

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BEWEGUNGSVERHÄLTNISSE IN DEM DREIFACHEN STERNSYSTEM ϵ CANCRI.

VON
 HUGO SEELIGER.

(Mit 1 Tafel.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 5. MAI 1881.

1.

Von hervorragender wissenschaftlicher Bedeutung werden die Beobachtungen über die Bewegungserscheinungen am Fixsternhimmel erst dann, wenn sie als Grundlage dienen, zur Untersuchung der Frage, ob sich die allgemeinsten Gesetze, welche aus den Bewegungen innerhalb des Sonnensystemes hervorgehen, auch noch in entfernteren Regionen des Weltsystemes, in denen sich die uns näheren Fixsterne befinden, nachweisen lassen. In letzter Instanz muss die Stellarastronomie die Entscheidung darüber anzustreben suchen, ob unser Sonnensystem durch das Band der Gravitation mit den uns näheren Fixsternen in solcher Weise verbunden ist, dass man von einem dynamischen Systeme im engeren Sinne reden darf, d. h. von einem Systeme, in welchem die Bewegungen um den Schwerpunkt nur in einer Weise aufgefasst werden können, nämlich als Folge des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Wenigstens dürfte es gegenwärtig kaum zweifelhaft sein, dass diese letztere theoretische Grundlage bei allen weiteren Untersuchungen nicht nur angenommen werden darf, sondern angenommen werden muss.

Dass es an Versuchen, dieses wichtigste, weil allgemeinste Problem der ganzen theoretischen Astronomie, in Angriff zu nehmen nicht gefehlt hat, dürfte nicht befremden. Leider muss aber bekannt werden, dass alle diese vollständig verfehlt waren, und die bekanntesten von ihnen nichts anderes sind, als vollständig aus der Luft gegriffene Annahmen, die man nicht nur nicht zu beweisen vermag, sondern von denen man im Gegentheile zeigen kann, dass sie mit unendlich grosser Wahrscheinlichkeit mit den mechanischen Grundprincipien in Widerspruch stehen, wenigstens wenn diese nicht durch ungehörige Specialisirung entstellt werden. Man hat von mancher Seite die Darstellbarkeit der stellaren Eigenbewegungen als Folge dynamischer Beziehungen insofern als unmöglich hingestellt, als die Lösbarkeit des Problems erst in trostlos weit entfernte Zeiten gerückt wurde, indem man hierzu nicht nur den Besitz einer grossen Anzahl gut verbürgter Eigenbewegungen in dem jetzt usuellen Sinne, sondern auch eine detaillirtere Kenntniss der Krümmungen der von den Fixsternen am Himmel beschriebenen Wegen für absolut nothwendig hielt. Hinzuzufügen wäre dem noch, dass zur vollstän-

digen Erkenntniss der wirkenden Kräfte ohne Zuhilfenahme irgend welcher Hypothesen, auch die Bewegung der Sterne in der Richtung des nach dem Sonnensystem gezogenen Visionsradius bekannt sein muss. Indessen bin ich nicht der Meinung, dass die Astronomie so lange zu warten hat, um wenigstens die allerwichtigsten Eigenschaften des dynamischen Systemes, dem unsere Sonne angehört, zu entdecken. Man könnte sehr wichtige Schlüsse aus den Eigenbewegungen der Fixsterne allein ableiten, wenn diese nur in genügender Anzahl und Genauigkeit vorlägen. Man hat allerdings dazu gewisse Hypothesen anzunehmen. Diese lassen sich aber in so allgemeiner Form einführen, dass man dadurch kaum wesentliche Abweichungen von der Wahrheit zu befürchten hat. Es ist hier nicht der Ort auf diesen Gedanken näher einzugehen.

Für die Entwicklung der theoretischen Astronomie und als vorbereitender Schritt für die allgemeinen Untersuchungen der oben erwähnten Art, war es ohne Frage ein bedeutender Fortschritt, als es gelang, zu zeigen, dass die Bewegung der Doppelsterne um einander durch das Newton'sche Gravitationsgesetz die vollständigste Erklärung findet. Im Sinne dieses Fortschrittes beizutragen, muss demzufolge die Hauptaufgabe sein, die bei der Berechnung von Doppelsternbewegungen zu verfolgen ist, und in wie weit dies geschieht wird den Massstab liefern, nach dem der wissenschaftliche Werth einer solchen Berechnung zu messen ist. Eine ungefähre Darstellung der Beobachtungen hat für die Theorie nicht mehr Werth als irgend eine Interpolationsformel, deren Bedeutung hier, wo die Praxis keine im Voraus berechneten Ephemeriden verlangt, jede Stütze verliert. Selbst das an sich gewiss nicht uninteressante statistische Material, welches uns z. B. zeigt, dass bei den Doppelsternbahnen wenig abgeplattete Ellipsen durchaus nicht jene bevorzugte Rolle spielen, wie in unserem Sonnensystem, kann schliesslich, namentlich bei beträchtlicher Neigung der Bahn gegen den Visionsradius nur durch sehr sorgsame Berechnung einen wirklich verbürgten Zuwachs erlangen.

Ausser diesen theoretischen Rücksichten kann bei der Bearbeitung von Doppelsternbewegungen auch eine andere, praktische Seite zum Vortheile für die Astronomie mehr in den Vordergrund treten, namentlich seitdem sich gezeigt hat, dass die Beobachtungen eines so erfahrenen und ausgezeichneten Beobachters, wie Otto Struve, in hohem Masse von in gewissem Sinne constant wirkenden Messungsfehlern beeinflusst werden. Es wird demnach nicht ohne Interesse sein, diese constanten Fehler an einem bestimmten Sternpaare näher zu bestimmen. Indessen wird diese Bestimmung immerhin erst von secundärer Bedeutung sein können, weil doch die etwaigen allgemeinen Eigenschaften der erwähnten Fehler erst aus sehr vielen Untersuchungen der obigen Art hervorgehen können. Zudem wird gerade bei den Sternpaaren von kürzerer Umlaufszeit, die doch für unsere Zeit allein ein mechanisches Interesse darbieten können, diese Untersuchung schwer durchzuführen sein, da sich hier der jedenfalls vorhandene Einfluss der Stellung des Sternpaares gegen den Horizont des Beobachtungsortes nicht leicht von den aus der Unsicherheit der Bahnelemente hervorgehenden Fehlern wird trennen lassen. Es werden also im Gegensatz zu den Doppelsternen von verhältnissmässig kurzer Umlaufszeit nur die Sternpaare, die eine geringe Bewegung zeigen, einen werthvollen Beitrag zur Kenntniss der Eigenschaften der constanten Beobachtungsfehler liefern können.

Die Doppelsterne bilden gewissermassen die erste Station auf dem Untersuchungswege, welcher zu der Beantwortung der Frage nach dem dynamischen Systeme, welchem die Sonne angehört, führt. Hier tritt die erste Anwendung des Newton'schen Gravitationsgesetzes auf Körper ein, die sich ausserhalb der Wirkungssphäre unseres Planetensystemes befinden.

Die weiteren Folgen dieser Anwendung, in analoger Weise, wie diese sich bei den Planeten zu der Bearbeitung des Problems der drei Körper gestaltet hat, auch auf dreifache Sterne, deren es ja auf dem in unseren Gegenden sichtbaren Himmeltheile mehrere von unzweifelhaft physischer Zusammengehörigkeit gibt, auszu-dehnen, dazu lag bis jetzt keine Veranlassung vor, jedenfalls ist der Versuch nie gemacht worden.

Nach dem, was mir über das in dieser Richtung verfügbare Beobachtungsmaterial bekannt ist, dürften drei dreifache Sternsysteme zu einer näheren Untersuchung auffordern; während das erste von diesen nur ziemlich wenig Rechnung erfordert, um das zu untersuchen, was nach Massgabe der nur geringen Bewegung innerhalb des von brauchbaren Messungen erfüllten Zeitraumes sich als wirkliche physische Einwirkung eines dritten Körpers zeigt, das zweite aber möglicherweise nicht oft genug Gegenstand der Messung gewesen ist, bietet

das dritte Sternpaar, ζ Cancri, die Gelegenheit dar, die Berechnung in etwas eingehenderer Weise durchzuführen, indem die beiden sehr nahe an einander stehenden Sterne schon fast einen vollen Umkreis seit den Beobachtungen von W. Struve und viel mehr als einen solchen seit der Entdeckung des Sternpaares durch W. Herschel im Jahre 1781 in der Revolution um den Schwerpunkt des Systemes beschrieben haben.

Man sollte meinen, dass demnach hier ein günstiger Fall vorliegt, welcher die erste Anwendung der Störungstheorie auf die Fixsternwelt, erfordert. In wiefern diese Meinung berechtigt ist, wird die folgende Untersuchung zeigen, welche sich speciell mit den Bewegungsverhältnissen in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri beschäftigt.

§. 2.

Ich bezeichne die drei Sterne von ζ Cancri (Σ 1196, $\alpha = 8^h 3^m. 6$, $\delta = +18^\circ 6'$, 1850.0) in derselben Weise wie W. Struve durch die drei Buchstaben A , B , C . Die Helligkeit der drei Sterne, welche einen allerdings sehr zweifelhaften Anhaltspunkt für die Abschätzung der Massenverhältnisse abgibt, sind nach Otto Struve (Bd. IX der Pulkowaer Beobachtungen):

$$A=5.0; B=5.7; C=5.5$$

Zunächst soll die Bewegung von B um A behandelt und dabei keine Rücksicht auf den Stern C genommen werden. Es wird sich zeigen, dass diese Voraussetzung schon den Beobachtungen sehr nahe Gentige leistet.

Die Beobachtungen werden später in erforderlicher Ausführlichkeit angeführt werden. Da es ferner gleichgiltig ist, wie ich zu den elliptischen Elementen, die den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden, gelangt bin, so führe ich nur das Resultat an.

Durch Verbesserung von Elementen, die durch die bekannten Methoden erhalten worden sind, ergaben sich folgende Bestimmungsstücke der elliptischen Bahnbewegung, und zwar in der üblichen Bezeichnungsweise:

$$\left. \begin{array}{l} T = 1870.515 \\ \lambda = \pi - \Omega = 106^\circ 01' \\ \Omega = 77.57 \\ i = 17.50 \\ \varphi = 19.645 \\ n = -5.9535 \\ a = 0.8680 \end{array} \right\} \text{(II)}$$

Diese Elemente habe ich auf's Neue verbessert und gefunden:

$$\left. \begin{array}{l} T' = 1869.951 \\ \lambda = 106^\circ 01' \\ \Omega = 84.10 \\ i = 20.593 \\ \varphi = 20.340 \\ n = -5.6638 \end{array} \right\} \text{(IV)}$$

Auf welche Weise sich (IV) ergeben hat, wird später auseinandergesetzt werden. Die Vergleichung der beiden Elemente (II) und (IV) ist nun in der folgenden Tabelle enthalten. Diese enthält zugleich Zahlen, welche erst weiter unten ihre Erklärung finden. Die Zusammenstellung enthält die mit provisorischen Reductionselementen gebildeten Jahresmittel in Positionswinkel und Distanz, wobei die Positionswinkel sich auf das Äquinoctium von 1850,0 beziehen nebst den Gewichtszahlen, wie diese sich direct ergeben und daneben die der Rechnung zu Grunde gelegte Zahl. Ferner sind die Vergleichenungen mit den Elementen (II) und (IV) im Sinne Beobachtung—Rechnung angeführt. Zu Ende der Zusammenstellung kommen die Jahresmittel für die Zeit von 1875 bis 1878 noch einmal vor; diese wurden für die Ableitung der Elemente (II) und (IV) benützt, weil es

mir erst im Laufe der Arbeit, theilweise erst durch briefliche Mittheilungen, möglich war, die besseren und vollständigeren Zahlen zu bilden, welche die Tabelle enthält.

	Pos. Winkel 1850.0	Gewicht		Distanz	Gewicht		II		IV	IV _a		Interpol.
1826.22	57° 75	15	2	1.120	15	2	+3.88	+0.142	+8.40	+5.97	+0.136	-0° 18
28.80	38.56	10	1	1.015	10	1	-4.95	-0.013	2.03	-3.29	-0.021	-1.73
30.39	35.45	5	1	—	—	—	-2.21	—	+0.05	-0.69	—	+1.98
31.27	30.34	47	5	1.020	34	3	-4.20	-0.043	-2.24	-2.77	-0.054	-0.15
32.17	28.41	92	9	1.171	44	4	-2.89	+0.097	-1.31	-1.65	+0.085	+0.60
33.21	25.30	60	6	1.123	27	3	-2.40	+0.038	-1.17	-1.32	+0.026	+0.33
35.31	20.30	25	3	1.121	25	3	-0.32	+0.021	+0.34	+0.44	+0.007	+0.58
36.76	16.43	51	5	1.209	15	2	+0.60	+0.102	+0.94	+1.14	+0.084	+0.38
37.23	12.47	40	4	—	—	—	-1.81	—	-1.58	-1.35	—	-2.33
38.30	11.31	4	1	—	—	—	+0.53	—	+0.57	+0.82	—	-0.57
40.23	6.25	81	8	1.000	77	8	+1.77	-0.110	+1.51	+1.68	-0.126	+0.02
41.16	2.72	20	2	1.093	16	2	+1.28	-0.107	+0.91	+1.11	-0.033	-0.60
42.44	359.00	62	6	1.114	44	4	+1.78	+0.011	+1.35 ¹	+1.40	-0.006	-0.17
43.22	356.24	47	5	1.122	57	6	+1.61	+0.022	+0.99	+1.10	+0.003	-0.31
44.28	351.07	20	2	1.202	20	2	0	+0.109	-0.71	-0.69	+0.095	-1.84
45.39	348.73	17	2	1.028	15	2	+1.43	-0.056	+0.64	+0.58	-0.071	-0.28
46.26	345.61	17	2	1.043	16	2	+1.31	-0.033	+0.47	+0.31	-0.046	-0.30
47.29	342.34	18	2	1.023	15	2	+1.66	-0.043	+0.76	+0.50	-0.054	+0.13
48.26	339.12	53	5	1.009	53	5	+1.92	-0.045	+0.98	+0.61	-0.055	+0.44
49.31	336.26	40	4	0.972	40	4	+2.89	-0.068	+1.93	+1.47	-0.076	+1.44
50.29	333.14	15	2	1.002	15	2	+3.49	-0.024	+2.48	+1.92	-0.031	+1.96
51.26	329.18	46	5	1.013	39	4	+3.30	+0.002	+2.26	+1.60	-0.002	+1.68
52.26	324.85	24	2	0.987	22	2	+2.98	-0.007	+1.92	+1.17	-0.003	+1.21
53.36	320.21	17	2	1.033	15	2	+2.91	+0.059	+1.85	+1.02	+0.061	+0.97
54.21	315.66	13	1	0.942	13	1	+2.03	-0.015	+0.95	+0.06	-0.012	-0.05
55.18	310.83	55	6	1.010	59	4	+1.55	+0.073	+0.48	-0.46	+0.080	-0.69
56.28	305.83	82	8	0.989	29	3	+1.74	+0.076	+0.67	-0.29	+0.086	0.63
57.38	298.68	18	2	0.982	16	2	+0.06	+0.096	-0.98	-1.94	+0.108	-2.35
58.20	295.14	33	3	0.950	5	1	+0.83	+0.084	-0.23	-1.16	+0.099	-1.55
59.30	286.87	10	1	0.876	10	1	-1.33	+0.039	-2.35	-3.21	+0.057	-3.54
60.27	282.11	17	2	0.810	10	1	-0.32	0	-1.31	-2.07	+0.018	-2.28
61.27	275.14	15	2	0.825	15	2	-0.93	+0.044	-1.87	-2.51	+0.064	-2.55
62.31	266.51	10	1	0.675	10	1	-2.41	-0.075	-3.30	-4.27	-0.049	-3.49
63.13	263.88	77	8	0.657	17	2	+1.02	-0.069	+0.25	-0.10	-0.047	+0.44
64.18	254.99	60	6	0.639	11	1	+0.56	-0.053	-0.12	-0.25	-0.034	+0.57
65.38	244.08	95	10	0.696	28	3	+0.30	+0.040	-0.21	-0.09	+0.059	+0.92
66.23	237.45	64	8	0.605	20	2	+1.94	-0.030	+1.65	+1.81	-0.013	+2.86
67.22	225.06	35	4	—	—	—	+0.02	—	-0.01	+0.16	—	+1.01
68.22	212.28	45	5	0.656	10	1	-1.25	+0.075	-1.00	-0.59	+0.084	-0.42
69.35	198.92	22	2	0.521	22	2	-0.59	-0.037	-0.06 ²	-0.29	-0.032	-0.36
70.27	185.63	19	8	0.548	29	3	-1.92	-0.005	-1.30	-1.75	-0.003	-2.35
71.24	173.97	57	6	0.568	24	2	-0.73	+0.016	-0.18	-0.85	+0.016	-1.85
72.25	162.95	63	6	0.619	25	3	+1.46	+0.059	+1.77	+1.00	+0.059	-0.20
73.22	150.58	70	7	0.591	20	2	+1.24	+0.015	+1.03	+0.46	+0.014	-0.56
74.16	141.83	52	5	0.629	32	3	+3.73	+0.031	+2.70	+2.49	+0.033	+1.86
75.21	130.43	72	7	0.633	57	6	.	.	+1.86	+2.21	+0.009	+2.00
76.20	119.49	38	4	0.661	33	3	.	.	-0.15	+0.84	+0.007	+0.60
77.26	108.42	56	6	0.645	41	4	.	.	-2.66	-0.95	-0.043	-2.46
78.22	100.52	43	4	0.641	43	4	.	.	-3.55	-1.19	-0.078	.
79.29	91.69	15	2	0.767	15	2	.	.	-5.75	-2.73	+0.014	.
80.23	89.40	6	1	0.767	6	1	.	.	-1.83	+1.71	-0.019	.
75.20	129.93	57	6	0.628	42	4	+2.77	0
76.16	119.55	28	3	0.647	23	2	+1.75	-0.012
77.26	108.91	38	4	0.596	23	2	+0.77	-0.101
78.18	100.93	30	3	0.563	30	3	+0.07	-0.106

¹ Es wurde die folgende Rechnung fälschlich mit der Differenz +1.89 gemacht.

² Desgleichen mit der unrichtigen Zahl -1.83. Diese Fehler können keinen wesentlichen Einfluss auf das Resultat haben.

Die Fehler, welche die Elemente (IV) übrig lassen, wurden nun nach Massgabe der Gruppen, wie durch die abtheilenden Zwischenräume angedeutet ist, mit Rücksicht auf die abgerundeten Gewichtszahlen in folgende Mittel vereinigt:

	$B-R$	g	angen. \sqrt{g}		$B-B$	g	angen. \sqrt{g}
1826.22	+8.40	2	1.4	1860.78	-2.00	6	2.4
30.79	-1.88	7	2.6	64.71	+0.30	30	5.5
32.59	-1.25	15	3.9	68.06	-0.79	11	3.3
36.55	-0.05	12	3.5	71.16	-0.04	20	4.5
41.51	+1.40	22	4.7	74.20	+1.78	19	4.4
46.75	+0.55	13	3.6	77.23	-2.20	14	3.7
51.02	+2.10	15	3.9	79.55	-4.46	3	1.7
56.24	+0.33	20	4.5				

Um eine weitere Verbesserung der Elemente (IV) zu erlangen, müssen jetzt die betreffenden Bedingungen-
gleichungen aufgestellt werden. Ich bemerke gleich bei dieser Gelegenheit, dass die zahlreichen Ausglei-
chungen, welche in dieser Arbeit vorkommen, ohne Ausnahme nach der Methode der kleinsten Quadrate aus-
geführt worden sind. Die Bemerkung scheint nothwendig, weil in neuerer Zeit oftmals die Zulässigkeit der
genannten Ausgleichungsmethode an die Gültigkeit des Gauss'schen Fehlergesetzes geknüpft worden ist. Ich
betrachte aber, wie dies ja längst von kompetenter Seite, so von Gauss selbst, auf das Nachdrücklichste
hervorgehoben worden ist, die Methode der kleinsten Quadrate als nichts anderes, als das beste und zuver-
lässigste Mittel, die Rechnungen den Beobachtungen möglichst gut anzuschmiegen, ganz gleichgiltig, ob die
übrigbleibenden Fehler Beobachtungsfehler im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind, oder ob dieselben sich
aus andern Ursachen zusammensetzen. Aus dieser Stellung kann die Methode der kleinsten Quadrate nur zum
Nachtheile für die rechnende Astronomie verdrängt werden, indem dadurch Willkürlichkeiten Raum gelassen
wird, die sich oftmals einer strengen Controle entziehen.

