:

$$x = B_0 - \frac{B_1}{B}y + \frac{B_2}{B^2}y^2 - \frac{B_3}{B^3}y^3 + \ldots + (-1)^n\frac{B_n}{B^n}y^n = f(y). \qquad \text{...(32)}$$

Durch successive Differentiation erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= f\,(y) \\ x_2 &= f_1(y) \\ x &= f_2(y) \\ x_{n-2} &= f_{n-2}(y) = a + by + cy^2, \end{aligned} \qquad \text{...(33)}$$

wo

$$a = (-1)^{n-2}(n-2)!\,\frac{B_{n-2}}{B^{n-2}},\ b = (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-2}(n-2)!\,\frac{B_{n-1}}{B^{n-1}};\ c = (-1)^n\binom{n}{n-2}(n-2)!\,\frac{B_n}{B^n}.$$

Die letzte Gleichung in (33) ist eine gewöhnliche Parabel. Von dieser ausgehend, stelle man mit dem Integrator die aufeinanderfolgenden Integralcurven durch Zeichnung dar, so gelangt man endlich zur Darstellung der letzten Parabel der $n$ten Ordnung in (32), deren Begegnungspunkte mit der Cycloïde solche x-Werthe liefern, deren entsprechende Wälzungsbogenzahlen die reellen Wurzeln der Gleichung (31) ausmachen.

Es sei überhaupt

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \text{...(34)}$$

ein in der descriptiven Geometrie leicht darstellbares Gebilde, so erhalten wir mittelst Substitution

$$x = \varphi - \rho\sin\varphi,\ y = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,$$

aus (34) die Gleichung

$$f[(\varphi - \rho\sin\varphi),\ \rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi] = F(\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi) = 0 \qquad \text{...(35)}$$

welche für ein beliebig angenommenes reelle ρ eine transcendente Gleichung ist, welche mit Hilfe der Begegnungspunkte zwischen dem Gebilde (34), dem Cycloïdalcylinder und dem Kreiscylinder $x^2 + y^2 = \rho^2$ zur Auflösung gebracht werden kann.

Hieraus sieht man, dass die Erweiterung des Gebietes der constructiven Darstellung von räumlichen Gebilden eine eben so grosse Bereicherung des Gebietes von auflösbaren Classen transcendenter Gleichungen begründet.

Schliesslich mögen noch einige Beispiele zur Auflösung vorbereitet, und dann in betreffenden Figuren zur Anschauung gebracht werden.

Im ersten Beispiele nehmen wir an

$$\begin{aligned} A_0 &= 5,\ a_{1,0} = -132,\ a_{1,1} = -\ 40,\ a'_{1,1} = 104, \\ a_{2,0} &= 836,\ a_{2,1} = 528,\ a'_{2,1} = -912,\ a_{2,2} = 0,\ a'_{2,2} = -416. \end{aligned} \qquad \text{...(36)}$$

Für diesen Fall haben wir nach (19) und (24) §. 2

$$2u_{3,1} = \frac{2A_0\rho + a_{1,1}}{\rho} = 0, \quad \rho = 4,$$

und demgemäss

$$u_{11} = 5, \quad u_{22} = 10, \quad u_{33} = 5, \quad 2u_{12} = 26, \quad 2u_{23} = 0,$$
$$2u_{31} = 0, \quad 2u_1 = -132, \quad 2u_2 = -228, \quad 2u_3 = 0, \quad u_0 = 676,$$

hiemit als Gleichung der Hilfsfläche:

$$5x^2 + 10y^2 + 5z^2 + 26xy - 132x - 228y + 676 = 0,$$

oder wegen

$$5z^2 = 5(\rho^2 - y^2) = 80 - 5y^2,$$

die Gleichung

$$5x^2 + 5y^2 + 26xy - 132x - 228y + 756 = 0, \qquad \text{...(37)}$$

welche auf eine hyperbolische verticale Cylinderfläche hindeutet.

Für den Mittelpunkt $(\xi\eta)$ in (37) ergibt sich $\xi = 8$, $\eta = 2$.

Bezieht man die Gleichung auf ein Axensystem $x'o'y'$, welches seinen Ursprung im Centrum $(\xi\eta)$ hat, und dessen Axe $o'x'$ mit der Axe ox den Winkel $\gamma = -45°$ einschliesst, so erhält man aus (37) die entsprechende transformirte Gleichung im Folgenden:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 0, \qquad \text{...(38)}$$

welche besagt, dass aus den Durchschnittspunkten der mit $\rho = 4$ beschriebenen Cycloïde mit den in (38) gegebenen, zwei sich schneidenden Geraden die sämmtlichen reellen Wurzeln der in (36) gegebenen Gleichung zum Vorschein kommen. (Siehe Fig. 3.)