Für die obigen Normalörter ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen für die Elementenverbesserungen.

1 $d\Omega$	+0.176	1 di	+0.979	1 $d\lambda$	+0.353 (10 $d\tau$)	-0.273 (100 dn)	-1.095	$d\varphi$	= +8.40
1	+0.184	1	+1.013	1	+0.321	-0.222	-0.702		-1.88
1	+0.174	1	+1.026	1	+0.314	-0.207	-0.520		-1.25
1	+0.131	1	+1.050	1	+0.308	-0.132	-0.153		-0.05
1	+0.043	1	+1.066	1	+0.317	-0.159	+0.322		+1.40
1	-0.068	1	+1.063	1	+0.346	-0.141	+0.839		+0.55
1	-0.148	1	+1.042	1	+0.390	-0.130	+1.261		+2.10
1	-0.183	1	+0.989	1	+0.483	-0.117	+1.736		+0.33
1	-0.097	1	+0.947	1	+0.647	-0.104	+2.012		-2.00
1	+0.086	1	+0.943	1	+0.901	-0.082	+1.871		+0.30
1	+0.182	1	+1.011	1	+1.208	-0.040	+0.981		-0.79
1	+0.007	1	+1.061	1	+1.288	+0.027	-0.689		-0.04
1	-0.177	1	+1.024	1	+1.056	+0.079	-1.852		+1.78
1	-0.148	1	+0.966	1	+0.769	+0.098	-2.079		-2.20
1	-0.072	1	+0.941	1	+0.614	+0.104	-1.977		-4.46

Nimmt man für die Grössen \sqrt{g} die oben angeführten Werthe, so ergeben sich folgende Normalgleichungen:

+209.780 $d\Omega$	-1.543 di	+212.776 $d\lambda$	+141.582 (10 $d\tau$)	-16.892 (100 dn)	+50.529 $d\varphi$	= +40.402
-1.543	+3.637	-1.513	-1.569	-1.232	+3.980	-8.324
+212.776	-1.513	+216.203	+142.894	-17.329	+47.821	+45.713
+141.582	-1.569	+142.894	+121.641	-5.616	+15.317	+18.130
-16.892	-1.232	-17.329	-5.616	+3.469	-18.511	-9.276
+50.529	+3.980	+47.821	+15.317	-18.511	+392.891	+78.882

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} d\Omega &= -12.568 \\ di &= -9.705 \\ d\lambda &= +7.862 \\ d\tau &= +0.442 \\ dn &= -0.2229 \\ d\varphi &= -0.264 \end{aligned}$$

Und man erhält jetzt die neuen Elemente:

$$\begin{aligned} T &= 1870.393 \pm 0.324 \\ \lambda &= 113.872 \pm 12.078 \\ \Omega &= 71.532 \pm 11.262 \\ i &= 10.888 \pm 5.922 \\ \varphi &= 20.076 \pm 0.573 \\ n &= -5.8867 \pm 0.1621 \\ \text{Umlaufszeit} &= 61.154 \pm 1.684 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

IV.

Ich habe hier ausnahmsweise die mittleren Fehler der Elemente angeführt, um zu zeigen, mit welcher Unsicherheit letztere behaftet sind. Es liegt dies übrigens vollständig in der Natur der Sache und bedarf keiner weiteren Erklärung. Bezeichnet ℓ den übrigbleibenden Fehler, so hat sich, aus den Bedingungsgleichungen berechnet, $\Sigma \ell^2 g$ von 520 auf 351 durch die neue Verbesserung erniedrigt. Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass im Folgenden stets mittlere, niemals wahrscheinliche Fehler angeführt werden und dass diese immer aus den Quadraten der Fehler berechnet worden sind.

Überblickt man die Fehler (p. 6), welche die Elemente IV und IV_a übriglassen, so findet sich, dass bei den Elementen IV, 27 positive und 24 negative Fehler vorkommen und dass diese so angeordnet erscheinen, dass 15 Zeichenwechsel auftreten. Bei den Elementen IV_a dagegen hat man 26 positive, 25 negative Fehler und 13 Zeichenwechsel. Wenn hier eine kleine Verringerung in der für die Güte der Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung so wichtigen Anzahl der auftretenden Zeichenwechsel stattfindet, so gestaltet sich die Sache, wie natürlich, sehr viel mehr zu Gunsten der Elemente IV_a, wenn die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit, also $\sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2 g}{m}}$, wo Δ die Fehler, g das Gewicht und m die Anzahl der Fehler bedeutet, berechnet wird.

Es ergibt sich für das Elementensystem IV diese Grösse zu 3.57

$$\text{IV}_a \quad 3.03.$$

Die Bedeutung der Gewichtseinheit ist folgende. Es wurde bei Ansetzung der relativen Gewichtszahlen der Beobachtung eines Abends bei W. Struve das Gewicht 5 gegeben. So entstand die erste Reihe von Gewichtszahlen. Hierauf wurden diese Zahlen durch 10 dividirt, und so die abgerundeten Gewichte gewonnen, die ausschliesslich zur Rechnung benützt werden sollten. Es ist also die Beobachtung vom Gewichte 1 so genau wie 2 Abendmittel von W. Struve.

Daneben unterliegt es keinem Zweifel, dass die Elemente IV_a weit genauer sind als IV. Aber auch bei ihnen wird man nicht stehen bleiben dürfen, ohne die Grundsätze zu verletzen, welche in der Einleitung angedeutet worden sind. Wird die Vergleichung in so engen Intervallen ausgeführt, wie hier, wo jedes Jahr eine Vergleichung gemacht werden konnte, so wird die Grösse der m . Abweichung keinen Grund zu Zweifeln abgeben, hier um so weniger, als sich nur ganz vage Abschätzungen über die Genauigkeit, die bei einem so engen Sternpaare, wie ζ Cancri, die Beobachtung gestattet, machen lassen werden. Dies wird aber nur dann gelten, wenn die Vorzeichen der Fehler ziemlich gleichmässig vertheilt sind. Die Anzahl der Zeichenwechsel, welche von der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfordert wird, ist also hier das bei weitem wichtigere Kriterium. Es sollten nur nach diesen Forderungen 25 Zeichenwechsel vorkommen, während nur 13 zu finden sind. Durch eine neue Verbesserung der Elemente allein wird diesem Übelstande in keinem Falle abgeholfen werden können, wenn nicht ein wesentlich neues Moment in die Betrachtung hineingezogen wird. Es fragt sich nun, ob solche neue Gesichtspunkte sich auffinden lassen. In der That aber lassen sich folgende Zweifel und Erwägungen hervorheben, die bei einer Untersuchung der Bewegung unseres Sternpaares in Frage kommen.

1. Die Jahresmittel sind mit Rücksicht auf die den einzelnen Beobachtungen verschiedener Beobachter zuertheilten Gewichte gebildet worden. Wir werden später sehen, dass diese ersten Gewichtsbestimmungen

ziemlich willkürlich sind und es bis zu einem gewissen Grade sein müssen, da es immer eine Abschätzung und nichts anderes bleibt, wenn man die relative Genauigkeit der Messung verschiedener Beobachter auf rationelle Weise durch Zahlen ausdrücken will. Grosse Mängel aber in der ersten Abschätzung der relativen Gewichtszahlen, die später beseitigt werden, können eine ziemliche Änderung in den Jahresmitteln hervorrufen.

2. Die ursprünglich gegebenen Beobachtungen wurden mit provisorischen Reduktionselementen reducirt. Es sind deshalb die jedenfalls vorhandenen constanten Fehler entweder gar nicht oder in sehr zweifelhaft richtiger Weise verbessert worden. Dieser Umstand kann die Jahresmittel sehr alteriren und namentlich die Zahl der Zeichenwechsel desshalb sehr stark vermindern, weil im Allgemeinen sich in denselben Zeiträumen auch die Beobachtungen fast derselben Beobachter in allen Jahren wieder vorfinden.

3. Habe ich den Verdacht, dass die erste von W. Struve herrührende Beobachtung des Positionswinkels vom Jahre 1826, trotzdem sie das Mittel aus drei Abenden ist, durch irgend einen constanten Fehler arg entstellt ist. Die Vermuthung hat sich im Verlaufe der Arbeit bestätigt. Und demzufolge müsste die Ausgleichung noch einmal ausgeführt werden mit Ausschluss des ersten in der Tabelle auf p. 6 vorkommenden Jahresmittels. Es wird dies am Schlusse der Arbeit über die Bewegung des Sternes B geschehen, nachdem zugleich die Punkte 1 und 2 eingehende Berücksichtigung gefunden haben werden. Indessen habe ich die Sicherheit, dass die erste Struve'sche Beobachtung mit einem sehr grossen Fehler behaftet ist, erst erlangt, als ein sehr grosser Theil der hier mitzutheilenden Rechnungen ausgefüllt worden war; es wäre demnach vielleicht besser gewesen, wenn der Ausschluss dieser Beobachtung eher eingetreten wäre, als es in Wirklichkeit geschehen ist.

4. Ist von der Einwirkung des dritten Sternes C , deren Untersuchung ja den Hauptzweck dieser Arbeit abgeben soll, bis jetzt nicht die Rede gewesen. Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung sind im Ganzen nicht sehr weit von der Grenze entfernt, die man für die Grösse der Messungsfehler eines Objectes, wie ζ Cancri, noch zulassen könnte. Man würde desshalb auf den ersten Blick den Schluss ziehen, dass diese Einwirkung nur sehr gering sein müsse. Es ist aber noch ein zweiter Fall denkbar. Die störenden Einwirkungen von C auf die Bewegung von B um A können so beschaffen sein, dass sie innerhalb des von Beobachtungen erfüllten Zeitraumes sich durch eine passende Änderung der abgeleiteten Bahnelemente so compensiren lassen, dass beide der Beobachtung zugängliche Coordinaten ziemlich eben so gut durch eine einzige ungestörte Ellipse dargestellt werden können, als durch einen Kegelschnitt, der nach Massgabe nicht unbeträchtlicher störender Einwirkungen von Seite des dritten Sternes osculirt. In der That nun wird sich zeigen, dass dieser Fall, der gewiss an sich schon interessant ist, bei ζ Cancri intritt. Wir werden finden, dass man für C sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu gefährden, und dass man ziemlich bedeutende annehmen muss, wenn man die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Darstellung erlangen will.

Den Hauptbeweggrund zu dieser Untersuchung bildet, wie gesagt, die nicht fortznsechaffende Reihenfolge in der Reihe der übrigbleibenden Fehler. Dass diese Erscheinung fortfällt, wenn man z. B. für die früher gebrauchten Normalorte die Differenz $B-R$ bildet, ist eigentlich selbstverständlich. Es wird also nicht anfallen, wenn jetzt in der Reihe:

	$B-R$		$B-R$		$B-R$
1826.22	+5.97	1846.75	+0.34	1868.06	-0.26
30.79	-2.55	51.02	+1.47	71.16	-0.66
32.59	-1.52	56.24	-0.63	74.20	+1.64
36.55	+0.13	60.78	-2.76	77.23	-0.51
41.51	+1.38	64.71	+0.25	79.55	-1.25

7 positive, 8 negative Fehler und 7 Zeichenwechsel vorkommen.

Ich habe nun noch die Halbaxe a der von B beschriebenen Bahnellipse nach den Elementen IV_a abzuleiten. Es ergibt sich, wenn das Mittel der Bestimmungen aus allen einzelnen Jahresmitteln genommen wird:

$$a = 0.851.5 \pm 0.008.5.$$

Die obige Zusammenstellung enthält bereits die Vergleichung der beobachteten Distanzen mit den aus dem angeführten a berechneten.

Die Reihe der Fehler zeigt 24 positive und 23 negative Abweichungen, während 17 Zeichenwechsel auftreten. Die mittlere Abweichung der Gewichtseinheit im obigen Sinne ist

$$\pm 0.058.$$

Es treten demnach hier ganz ähnliche Verhältnisse auf, wie bei den Positionswinkeln, nur weniger ausgesprochen wie früher. Diese Erscheinung ist ganz natürlich.

Offenbar kann nun Alles, was aus den Positionswinkeln bestimmt wird, auch aus den Distanzen abgeleitet werden. Indessen wird es dem Kundigen gegenüber keiner Erwähnung der Gründe bedürfen, die mich veranlasst haben, nur die Positionswinkel zu den folgenden Rechnungen zu benützen. Das auf solche Weise erlangte Resultat wurde dann zur Darstellung der Distanzen benützt. An der Richtigkeit der Methode dürfte nichts geändert werden, wenn auch die Distanzen, wie z. B. bei O. Struve, von allen Beobachtern eben so genau beobachtet wurden, wie die Positionswinkel. Doch dürfte dies namentlich in Anbetracht der auftretenden constanten Fehler im Allgemeinen nicht eintreffen.

Ich lasse zum Schlusse dieses Paragraphen eine Ephemeride nach den Elementen IV_a und mit dem letzten Werthe von a folgen. Es sind dabei die Zahlen bis auf etwa 0.01 und 0.001 genau gehalten.

1826.2	51.86	0.986	1852.2	323.92	0.997	1870.2	188.29	0.551
27.2	47.88	1.005	53.2	319.87	0.976	70.7	181.81	
28.2	44.06	1.025	54.2	315.64	0.954	71.2	175.33	0.552
39.2	40.37	1.043	55.2	311.20	0.930	71.7	168.90	
30.2	36.80	1.059	56.2	306.52	0.905	72.2	162.57	0.560
31.2	33.34	1.073	57.2	301.57	0.880	72.7	156.38	
32.2	29.96	1.086	58.2	296.30	0.852	73.2	150.35	0.576
33.2	26.65	1.097	59.2	290.68	0.823	73.7	144.52	
34.2	23.40	1.106	60.2	284.64	0.794	74.2	138.89	0.597
35.2	20.20	1.113	61.2	278.14	0.763	74.7	133.49	
36.2	17.04	1.119	62.2	271.09	0.733	75.2	128.32	0.624
37.2	13.91	1.123	62.7	267.34		75.7	123.37	
38.2	10.80	1.127	63.2	263.34	0.702	76.2	118.65	0.654
39.2	7.70	1.128	63.7	259.34		76.7	114.15	
40.2	4.60	1.127	64.2	255.07	0.672	77.2	109.86	0.686
41.2	1.49	1.125	64.7	250.60		77.7	105.77	
42.2	358.36	1.121	65.2	245.93	0.642	78.2	101.86	0.718
43.2	355.20	1.115	65.7	241.05		79.2	94.55	0.752
44.2	352.02	1.108	66.2	235.96	0.615	80.2	87.87	0.785
45.2	348.79	1.100	66.7	230.65		81.2	81.72	0.817
46.2	345.50	1.090	67.2	225.13	0.591	82.2	76.03	0.848
47.2	342.15	1.078	67.7	219.40		83.2	70.73	
48.2	338.72	1.065	68.2	213.47	0.572	84.2	65.77	0.905
49.2	335.19	1.050	68.7	207.37		85.2	61.10	
50.2	331.56	1.034	69.2	201.12	0.558	86.2	56.69	0.957
51.2	327.81	1.016	69.7	194.74		87.2	52.50	
52.2	323.92	0.997	70.2	188.29	0.551	88.2	48.49	1.002

§. 3.

Die erhaltenen Resultate können auch noch auf einem von dem früheren vollständig verschiedenen Wege bestätigt werden. Bewegte sich der Stern um A ohne eine anziehende Wirkung von C zu erfahren, so müssten

die beobachteten Positionswinkel p und Distanzen ρ insoweit den Kepler'schen Gesetzen genügen, als sie nicht durch Beobachtungsfehler entsteht sind. Es müsste also

$$\rho^2 \frac{dp}{dt} = c$$

eine Constante sein für alle Zeiten. Man kann $\frac{dp}{dt}$ so genau ableiten, dass man keinen allzu grossen Einfluss von den Messungsfehlern zu befürchten braucht. Es wird sich dann aus den zahlreichen gemessenen Distanzen ein zuverlässiger Werth von c ableiten lassen, und mit diesem wird sich für jede beliebige Zeit ein Werth für p ergeben, dessen Übereinstimmung mit der beobachteten Distanz einen Schluss erlauben wird, in wie weit das Kepler'sche Gesetz Geltung hat.

Um $\frac{dp}{dt}$ möglichst genau berechnen zu können, muss ein Interpolationsverfahren angewandt werden, welches sich möglichst allen beobachteten Jahresmitteln anschliesst. Ich war in der Lage, dazu eine Formel anwenden zu können, die ich ursprünglich für andere Zwecke abgeleitet habe. Es wurden nämlich alle Jahresmittel, welche zur Ableitung der Elemente II benützt worden, nach der Methode der kleinsten Quadrate, jedoch ohne die verschiedenen Gewichte zu berücksichtigen, behandelt. Es stellte sich heraus, dass die beobachteten Positionswinkel ziemlich gut durch die Formel dargestellt werden:

$$p = 332^\circ 262 - 74^\circ 638 t - 11^\circ 360 t^2 - 23^\circ 810 t^3 - 52^\circ 443 t^4 - 3^\circ 352 t^5 + 24^\circ 683 t^6. \quad (1)$$

Es ist hierin t als Vielfaches von 20 Jahren auszudrücken und vom Jahre 1850.0 an zu zählen. Es ist selbstverständlich, dass diese Formel gar keine andere Bedeutung hat, als die einer Interpolationsformel. Sie wird desshalb innerhalb des Zeitraumes, für welchen dieselbe abgeleitet worden ist, auch dann noch zur Berechnung des Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ vorzüglich geeignet sein, nachdem man bemerkt hat, dass sie keineswegs den Anfang einer convergenten Reiheneentwicklung darstellt. Man kann aber auch diese Convergenz erlangen, wenn man die Formel nur für kleine Zeiträume gelten lässt, und dem zufolge den Anfangspunkt, von welchem t gezählt werden soll, auf verschiedene Zeiten legt. Auf diese Weise habe ich, allerdings blos aus Bequemlichkeitsrücksichten, die Formel (1) in fünf andere zerlegt, indem ich den Anfangspunkt, von dem t gezählt wird, nach einander auf 1830.0, 40.0, 50.0, 60.0 und 70.0 legte. Wird dann ausserdem t in Jahrzehnten ausgedrückt, so ist also t in den folgenden Formeln $\leq \frac{1}{2}$ und dieselben zeigen bereits eine ziemlich bedeutende Convergenz.

$$\begin{array}{l} 1830.0 \ p = 34^\circ 942 - 39^\circ 217 t + 37^\circ 294 t^2 - 42^\circ 652 t^3 + 20^\circ 910 t^4 - 4^\circ 733 t^5 + 0^\circ 386 t^6 \\ 1840.0 \quad 6^\circ 930 - 30^\circ 295 - 6^\circ 745 + 1^\circ 374 + 3^\circ 031 - 2^\circ 419 + 0^\circ 386 \\ 1850.0 \quad 332^\circ 262 - 37^\circ 319 - 2^\circ 840 - 2^\circ 976 - 3^\circ 278 - 0^\circ 105 + 0^\circ 386 \\ 1860.0 \quad 286^\circ 130 - 63^\circ 249 - 26^\circ 697 - 9^\circ 421 + 1^\circ 984 + 2^\circ 210 + 0^\circ 386 \\ 1870.0 \quad 191^\circ 342 - 123^\circ 611 - 15^\circ 181 + 28^\circ 320 + 18^\circ 815 + 4^\circ 523 + 0^\circ 386 \end{array} \quad (2)$$

Nach diesen Formeln wurden die Positionswinkel für den Zeitraum von 1826.0 bis 1878 berechnet. Die Vergleichung dieser mit den Beobachtungen findet sich als letzte Columnne in der Tabelle auf p. 162. Man sieht, dass man es ohne Mühe in der Hand hat, nur durch passende Änderung der constanten Coëfficienten in (2) die Übereinstimmung sehr viel weiter zu treiben. Für die gegenwärtigen Zwecke wäre dies aber nutzlos, indem (2) nur zur Berechnung der Differentialquotienten dienen soll. Diese werden aber, wie ersichtlich, nirgends in dem erwähnten Zeitraume wesentlich von der Wahrheit abweichen können. Dass (2) nur zu interpolatorischen Zwecken brauchbar ist und ausserhalb des Zeitintervalles, für welches die Coëfficienten abgeleitet worden sind, keine Geltung hat, sieht man sofort, wenn man die Positionswinkel für die Jahre 1878, 1879, 1880 berechnet. Es findet sich:

$$\begin{array}{ll} 1878.0 & 106.53 \\ 1879.0 & 103.00 \\ 1880.0 & 104.59, \end{array}$$

also in jedem Falle total falsche Werthe.

Mit Hilfe von (2) ergeben sich nun für $\frac{dp}{dt}$ folgende Werthe, wenn als Zeiteinheit das Jahr genommen wird:

1826.0	-9°55	1836.5	-2°58	1847.0	-3°61	1857.5	-5°17	1868.0	-11°47
26.5	-8.50	37.0	-2.63	47.5	-3.62	58.0	-5.37	68.5	-11.73
27.0	-7.56	37.5	-2.69	48.0	-3.64	58.5	-5.59	69.0	-11.97
27.5	-6.73	38.0	-2.76	48.5	-3.66	59.0	-5.82	69.5	-12.19
28.0	-6.00	38.5	-2.82	49.0	-3.68	59.5	-6.06	70.0	-12.36
28.5	-5.36	39.0	-2.89	49.5	-3.70	60.0	-6.33	70.5	-12.50
29.0	-4.80	39.5	-2.96	50.0	-3.73	60.5	-6.60	71.0	-12.58
29.5	-4.33	40.0	-3.03	50.5	-3.76	61.0	-6.89	71.5	-12.60
30.0	-3.92	40.5	-3.10	51.0	-3.80	61.5	-7.19	72.0	-12.57
30.5	-3.58	41.0	-3.16	51.5	-3.84	62.0	-7.50	72.5	-12.47
31.0	-3.30	41.5	-3.22	52.0	-3.89	62.5	-7.82	73.0	-12.29
31.5	-3.06	42.0	-3.27	52.5	-3.95	63.0	-8.15	73.5	-12.02
32.0	-2.88	42.5	-3.33	53.0	-4.02	63.5	-8.49	74.0	-11.67
32.5	-2.74	43.0	-3.38	53.5	-4.11	64.0	-8.83	74.5	-11.23
33.0	-2.63	43.5	-3.42	54.0	-4.19	64.5	-9.18	75.0	-10.67
33.5	-2.56	44.0	-3.45	54.5	-4.29	65.0	-9.53	75.5	-9.99
34.0	-2.51	44.5	-3.49	55.0	-4.40	65.5	-9.87	76.0	-9.19
34.5	-2.49	45.0	-3.52	55.5	-4.53	66.0	-10.21	76.5	-8.25
35.0	-2.48	45.5	-3.54	56.0	-4.67	66.5	-10.55	77.0	-7.16
35.5	-2.50	46.0	-3.57	56.5	-4.82	67.0	-10.87		
36.0	-2.54	46.5	-3.59	57.0	-4.99	67.5	-11.18		

Berechnet man nun mit Hilfe dieser Zahlen und der beobachteten Werthe von ρ für alle Beobachtungsepochen $-\rho^2 \frac{dp}{dt}$, so ergibt sich als Mittel, ohne Rücksicht auf die Gewichte

$$-\rho^2 \frac{dp}{dt} = 4.235.$$

Mit diesem Werthe kann man nun umgekehrt wieder die Distanzen berechnen.

In der folgenden Zusammenstellung sind die einzelnen $-\rho^2 \frac{dp}{dt}$, ρ und die Differenz $B-R$ für die Distanzen mitgetheilt.

	$-\rho^2 \frac{dp}{dt}$	ρ	$B-R$		$-\rho^2 \frac{dp}{dt}$	ρ	$B-R$
1826.22	11.32	0.682	+0.438	1855.18	4.53	0.977	+0.033
28.80	5.17	0.918	+0.097	56.28	4.65	0.944	+0.045
31.27	3.36	1.156	-0.136	57.38	4.95	0.909	+0.073
32.17	3.88	1.224	-0.053	58.20	4.93	0.881	+0.069
33.21	3.28	1.276	-0.153	59.30	4.58	0.843	+0.033
35.31	3.13	1.306	-0.185	60.27	4.25	0.809	+0.001
36.46	3.81	1.274	-0.065	61.27	4.80	0.775	+0.050
40.23	3.06	1.177	-0.177	62.31	3.51	0.742	-0.067
41.16	3.80	1.154	-0.061	63.13	3.56	0.717	-0.060
42.44	4.12	1.130	-0.016	64.18	3.66	0.688	-0.049
43.22	4.28	1.116	+0.006	65.38	4.74	0.658	+0.038
44.28	5.01	1.105	-0.097	66.23	3.75	0.639	-0.038
45.39	3.74	1.094	-0.066	68.22	4.98	0.605	+0.051
46.26	3.90	1.088	-0.045	69.35	3.34	0.591	-0.066
47.29	3.79	1.082	-0.059	70.27	3.73	0.584	-0.036
48.26	3.73	1.077	-0.068	71.24	4.06	0.580	-0.012
49.31	3.49	1.072	-0.100	72.25	4.80	0.582	+0.037
50.29	3.77	1.063	-0.061	73.22	4.25	0.590	+0.001
51.26	3.92	1.053	-0.040	74.16	4.56	0.606	+0.023
52.26	3.82	1.039	-0.052	75.21	4.16	0.639	-0.006
53.36	4.36	1.019	+0.014	76.20	3.84	0.694	-0.033
54.21	3.75	1.001	-0.059				

Die Differenzen $B-R$ erheben sich nur selten ihrem Betrage nach über Grössen, die mit einiger Sicherheit aus den Beobachtungen erkannt werden können. Die schlechte Vertheilung der Vorzeichen ist hier allerdings noch auffallender als früher, und fordert also um so mehr zu den folgenden Untersuchungen auf.

Für uns aber ist die überaus grosse Differenz bei dem ersten Jahresmittel von besonderer Wichtigkeit. Die Interpellationsformeln (1) und (2), auf welchen die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ beruhen, schliesst sich gerade dieser Struve'schen Beobachtung vollkommen an; ist dieser Positionswinkel, wie bereits vermuthet worden, um ein Beträchtliches zu gross, so muss die berechnete Distanz p um ein Entsprechendes zu klein aus der Anwendung des Flächensatzes hervorgehen. Ich halte dies Resultat für einen sehr kräftigen Beweis für die Unvereinbarkeit der betreffenden Beobachtung mit den folgenden. Im weiteren Verlaufe dieser Arbeit wird diese nun ziemlich fest begründete Annahme die vollständigste Bestätigung finden.

Bis jetzt haben wir gefunden, dass die Beobachtungen durchaus nicht mit Sicherheit auf eine merkbare Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung von B um A hindeuten. Vielmehr ist diese Einwirkung auf eine nicht einmal unzweideutige Weise nur angedeutet.

Es liegt uns desshalb jetzt die Aufgabe ob, diese Einwirkung, wenn sie überhaupt stattfindet, näher kennen zu lernen. Zunächst wird es sich um die Feststellung der Methode handeln müssen, die dabei zu befolgen sein wird.

§. 4.

Eine allgemeine Theorie der dreifachen Sterne aufstellen zu wollen, käme mit dem Versuche überein, das Problem der drei Körper in dem allgemeinen Falle zu behandeln, wo die Grösse und gegenseitige Lage der auftretenden Massen so beschaffen ist, dass alle gegenseitigen Anziehungen durch Grössen gegeben sind, die als von derselben Ordnung angesehen werden müssen. Daraus ist von vorneherein ersichtlich, dass die Bewegung in dreifachen Sternsystemen, zufolge des gegenwärtigen Standes der diesbezüglichen mathematischen Forschungen, nur dann einer eingehenden Behandlung zugänglich ist, wenn sich das Problem der drei Körper in ein Störungsproblem verwandelt, d. h. dann, wenn an jener oben erwähnten Allgemeinheit nicht festgehalten wird. Aber auch so wird in der Theorie der dreifachen Sterne mancher Vortheil fehlen, der in unserem Sonnensystem, namentlich in den Anfangsstadien der Entwicklung der Mechanik des Himmels, von wesentlichem Einfluss auf die günstige Entfaltung der Störungstheorie gewesen ist. Man darf nämlich nicht annehmen, dass die Excentricitäten der von den Sternen um den Schwerpunkt des Systemes näherungsweise beschriebenen Ellipsen, kleine Grössen seien. Es werden also, abgesehen von speciellen Fällen, Entwicklungen, welche nach Potenzen dieser Grössen fortschreiten, nicht zulässig sein. So liegt z. B. in ζ Cancri die Excentricität der Bahn, welche B um A beschreibt, schon ausserhalb der Grenze, wo noch die Entwicklung der excentrischen Anomalie als Function der Zeit in Form einer nach den Potenzen der Excentricität fortschreitenden Reihe mit Vortheil angewandt werden kann. Es werden also solche Entwicklungen zu vermeiden sein. Dadurch wird in die folgende Rechnung eine unangenehme Complication eingeführt. Es unterliegt nämlich keinem Zweifel, dass die absoluten Störungen vor den speciellen den grossen Vortheil voraus haben, dass sie einer ungefähren Abschätzung durch geometrische Betrachtung weit zugänglicher sind. Der Ausgang von einem bestimmten Oculationspunkte kann diese ursprüngliche Übersichtlichkeit in den störenden Einwirkungen vollständig verdecken, und thut dies in der That in den allermeisten Fällen.

Bei der eigenthümlichen Verwicklung, die nun die Verhältnisse bei ζ Cancri mit sich bringen, sind aber die absoluten Störungen nicht gnt anders zu berechnen, als durch Entwicklungen, welche wenigstens den nach Potenzen der Excentricität fortschreitenden Reihen analog angelegt sind. Ich musste also hier auf einen wesentlichen Vortheil Verzicht leisten und die Integrationen auf mechanischem Wege ausführen.

Es wäre nutzlos, sich noch weiter in allgemeinen Bemerkungen zu ergehen. Vielmehr wird die specielle Lage der Dinge, wie sie gerade bei dem zu behandelnden Sternsysteme vorkommt, die Mittel an die Hand geben, eine in dem vorliegenden Falle brauchbare Form für die Störungsrechnungen aufzustellen. Zugleich

werden auch die allgemeinen Eigenschaften, durch welche sich eine Ausbildung der Theorie der dreifachen Sterne von der unserem Planetensystem angepassten Störungstheorie naturgemäss unterscheidet, von selbst hervortreten, so dass es kaum nöthig sein wird, darauf näher einzugehen. Nur ein Umstand bedarf einer besonderen Erwähnung. Man beobachtet bei den dreifachen Sternen nur die Bewegung in der Projectionsebene, also in zwei auf dem Visionsradius senkrechten Richtungen. Zugleich werden aber die wirklichen, in dieser Ebene liegenden Coordinaten gemessen; es sind demnach die gestörten Coordinatenwerthe bekannt. Dadurch ist man, wenigstens dann, wenn es sich darum handelt, die Störungen für einen Zeitraum zu berechnen, für welchen Beobachtungen vorliegen, in die Lage versetzt, einen beträchtlichen Theil der Störungen höherer Ordnung sofort mitzunehmen zu können, namentlich dann, wenn die Neigungen der von beiden Sternen näherungsweise beschriebenen Bahnebenen nicht sehr gross sind. Also auch dann, wenn die Störungen höherer Ordnungen beträchtlich sind, bietet die Natur der Beobachtungsergebnisse von selbst die Mittel dar, eine Convergenz der Entwicklungen herbeizuführen, die auf andere Weise gar nicht, oder nur schwer zu erlangen wäre. Die dadurch entstehende Vereinfachung des Problems ist sehr wesentlich; sie ist aber, wie mir scheint, bis jetzt nicht genügend hervorgehoben worden.

Dadurch, dass die Beobachtungen nur über die Bewegung in der Projectionsebene Aufschluss geben, sind die Bewegungselemente der drei Sterne nicht unzweideutig bestimmt. Nehmen wir, um ganz concret vorgehen zu können, an, dass von den drei in Frage kommenden Sternen *A*, *B* und *C*, die Sterne *B* und *C* sich näherungsweise um *A* in Ellipsen bewegen. Dann werden die Beobachtungen die Knotenlängen der beiden Bahnen bis auf 180° unbestimmt lassen. Es werden als z. B. alle vier Knotenlängen:

$$\Omega, \Omega', 180^\circ + \Omega, 180^\circ + \Omega',$$

den Beobachtungen vollständig gleich gut genügen und man hätte also bei der Durchführung des Störungsproblems vier mögliche Combinationen in Erwägung zu ziehen. Diese reduciren sich aber auf nur zwei, so dass die Störungsrechnungen nur über eine doppelte Unbestimmtheit zu entscheiden haben werden, ob nämlich bei einem angenommenen Werthe der ersten Knotenlänge z. B. Ω , der eine oder der andere Werth der anderen Knotenlänge zu nehmen sei, d. h. eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen liefert. Offenbar sind alle Verhältnisse dieselben, ob man die Combination Ω und Ω' oder $180^\circ + \Omega$ und $180^\circ + \Omega'$ nimmt. Dessgleichen wird in den Störungswerthen kein Unterschied eintreten, ob man $180^\circ + \Omega$ und Ω' oder Ω mit $180^\circ + \Omega'$ zusammen gelten lässt. Man sieht dies sofort ein, wenn man sich die Sachlage geometrisch verdeutlicht. Die Lagen der beiden Bahnen in einem der vier Fälle denke man sich nämlich gespiegelt in einem durch den Stern *A* gehenden mit der Projectionsebene zusammenfallenden Spiegel. Dann wird das Spiegelbild dieser Bahnen einer andern der vier Combinationen entsprechen. So ist z. B. die Bahnanlage, welche durch Ω, Ω' angedeutet wird, das Spiegelbild von $180^\circ + \Omega$ und $180^\circ + \Omega'$. Nun müssen offenbar alle Bewegungen ganz entsprechende Bewegungen im Spiegelbilde zeigen, weil alle Theile in vollkommen symmetrischer Anordnung sind gegen die spiegelnde Projectionsebene und nur Vorgänge in dieser dargestellt werden sollen. Es wird also die nach Beendigung der Störungsrechnungen noch übrigbleibende Zweideutigkeit noch fortbestehen, aber die Rechnungen leiden in keinem Falle darunter.

Was nun die speciellen Verhältnisse betrifft, die ξ Caneri darbietet und die zu betrachten für das Folgende massgebend sein muss, so sind das folgende:

1. Der Stern *C* ist ungefähr $5'' - 6''$ von *A* entfernt, während die Grösse der Entfernung *AB* eine Bogensecunde kaum übersteigt. Das Verhältniss dieser beiden Entfernungen ist also immer eine kleine Grösse, und da dies die einzige auftretende kleine Grösse ist, so ist klar, dass sich eine Entwicklung, die nach Potenzen derselben fortschreitet, von selbst als vorthellhaft empfiehlt.

2. *C* bewegt sich näherungsweise in einem Kreise um die Mitte von *A* und *B*. Mechanisch hat dies allerdings nur einen Sinn, wenn *A* und *B* gleiche Massen haben, also die Mitte von *A* und *B* zugleich den Schwerpunkt dieser beiden Massen darstellt. Es wird aus der genaueren Betrachtung der Bewegung von *C* hervorgehen, dass durch die Beobachtungen, die sich auf den kurzen Bogen, den *C* bis jetzt beschrieben hat,

beziehen, dieser Annahme wenigstens nicht widersprochen wird. Man wird deshalb keinen merklichen Fehler in den berechneten Störungen zu befürchten haben, der aus einer etwaigen Unrichtigkeit dieser Annahme hervorgeht. Überhaupt wird eine vollständige Strenge in den Daten der Störungsrechnung weder erreichbar noch nothwendig sein. Ist doch die Genauigkeit der Beobachtungen nur eine mässige und demzufolge sind auch die Ansprüche nicht zu hoch, die an die Genauigkeit der berechneten störenden Einwirkung gestellt wird.

3. Die Störungen höherer Ordnung werden nach den gemachten allgemeinen Bemerkungen zum grössten Theile dadurch berücksichtigt werden, dass man die beobachteten Werthe der beiden in der Projectionsebene liegenden Coordinaten oder Rechnungsgrössen (wie z. B. in unserem Falle die aus den Elementen IV_a hervorgehenden Coordinatenwerthe) benützt, welche mit den Beobachtungen genügend übereinstimmen. Die Mitnahme der Glieder höherer Ordnung durch dies Verfahren wird, wie schon erwähnt, um so vollständiger sein, je kleiner die Neigung der Bahnen von B und C gegen die Projectionsebene ist. Für den Stern B bei ζ Cancri ist nun die Neigung in der That klein und dürfte deshalb das genannte Verfahren gerade hier von grossem Nutzen sein.

4. Bei ζ Cancri tritt dagegen von einer andern Seite her eine bedeutende Complication und Erschwerung des Problems ein. Der Stern C hat während den von den vorhandenen Beobachtungen ausgefüllten Zeitraumes erst einen Bogen von etwa 30 Grad beschrieben. Ein Versuch, aus dieser geringen Bewegung selbst nur rohe Näherungswerthe für eine etwaige elliptische Bahn um den Schwerpunkt von A und B abzuleiten (nach bekannten Sätzen der analytischen Mechanik bewegt sich bekanntlich C um den Schwerpunkt von A und B bis auf Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Störungen in einem Kegelschnitte) wäre vollständig unstatthaft, weil durch ihn nur Täuschungen und Illusionen hervorgerufen werden könnten. Es bleibt deshalb nichts Anderes übrig, als die beiden Grössen, welche, nachdem die Annahme einer Kreisbewegung adoptirt ist, zur vollständigen Bestimmung der Bewegung von C ausreichen, nämlich Neigung und Knoten als Unbekannte mit in das Störungsproblem einzuführen und den Versuch zu machen, diese Unbekannten aus der gestörten Bewegung von B um A abzuleiten. Es gehört also die hier auftretende Aufgabe zu den umgekehrten Störungsproblemen. Theoretisch scheint, wie das Folgende zeigen wird, der Lösung der Aufgabe keine wesentliche Schwierigkeit entgegenzustehen, nachdem man sich für die Einführung der mechanischen Integrationen entschieden hat. Dass die wirkliche Ausführung aber zuverlässige Resultate liefern wird, muss a priori, zufolge der in §. 2 angeführten Rechnungsergebnisse, zweifelhaft erscheinen.

Ich hoffe aber, dass auch in diesem Falle die vollständige Durchführung eines an sich gewiss interessanten Problems, der darauf verwendeten Zeit nicht ganz unwerth ist.

Ich gehe nun zur Ableitung der im Folgenden gebrauchten Formeln über. Ich lege durch den Stern A als Anfangspunkt ein rechtwinkeliges Coordinatensystem der xyz , so dass die xy -Ebene mit der Projectionsebene zusammenfällt und z darauf senkrecht steht.

Es seien nun x, y, z die Coordinaten von B , r die Entfernung AB . Ebenso:

x', y', z' „ „ „ „ C , r_1 „ „ „ AC . Δ die Entfernung BC .