Im zweiten Beispiele sei

$$A_0 = 13, \; a_{10} = -218, \; a_{11} = -130, \; a'_{11} = 50,$$
$$a_{2,0} = 1178, \; a_{21} = 1090, \; a'_{21} = -530, \; a_{22} = 0, \; a'_{22} = -250. \qquad \text{...(39)}$$

Hier hat man nach (19) und (24), §. 2:

$$2u_{3,1} = \frac{2A_0\rho + a_{11}}{\rho} = \frac{26\rho - 130}{\rho} = 0, \quad \rho = 5,$$

und demgemäss

$$u_{11} = 13, \quad u_{22} = 26, \quad u_{33} = 13, \quad 2u_{12} = 10,$$
$$2u_{32} = 0, \; 2u_{31} = 0, \; 2u_1 = -218, \; 2u_2 = -106, \; 2u_3 = 0, \; u_0 = 528,$$

und somit als Gleichung der Hilfsfläche, sobald man $13z^2 = 13(25 - y^2)$ berücksichtigt

$$13x^2 + 13y^2 + 10xy - 218x - 106y + 853 = 0. \qquad \text{...(40)}$$

Bezieht man diese Gleichung auf ein neues Axensystem $x'o'y'$, wo o' das Centrum $\xi = 8$, $\eta = 1$ von (40) vorstellt, und die Axe ox' mit ox den Winkel $\gamma = -45°$ einschliesst, so erhält man schliesslich

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1, \qquad \text{...(41)}$$

woraus geschlossen wird, dass man aus dem Begegnungspunkte der in (41) bestimmten, am gehörigen Orte gezeichneten Ellipse mit der mittelst $\rho = 5$ beschriebenen Cycloïde, die sämmtlichen reellen Wurzeln der in (39) vorgelegten Gleichung zum Vorschein bringt. (Siehe Fig. 4.)

Im dritten Beispiele sei

$$A_0 = 1, \; a_{10} = 2, \; a_{1,1} = -10, \; a'_{1,1} = 8, \; a_{2,0} = 22,$$
$$a_{2,1} = -20, \; a'_{2,1} = 20, \; a_{2,2} = 25, \; a'_{2,2} = -40. \qquad \text{...(42)}$$

Hieraus findet man nach (19) und (24) §. 3

$$2u_{31} = \frac{2A_0\rho + a_{11}}{\rho} = \frac{2\rho - 10}{\rho} = 0, \quad \rho = 5,$$

und somit:

$$u_{11} = 1, \quad u_{22} = 1, \quad u_{33} = 1, \; 2u_{12} = \frac{8}{5}, \quad 2u_{23} = 0,$$

$$2u_{31} = 0, \; 2u_1 = 2, \; 2u_2 = 4, \; 2u_3 = -2, \quad u_0 = -3.$$

Hieraus ergibt sich als Gleichung der Hilfsfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}xy + 2x + 4y - 2z - 3 = 0, \qquad \text{...(43)}$$

welche offenbar ein Ellipsoid vorstellt, das parallel zur zx-Ebene in lauter Kreislinien geschnitten wird, und ihren Mittelpunkt $(\xi\eta\zeta)$ aus den Gleichungen

$$x + \frac{4}{5}y + 1 = \frac{4}{5}x + y + 2 = z - 1 = 0, \qquad \text{...(44)}$$

und den Werthangaben

$$\xi = \frac{5}{3}, \; \eta = -\frac{10}{3}, \quad \zeta = 1 \qquad \text{...(45)}$$

bezieht.

Die Projection der Leitlinie auf die Ebene xy erhält man nach (31), §. 3

$$x^2 + y^2 + \frac{8}{5}xy + 2x + 4y - 4 = 0, \qquad \text{...(46)}$$

als eine Ellipse mit dem Centrum

$$\xi = \frac{5}{3}, \; \eta = -\frac{10}{3},$$

welches offenbar die horizontale Projection des in (45) gegebenen Mittelpunktes der Ellipsoide (43) vorstellt.

Nach (27) §. 3 erhält man die Mittelpunktslinie der zur zx parallelen Kreisschnitte durch die Gleichungen

$$x + \frac{4}{5}y + 1 = 0, \quad \zeta - 1 = 0, \qquad \text{...(47)}$$

bestimmt.