Die Massen von A, B, C bezeichne ich der Reihe nach mit 1, m und m' , die Anziehungsconstante mit k^2 . Dann sind die Componenten der störenden Kraft, welche C auf B ausübt.

$$\begin{aligned} X &= k^2 m' \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r_1^3} \right) \\ Y &= k^2 m' \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r_1^3} \right) \\ Z &= k^2 m' \left(\frac{z' - z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r_1^3} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Ich beziehe nun den Stern C auf ein dem früheren paralleles Coordinatensystem, dessen Anfang aber in einem Punkte liegt, der den Radius vector r in einem constanten Verhältnisse theilt. Und zwar sei seine Entfernung von A gleich nr , also von $B = (1-n)r$. Sind dann weiter $\xi' \eta' \zeta'$ die Coordinaten von C in diesem neuen Coordinatensystem, r' die Entfernung von C von dem genannten Punkte und σ der Winkel, den r' mit der Richtung von A nach B bildet, so hat man:

$$\Delta^2 = r'^2 + (1-n)^2 r^2 - 2rr'(1-n) \cos \sigma.$$

Man kann nun bekanntlich sehr leicht die ungeraden ganzen Potenzen von Δ in Reihen nach Kugelfunctionen entwickeln. Es ist:

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r'^3} \left\{ 1 + 3P_1 \frac{(1-n)r}{r'} + (5P_2 + 1) \frac{(1-n)^2 r^2}{r'^2} + \dots \right\}. \quad (2)$$

Und die Ausdrücke für die zwei ersten Kugelfunctionen sind

$$P_1 = \cos \sigma; \quad P_2 = \frac{3}{2} \left(\cos^2 \sigma - \frac{1}{3} \right). \quad (3)$$

Bezeichne ich noch mit $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten von B in Bezug auf das neue Coordinatensystem, so ist:

$$\cos \sigma = \frac{\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta'}{(1-n)r r'}.$$

Nun ist aber weiter:

$$\xi = x(1-n); \quad \eta = y(1-n); \quad \zeta = (1-n)z.$$

Demnach haben wir:

$$\cos \sigma = \frac{x\xi' + y\eta' + z\zeta'}{r r'} = \frac{\Phi}{r r'} + \frac{z\zeta'}{r r'},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\Phi = x\xi' + y\eta'.$$

Die Gleichungen (3) ergeben jetzt:

$$P_1 = \frac{\Phi}{r r'} + \frac{z\zeta'}{r r'}; \quad P_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi}{r r'} + \frac{z\zeta'}{r r'} \right)^2 - \frac{1}{2}.$$

In ganz ähnlicher Weise ist nun auch:

$$r_1'^2 = n^2 r^2 + r'^2 + 2nr \cdot r' \cos \sigma \quad (4)$$

$$\frac{1}{r_1'} = \frac{1}{r' \sqrt{1 + n^2 \frac{r^2}{r'^2} + 2n \frac{r}{r'} \cos \sigma}}.$$

also:

$$\frac{1}{r_1'^3} = \frac{1}{r'^3} \left\{ 1 - 3P_1 \frac{nr}{r'} + (5P_2 + 1) \frac{r^2}{r'^2} n^2 + \dots \right\}. \quad (5)$$

Aus (2) und (5) findet sich weiter:

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1'^3} = \frac{1}{r'^3} \left\{ 3P_1 \frac{r}{r'} + (5P_2 + 1) \frac{r^2}{r'^2} (1-2n) + \dots \right\}$$

Wir haben jetzt die in (1) vorkommenden $x' y' z'$ durch die $\xi' \eta' \zeta'$ zu ersetzen. Es ist aber:

$$x' = nx + \xi'$$

$$y' = ny + \eta'$$

$$z' = nz + \zeta'.$$

Und in Folge dessen:

$$\frac{X}{k^2 m'} = -\frac{x}{r'^3} \left\{ 1 + 3P_1 \frac{(1-n)r}{r'} + (5P_2 + 1) \frac{(1-n)^2 r^2}{r'^2} + \dots \right\} \\ + \frac{nx + \xi'}{r'^3} \left\{ 3P_1 \frac{r}{r'} + (5P_2 + 1) \frac{r^2}{r'^2} (1-2n) + \dots \right\}$$

und gehörig redneirt:

$$\frac{X}{k^2 m'} = \frac{1}{r'^3} \left\{ -x + 3P_1 \frac{r}{r'} (\xi' + (2n-1)x) + (5P_2 + 1) \frac{r^2}{r'^2} [(3n-3n^2-1)x + (1-2n)\xi'] \right\}.$$

Obwohl es gar keine Schwierigkeit macht, diese allgemeinere Formel, in welcher Ansehnung man will zu behandeln, so will ich doch gleich die Vernachlässigungen anführen, auf welchen die folgende Anwendung beruht. Ich habe nämlich das Glied 2. Ordnung fortgelassen und ausserdem $n = \frac{1}{2}$ angenommen, also einfach gesetzt:

$$\frac{X}{k^2 m'} = \frac{1}{r'^3} \left\{ -x + 3P_1 \frac{r}{r'} \xi' \right\}$$

Setzt man hierin den oben angeführten Werth für P_1 ein, und ersetzt r' durch die Entfernung ρ von C vom Schwerpunkt, wo also gesetzt worden ist:

$$\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2$$

so ergibt sich:

$$\frac{X}{k^2 m'} = \frac{1}{r'^5} \left\{ (-x\rho'^2 + 3\Phi\xi') + 3z\xi'\xi' - x\xi'^2 \right\}.$$

Man sieht übrigens, dass in der allgemeinen obigen Formel die grössten Glieder 2. Ordnung durch die Substitution $n = \frac{1}{2}$ von selbst verschwinden, also die abgeleitete Formel in diesem Falle eine grössere Genauigkeit gewährt, als sonst.

Die Grössen ρ' , ξ' und η' sind durch die Beobachtungen direct gegeben, während ξ' unbekannt ist. Es lässt sich aber ξ' , das natürlich eine Function der Zeit ist, sofort durch zwei constaute Unbekannte ausdrücken, wenn wir uns an den bereits erwähnten bekannten Satz der analytischen Mechanik erinnern, dass sich C bis auf Glieder der 2. Ordnung in einer Ebene um den Schwerpunkt von B und A bewegt. Bezeichnen wir demnach mit i' und Ω' Neigung und Knotenlänge dieser Ebene, und setzt man:

$$t = -\tan i' \sin \Omega'$$

$$u = +\tan i' \cos \Omega',$$

während, wenn mit p' der Positionswinkel von C , bezogen auf den Schwerpunkt von A und B bezeichnet wird, die Gleichung stattfindet:

$$\xi' = \rho' \cos p'$$

$$\eta' = \rho' \sin p',$$

so wird sich ξ' so darstellen:

$$\rho' = \xi' t + \eta' u,$$

und dadurch kann geschrieben werden:

$$\frac{X}{k^2 m'} = \frac{1}{r'^5} \left\{ (-x\rho'^2 + 3\Phi\xi') + 3z\xi'(\xi' t + \eta' u) - x(\xi' t + \eta' u)^2 \right\}.$$

Der Ausdruck für Y ergibt sich daraus durch einfache Buchstabenvertauschung:

$$\frac{Y}{k^2 m'} = \frac{1}{r'^5} \left\{ (-y\rho'^2 + 3\Phi\eta') + 3z\eta'(\xi' t + \eta' u) - y(\xi' t + \eta' u)^2 \right\},$$

während man für die Componente Z auf leichte Weise findet:

$$\frac{Z}{k^2 m'} = \frac{1}{r'^5} \left\{ -z \rho'^2 + 3\Phi(\xi' t + \eta' u) + 2z(\xi' t + \eta' u)^2 \right\}.$$

Die drei Formeln (7) können wir schematisch darstellen: Die Coëfficienten von

$$\frac{1}{r'^5}, \frac{t}{r'^5}, \frac{u}{r'^5}, \frac{t^2}{r'^5}, \frac{u^2}{r'^5}, \frac{2tu}{r'^5}$$

bezeichne ich der Reihe nach mit

I II III IV V VI;

dann sind die Werthe dieser sechs durch römische Zahlen bezeichneten Coëfficienten in:

	I	II	III	IV	V	VI
$\frac{X}{k^2 m'} \dots (-x \rho'^2 + 3\Phi \xi')$	$+ 3z \xi'^2$	$+ 3z \xi' \eta'$	$- x \xi'^2$	$- x \eta'^2$	$- x \xi' \eta'$	
$\frac{Y}{k^2 m'} \dots (-y \rho'^2 + 3\Phi \eta')$	$+ 3z \xi' \eta'$	$+ 3z \eta'^2$	$- y \xi'^2$	$- y \eta'^2$	$- y \xi' \eta'$	
$\frac{Z}{k^2 m'} \dots (-z \rho'^2 + 3\Phi \xi')$	$+ 3\Phi \xi'$	$+ 3\Phi \eta'$	$+ 2z \xi'^2$	$+ 2z \eta'^2$	$+ 2z \xi' \eta'$	

Die sechs Grössen, welche auf diese Weise als Factoren der zuletzt angeführten Coëfficienten auftreten, sind aber nicht unabhängig von einander, indem r' auch Function von t und u ist. Hätte man nun bereits Näherungswerthe für t und u , so wäre die Darstellung der Störungselementen in einer Form, welche die nöthigen Verbesserungen δt und δu in linearer Form enthalten, sofort durch einfache Differentiation gegeben, und man könnte dann auch die höheren Glieder ohne viel Mühe mitnehmen. Dieses ist aber nicht der Fall. Um nun zu solchen Näherungswerthen zu gelangen, habe ich angenommen, dass r' bei den Integrationen nach der Zeit als constant anzusehen ist. Man hat Grund, anzunehmen, dass die Bahn von C wenigstens keine allzu grosse Neigung gegen die Proportionsebene aufweist. Diese Annahme wird natürlich nur zur ersten Hypothesenrechnung zu benützen sein. Dazu kommt noch, dass C sich in der betrachteten Zeit, für welche die Einwirkung auf B berechnet werden soll, nur etwa um 30 Grad im Positionswinkel bewegt hat. Wenn also, wie es den Anschein hat, die Excentricität der von C beschriebenen Bahn nicht allzu gross ist, wird sich näherungsweise eine solche Bewegung durch eine Kreisbewegung substituiren lassen, und was die störende Wirkung betrifft, wird es zwar ziemlich gleichgültig sein, ob man die Bewegung des störenden Körpers der Wahrheit gemäss betrachtet, oder dafür einen Körper setzt, der sich mit constanter Geschwindigkeit in einem Kreise bewegt, der sich möglichst nahe dem wirklich beschriebenen Bogen anschliesst. Dieses Verfahren ist jedenfalls zulässig, wenn es sich, wie im gegenwärtigen Falle, darum handelt, die Störungen allein zu berechnen; dagegen werden die aus dieser Berechnung hervorgehenden Werthe von t und u allerdings möglicherweise reine Rechnungsgrössen sein können, die in der Wirklichkeit keine vollständige Interpretation erhalten können. Indessen liegt dies dann in der Natur des Problems und ist desshalb ohne Zweifel ganz ungefährlich, weil, nachdem einmal Näherungswerthe erhalten sind, diese zu prüfen, eine Aufgabe ist, welche gar keine Schwierigkeiten darbietet.

Zur Integration der Bewegungsgleichungen habe ich das bekannte Laplace'sche Verfahren (Méc. ecl. Vol. I, Buch 2, Cap. 6) angewandt, welches dieser für den Fall, dass nur die Störungen erster Ordnung mitgenommen werden, und zu dem ausdrücklichen Zwecke der Anwendbarkeit von mechanischen Quadraturen angegeben hat. Ich kann mich aber vielleicht besser an die Darstellung derselben Methode halten, wie sie in Encke's Aufsatz „Über die allgemeinen Störungen der Planeten“ zum Theil vorkommt, da ich ganz dieselbe Form gebrauche.

δr ist die Störung in r ; werden die beobachteten Werthe von x und y benutzt, so ist δr von derselben Ordnung wie δz , und es werden also im Folgenden Glieder von der Ordnung $(\delta z)^2$ vernachlässigt, was gewiss ohne Bedeutung ist.

Setzt man dann:

$$R = xX + yY + zZ$$

$$T = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt},$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} (r\delta r) &= R + 2 \int T dt \\ \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \delta x &= X + \frac{3k^2(1+m)}{r^3} \cdot x(r\delta r) \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \delta y &= Y + \frac{3k^2(1+m)}{r^3} \cdot y(r\delta r) \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \delta z &= Z + \frac{3k^2(1+m)}{r^3} \cdot z(r\delta r). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Und eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \omega = Q, \quad (9)$$

wird von Laplace durch die Formel integrirt:

$$\omega \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) = y_1 \int x_1 Q dt - x_1 \int y_1 Q dt; \quad x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} = r^2 \frac{dv}{dt}, \quad (10)$$

wozu noch eine willkürliche Integrationsconstante tritt.

Diese Integration habe ich nun, wie erwähnt, durch mechanische Quadraturen berechnet. Um dies zu ermöglichen, musste von osculirenden Elementen ausgegangen werden. Ich habe die Osculationsepoche auf 1836.2 gelegt. Dann müssen alle im Früheren vorkommenden Integrale so genommen werden, dass sie für diesen Zeitpunkt verschwinden, d. h. die untere Grenze aller Integrale ist 1836.2.

Die Grössen x_1, y_1 haben der Differentialgleichung zu genügen:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} x_1 = 0.$$

Wir hatten gesehen, dass sich die Beobachtungen von B ohne allzu bedeutende Fehler durch eine rein elliptische Bewegung darstellen lassen. Nehme ich diese Ellipse als Hilfsmittel zur sicheren Berechnung der nothwendigen Daten, so werden

1. die berechneten Werthe x, y als mit den direct beobachteten identisch betrachtet werden dürfen;
2. werden, wenn für x_1 und y_1 die rechtwinkligen Coordinaten von B in dieser Bahn, bei sonst gleichgültiger Richtung der Axen genommen werden, diese ebenfalls aus denselben Elementen berechnet werden müssen, und dann von selbst der in Form einer Differentialgleichung gestellten Bedingung genügen, wenigstens so genau, als für die vorliegenden Zwecke mehr als anreichend ist. Ebenso wird T aus diesen Daten zu bestimmen sein, um Alles bis auf Grössen von der angegebenen Ordnung genau zu erhalten.

In T kommen die Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ vor. Man kann diese sowohl direct berechnen, als auch durch die bekannten Interpolationsformeln aus den Werthen der Coordinaten ableiten. Ich habe im Folgenden das erste Verfahren befolgt und zwar mit Hilfe folgender Formeln.

Bezeichnet v die wahre Anomalie und legen wir die x - und y -Axe des zu Grunde gelegten, bis jetzt willkürlichen Coordinatensystems so, dass die x -Axe mit dem nach Norden gehenden Theile des durch A gehenden

Stundenkreises, y mit dem Declinationskreise zusammenfällt, so dass also $x = \rho \cos p$; $y = \rho \sin p$ gesetzt wird, so ist:

$$\begin{aligned} x &= r \{ \cos(v+\lambda) \cos \Omega - \sin(v+\lambda) \sin \Omega \sin i \} \\ y &= r \{ \cos(v+\lambda) \sin \Omega + \sin(v+\lambda) \cos \Omega \cos i \} \\ z &= r \sin(v+\lambda) \sin i \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \mu \sin M & \sin \Omega &= \mu' \sin M' \\ -\sin \Omega \cos i &= \mu \cos M & + \cos \Omega \cos i &= \mu' \cos M', \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \mu \cdot \sin(M+v+\lambda) \\ y &= r \cdot \mu' \cos(M'+v+\lambda) \\ z &= r \sin(v+\lambda) \sin i. \end{aligned}$$

Nach dem Flächensatze ist aber, wenn p den Parameter $= a(1-e^2)$ bezeichnet, wobei eine Verwechslung mit dem Positionswinkel, der mit demselben Buchstaben bezeichnet worden ist, wohl nicht zu fürchten ist:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{p(1+m)}$$

und

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{p} \cdot e \sin v \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Dadurch erhält man folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \{ x \cdot e \sin v + \mu p \cos(M+v+\lambda) \} \cdot \frac{k \sqrt{1+m}}{r \sqrt{p}} \\ \frac{dy}{dt} &= \{ y \cdot e \sin v + \mu' p \cos(M'+v+\lambda) \} \cdot \frac{k \sqrt{1+m}}{r \sqrt{p}} \\ \frac{dz}{dt} &= \{ z \cdot e \sin v + p \sin i \cos(v+\lambda) \} \cdot \frac{k \sqrt{1+m}}{r \sqrt{p}} \end{aligned}$$

Mit diesen Formeln habe ich, wie gesagt, gerechnet, während eine gute Controle durch die nach den bekannten Interpolationsformeln berechneten Differentialquotienten gegeben war.

Zu allen vorbereitenden Rechnungen habe ich die Elemente (II) genommen. Wir haben in §. 2 gesehen, dass diese noch beträchtlicher Verbesserungen fähig sind und in der That schlossen sich die Elemente IV und IV_a den Beobachtungen weit besser an. Indessen wurden die uns jetzt beschäftigenden Untersuchungen wenigstens zum Theile ausgeführt, ehe die zuletzt genannten Elementensysteme abgeleitet waren.

Was die Grössen ξ' und η' betrifft, so wurde angenommen, dass sich C um die Mitte von A und B in einer Weise bewegt, die genügend genau durch die Formeln dargestellt wird:

$$\rho' = 5''550, \quad p' = 145^\circ 20' - 0^\circ 53' (t - 1850,0).$$

Diese Formel ist allerdings nicht diejenige, welche aus der späteren Untersuchung als definitive abgeleitet werden wird. Indessen ist die Übereinstimmung mit den beobachteten Werthen von ρ' und p' doch für die vorliegenden Zwecke eine vollständig genügende.

Ich gehe nun zur Mittheilung der betreffenden Zahlenwerthe über. Dabei soll das Bestreben massgebend sein, nur die Resultate zu geben, diese aber in einer Vollständigkeit, dass das Verständniss der ziemlich mühsamen Rechnungen ohne Mühe erlangt werden kann.

§. 5.

Zunächst theile ich die berechneten Werthe der Coordinaten, ihre Differentialquotienten und die Hilfsgrösse Φ mit.