Bezieht man die Leitlinie (44) auf ein Axensystem $x'o'y'$, wo o' in ihrem Centrum

$$\xi = \frac{5}{3}, \; \eta = -\frac{10}{3}$$

liegt, und die Axen

$$o'x' \,||\, ox, \quad o'y' \,||\, \left[x + \frac{4}{5}y + 1 = 0\right]$$

sich erweisen, so erhält man aus (46) folgende transformirte Gleichung:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{41}}\right)^2 = 1, \qquad \text{...(48)}$$

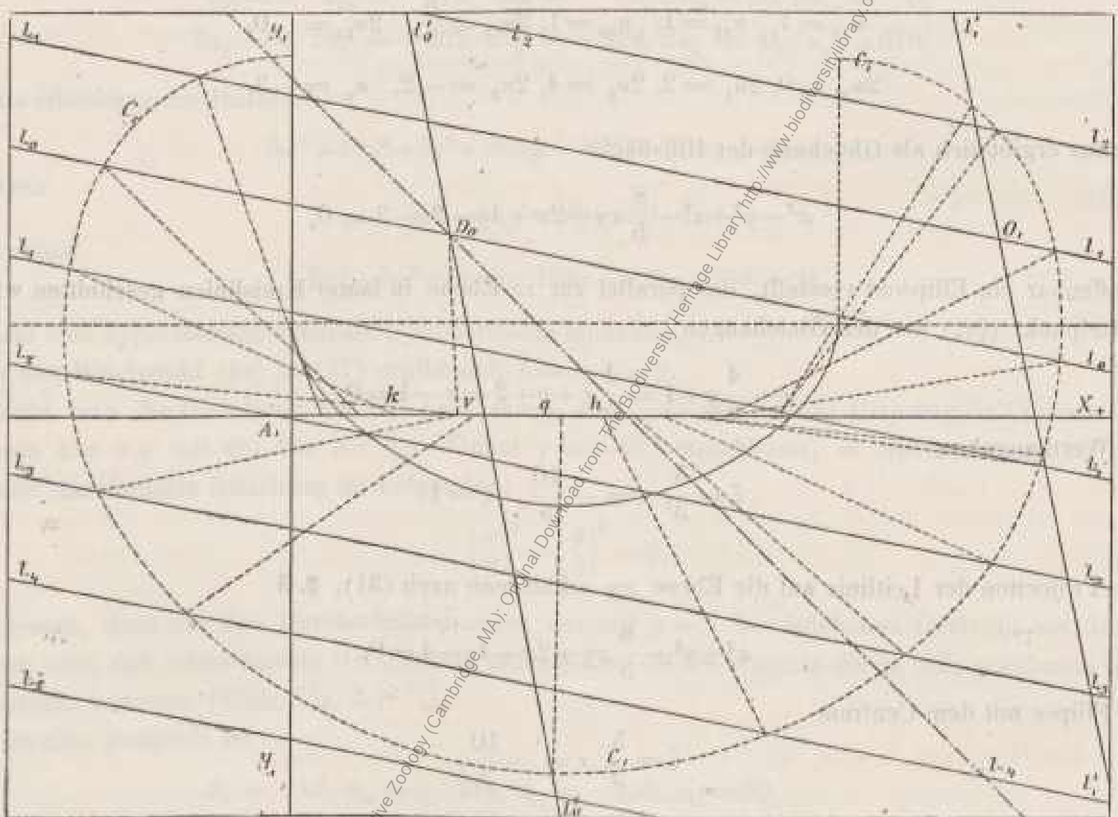
wodurch eine mit Bezug auf ihre conjugirten Axenrichtungen $o'x'$, $o'y'$ leicht construirbare Ellipse gegeben ist. Hat man diese eine Ellipse vorstellende Leitlinie am gehörigen Orte bereits gezeichnet, so stellt jede ihrer zur $o'x$ parallelen Sehnen geradezu die Länge des dem zugehörigen Kreisschnitte entsprechenden Durchmessers.

Auf Grund der hier ausgemittelten Angaben war es sehr leicht, mit Hilfe der descriptiven Geometrie in den Figuren 5, 6 die Begegnungspunkte zwischen dem Ellipsoid (43) und den Cylinderflächen

$$z^2 + y^2 = 25, \; [x = 1 - 5\sin\varphi, \; y = 5\cos\varphi],$$

unter Einhaltung der Bedingung $x+z=\varphi$ zu bestimmen, und die den Begegnungspunkten entsprechenden Wälzungsbogenzahlen abzuleiten, welche eben die sämmtlichen reellen der in (42) vorgelegten Gleichung angehörigen Wurzeln ausmachen.

Fig. 3.



In der Fig. 3 haben wir dem ersten Beispiele gemäss von der mit $\rho=4$ zu beschreibenden Cycloïdallinie blos die Einzelncycloïde eingetragen; es fehlen somit die Vorangehenden C_0, C_{-1}, C_{-2}, $C_{-3}\ldots$ und die nachfolgenden C_2, C_3, C_4, $C_5\ldots$. Das für dieses Beispiel gefundene zweite Hilfsgebilde ist ein Paar von, durch die Gleichung in (38) bestimmten Geraden l_0, l'_0, welche in der Figur vom Punkte $O_0(\xi=8, \eta=2)$ auslaufend in der gehörigen Richtung eingezeichnet sind. Durch Verschiebung dieses Linienpaares längs der Centralaxe A_1X gelangt es in die einen constanten Abstand 2π beurkundenden Lagen $\ldots l_{-4}$, l'_{-4}; l_{-3}, l'_{-3}; l_{-2}, l'_{-2}; l_{-1}, l'_{-1}; l_0, l'_0; l_1, l'_1; l_2, l'_2; l_3, $l'_3\ldots$. Mit x_s und (x_s) bezeichnen wir die auf der Axe A_1X gemessenen Abstände des Punktes A_1 von den sogenannten Cycloïdalcentren derjenigen Punkte, in welchen die Einzelncycloïde C_1 von der Hilfslinie l_s geschnitten ist. Ebenso werden die Bezeichnungen x'_s, (x'_s) gedeutet in Bezug auf die Hilfslinie l'_s. Die ersichtlichen Klammerfassungen haben zu erinnern, dass von den zwei möglichen Durchschnittspunkten der Cycloïde mit der Hilfslinie der linksstehende mit der Klammerfassung ausgezeichnet ist. So erscheint beispielsweise:

$$A_1h=x_{-4},\ A_1q=x'_0,\ A_1k=(x_{-1})\ldots$$

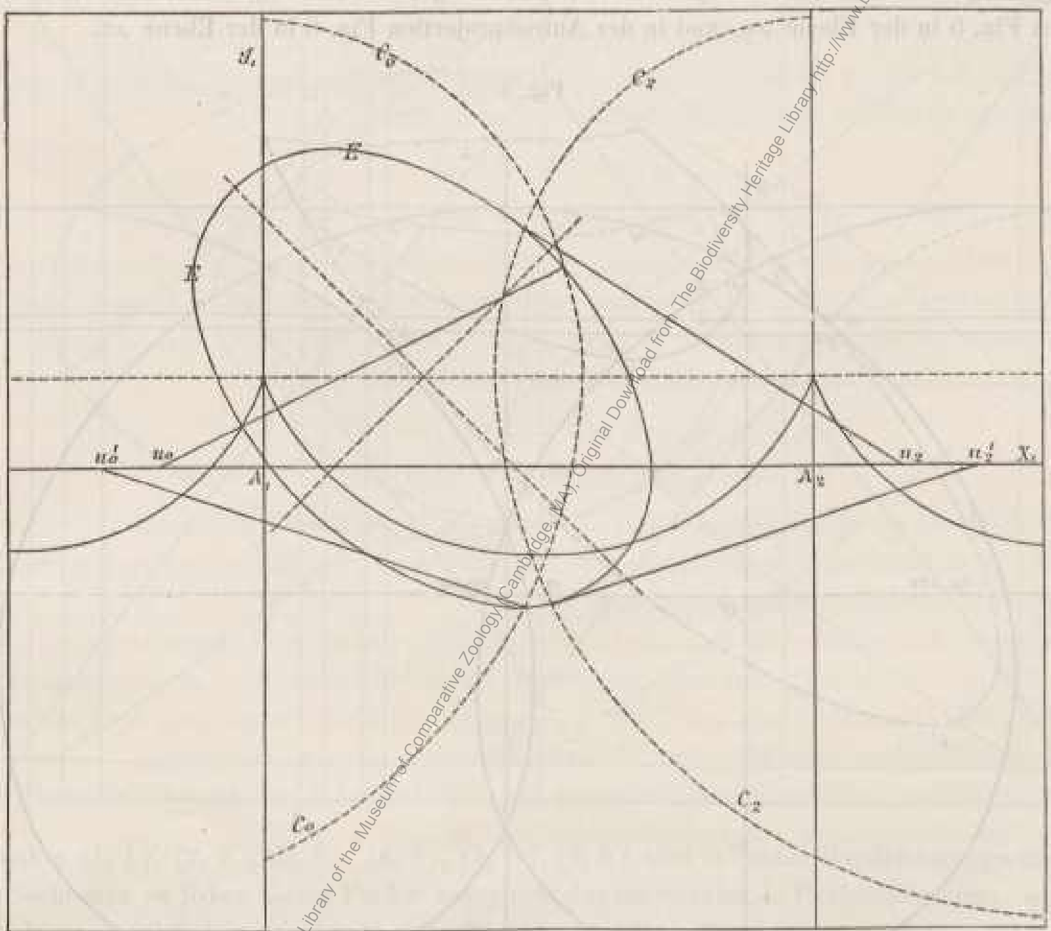
Aus der Erklärung folgt, dass etwa x_s der Begegnung der Cycloïde C_1 mit l_s entspricht. Durch Zurückschiebung um die Länge $s.2\pi$ erscheint dieser Abstand entsprechend der Begegnung der Cycloïde $C_{-(s-1)}$ mit der Hilfsgeraden l_0 und der entsprechende Abrollungsbogen φ_s wird demgemäss die Länge $(-s+1)2\pi+x_s$ besitzen. Der Bewegung des Uhrzeigers folgend, bemerken wir an der Cycloïde C_1 sechzehn Durchschnittspunkte, deren jedem in obigem Sinne je ein Abrollungsbogen φ entspricht.