	$\log x'$	$\log y'$	$\log x$	$\log y$	$\log z$	$\log \frac{dx}{dt}$	$\log \frac{dy}{dt}$	$\log \frac{dz}{dt}$	$\log \xi'$	$\log \eta'$	$\log \Phi$
1826.2	9.8077 _n	9.8737 _n	9.7609	9.8990	9.0923 _n	8.8553	8.3938 _n	8.3715 _n	0.7109 _n	0.3214	0.1147 _n
28.2	9.8908 _n	9.8309 _n	9.8513	9.8645	9.2279 _n	8.7929	8.5472 _n	8.3325 _n	0.7975 _n	0.3406	0.3047 _n
30.2	9.9511 _n	9.7704 _n	9.9166	9.8145	9.3219 _n	8.7223	8.6402 _n	8.2834 _n	0.7040 _n	0.3589	0.4287 _n
32.2	9.9950 _n	9.6882 _n	9.9644	9.7464	9.3906 _n	8.6250	8.7021 _n	8.2227 _n	0.7003 _n	0.3762	0.5178 _n
34.2	0.0260 _n	9.5749 _n	9.9992	9.6517	9.4420 _n	8.5236	8.7446 _n	8.1476 _n	0.6964 _n	0.3928	0.5850 _n
36.2	0.0477 _n	9.4086 _n	0.0232	9.5264	9.4800 _n	8.3714	8.7732 _n	8.0517 _n	0.6923 _n	0.4086	0.6368 _n
38.2	0.0601 _n	9.1201 _n	0.0383	9.3314	9.5075 _n	8.1331	8.7914 _n	7.9232 _n	0.6880 _n	0.4237	0.6772 _n
40.2	0.0644 _n	7.7042	0.0451	8.9488	9.5258 _n	7.5537	8.8010 _n	7.7317 _n	0.6835 _n	0.4381	0.7084 _n
42.2	0.0608 _n	9.0853	0.0439	8.5827 _n	9.5357 _n	7.8110 _n	8.8025 _n	7.3640 _n	0.6789 _n	0.4520	0.7316 _n
44.2	0.0491 _n	9.3912	0.0348	9.2170 _n	9.5376 _n	8.2197 _n	8.7960 _n	6.0372 _n	0.6740 _n	0.4652	0.7478 _n
46.2	0.0285 _n	9.5637	0.0171	9.4593 _n	9.5313 _n	8.4274 _n	8.7807 _n	7.6176	0.6689 _n	0.4780	0.7574 _n
48.2	9.9980 _n	9.6802	9.9896	9.6085 _n	9.5161 _n	8.5677 _n	8.7544 _n	7.8765	0.6636 _n	0.4902	0.7600 _n
50.2	9.9551 _n	9.7646	9.9503	9.7118 _n	9.4907 _n	8.6734 _n	8.7142 _n	8.0417	0.6581 _n	0.5019	0.7555 _n
52.2	9.8964 _n	9.8266	9.8961	9.7871 _n	9.4533 _n	8.7579 _n	8.6528 _n	8.1639	0.6524 _n	0.5132	0.7429 _n
54.2	9.8154 _n	9.8710	9.8214	9.8414 _n	9.3999 _n	8.8268 _n	8.6569 _n	8.2605	0.6465 _n	0.5241	0.7207 _n
56.2	9.6995 _n	9.8995	9.7150	9.8782 _n	9.3243 _n	8.8830 _n	8.3910 _n	8.3395	0.6403 _n	0.5345	0.6860 _n
58.2	9.5193 _n	9.9120	9.5530	9.8981 _n	9.2139 _n	8.9272 _n	8.0023 _n	8.4041	0.6339 _n	0.5446	0.6344 _n
60.2	9.1680 _n	9.9063	9.2581	9.8996 _n	9.0399 _n	8.9572 _n	7.9152	8.4545	0.6272 _n	0.5543	0.5577 _n
62.2	8.6383	9.8774	7.5824 _n	9.8781 _n	8.6993 _n	8.9691 _n	8.4876	8.4880	0.6202 _n	0.5636	0.4392 _n
64.2	9.3632	9.8147	9.2739 _n	9.8242 _n	8.1010	8.9512 _n	8.7414	8.4970	0.6131 _n	0.5726	0.2362 _n
66.2	9.5996	9.6958	9.5513 _n	9.7192 _n	8.8694	8.8802 _n	8.9314	8.4658	0.6057 _n	0.5812	9.7494 _n
67.2	9.6690	9.5994	9.6299 _n	9.6339 _n	9.0092	8.8096 _n	9.0004	8.4257	0.6018 _n	0.5854	8.6812
68.2	9.7168	9.4577	9.6850 _n	9.502 _n	9.1041	8.6976 _n	9.0501	8.3611	0.5979 _n	0.5896	9.8195
69.2	9.7466	9.2213	9.7205 _n	9.3143 _n	9.1696	8.5093 _n	9.0843	8.2598	0.5939 _n	0.5936	0.0982
70.2	9.7597	8.6055	9.7389 _n	8.9119 _n	9.2128	8.1057 _n	9.1026	8.0977	0.5899 _n	0.5976	0.2574
71.2	9.7568	8.9410 _n	9.7412 _n	8.6617	9.3375	7.8735	9.1048	7.7988	0.5858 _n	0.6015	0.3630
72.2	9.7376	9.3261 _n	9.7271 _n	9.2355	9.2453	8.4307	9.0914	5.8607	0.5816 _n	0.6054	0.4360
73.2	9.7013	9.5175 _n	9.6968 _n	9.4634	9.2380	8.6174	9.0629	7.7660	0.5773 _n	0.6091	0.4867
74.2	9.6460	9.6391 _n	9.6487 _n	9.6049	9.2160	8.7714	9.0205	8.0443 _n	0.5729 _n	0.6129	0.5207
75.2	9.5676	9.7238 _n	9.5799 _n	9.7002	9.1791	8.8487	8.9651	8.1895 _n	0.5685 _n	0.6165	0.5417
76.2	9.4573	9.7849 _n	9.4840 _n	9.7688	9.1260	8.8979	8.8981	8.2784 _n	0.5639 _n	0.6200	0.5520
77.2	9.2947	9.8296 _n	9.3472 _n	9.8192	9.0540	8.9283	8.8158	8.3357 _n	0.5593 _n	0.6235	0.5536
78.2	9.0158	9.8619 _n	9.1323 _n	9.8544	8.9567	8.9455	8.7181	8.3729 _n	0.5546 _n	0.6270	0.5460

Aus den in dieser Tabelle aufgeführten Zahlen lassen sich nun die sechs Glieder berechnen, aus denen die Störungscomponente R besteht.

	$R.$					
	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	-24.972	-4.972	+2.028	-24.560	-4.085	+10.018
28.2	-20.709	-10.523	+4.389	-25.569	-4.718	+10.982
30.2	-13.850	-17.090	+7.722	-26.063	-5.319	+11.773
32.2	-5.028	-24.367	+11.554	-26.135	-5.875	+12.391
34.2	+5.043	-31.733	+15.774	-25.869	-6.401	+12.859
36.2	+15.749	-38.656	+20.116	-25.294	-6.859	+13.161
38.2	+26.484	-44.755	+24.335	-24.525	-7.262	+13.346
40.2	+36.689	-49.640	+28.211	-23.596	-7.620	+13.411
42.2	+45.796	-53.014	+31.437	-22.560	-7.935	+13.380
44.2	+53.257	-54.645	+33.787	-21.462	-8.205	+13.272
46.2	+58.698	-54.413	+35.060	-20.332	-8.439	+13.099
48.2	+61.590	-52.222	+35.031	-19.175	-8.628	+12.863
50.2	+61.666	-48.070	+33.590	-17.999	-8.767	+12.561
52.2	+58.732	-42.339	+30.729	-16.817	-8.859	+12.205
54.2	+52.583	-35.096	+26.475	-15.608	-8.883	+11.774

	I	II	III	IV	V	VI
1856.2	+43.400	-26.836	+21.033	-14.326	-8.801	+11.228
58.2	+31.684	-18.210	+14.826	-12.361	-8.590	+10.551
60.2	+18.350	-10.068	+8.513	-11.472	-8.200	+9.699
62.2	+5.023	-3.443	+3.021	-9.840	-7.579	+8.635
64.2	-5.899	+0.535	-0.488	-8.081	-6.796	+7.361
66.2	-11.577	+1.006	-0.951	-6.348	-5.670	+6.006
67.2	-11.624	-0.118	+0.114	-5.535	-5.131	+5.329
68.2	-9.641	-1.993	+1.956	-4.813	-4.637	+4.726
69.2	-5.770	-4.363	+4.360	-4.236	-4.230	+4.233
70.2	-0.467	-6.890	+7.013	-3.841	-3.980	+3.927
71.2	+5.622	-9.213	+9.552	-3.653	-3.927	+3.787
72.2	+11.711	-10.990	+11.610	-3.674	-4.099	+3.880
73.2	+17.042	-12.026	+12.940	-3.866	-4.511	+4.193
74.2	+21.064	-12.237	+13.420	-4.287	-5.152	+4.699
75.2	+23.448	-11.680	+13.044	-4.802	-5.989	+5.362
76.2	+24.094	-10.472	+11.916	-5.395	-6.985	+6.139
77.2	+23.081	-8.812	+10.214	-6.028	-8.102	+6.928
78.2	+20.510	-6.075	+8.088	-6.602	-9.215	+7.800

Die Werthe von T führe ich nicht extra an, sondern gleich die Grösse Q :

$$Q = R - 2 \int T dt,$$

wo also das Integral für 1836.2 verschwindet.

	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	-73.63	+32.61	-15.48	-21.66	-3.55	+8.79
28.2	-64.13	+21.10	-10.63	-24.08	-4.42	+10.33
30.2	-49.07	+7.23	-4.08	-25.51	-5.20	+11.53
32.2	-29.78	-8.11	+3.48	-26.22	-5.86	+12.36
34.2	-7.72	-23.75	+11.71	-25.94	-6.42	+12.90
36.2	+15.75	-38.66	+20.12	-25.29	-6.86	+13.16
38.2	+39.30	-51.95	+28.18	-24.25	-7.18	+13.20
40.2	+61.71	-62.86	+35.38	-23.09	-7.40	+13.02
42.2	+81.75	-70.72	+41.22	-21.51	-7.55	+12.68
44.2	+98.31	-75.04	+45.19	-19.62	-7.60	+12.22
46.2	+110.45	-75.51	+46.91	-17.85	-7.58	+11.64
48.2	+113.19	-72.02	+46.04	-16.02	-7.47	+10.96
50.2	+117.87	-64.57	+42.35	-14.14	-7.29	+10.19
52.2	+112.04	-53.66	+35.79	-12.24	-7.01	+9.32
54.2	+99.44	-39.64	+26.52	-10.25	-6.60	+8.31
56.2	+80.44	-23.44	+14.96	-8.12	-6.02	+7.11
58.2	+56.08	-6.36	+2.02	-5.78	-5.19	+5.66
60.2	+28.36	+9.85	-11.00	-3.18	-4.04	+3.88
62.2	+0.70	+23.09	-22.18	-0.26	-2.45	+1.70
64.2	-21.95	+29.96	-29.21	+2.90	-0.45	-0.82
66.2	-33.69	+31.92	-30.04	+5.85	+1.83	-3.49
67.2	-33.84	+29.61	-27.85	+7.36	+3.01	-4.84
68.2	-29.81	+25.78	-24.09	+8.70	+4.08	-6.04
69.2	-21.94	+20.92	-19.23	+9.77	+4.98	-7.03
70.2	-11.12	+15.73	-13.90	+10.49	+5.56	-7.66
71.2	+1.30	+10.94	-8.83	+10.80	+5.73	-7.92
72.2	+13.70	+7.22	-4.73	+10.62	+5.46	-7.73
73.2	+24.56	+4.99	-2.14	+10.19	+4.71	-7.20
74.2	+32.71	+4.42	-1.26	+9.30	+3.52	-6.08
75.2	+37.48	+5.41	-2.13	+8.18	+1.93	-4.75
76.2	+38.66	+7.72	-4.49	+6.88	+0.03	-3.17
77.2	+36.43	+10.98	-8.03	+5.50	-2.07	-1.45
78.2	+31.09	+15.40	-12.15	+4.16	-4.24	+0.25

Für eine etwaige Controlle der Werthe von R und Q , sowie der folgenden Rechnungen, führe ich noch die Werthe der Producte Xx , Yy , Zz an.

	Xx .					
	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	+ 1.33	— 5.66	+ 2.31	— 8.78	— 1.46	+ 3.58
28.2	+ 6.38	— 9.36	+ 3.93	— 13.12	— 2.42	+ 5.63
30.2	+ 12.62	— 13.29	+ 6.01	— 17.43	— 3.56	+ 7.87
32.2	+ 19.52	— 17.09	+ 8.10	— 21.35	— 4.80	+ 10.12
34.2	+ 26.55	— 20.47	+ 10.17	— 24.62	— 6.08	+ 12.24
36.2	+ 33.24	— 23.17	+ 12.06	— 26.98	— 7.31	+ 14.04
38.2	+ 39.21	— 25.06	+ 13.63	— 28.35	— 8.40	+ 15.43
40.2	+ 44.14	— 26.00	+ 14.78	— 28.66	— 9.26	+ 16.29
42.2	+ 47.72	— 25.97	+ 15.40	— 27.90	— 9.81	+ 16.55
44.2	+ 49.68	— 24.98	+ 15.44	— 26.16	— 10.00	+ 16.17
46.2	+ 49.95	— 23.08	+ 14.87	— 23.55	— 9.78	+ 15.17
48.2	+ 48.32	— 20.42	+ 13.70	— 20.25	— 9.11	+ 13.58
50.2	+ 44.84	— 17.15	+ 11.97	— 16.47	— 8.02	+ 11.50
52.2	+ 39.58	— 13.53	+ 9.82	— 12.56	— 6.59	+ 9.07
54.2	+ 32.78	— 9.80	+ 7.40	— 8.63	— 4.91	+ 6.51
56.2	+ 24.70	— 6.27	+ 4.91	— 5.14	— 3.16	+ 4.03
58.2	+ 15.95	— 3.25	+ 2.65	— 2.37	— 1.57	+ 1.93
60.2	+ 7.31	— 1.07	+ 0.91	— 0.59	— 0.42	+ 0.50
62.2	— 0.13	+ 0.01	— 0.01	.	.	.
64.2	— 5.07	— 0.12	+ 0.11	— 0.59	— 0.49	+ 0.54
66.2	— 6.32	— 1.29	+ 1.22	— 2.06	— 1.84	+ 1.95
67.2	— 5.36	— 2.09	— 2.01	— 2.91	— 2.70	+ 2.80
68.2	— 3.42	— 2.90	+ 2.84	— 3.68	— 3.54	+ 3.61
69.2	— 0.75	— 3.59	+ 3.59	— 4.25	— 4.25	+ 4.25
70.2	+ 2.31	— 4.06	+ 4.13	— 4.55	— 4.71	+ 4.64
71.2	+ 5.34	— 4.24	+ 4.40	— 4.51	— 4.85	+ 4.67
72.2	+ 7.90	— 4.10	+ 4.33	— 4.14	— 4.62	+ 4.38
73.2	+ 9.67	— 3.69	+ 3.97	— 3.53	— 4.09	+ 3.80
74.2	+ 10.46	— 3.07	+ 3.37	— 2.78	— 3.34	+ 3.04
75.2	+ 10.25	— 2.36	+ 2.64	— 1.98	— 2.47	+ 2.21
76.2	+ 9.08	— 1.64	+ 1.87	— 1.25	— 1.61	+ 1.42
77.2	+ 7.13	— 0.99	+ 1.15	— 0.65	— 0.87	+ 0.75
78.2	+ 4.56	— 0.47	+ 0.56	— 0.24	— 0.33	+ 0.28

	Yy .					
	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	— 26.84	+ 3.17	— 1.29	— 16.59	— 2.76	+ 6.77
28.2	— 26.21	+ 4.05	— 1.78	— 13.93	— 2.57	+ 5.99
30.2	— 25.12	+ 4.75	— 2.14	— 10.89	— 2.22	+ 4.92
32.2	— 22.69	+ 4.91	— 2.33	— 7.82	— 1.76	+ 3.71
34.2	— 19.15	+ 4.60	— 2.29	— 5.04	— 1.25	+ 2.50
36.2	— 14.68	+ 3.84	— 2.00	— 2.74	— 0.74	+ 1.42
38.2	— 9.54	+ 2.68	— 1.46	— 1.09	— 0.32	+ 0.60
40.2	— 3.98	+ 1.18	— 0.67	— 0.18	— 0.06	+ 0.11
42.2	+ 1.71	— 0.53	+ 0.32	— 0.03	— 0.01	+ 0.02
44.2	+ 7.24	— 2.35	+ 1.45	— 0.61	— 0.23	+ 0.37
46.2	+ 12.31	— 4.12	+ 2.66	— 1.81	— 0.75	+ 1.17
48.2	+ 16.59	— 5.70	+ 3.82	— 3.50	— 1.58	+ 2.35
50.2	+ 19.77	— 6.91	+ 4.82	— 5.49	— 2.68	+ 3.83
52.2	+ 21.58	— 7.64	+ 5.55	— 7.57	— 3.99	+ 5.49
54.2	+ 21.75	— 7.75	+ 5.84	— 9.46	— 5.38	+ 7.14

	I	II	III	IV	V	VI
56.2	+20.07	- 7.15	+ 5.61	-10.89	- 6.69	+ 8.54
58.2	+16.56	- 5.86	+ 4.77	-11.59	- 7.68	+ 9.43
60.2	+11.41	- 3.96	+ 3.35	-11.31	- 8.09	+ 9.57
62.2	+ 5.23	- 1.73	+ 1.52	- 9.93	- 7.65	+ 8.71
64.2	- 0.82	+ 0.39	- 0.35	- 7.49	- 6.22	+ 6.83
66.2	- 5.09	+ 1.79	- 1.69	- 4.47	- 3.99	+ 4.23
67.2	- 5.95	+ 2.03	- 1.95	- 2.96	- 2.75	+ 2.85
68.2	- 5.72	+ 1.90	- 1.87	- 1.65	- 1.58	+ 1.61
69.2	- 4.35	+ 1.41	- 1.41	- 0.66	- 0.65	+ 0.66
70.2	- 1.96	+ 0.62	- 0.63	- 0.10	- 0.11	+ 0.10
71.2	+ 1.20	- 0.37	+ 0.38	- 0.03	- 0.03	+ 0.03
72.2	+ 4.76	- 1.40	+ 1.48	- 0.43	- 0.48	+ 0.46
73.2	+ 8.30	- 2.33	+ 2.50	- 1.22	- 1.41	+ 1.31
74.2	+11.43	- 3.05	+ 3.34	- 2.27	- 2.73	+ 2.49
75.2	+13.91	- 3.48	+ 3.89	- 3.45	- 4.30	+ 3.85
76.2	+15.56	- 3.60	+ 4.09	- 4.63	- 5.99	+ 5.27
77.2	+16.35	- 3.41	+ 3.96	- 5.72	- 7.68	+ 6.63
78.2	+16.20	- 2.88	+ 3.49	- 6.58	- 9.18	+ 7.77

	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	- 0.47	- 2.49	+ 1.01	+ 0.81	+ 0.14	- 0.33
28.2	- 0.88	- 5.21	+ 2.24	+ 1.48	- 0.27	- 0.64
30.2	- 1.36	- 8.55	+ 3.86	+ 2.25	+ 0.46	- 1.02
32.2	- 1.86	-12.18	+ 5.78	+ 3.04	+ 0.68	- 1.44
34.2	- 2.36	-15.87	+ 7.89	+ 3.78	+ 0.94	- 1.88
36.2	- 2.81	-19.33	+10.06	+ 4.42	+ 1.20	- 2.30
38.2	- 3.19	-22.38	+12.18	+ 4.92	+ 1.46	- 2.68
40.2	- 3.47	-24.82	+14.11	+ 5.24	+ 1.69	- 2.98
42.2	- 3.63	-26.51	+15.72	+ 5.37	+ 1.89	- 3.19
44.2	- 3.66	-27.32	+16.89	+ 5.30	+ 2.03	- 3.28
46.2	- 3.56	-27.21	+17.53	+ 5.03	+ 2.09	- 3.24
48.2	- 3.32	-26.11	+17.52	+ 4.58	+ 2.06	- 3.07
50.2	- 2.95	-24.07	+16.80	+ 3.97	+ 1.93	- 2.77
52.2	- 2.43	-21.17	+15.36	+ 3.25	+ 1.71	- 2.36
54.2	- 1.94	-17.55	+13.24	+ 2.48	+ 1.41	- 1.87
56.2	- 1.37	-13.42	+10.52	+ 1.70	+ 1.04	- 1.33
58.2	- 0.83	- 9.11	+ 7.41	+ 0.99	+ 0.66	- 0.81
60.2	- 0.37	- 5.03	+ 4.26	+ 0.43	+ 0.31	- 0.37
62.2	- 0.08	- 1.72	+ 1.51	+ 0.09	+ 0.07	- 0.08
64.2	- 0.01	+ 0.27	- 0.24	+ 0.01	.	- 0.01
66.2	- 0.17	+ 0.50	- 0.48	+ 0.18	+ 0.16	- 0.17
67.2	- 0.32	- 0.06	+ 0.06	+ 0.33	+ 0.31	- 0.32
68.2	- 0.50	- 1.00	+ 0.98	+ 0.51	+ 0.49	- 0.50
69.2	- 0.67	- 2.18	+ 2.18	+ 0.67	+ 0.67	- 0.67
70.2	- 0.82	- 3.45	+ 3.51	+ 0.81	+ 0.84	- 0.82
71.2	- 0.92	- 4.61	+ 4.78	+ 0.89	+ 0.95	- 0.92
72.2	- 0.95	- 5.50	+ 5.81	+ 0.90	+ 1.01	- 0.95
73.2	- 0.92	- 6.01	+ 6.47	+ 0.85	+ 0.99	- 0.92
74.2	- 0.83	- 6.12	+ 6.71	+ 0.76	+ 0.91	- 0.83
75.2	- 0.70	- 5.84	+ 6.52	+ 0.63	+ 0.78	- 0.70
76.2	- 0.55	- 5.24	+ 5.96	+ 0.48	+ 0.62	- 0.55
77.2	- 0.40	- 4.41	+ 5.11	+ 0.34	+ 0.45	- 0.39
78.2	- 0.25	- 2.72	+ 4.04	+ 0.21	+ 0.29	- 0.25