Der eben erwähnten Reihenfolge gemäss erhalten wir:

$$
\begin{array}{llll}
\varphi_1'=(-1+1)2\pi+x_1' & (\varphi_1')=(-1+1)2\pi+(x_1') & \varphi_{-4}=\ (4+1)2\pi+\ x_{-4} & (\varphi_{-2})=\ (2+1)2\pi+(x_{-2}) \\
\varphi_2=(-2+1)2\pi+x_2 & \varphi_{-1}=\ (1+1)2\pi+x_{-1} & (\varphi_0)=(-0+1)2\pi+\ (x_0) & (\varphi_{-1})=\ (1+1)2\pi+(x_{-1}) \\
\varphi_1=(-1+1)2\pi+x_1 & \varphi_{-2}=\ (2+1)2\pi+x_{-2} & (\varphi_{-4})=\ (4+1)2\pi+(x_{-4}) & (\varphi_0)=(-0+1)2\pi+\ (x_0) \\
\varphi_0=(-0+1)2\pi+x_0 & \varphi_{-3}=\ (3+1)2\pi+x_{-3} & (\varphi_{-3})=\ (3+1)2\pi+(x_{-3}) & (\varphi_1)=(-1+1)2\pi+\ (x_1).
\end{array}
$$

Das System der hier vorgeführten Abrollungsbögen macht eben das der Gleichung (36) entsprechende Wurzelsystem aus.

Fig. 4.



In dieser Figur haben wir den für die Gleichung (39) gemachten Vorbereitungen gemäss, von der mit $\rho=5$ zu beschreibenden Cycloïdallinie blos die erforderlichen Partien der Einzelncycloïden C_0 und C_2 eingetragen. Die in (41) bestimmte Ellipse haben wir als zweite Hilfslinie in gehöriger Lage gezeichnet, und mit dem Buchstaben E charakterisirt. Aus der Figur ist unmittelbar ersichtlich, dass die Ellipse E blos von den Einzelncycloïden C_0 und C_2 getroffen werden kann. Die vier hier möglichen Begegnungspunkte zwischen der Ellipse und den Partialcycloïden C_0, C_2 führen mittelst dem Cycloïdalradius $\rho=5$ zu den entsprechenden Cycloïdalcentren u_0', u_0, u_2, u_2', und veranlassen für die zur Auflösung vorgelegte Gleichung (39) folgendes complette reelle Wurzelsystem.

$$
\begin{aligned}
\varphi_0' &= 2\pi-\overline{u_0' A_1},\\
\varphi_0 &= 2\pi-\overline{u_0 A_1},\\
\varphi_2 &= 4\pi+\overline{A_2 u_2},\\
\varphi_2' &= 4\pi+\overline{A_2 u_2'}.
\end{aligned}
$$