Um nun die Störungsbeträge δr in r und daraus δx und δy berechnen zu können, müssen wir vorerst die Anziehungsconstante k bestimmen. Es ist aber, wenn a die Halbaxe und T die Umlaufzeit, bezogen auf denselben Osculationspunkt, bedeuten

$$k\sqrt{1+m} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}.$$

Als Einheit, nach welcher lineare Strecken gemessen werden, soll stets die Bogensecunde genommen werden, während die Zeiträume in Jahren ausgedrückt werden sollen. Als Näherungswerth für k wird der Werth gelten können, den man aus Elementen (II) ableitet. Es findet sich so

$$\log k\sqrt{1+m} = 8.9244_n; \log k \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} = 8.9812_n,$$

und zwar muss k negativ genommen werden, weil $r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{(1+m)p}$ ist und $\frac{dv}{dt}$ stets einen negativen Werth besitzt. Es ergibt sich nun für

	log $r \delta r$.					
	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	3.0652 _n	2.8062 _n	2.4783	3.1165 _n	2.4525 _n	2.7684
28.2	2.7122 _n	2.7574 _n	2.4462	2.9952 _n	2.2844 _n	2.5928
30.2	2.1732 _n	2.6353 _n	2.3340	2.6602 _n	2.0558 _n	2.3560
32.2	9.8100	2.3845 _n	2.0579	2.3107 _n	1.7209 _n	2.0123
34.2	1.1705	1.8675 _n	1.5430	1.6843	1.137 _n	1.4764
36.2
38.2	1.7272	1.9507 _n	1.6630	1.7007 _n	0.628 _n	1.4236
40.2	2.4544	2.5774 _n	2.3067	2.2921 _n	1.7527 _n	2.0227
42.2	2.8977	2.9367 _n	2.6961	2.6336 _n	2.0429 _n	2.3689
44.2	3.2178	3.2307 _n	2.9755	2.8804 _n	2.3298 _n	2.6113
46.2	3.4668	3.4409 _n	3.1926	3.0489 _n	2.5449 _n	2.7957
48.2	3.6773	3.6090 _n	3.3658	3.1887 _n	2.6979 _n	2.9418
50.2	3.8326	3.7555 _n	3.5086	3.3015 _n	2.8237 _n	3.0608
52.2	3.9699	3.8578 _n	3.6254	3.3928 _n	2.9280 _n	3.1584
54.2	4.0837	3.9480 _n	3.7200	3.4661 _n	3.0148 _n	3.2380
56.2	4.1767	4.0185 _n	3.7944	3.5228 _n	3.0859 _n	3.3014
58.2	4.2495	4.0692 _n	3.8484	3.5634 _n	3.1412 _n	3.3491
60.2	4.3012	4.0991 _n	3.8804	3.5875 _n	3.1788 _n	3.3794
62.2	4.3297	4.1043 _n	3.8865	3.5876 _n	3.1982 _n	3.3889
64.2	4.3287	4.0770 _n	3.8507	3.5596 _n	3.1904 _n	3.3707
66.2	4.2868	4.0016 _n	3.7782	3.4868 _n	3.1441 _n	3.3108
67.2	4.2442	3.9360 _n	3.7081	3.4240 _n	3.0990 _n	3.2568
68.2	4.1808	3.8408 _n	3.6052	3.3332 _n	3.0326 _n	3.1785
69.2	4.0877	3.6967 _n	3.4461	3.1967 _n	2.9354 _n	3.0616
70.2	3.9475	3.4504 _n	3.1581	2.9668 _n	2.7827 _n	2.8751
71.2	3.7116	2.7423 _n	0.2829	2.3730 _n	2.5118 _n	2.5044
72.2	3.0945	3.2434	3.1497 _n	2.6763	1.4062 _n	2.1606
73.2	3.4309 _n	3.5980	3.4472 _n	3.0719	2.4476	2.7795 _n
74.2	3.8136 _n	3.7874	3.6124 _n	3.2684	2.7642	3.0222 _n
75.2	4.0045 _n	3.9074	3.7224 _n	3.3958	2.9389	3.1689 _n
76.2	4.1269 _n	3.9924	3.8008 _n	3.4861	3.0552	3.2706 _n
77.2	4.2130 _n	4.0552	3.8590 _n	3.5532	3.1389	3.3453 _n
78.2	4.2763 _n	4.1015	3.9026 _n	3.6041	3.2008	3.4014 _n

Die Zahlen (I) in der ersten Columnne sind aber nicht ganz richtig. Es wurde nämlich fälschlich mit $k\sqrt{1+m}p$ statt mit $k\sqrt{p(1+m)}$ bei der Integration der Differentialgleichungen multiplicirt. Ich habe indessen den bemerkten Fehler nicht direct corrigirt, sondern schliesslich den Gesamtbetrag der Störungen, welche aus den Gliedern (I) hervorgehen, mit $\frac{1}{\sqrt{p}}$ multiplicirt. Die Zulässigkeit dieses Verfahrens beruht darauf,

dass überall, wo die Störungen einigermaßen beträchtlich werden, der Einfluss von δx den der Componenten X, Y, Z sehr beträchtlich überwiegt. Zudem ist $\sqrt{p} (\log \sqrt{p} = 9.9432)$ nicht so sehr von der Einheit verschieden, dass dadurch eine bedeutende Entstellung der doch ohnehin als Näherungswerte berechneten Störungen entstehen könnte.

Aus den aufgeführten Zahlen ergeben sich nun die Werthe für

$$\log (\delta x . \sqrt{p(1+m)}).$$

	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	1.8794 _n	1.8746	1.5604 _n	1.9592	1.3376	1.6450 _n
28.2	1.7451 _n	1.6928	1.3822 _n	1.7685	1.1664	1.4601 _n
30.2	1.5375 _n	1.449	1.1433 _n	1.5208 _n	0.873	1.2180 _n
32.2	1.2181 _n	1.024	0.8030 _n	1.1769	0.584	0.8745 _n
34.2	0.6422 _n	0.500	0.207 _n	0.576	0.055	0.196 _n
36.2
38.2	1.6921 _n	0.513	0.246 _n	0.532	0.022	0.305 _n
40.2	1.3125 _n	1.1363	0.8648 _n	1.1872	0.6423	0.9162 _n
42.2	1.6854 _n	1.5053	1.2341 _n	1.5803	1.0123	1.2802 _n
44.2	1.9586 _n	1.7653	1.5174 _n	1.9020	1.2782	1.5402 _n
46.2	2.1791 _n	1.9941	1.7434 _n	1.9959	1.4877	1.7450 _n
48.2	2.3669 _n	2.1815	1.9366 _n	2.1584	1.6982	1.9132 _n
50.2	2.5341 _n	2.3500	2.1090 _n	2.2964	1.8051	2.0556 _n
52.2	2.6850 _n	2.5031	2.2652 _n	2.4154	1.9416	2.1796 _n
54.2	2.8254 _n	2.6433	2.4089 _n	2.5201	2.0561	2.2882 _n
56.2	2.9544 _n	2.7715	2.5403 _n	2.6124	2.1569	2.3836 _n
58.2	3.0744 _n	2.8866	2.6586 _n	2.6898	2.2442	2.4659 _n
60.2	3.1768 _n	2.9858	2.7600 _n	2.7535	2.3125	2.5330 _n
62.2	3.2547 _n	3.0619	2.8386 _n	2.7974	2.3628	2.5799 _n
64.2	3.2989 _n	3.1004	2.8784 _n	2.8093	2.3843	1.5970 _n
66.2	3.2708 _n	3.0690	2.8489 _n	2.7634	2.3396	2.5601 _n
67.2	3.1998 _n	2.9981	2.7836 _n	2.6995	2.2730	2.4985 _n
68.2	3.0513 _n	2.8709	2.6543 _n	2.5857	2.1492	2.3892 _n
69.2	2.6772 _n	2.5805	2.3812 _n	2.3722	1.8931	2.1703 _n
70.2	2.5098	1.6180 _n	1.0187	1.7623	0.239	1.5197 _n
71.2	3.0992 _n	2.7096 _n	2.4569	2.1299 _n	1.9218 _n	1.9756
72.2	3.3423 _n	2.9863 _n	2.7402	2.5141 _n	2.2320 _n	2.3473
73.2	3.4889	3.1376 _n	2.8913	2.6952 _n	2.4038 _n	2.5344
74.2	3.5839	3.2287 _n	2.9799	2.8200 _n	2.5121 _n	2.6488
75.2	3.6475	3.2833 _n	3.0309	2.8845 _n	2.5837 _n	2.7231
76.2	3.6880	3.3127 _n	3.0559	2.9292 _n	2.6285 _n	2.7712
77.2	3.7122	3.3241 _n	3.0622	2.9560 _n	2.6622 _n	2.8015
78.2	3.7240	3.3225 _n	3.0540	2.9601 _n	2.6805 _n	2.8184

und für die Grösse $\log \delta y k . \sqrt{p(1+m)}$ ergibt sich:

	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	2.1666	1.3932 _n	1.0889	1.7266	1.0873	1.4060 _n
28.2	1.9823	1.2837 _n	0.9799	1.4843	0.8584	1.1700 _n
30.2	1.7421	1.0895 _n	0.7924	1.1018	0.5725	0.8770 _n
32.2	1.3975	0.7740 _n	0.4811	0.7867	0.1939	0.4820 _n
34.2	0.796	0.1890 _n	9.776	0.1376	9.530	9.829 _n
36.2
38.2	0.8090	0.2378 _n	9.9557	9.470	9.588	9.740 _n
40.2	1.2472	0.8508 _n	0.4785	0.5581	0.0234	0.2750 _n
42.2	1.7631	1.2088 _n	0.9443	0.8199	0.2203	0.5583 _n
44.2	2.0581	1.4611 _n	1.2020	0.9551	0.4437	0.7035 _n

	I	II	III	IV	V	VI
1846.2	2.1999	1.6663 _n	1.4201	1.0183	0.4744	0.7114 _n
48.2	2.3583	1.8447 _n	1.6056	0.9154	0.2803	0.6010 _n
50.2	2.4944	2.0119 _n	1.7780	0.943	0.926 _n	0.831
52.2	2.6177	2.1811 _n	1.9826	1.1529 _n	0.8478 _n	1.0094
54.2	2.7398	2.3454 _n	2.1186	1.6096 _n	1.2440 _n	1.4214
56.2	2.8655	2.5195 _n	2.2950	1.9227 _n	1.5500 _n	1.7242
58.2	2.9998	2.6989 _n	2.4760	2.1751 _n	1.7850 _n	1.9765
60.2	3.1461	2.8809 _n	2.6599	2.3933 _n	1.9927 _n	2.1956
62.2	3.3012	3.0610 _n	2.8411	2.5897 _n	2.1848 _n	2.3919
64.2	3.4587	3.2326 _n	3.0127	2.7650 _n	2.3774 _n	2.5676
66.2	3.6069	3.3827 _n	3.1628	2.9146 _n	2.5319 _n	2.7193
67.2	3.6721	3.4467 _n	3.2286	2.9765 _n	2.5972 _n	2.7727
68.2	3.7283	3.4997 _n	3.2809	3.0273 _n	2.6508 _n	2.8365
69.2	3.7723	3.5396 _n	3.3220	3.0651 _n	2.6941 _n	2.8763
70.2	3.8020	3.5645 _n	3.3439	3.0882 _n	2.7217 _n	2.9014
71.2	3.8158	3.5735 _n	3.3518	3.0955 _n	2.7337 _n	2.9108
72.2	3.8122	3.5665 _n	3.3438	3.0869 _n	2.7294 _n	2.9043
73.2	3.7929	3.5444 _n	3.3212	3.0629 _n	2.7093 _n	2.8821
74.2	3.7596	3.5090 _n	3.2852	3.0251 _n	2.6744 _n	2.8457
75.2	3.7130	3.4622 _n	3.2390	2.9750 _n	2.6263 _n	2.7963
76.2	3.6542	3.4032 _n	3.1844	2.9142 _n	2.5654 _n	2.7345
77.2	3.5842	3.3446 _n	3.1216	2.8438 _n	2.4917 _n	2.6616
78.2	3.5030	3.2763 _n	3.0595	2.7645 _n	2.4045	2.5779

§. 6.

Die Zahlen des letzten Paragraphen geben eine Einsicht in die ziemlich weitläufigen Rechnungen, welche zur Gewinnung der Werthe δx und δy nöthig waren. Um nun den Betrag der Störung in Positionswinkel und Distanz zu erhalten, habe ich mich begnügt, in dieser ersten Näherung die erwähnten Veränderungen einfach durch Differentiation zu erhalten.

Da die Gleichungen

$$x = \rho \cos p$$

$$y = \rho \sin p$$

bestehen, so ergibt sich:

$$\delta p = \frac{(x\delta y - y\delta x) \cdot k \sqrt{p(1+m)}}{\rho^2 k \cdot \sqrt{p(1+m)}}; \quad \delta \rho = \frac{(x\delta x + y\delta y) \cdot k \sqrt{p(1+m)}}{\rho \cdot k \sqrt{p(1+m)}}$$

Ich multiplizire nun weiter die berechneten Zahlen mit solchen Zahlenfactoren, dass der Einfluss der bis jetzt unbekannten Masse m' besser in die Augen springt. Ich nehme nämlich als Einheit, in der r ausgedrückt wird, eine Strecke von 6 Bogensekunden und bezeichne:

$$\alpha = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{6''}{r'} \right)^5.$$

Dann stellt sich die Störung im Positionswinkel in der Form dar:

$$\delta p = \alpha [I + II \cdot t + III u + IV t^2 + V u^2 + VI \cdot 2tu]$$

und für die Distanz ist eine ganz analoge Form anzunehmen.

Auf diese Weise ergibt sich δp , wenn man dasselbe gleich in Graden angibt:

	$\delta p.$					
	I	II	III	IV	V	VI
1826.2	-0.09	+0.05	-0.03	+0.03	+0.01	-0.01
28.2	-0.06	+0.03	-0.02	+0.01	.	-0.01
30.2	-0.04	+0.02	-0.01	+0.01	.	.
32.2	-0.01	+0.01
34.2

	I	II	III	IV	V	VI
36.2
38.2
40.2	-0.01
42.2	-0.03
44.2	-0.06	+0.01	-0.01	-0.01	.	.
46.2	-0.06	+0.02	-0.01	-0.02	-0.01	+0.01
48.2	-0.07	0	0	-0.04	-0.01	+0.02
50.2	-0.06	-0.02	+0.01	-0.07	-0.02	+0.04
52.2	-0.02	-0.05	+0.03	-0.11	-0.03	+0.06
54.2	+0.01	-0.12	+0.07	-0.16	-0.04	+0.09
56.2	+0.22	-0.23	+0.13	-0.22	-0.07	+0.13
58.2	+0.48	-0.40	+0.24	-0.36	-0.11	+0.19
60.2	+0.84	-0.67	+0.40	-0.43	-0.16	+0.26
62.2	+1.48	-1.08	+0.65	-0.59	-0.22	+0.36
64.2	+2.41	-1.71	+1.02	-0.79	-0.30	+0.49
66.2	+3.73	-2.59	+1.56	-1.04	-0.42	+0.66
67.2	+4.53	-3.12	+1.89	-1.19	-0.48	+0.75
68.2	+5.39	-3.68	+2.23	-1.33	-0.55	+0.86
69.2	+6.24	-4.20	+2.55	-1.46	-0.61	+0.94
70.2	+6.95	-4.61	+2.78	-1.55	-0.66	+1.01
71.2	+7.41	-4.82	+2.89	-1.60	-0.70	+1.05
72.2	+7.56	-4.80	+2.86	-1.59	-0.71	+1.05
73.2	+7.42	-4.54	+2.69	-1.53	-0.70	+1.02
74.2	+7.05	-4.15	+2.44	-1.44	-0.67	+0.96
75.2	+6.55	-3.68	+2.13	-1.32	-0.63	+0.90
76.2	+5.99	-3.19	+1.85	-1.21	-0.58	+0.83
77.2	+5.43	-2.74	+1.54	-1.09	-0.54	+0.76
78.2	+4.89	-2.32	+1.27	-0.96	-0.50	+0.69

Diese Zahlen geben also die störende Einwirkung des Sternes *C* auf den Positionswinkel von *B* als Function der drei Unbekannten α , t und u , und diese sind jetzt so zu bestimmen, dass den Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate genügt wird.

Das Verfahren, das ein Näherungsverfahren sein muss, welches ich eingeschlagen habe, mag möglicherweise nicht das directeste sein. Es ist aber wohl erklärlich, dass man nach Abschluss so complicirter Rechnungen theilweise andere Gesichtspunkte gewinnt, als man sie während der Arbeit haben kann.

Die Differenzen $B-R$, welche aus der Vergleichung der Elemente II mit den Beobachtungen hervorgehen, habe ich zunächst graphisch dargestellt, und durch eine Curve mit möglichst stetiger Krümmung ausgeglichen. Es hat sich auch hierbei, wie zu erwarten war, gezeigt, dass die erste Struve'sche Beobachtung sich nicht mit den folgenden Messungen vereinigen lässt. Aus der graphischen Darstellung wurden nun folgende Werthe entnommen:

	$B-R$		$B-R$		$B-R$
1828.47	-4.50	1860.26	-0.45	1872.11	+0.75
34.04	-2.25	63.08	-0.05	73.80	+1.55
40.29	+1.80	65.34	+0.55	75.70	+1.60
46.53	+1.10	67.24	0.00	77.96	+1.00
52.10	+3.20	68.93	-0.70		
56.67	+1.30	70.52	-0.65		

(A)

Aus diesen Abweichungen wären nun die Correctionen der sechs Bahnelemente II, damit diese für die Zeit 1836.2 osculirend werden, sowie die drei Unbekannten α , t und u , welche sich auf den störenden Körper beziehen, zu berechnen. Theoretisch ist damit das hier vorliegende umgekehrte Störungsproblem vollständig gelöst. Wie es damit aber in praxi steht, ist bereits aus der Zahlenreihe (A) zu erschen. Die Abweichungen sind in der That nicht gross (sie überschreiten kaum die Grenze, welche noch für die Beobachtungsfehler zulässig ist) und es ist desshalb zu vermuthen, dass sich α , t und u nicht mit Sicherheit bestimmen lassen werden.

Zudem sind, wie wir später sehen werden, die Coëfficienten von t und u derart, dass sich diese beiden Unbekannten für jetzt bei ζ Cancri nicht genügend von einander trennen lassen. Man muss desshalb von vornherein daran verzweifeln, die Elemente von C aus den auf B ausgeübten Störungen berechnen zu können. Die nächsten Jahrzehnte werden voraussichtlich das Problem so weit entwickeln, dass dann auch diese Bestimmung, wenigstens, was den Coëfficienten α betrifft, möglich sein dürfte. Bei dieser Sachlage wäre es das Richtige gewesen, für t und u einfach solche Werthe anzunehmen, welche den sonstigen Wahrnehmungen und Voraussetzungen nicht widersprechen. Es wäre also vollständig erlaubt gewesen, z. B. $t = u = 0$ zu setzen; ich habe aber sehr viel Zeit darauf verwendet, nach einem Aufschluss über die wahrscheinlichsten Werthe dieser Unbekannten zu suchen. Die Aufgabe ist desshalb so complicirt, aber auch interessant, weil der allgemeine Ausdruck von δp sowohl in Beziehung auf t als auch auf u quadratisch ist. Die gemachten Versuche führe ich hier nicht an, weil sie zum Theil aus blossem Probiren an den Zahlen (A) hervorgegangen sind; hauptsächlich aber desshalb lasse ich sie unerwähnt, weil die Art und Weise, wie der Ausgangspunkt gewonnen wurde, für das Folgende vollständig gleichgiltig ist.