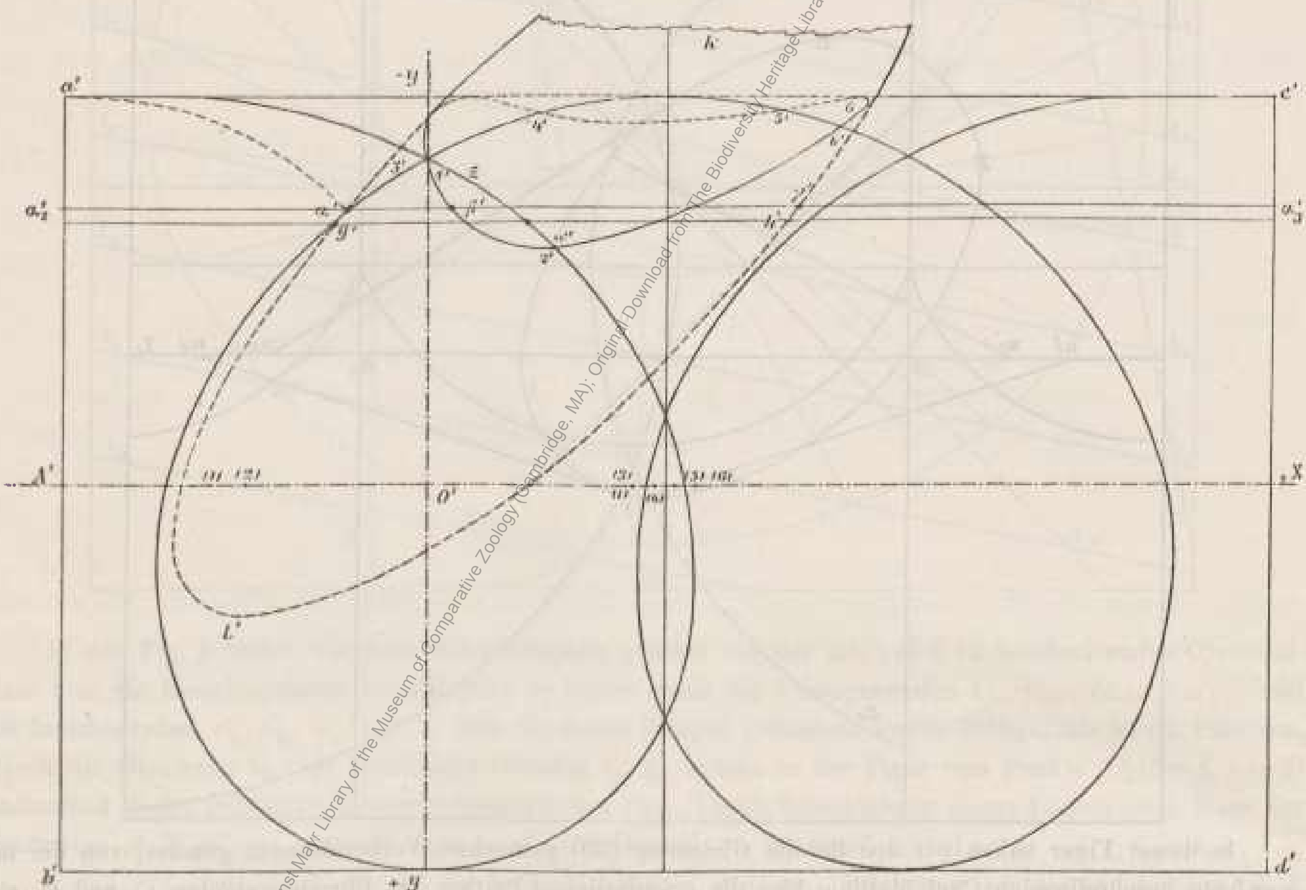
Für die Gleichung (42) ersieht man aus der Vorbereitung, dass ihre Wurzeln sich ergeben aus den Durchdringungspunkten des zu $\rho=5$ gehörigen Kreiscylinders $[z^2+y^2=\rho^2]$; des Cycloïdalcylinders, dessen Basis-cycloïde ebenfalls mit dem Radius $\rho = 5$ beschrieben ist, und eines dreiaxigen Ellipsoïdes, welches erzeugt wird durch Bewegung eines veränderlichen zur xz-Ebene parallelen Kreises, dessen Durchmesser in jeder Lage eine Sehne bildet der in (48) bestimmten Leitlinie, welche als eine horizontale auf die conjugirten Axenrichtungen

$$o'x' \parallel ox, \quad o'y' \parallel \left[x + \frac{4}{5}y + 1 = 0\right]$$

bezogene Ellipse sich hinstellt.

Die zugehörige Darstellung ist hauptsächlich in zwei Projectionen durchgeführt, nämlich: in der Grundrissprojection Fig. 5 in der Ebene xy, und in der Aufrissprojection Fig. 6 in der Ebene xz.

Fig. 5.