Ich bin also schliesslich bei der Annahme stehen geblieben:

$$\begin{aligned}\alpha &= 3.23 \\ t &= +0.6 \\ u &= +1 \\ d\varphi &= +2^{\circ}20 \\ dn &= +0^{\circ}11.07 \\ dT &= -2.523 \\ d\Omega &= +10^{\circ}56 \\ d\lambda &= 0 \\ di &= +3^{\circ}0.\end{aligned}$$

und daraus ergeben sich die folgenden Zahlen, indem die letzten Stellen abgekürzt worden sind:

$$\begin{aligned}\text{Oscul. 1836.20} \\ T' &= 1868.00 \\ \lambda &= 106.01 \\ \Omega &= 88.13 \\ i &= 20.50 \\ \varphi &= 21.85 \\ n &= 5.8428 \\ \pi &= 194.14\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}\text{Oscul. 1836.20} \\ T' &= 1868.00 \\ \lambda &= 106.01 \\ \Omega &= 88.13 \\ i &= 20.50 \\ \varphi &= 21.85 \\ n &= 5.8428 \\ \pi &= 194.14\end{aligned}} \right\} \text{(III)}$$

Vernachlässigt man dagegen die Einwirkung von C , d. h. setzt man $\alpha = 0$, so erhält man Correctionen der sechs Bahnelemente, welche an (II) angebracht, die bereits angeführten und benützten Elemente (IV) ergeben.

Es hat sich nun ergeben, dass die Elemente (III) nicht als eine wesentliche Verbesserung anzusehen sind, was seinen Grund in der Unsicherheit der Werthe in der Zahlenreihe (A) hat. Überhaupt dürfte das Curvenzeichnen bei den Doppelsternen, im Allgemeinen wenigstens, kein gutes Auskunftsmittel sein; die Differenzen sind meistens zu gross, als dass nicht bei der Construction der Curve grossen Willkürlichkeiten freie Hand gelassen würde.

Wie dem auch immer sei, die Elemente (III) wurden als Ausgangspunkt für das Folgende benutzt. Ich habe nun gleich die oben bereits gerechtfertigte Specialisirung vorgenommen, t und u gleich Null gesetzt.

Ich habe weiter in den Störungsgleichungen $\alpha = 3.2$ gesetzt und die Elemente (III) angewandt. Die sohergestalt berechneten Positionswinkel wurden dann mit den Beobachtungen verglichen und folgende Normalörter gebildet, wobei die Störungen für die letzten Örter durch Extrapolation gewonnen werden mussten. Der Klrze wegen führe ich diese Vergleichung nicht an. Ich bemerke nur, dass die Vergleichung mit den Jahresmitteln 27 positive, 24 negative Fehler ergab, bei denen 15 Zeichenwechsel stattfanden. Die Normalörter waren folgende:

	$B-R$	g	\sqrt{g}		$B-R$	g	\sqrt{g}		$B-R$	g	\sqrt{g}
1826.22	+8.35	2	1.4	1846.75	-0.19	13	3.6	1868.06	+3.44	11	3.3
30.79	-2.44	7	2.6	51.02	+1.76	15	3.9	71.16	+0.33	20	4.5
32.59	-2.02	15	3.9	56.24	+0.78	20	4.5	74.20	-0.93	19	4.4
36.55	-0.95	12	3.5	60.78	-0.49	6	2.4	77.23	-4.69	14	3.7
41.51	+0.19	22	4.7	64.71	+3.39	30	5.5	79.55	-5.65	3	1.7

Ich berechne nun die Störungen im Positionswinkel nach den Zahlen auf p. 183, und zwar unter den zwei Annahmen:

$$1. \quad \alpha = 3.2 \quad t = u = 0$$

$$2. \quad \alpha = 3.2 \quad t = +0.6; \quad g = +1,$$

also unter den beiden Annahmen, welche überhaupt im Vorigen in Frage kamen.

Es sollen weiter, zur Erlangung etwaiger Verbesserungen von t und u , die Differentialquotienten von t und u mitgenommen werden. Die Form, die ich aus leicht zu überschenden Gründen für die Störung gewählt habe, ist folgende:

$$\text{im 1. Falle: } \delta p = \alpha [(1) + (2) \frac{dt}{t} + (3) du],$$

$$\text{" 2. " } \delta p = \alpha [(1') + (2') \frac{dt}{t} + (3') du].$$

Die mit arabischen Ziffern bezeichneten Coefficienten haben dann folgende Werthe:

	(1)	(2)	(3)	(1')	(2')	(3')
1826.2	-0.09	+0.03	-0.03	-0.08	+0.04	-0.02
28.2	-0.06	+0.02	-0.02	-0.07	+0.01	-0.03
30.2	-0.04	+0.01	-0.01	-0.04	+0.01	-0.01
32.2	-0.01	+0.01	0	0	+0.01	0
34.2	0	0	0	0	0	0
36.2	0	0	0	0	0	0
38.2	0	0	0	0	0	0
40.2	-0.01	0	0	-0.01	0	0
42.2	-0.03	+0.01	0	-0.02	+0.01	0
44.2	-0.06	+0.01	-0.01	-0.06	+0.02	0
46.2	-0.06	+0.01	-0.01	-0.07	+0.01	-0.02
48.2	-0.07	0	0	-0.07	0	0
50.2	-0.06	-0.01	+0.01	-0.05	0	+0.02
52.2	-0.02	-0.03	+0.03	-0.02	-0.04	+0.04
54.2	+0.01	-0.07	+0.07	+0.03	-0.06	+0.10
56.2	+0.22	-0.14	+0.13	+0.22	-0.14	+0.15
58.2	+0.48	-0.24	+0.24	+0.49	-0.23	+0.25
60.2	+0.84	-0.40	+0.40	+0.84	-0.39	+0.39
62.2	+1.48	-0.65	+0.65	+1.48	-0.64	+0.64
64.2	+2.41	-1.03	+1.02	+2.41	-1.00	+1.01
66.2	+3.73	-1.55	+1.56	+3.74	-1.50	+1.51
67.2	+4.53	-1.87	+1.89	+4.55	-1.81	+1.85
68.2	+5.39	-2.21	+2.23	+5.41	-2.14	+2.16
69.2	+6.24	-2.52	+2.55	+6.26	-2.45	+2.46
70.2	+6.95	-2.77	+2.78	+6.96	-2.68	+2.67
71.2	+7.41	-2.89	+2.89	+7.39	-2.79	+2.75
72.2	+7.56	-2.88	+2.86	+7.51	-2.78	+2.70
73.2	+7.42	-2.72	+2.69	+7.36	-2.60	+2.51
74.2	+7.05	-2.49	+2.44	+6.96	-2.38	+2.25
75.2	+6.55	-2.21	+2.13	+6.44	-2.09	+1.95
76.2	+5.99	-1.91	+1.83	+5.89	-1.79	+1.67
77.2	+5.43	-1.64	+1.54	+5.31	-1.51	+1.37
78.2	+4.89	-1.39	+1.27	+4.75	-1.26	+1.10

Aus diesen Werthen ergibt sich nun auf den ersten Blick die merkwürdige Thatsache, dass sich gegenwärtig keine Entscheidung darüber herbeiführen lässt, ob die Annahme 1) oder 2) der Wahrheit mehr

entspricht, indem bei beiden alle drei in Frage kommenden Coëfficienten sehr nahe gleich sind, wenigstens sind die Differenzen selbst gegen die zu erwartenden Beobachtungsfehler klein. Ferner sieht man, dass auch die Coëfficienten (2) und (3) in beiden Reihen bis auf's Vorzeichen sehr nahe mit einander übereinstimmen. Es folgt daraus, dass sich unter keinen Umständen die beiden Unbekannten t und u von einander trennen lassen. Vielmehr wird man nur in der Lage sein, die Bestimmung der Grösse q herbeizuführen, wo

$$\text{im 1. Falle } q = \alpha dt - \alpha du,$$

$$\text{„ 2. „ } q = \alpha \frac{dt}{t} - \alpha du.$$

Da mit einem bestimmten Werth für α gerechnet worden ist, so wird es sich jetzt darum handeln, die Correction $\Delta\alpha = x$, sowie q und die Correctionen der sechs Bahnlemente so zu bestimmen, dass den Normalörtern auf p. 28 nach der Methode der kleinsten Quadrate genügt wird. Ich habe übrigens bei dieser Auflösung der Aufgabe die Verbesserung der Knotenlänge Ω gleich Null angenommen. Die Neigung i ist klein und demzufolge sind die Coëfficienten von $d\lambda$ und $d\Omega$ in den Bedingungsgleichungen so wenig verschieden von einander, dass die erwähnte Auslassung kaum einen Einfluss auf die Güte der Darstellung ausüben dürfte. Für die Coëfficienten von x und q habe ich übrigens die Mittel aus dem für beide Annahmen gerechneten Werthe genommen.

Die bereits mit den Quadratwurzeln aus den respectiven Gewichten multiplicirten Bedingungsgleichungen sind nun:

+11.70	= +1.382 $d\lambda$	-0.344 (100 dn)	+0.482 (10 $d\tau$)	-1.396 $d\varphi$	+0.248 di	-0.11 λ	+0.04 q
-6.34	+2.652	-0.520	+0.816	-1.524	+0.447	-0.08	+0.03
-7.88	+4.025	-0.725	+1.197	-1.646	+0.612	0	-0.04
-3.33	+3.686	-0.571	+1.064	-0.210	+0.385	0	0
+0.89	+5.010	-0.677	+1.490	+1.927	+0.099	-0.09	0
-0.68	+3.812	-0.461	+1.274	+3.326	-0.292	-0.25	+0.04
+6.86	+4.033	-0.460	+1.595	+5.249	-0.589	-0.12	-0.08
+3.51	+4.419	-0.482	+2.417	+8.199	-0.756	+1.04	-0.63
-1.18	+2.258	-0.223	+1.841	+4.934	-0.103	+2.47	-1.10
+18.65	+5.357	-0.341	+6.314	+8.795	+0.781	+15.13	-6.16
+11.35	+3.475	+0.007	+4.739	-0.132	+0.290	+17.46	-6.93
+1.49	+4.676	+0.293	+5.580	-7.358	-0.574	+33.17	-12.47
-4.09	+4.286	+0.405	+3.859	-9.200	-0.691	+30.62	-10.16
-17.35	+3.482	+0.366	+2.338	-7.267	-0.207	+19.57	-5.29
-9.61	+1.595	+0.173	+0.879	-2.999	+0.046	+6.85	-1.46

und daraus folgen die Normalgleichungen:

+214.93 $d\lambda$	-13.65 100 dn	+147.63 10 $d\tau$	+20.21 $d\varphi$	-2.26 di	+515.01 λ	-185.15 q	= +50.80
-13.65	+2.94	-3.89	-19.79	-1.03	+24.76	-7.33	-13.69
+147.63	-3.89	+133.67	-1.02	-1.57	+539.60	-197.81	+120.25
+20.21	-19.79	1.02	+418.88	+6.07	-538.40	+163.86	+409.48
-2.26	-1.03	-1.57	+6.07	+3.36	-28.03	+9.02	+10.65
+515.01	+24.76	+539.60	-538.40	-28.03	-3008.80	-1055.81	-1.61
-185.15	-7.33	-197.81	+163.86	+9.02	-1055.81	+376.43	-65.64

Ich hatte ursprünglich für den letzten Normalort durch eine andere Gewichtsannahme die Abweichung -7.00 (statt -5.65) genommen und gefunden, dass die Quadratsumme der Abweichungen durch die neue Ausgleichung um 934 Einheiten verringert wird. Von diesen fielen

10.0 Einheiten	auf die Correction	$d\lambda$
59.4	„ „ „ „	dn
750.1	„ „ „ „	$d\tau$
43.9	„ „ „ „	$d\varphi$
67.8	„ „ „ „	di
2.8	„ „ „ „	x
0.3	„ „ „ „	q

Ungefähr bleiben natürlich diese Verhältnisse auch bestehen nach der geringfügigen Correction. Es ist darnach in der That ganz gleichgiltig, welchen Werth man für q annimmt.

Die Auflösung der Normalgleichungen gibt nun $q = +0.79$, und hiermit $\alpha = 3.812$, und für den 1. Fall, wo von den Werthen $t = u = 0$ ausgegangen worden ist, ergibt sich deshalb $3.81(dt - du) = 0.79$, $dt - dq = +0.207$.

Im 2. Falle findet sich $6.31 dt - 3.81 dq = 0.79$. Es ist demnach die Correction der Differenz $t - u$ in beiden Fällen auch dann voraussichtlich sehr klein, wenn man die strenge Auflösung ganz allgemein durchführt. Im Zusammenhang mit den früheren Bemerkungen leiten wir daraus die Berechtigung ab, $q = 0$ und ebenso $t = 0$ und $u = 0$ setzen zu dürfen. Unter dieser Voraussetzung fällt die letzte der Normalgleichungen fort, und man erhält:

$$d\alpha = +0.297$$

$$d\lambda = -6.406$$

$$di = -5.253$$

$$d\varphi = +0.434$$

$$dn = -0.28043$$

$$dT = +0.5902$$

Man erhält daraus den neuen Werth $\alpha = 3.497$, und da in diesem Falle $r' = \rho'$ ist aus dem oben angegebenen Werth für ρ'

$$\frac{m'}{1+m} = 2.368 \text{ mittl. F. } \pm 1.56.$$

Bringt man diese Correctionen an die Elemente III an, so erhält man das Elementensystem VI. Als Elemente V habe ich diejenigen bezeichnet, die aus der allgemeinen Auflösung $dt - du = q = 0.207$ hervorgehen, die ich aber hier nicht anführen will.

Oscul. 1836.2

$$\frac{m'}{1+m} = 2.368$$

$$T = 1868590$$

$$\lambda = 99^\circ 604$$

$$\Omega = 88.130$$

$$i = 15.247$$

$$\varphi = 22.284$$

$$n = -6.12323$$

$$\pi = 187.734$$

(VI)

Wir haben nun auch einen osculirenden Werth für die Halbaxe a abzuleiten. Es wurden demnach die bis 1878.22 beobachteten Distanzen mit Hilfe der Glieder I (p. 179) in δx und δy nach der Formel

$$\rho \delta \rho = x \delta x + y \delta y$$

auf Distanzen reducirt, welche der für den Zeitpunkt 1836.2 osculirenden Ellipse angehören; aus jeder wurde weiter mit den Elementen VI das zugehörige a abgeleitet, und aus allen Einzelwerthen das Mittel genommen, und zwar ohne Rücksicht auf die Gewichte. Auf diese Weise fand sich:

$$a = 0.851.$$

Die Vergleichung der beobachteten Distanzen mit dem aus diesem Werthe für a berechneten ergab 21 positive, 23 negative Vorzeichen und 19 Zeichenwechsel, also bereits eine genügende Übereinstimmung.

Ich habe nur noch den Betrag der Glieder (I) für die Distanz mitzutheilen. Die Correction ist so zu verstehen, dass man sie zu den beobachteten Distanzen hinzuzufügen hat, um auf die für 1836.2 osculirende Ellipse zu reduciren.

1826.2	+0.003	4848.2	—0.011	1868.2	—0.077	
28.2	+	50.2	— 17	69.2	— 65	
30.2	.	52.2	— 24	70.2	— 47	
32.2	.	54.2	— 32	71.2	— 27	
34.2	.	56.2	— 42	72.2	— 4	
36.2	.	58.2	— 53	73.2	+	18
38.2	.	60.2	— 64	74.2	+	38
40.2	— 1	62.2	— 75	75.2	+	54
42.2	— 2	64.2	— 84	76.2	+	66
44.2	— 4	66.2	— 87	77.2	+	75
46.2	— 7	67.2	— 84	78.2	+	81

Lässt man die Elemente VI bereits als Näherung gelten, so ist der weitere Weg, welchen die Untersuchung zu nehmen hat, von selbst vorgezeichnet. Wir hatten nämlich gesehen, dass es in Folge der Unbestimmtheit der Bewegungselemente von C , am angemessensten ist, anzunehmen, dass sich C in der Projectionsebene bewegt. Man hat demgemäss unter dieser Annahme und mit dem erhaltenen Massenwerthe die Störungen nach einer strengen Methode zu berechnen. Es ist dies schon aus dem Grunde nöthig, weil so complicirte Rechnungen, wie diejenigen sind, welche zur Erhaltung der Näherungswerthe nöthig wären, nicht alle Vernachlässigungen so übersichtlich erscheinen lassen, dass eine ganz unabhängige Controlrechnung überflüssig wäre.

Als unzweifelhaftes Resultat der vorstehenden Zahlen darf einzig und allein die Thatsache angesehen werden, dass verhältnissmässig sehr grosse Massenwerthe für den Stern C die Beobachtungen nicht schlechter darstellen, als wenn die störende Wirkung ganz vernachlässigt wird.

§. 7.

Zur strengeren Berechnung der Störungen habe ich die Methode der speciellen Störungen in rechtwinkligen Coordinaten angewandt. Und zwar wurde mit Elementen (VI) eine Ephemeride gerechnet und dann in der allgemein bekannten Weise vorgegangen. Es ist dies aber nicht der Weg, welcher, in dem Falle eines dreifachen Sternes, der richtige ist. Ich hätte vielmehr besser so gerechnet. Die Elemente IV_a stellen die beobachteten Positionswinkel und Distanzen genügend gut dar. Es sollten demnach die nach diesen Elementen berechneten Coordinaten x und y als die gestörten Werthe betrachtet werden, während die nach VI berechnete z -Coordinate von Intervall zu Intervall mit Hilfe der berechneten Störungen zu verbessern wäre. Die Umformung der Eneke'schen Methode aus diesem Gesichtspunkte ist so einfach, dass darüber keine weiteren Worte zu verlieren sind. Der von mir eingeschlagene, erwähnte Rechnungsweg wird aber auch keine unrichtigen Werthe geliefert haben, und zwar aus dem Grunde, weil die aus der Rechnung hervorgehenden Coordinatenwerthe ziemlich nahe mit den Beobachtungen übereinstimmen, also der Effect der angewandten und der im Allgemeinen besseren Methode in dem vorliegenden Falle derselbe ist. Das Resultat, das unten angeführt wird, stimmt nun mit dem durch das Näherungsverfahren erhaltenen so gut überein, als man bei den gemachten Vernachlässigungen nur immer erwarten durfte.

Zu bemerken ist noch, dass ich die Elemente (VI) während des ganzen Zeitraumes auf keine andere Osculationsepoche übertragen habe. Es ist dies allerdings eine Unterlassungssünde, die aber in Anbetracht der Unsicherheit von der das Resultat in Folge anderer Gründe ohnehin behaftet ist, wohl keine wesentlichen schädlichen Folgen gehabt hat.