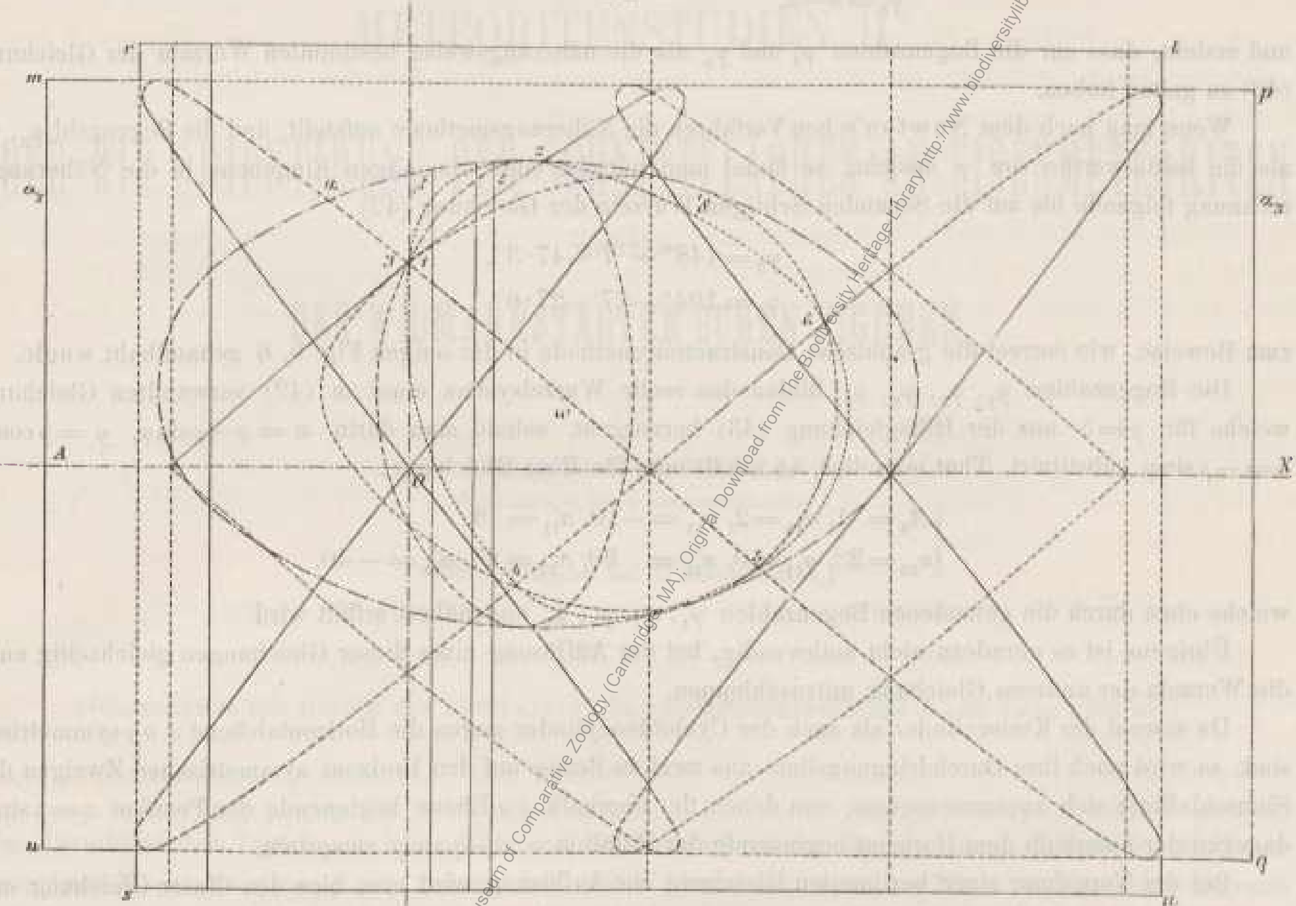
In Fig. 5 ist die mit $\rho = 5$ beschriebene Cycloïde die Basis des Cycloïdalcylinders, der Kreiscylinder erscheint hier als Rechteck $a'b'c'd'$ mit dem umgelegten zu $\rho = 5$ gehörigen Basisbogen $\widehat{a'a}$. Die hier in Verwendung genommene Partie der Leitlinie (48) ist hier in natürlicher Gestalt als eine punktirte Ellipsenpartie gegeben, mit dem Centrum in w' und den Halbaxen $w'l' = \sqrt{41}$, und $w'g' = w'h' = 3$.

In Fig. 6 haben wir in $rstu$ die Aufrissprojection des Cycloïdalcylinders, und in $mupq$ die Aufrissprojection des Kreiscylinders. Die doppelt gestrichelte Ellipse bildet die Contour des Ellipsoïdes.

Bei der Bestimmung der Durchdringungslinien zwischen oberwähnten Flächen wurde folgendermassen verfahren:

Eine Erzeugende des Kreiscylinders etwa $\alpha'_2\alpha'_3$ (Fig. 5) schneidet jede Einzelncycloïde in zwei Punkten — sei nun α' einer von diesen Punkten. Die Aufrissprojection von $\alpha'_2\alpha'_3$ erscheint in $\alpha_2\alpha_3$ Fig. (6) in der Höhe $A\alpha_2 = \alpha'_2\alpha'$ über ox. Der Punkt α' auf $\alpha_2\alpha_3$ projicirt, gibt α als einen Punkt der Durchdringung zwischen den erwähnten Cylinderflächen. Auf diese Art verfahrend erhält man die im Aufriss ersichtlichen Sinusoidalcurven. Die Erzeugende $\alpha_2\alpha_3$ trifft auch den Kreisschnitt des Ellipsoïdes, dessen Grundrissprojection in $\alpha'\gamma'$, in den Punkten β und δ. Wenn wir auf diese Weise andere und andere Erzeugende Geraden des Kreiscylinders vornehmen, und die zugehörigen Begegnungspunkte bestimmen, so gelangen wir zur Durchdringungscurve zwischen Kreis- und Cycloïdalcylinder (Sinusoidallinie) — und dann zur Durchdringung zwischen dem Kreiscylinder und Ellipsoid, in dem geschlossenen Zuge 1 2 3 4 5 6.

Fig. 6.



Die Punkte (1, 1′), (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′), (5, 5′), (6, 6′) sind in beiden Durchdringungscurven gemeinschaftlich. Sucht man zu jedem dieser Punkte mit $\rho = 5$ das entsprechende Cycloïdalcentrum, so erhält man die im Grundrisse ersichtlichen Punkte (1), (2), (3), (4), (5), (6), und demgemäss die Bogenzahlen als Segmente der Axe $o'x$:

$$\varphi_1 = o'(1),\ \varphi_2 = o'(2),\ \varphi_3 = o'(3),\ \varphi_4 = o'(4),\ \varphi_5 = o'(5),\ \varphi_6 = o'(6),$$

von welchen die zwei ersten φ_1 und φ_2 negativ aufzufassen sind.

Jeder von den sechs Durchdringungspunkten ist durch bestimmte Coordinaten x, y, z gegeben, welche man durch Messung aus den Projectionen entnehmen und im folgenden Täfelchen als Messungszahlen vereinigen kann:

	x	z	$x+z$	$x-z$	φ
1	0·0	2·60	2·60	—2·60	—2·60
2	+1·73	3·94	5·67	—2·21	—2·23
3	0·00	2·70	2·70	—2·70	+2·60
4	1·38	—1·46	—0·08	+2·84	+2·84
5	4·60	—1·22	3·38	+5·82	+3·39
6	5·40	+1·92	7·32	+3·48	+3·52

Aus diesem Täfelchen erhält man näherungsweise:

$$\varphi_1 = x - z, \quad \varphi_2 = x - z, \quad \varphi_3 = x + z = arc \sphericalangle 148° - 40',$$

$$\varphi_4 = x - z, \quad \varphi_6 = x - z, \quad \varphi_5 = x + z = arc \sphericalangle 194° - 10',$$

und ersieht, dass nur die Bogenzahlen φ_3 und φ_5 als die näherungsweise bestimmten Wurzeln der Gleichung (42) zu gelten haben.

Wenn man nach dem Newton'schen Verfahren die Näherungsmethode aufstellt, und die Bogenzahl φ_3, φ_5 als die Initialwerthe von φ ansieht, so findet man mittelst eines einmaligen Eingehens in die Näherungsrechnung folgende bis auf die Secunden richtigen Wurzeln der Gleichung (42)

$$\varphi_3 = 148° - 7' - 47 \cdot 3'',$$
$$\varphi_5 = 194° - 27' - 27 \cdot 6'',$$

zum Beweise, wie correct die graphische Constructionsmethode in der obigen Fig. 5, 6 gehandhabt wurde.

Die Bogenzahlen φ_1, φ_2, φ_4, φ_6 bilden das reelle Wurzelsystem einer zu (42) verwandten Gleichung, welche für $\rho = 5$ aus der Hilfsgleichung (43) hervorgeht, sobald man darin $x = \varphi - \rho \sin \varphi$, $y = \rho \cos \varphi$, $z = -\rho \sin \varphi$ substituirt. Thut man dies, so erhält man für diese Gleichung:

$$\begin{cases} A_0 = 1, \; a_{10} = 2, \; a_{11} = -10, \; a'_{11} = 8, \\ a_{20} = 22, \; a_{21} = 0, \; a'_{21} = 20, \; a_{22} = 25, \; a'_{22} = -40, \end{cases}$$

welche eben durch die gefundenen Bogenzahlen φ_1, φ_3, φ_4, φ_6 angenähert erfüllt wird.

Übrigens ist es geradezu nicht nothwendig, bei der Auflösung einer dieser Gleichungen gleichzeitig auch die Wurzeln der anderen Gleichung mitzuschleppen.

Da sowohl der Kreiscylinder als auch der Cycloïdencylinder gegen die Horizontalebene $x\,o\,y$ symmetrisch sind, so wird auch ihre Durchdringungslinie aus zwei in Bezug auf den Horizont symmetrischen Zweigen der Sinusoidallinie sich zusammensetzen, von denen der oberhalb $x\,y$-Ebene beginnende der Position $z = \rho \sin \varphi$, dagegen der unterhalb dem Horizont beginnende der Relation $z = -\rho \sin \varphi$ entspricht.

Bei der Vornahme einer bestimmten Gleichung zur Auflösung wird man blos den dieser Gleichung entsprechenden Sinusoidalzweig im Aufriss erzeugen und verwenden.