Das Detail der Rechnung selbst bietet nichts Bemerkenswerthes dar, da sich diese auf so allgemein bekannten Pfaden bewegt. Ich werde desshalb nur das Resultat anführen, habe aber vorher zwei allgemeinere Bemerkungen zu machen. Die erste bezieht sich auf die bekannte Eneke'sche f -Tafel. Diese wurde in den Rechnungen in einer sehr bedeutend grösseren Ausdehnung erforderlich. Ich theile diese in der Ausdehnung, in welcher sie gebraucht wurde, in dem Anhang mit, indem ich nur die neuen, direct berechneten Werthe anführe; dagegen blieben die für das enge, für Planetenrechnungen ausreichende Intervall, von Eneke u. A. berechneten Werthe unerwähnt.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf einen Satz aus der Theorie der mechanischen Berechnung von Doppelintegralen, der bei den erwähnten Rechnungen in Anwendung kam, und von dem ich vermute, dass er sonst nicht immer in der richtigen Weise angewandt worden ist. Handelt es sich in der bekannten Gauss-Encke'schen Bezeichnung um die Auswerthung des Doppelintegrals:

$$J = \int_a^{a+(m+n)w} f(x) dx \quad dx,$$

so ist die Frage zu beantworten, wie J zu berechnen ist, wenn zwischen den Grenzen a und $a+(m+n)w$, etwa bei $a+mw$, ein Wechsel in der Wahl der Grösse von w vorgenommen wird. Es sei z. B. zwischen a und $a+mw$ das Intervall, in welchen die Functionswerte berechnet werden $= 2$ Einheiten, und von da ab bis $a+(m+n)w$ nur eine Einheit. Das Integral J muss, in der in der Mathematik üblichen Form geschrieben, so dargestellt werden:

$$J = \int_a^{a+(m+n)w} dx \cdot \int_a^x f(y) dy = \int_a^{a+mw} dx \cdot \int_a^x f(y) dy + \int_{a+mw}^{a+(m+n)w} dx \cdot \int_a^x f(y) dy.$$

Das zweite Doppelintegral ist aber:

$$\int_{a+mw}^{a+(m+n)w} dx \cdot \left\{ \int_{a+mw}^x f(y) dy + \int_a^{a+mw} f(y) dy \right\}.$$

Gebrauche ich nun die in der Theorie der mechanischen Quadraturen meistens übliche Bezeichnungsweise, setze also:

$$\int_a^b \int_a^x f(x) dx^2 = \int_a^b dx \int_a^x f(y) dy,$$

so wird:

$$J = \int_a^{a+mw} \int_a^x f(x) dx^2 + \int_{a+mw}^{a+(m+n)w} \int_a^x f(x) dx^2 + \int_{a+mw}^{a+(m+n)w} dx \cdot \int_a^{a+mw} f(y) dy.$$

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich diese Formel falsch angegeben gefunden, indem das letzte Glied rechts einfach übergangen wird. Dieses letzte Glied ist aber ein einfaches Integral, indem sich die Integration in Bezug auf x ausführen lässt. Man hat demnach:

$$J = \int_a^{a+mw} \int_a^x f(x) dx^2 + \int_{a+mw}^{a+(m+n)w} \int_a^x f(x) dx^2 + nw \cdot \int_a^{a+mw} f(y) dy. \quad \dots (1)$$

Ich nehme nun an, dass bis zum Argumentenwerth $a+mw$ die Functionswerte in dem Intervalle w berechnet vorliegen, während von dieser Stelle an bis $a+(m+n)w$ in dem Intervalle w_1 vorwärts gegangen wird, und zwar seien v in dem letzten Intervalle berechnete Werthe. Dann ist

$$nw = vw_1.$$

Man kann dann die Integration J so ausführen, dass man nach den bekannten Regeln das Doppelintegral

$$\int_{a+mw}^{a+(m+n)w} \int_a^x f(x) dx^2$$

berechnet, und die anderen zwei Glieder in der Formel (1) dadurch berücksichtigt, dass man in bekannter Weise die Anfangswerte der zweiten und ersten summirten Reihe gehörig bestimmt. Man hat dabei nichts Anderes zu thun, als die gewöhnlichen Formeln für die in (1) vorkommenden Integrale einzusetzen; dann

erscheint unter Anderem der Ausdruck, wenn die von Gauss eingeführte Bezeichnung für die Differenz- und Summengrößen beibehalten wird:

$$\nu \cdot \frac{w}{w_1} w^2 \left\{ f(a+mw) - \frac{1}{12} f'(a+mw) + \frac{11}{720} f'''(a+mw) \dots \right\}.$$

Diesen Ausdruck berücksichtigt man dadurch, dass man zu dem von der bekannten Formel gelieferten Werth der Anfangsconstanten für die erste summirte Reihe die angegebene Grösse addirt, nachdem man das ν fortgelassen hat, indem dadurch jedes Glied der ersten summirten Reihe um diesen Betrag und dadurch das letzte Glied der zweiten summirten Reihe um das ν -fache vergrößert wird. Auf diese Weise ergibt sich die Vorschrift: Um J zu berechnen, bildet man zuerst die Summationen bis zum Argumente $a+mw$, dann aber setzt man

$$C_2 = w^2 f(a+mw) + \frac{w^2 - w_1^2}{12} f'(a+mw) - \frac{w^2 - w_1^2}{240} f'''(a+mw)$$

an die Stelle von $f(a+mw)$ und

$$C_1 = w^2 \left\{ \frac{w'}{w} f(a+mw) - \frac{w_1^2}{w^2} \cdot \frac{1}{2} f'(a+mw) + \left(\frac{w_1^2}{w^2} - \frac{w_1}{w} \right) \cdot \frac{1}{12} f'(a+mw) - \frac{11}{720} \left(\frac{w_1^2}{w^2} - \frac{w_1}{w} \right) f'''(a+mw) \dots \right\}$$

an die Stelle von $f\left(a - \left(m - \frac{1}{2}\right)w\right)$ und fährt nun fort, als ob kein Wechsel der Grösse des Intervalles stattgefunden hätte. Ist z. B. das erste Intervall $w = 2$, das zweite $w_1 = 1$, so wird

$$\frac{1}{4} C_2 = f(a+mw) + \frac{1}{16} f'(a+mw) - \frac{1}{320} f'''(a+mw) - \dots$$

$$\frac{1}{4} C_1 = \frac{1}{2} f(a+mw) - \frac{1}{8} f'(a+mw) + \frac{1}{48} f'(a+mw) + \frac{11}{2880} f'''(a+mw) \dots,$$

resp. an die Stelle von $f(a+mw)$ und $f\left(a + \left(m - \frac{1}{2}\right)w\right)$ zu setzen sein.

Auf ganz ähnliche Weise lassen sich auch die übrigen gebräuchlichen Formeln zur Berechnung von Doppelintegralen behandeln.

Nach dieser Digression führe ich nun die erhaltenen strengen Störungswerthe an. Es sind die folgenden Correctionen Δx und Δy so zu verstehen, dass dieselben zu den aus den Elementen VI sich ergebenden Coordinatenwerthen hinzugelegt werden müssen, um die gestörten Coordinaten zu geben.

Δx			Δy			Δx			Δy			Δx			Δy		
1826.2	+0.0037	—	0.0065	—	—	1850.2	+0.0142	—	0.0143	—	—	1869.2	+0.0004	—	0.2500	—	—
28.2	+	27	—	43	—	52.2	+	202	—	188	—	70.2	—	383	—	2607	—
30.2	+	17	—	55	—	54.2	+	279	—	246	—	71.2	—	793	—	2606	—
32.2	+	8	—	11	—	56.2	+	377	—	324	—	72.2	—	1185	—	2501	—
34.2	+	2	—	3	—	58.2	+	498	—	437	—	73.2	—	1528	—	2309	—
36.2	+	0	—	0	—	60.2	+	636	—	608	—	74.2	—	1805	—	2059	—
38.2	+	2	—	4	—	62.2	+	770	—	869	—	75.2	—	2009	—	1777	—
40.2	+	18	—	13	—	64.2	+	841	—	1259	—	76.2	—	2145	—	1485	—
42.2	+	20	—	28	—	65.2	+	820	—	1505	—	77.2	—	2222	—	1198	—
44.2	+	38	—	48	—	66.2	+	738	—	1776	—	78.2	—	2250	—	929	—
46.2	+	63	—	74	—	67.2	+	579	—	2052	—	79.2	—	2240	—	680	—
48.2	+	97	—	105	—	68.2	+	332	—	2305	—	80.2	—	2200	—	456	—

Aus diesen Veränderungen der Coordinaten lassen sich nun sofort die Störungen in Positionswinkel und Distanz ableiten. Es ist nämlich völlig strenge:

$$\begin{array}{l|l} \rho \cos p = x & (\rho + \Delta \rho) \cos (p + \Delta p) = x + \Delta x \\ \rho \sin p = y & (\rho + \Delta \rho) \sin (p + \Delta p) = y + \Delta y \end{array}$$

Setzt man demgemäss:

$$\frac{y\Delta x - x\Delta y}{\rho^2} = \mu A$$

$$\frac{x\Delta x + y\Delta y}{\rho^2} = \mu B,$$

so wird:

$$\text{tang } \Delta p = -\frac{\mu A}{1 + \mu B}.$$

Ändert sich ferner μ um $\delta\mu$, so wird die analoge Veränderung von Δp :

$$\delta(\Delta p) = -\frac{\delta\mu}{A\mu^2} \cdot \sin^2 \Delta p.$$

Bei kleinen Veränderungen der störenden Masse m' wird man die dadurch bedingte Veränderung in den betreffenden Störungswerten nach dieser Formel berechnen dürfen, indem die Veränderung in den Gliedern zweiter Ordnung in Bezug auf die Masse nur unbedeutenden Einfluss ausüben kann.

Was die Störung in Distanz betrifft, so wurde dieselbe natürlich nach der entsprechenden Formel:

$$\Delta \rho = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\rho}$$

berechnet.

Ich führe jetzt die Störung im Positionswinkel Δp an. Diese sind also mit dem Massenfactor $\frac{m'}{1+m} = 2.368$ berechnet. Es hat sich nun gezeigt, dass der Anschluss an die Beobachtungen besser wird, wenn man diesen Factor auf 2.013 verkleinert, oder wenn man also $\frac{d\mu}{\mu} = -0.15$ setzt. Unter (II) sind die Störungen im Positionswinkel, unter dieser zweiten Annahme berechnet, angeführt. Dann führe ich noch in der folgenden Zusammenstellung den Factor $\frac{\sin^2 \Delta p}{A\mu^2}$ an, sowie die Positionswinkel, wie sie sich nun zufolge der berechneten Störungen (II) und der Elemente (VI) ergeben.

	Δp	$\frac{\sin^2 \Delta p}{A\mu^2}$	II	Pos.		Δp	$\frac{\sin^2 \Delta p}{A\mu^2}$	II	Pos.
1826.2	-0°40	+0°40	-0°34	51.22	1862.2	+6°20	-5°49	+5°38	271.66
28.2	-0°27	+0°27	-0°23	43.68	64.2	+10°43	-8°98	+9°08	256.02
30.2	-0°16	+0°16	-0°14	36.65	65.2	+13°23	-11°24	+11°54	247.04
32.2	-0°07	+0°07	-0°06	30.00	66.2	+16°47	-13°88	+14°39	237.16
34.2	-0°02	+0°02	-0°02	23.59	67.2	+19°98	-16°84	+17°45	226.28
36.2	0	0	0	17.32	68.2	+23°41	-19°97	+20°41	214.41
38.2	-0°02	+0°02	-0°02	11.12	69.2	+26°19	-22°94	+22°75	201.56
40.2	-0°07	+0°07	-0°06	4.91	70.2	+28°18	-25°56	+24°35	188.29
42.2	0°14	+0°14	-0°12	358.64	71.2	+28°83	-27°30	+24°73	174.69
44.2	-0°22	+0°22	-0°19	352.22	72.2	+28°34	-27°99	+24°14	161.37
46.2	-0°30	+0°29	-0°26	345.60	73.2	+26°97	-27°61	+22°83	148.65
48.2	-0°34	+0°33	-0°29	338.72	74.2	+25°04	-26°24	+21°10	136.79
50.2	-0°32	+0°31	-0°27	331.46	75.2	+23°07	-24°67	+19°37	126.05
52.2	-0°19	+0°19	-0°16	323.74	76.2	+21°12	-22°87	+17°69	116.34
54.2	+0°10	-0°10	+0°08	315.39	77.2	+19°27	-21°00	+16°12	107.55
56.2	+0°72	-0°68	+0°62	306.34	78.2	+17°52	-19°15	+14°65	99.54
58.2	+1°76	-1°63	+1°52	296.27	79.2	+15°99	-17°48	+13°37	92.28
66.2	+3°46	-3°15	+2°99	284.85	80.2	+14°68	-15°94	+12°27	85.84

Die unter der Rubrik Pos. angegebenen Zahlen wurden nun mit den Beobachtungen verglichen. Ich führe diese Vergleichung nicht im Detail an, sondern begnüge mich mit der Mittheilung der Fehler, welche in den bereits früher gebrauchten Normalörtern übrig bleiben.

	$B-R$	g	\sqrt{g}	$10x \frac{d\mu}{\mu}$	$(B-R)\sqrt{g}$		$B-R$	g	\sqrt{g}	$10x \frac{d\mu}{\mu}$	$(B-R)\sqrt{g}$
1826.22	+6.61	2	1.4	-0.056	+9.25	1860.78	-3.01	6	2.4	+0.999	-7.22
30.79	-2.45	7	2.6	-0.034	-6.37	64.71	-0.73	30	5.5	+5.572	-4.02
32.59	-1.59	15	3.9	-0.023	-6.20	68.06	-1.80	11	3.3	+6.445	-5.94
36.55	-0.15	12	3.5	0	-0.52	71.16	-0.08	20	4.5	+12.254	-0.36
41.51	+1.12	22	4.7	-0.052	+5.26	74.20	+3.63	19	4.4	+11.545	+15.97
46.75	+0.26	13	3.6	-0.108	+0.93	77.23	+1.80	14	3.7	+7.748	+6.66
51.02	+1.61	15	3.9	-0.101	+6.28	79.55	+1.25	3	1.7	+2.880	+2.13
56.24	-0.40	20	4.5	+0.315	-1.80						

Ich habe bei der Formation der Bedingungsgleichungen, die Differentialquotienten nicht von Neuem berechnet, sondern einfach die bereits angegebenen, welche bei der Verbesserung der Elemente gebraucht wurden, auch hier angewandt. Diese Vernachlässigung bedarf wohl kaum einer Entschuldigung. Die unter der Überschrift $10 \frac{d\mu}{\mu}$ stehenden Zahlen sind gleich die aus den Quadratwurzeln aus den respectiven Gewichten multiplicirten Coëfficienten der genannten Verbesserung, während daneben die mit denselben Quantitäten multiplicirten übrigbleibenden Fehler stehen. Es sind demnach alle Daten gegeben, welche zur Formirung der Normalgleichungen ausreichend sind. Diese selbst stellen sich so dar, wenn an Ω keine Verbesserung angebracht wird.

$d\lambda$	$100dn$	$10d\tau$	$d\varphi$	di	$x \left(= 10 \frac{d\mu}{\mu} \right)$	
+214.93	-13.65	+147.63	+20.21	-2.26	+192.75	= +51.17
-13.65	+2.94	-3.89	-19.79	-1.03	+9.57	+11.03
+147.63	-3.89	+133.67	-1.03	-1.57	+201.29	+16.21
+20.21	-19.79	-1.02	+418.88	+6.07	-206.88	-230.72
-2.26	-1.03	-1.57	+6.07	+3.36	-10.55	-22.87
+192.75	+9.57	+201.29	-206.88	-10.55	+425.33	+168.68

Wir haben bereits früher, und zwar durch zwei vollständig von einander unabhängige Methoden, gesehen, dass die Vermuthung sehr wahrscheinlich richtig ist, dass die erste Beobachtung von W. Struve einen um eine sehr beträchtliche Grösse zu grossen Positionswinkel angibt, und dass es unter diesen Umständen eigentlich geboten scheint, dieselbe auszuschliessen. Aus diesem Grunde habe ich sie auch immer allein als einen Normalort bestehen lassen. Der Anschluss dieser Beobachtung kommt desshalb damit überein, bei der Bildung der Normalgleichungen einfach die erste Bedingungsgleichung fortzulassen. Geschieht dies jetzt, so werden die neuen Normalgleichungen:

$d\lambda$	$100dn$	$10d\tau$	$d\varphi$	di	x	$d\Omega$
-213.02	-13.17	+146.96	+22.14	-2.60	+192.83	+210.21
-13.17	+2.82	-3.72	-20.27	-0.95	+9.55	-12.63
+146.96	-3.72	+133.44	-0.35	-1.69	+201.33	+146.23
+22.14	-20.27	-0.35	+416.93	+6.42	-206.96	+21.48
-2.60	0.95	-1.69	+6.42	+3.30	-10.54	-2.70
+192.83	+9.55	+201.33	-206.96	-10.54	+425.33	+193.83
+210.21	+12.63	+146.23	+21.48	-2.70	+193.83	+207.82

Löst man das Gleichungssystem Ξ auf, so stellt sich, wie nicht anders zu erwarten war, x nur mit grosser Unsicherheit dar. Die letzte Eliminationsgleichung ist nämlich:

$$0.95x = +5.82,$$

und es ist in der That ziemlich gleichgiltig, welche Werthe man für x annimmt. Ich will $x = +1.50$ setzen. Dadurch wird nämlich der Vortheil erreicht, dass man wieder auf die ursprünglich bei den Störungsrechnungen angewandte Masse: $\frac{m'}{1+m} = 2.368$ zurückkommt, und also jetzt wieder die Störungswerthe so genau sind, als es ihre Berechnung gewesen ist. Mit diesem Werthe von x findet sich nun weiter:

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= +2.213 \\
 di &= -1.839 \\
 dT &= -0.4450 \\
 d\varphi &= +0.324 \\
 dn &= +0.04759
 \end{aligned}$$

und hiermit die neuen Elemente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Oscul. 1836.2} \\
 &\frac{m'}{1+m} = 2.368 \\
 &T = 1868.145 \\
 &\lambda = 101^\circ 817 \\
 &\Omega = 88.130 \\
 &i = 13.408 \\
 &\varphi = 22.608 \\
 &n = -6.0756
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\frac{m'}{1+m} = 2.368 \\ &T = 1868.145 \\ &\lambda = 101^\circ 817 \\ &\Omega = 88.130 \\ &i = 13.408 \\ &\varphi = 22.608 \\ &n = -6.0756 \end{aligned}} \right\} \text{(VII)}$$

Behandelt man aber das System Ξ' , welches also auf der Ausschliessung der ersten Struve'schen Beobachtung gegründet ist, so findet man:

$$x = 12.64,$$

oder $\frac{d\mu}{\mu} = +1.264$ mit dem mittl. F. 0.451.

Es hat sich jetzt also die Sachlage für die Bestimmung der störenden Masse sehr viel günstiger gestaltet, indem durch Ausschluss der genannten Beobachtung, der mittlere Fehler sich sehr viel kleiner herausstellt. Indessen enthält diese Bestimmung noch manche Unsicherheiten, die vor Allem auch daraus entstehen, dass für so grosse Änderungen die Differentiation nicht mehr zur vollständigen Correction der Störungswerthe nach Massgabe der neuen Masse ausreicht. Von Bedeutung scheint mir aber das Resultat, dass die herausgerechnete Massencorrection positiv ist, also eine Vergrösserung der Masse einzutreten hat, wenn man für dieselbe den wahrscheinlichsten Werth ableiten will. Man hätte nun mit einer grösseren Masse, als bisher angenommen worden ist, die Störungsrechnungen von Neuem zu wiederholen. Ich habe dies aber nicht gethan, weil ich glaube, dass die gegenwärtige Untersuchung besser in einigen Jahren weitergeführt werden wird, und ich für jetzt die Arbeit nur so weit führen will, dass sie einen geeigneten Angriffspunkt für weitere Untersuchungen abgeben kann. Ich setzte demgemäss auch in den Gleichungen Ξ' den früheren Massenwerth ein, also $x = +1.50$. Damit findet man:

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= +10^\circ 131 \\
 di &= +0.283 \\
 d\varphi &= +0.723 \\
 dn &= +0.15574 \\
 d\Omega &= -6.580 \\
 dT &= -0.568
 \end{aligned}$$

und es ergeben sich die Elemente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Oscul. 1836.2} \\
 &\frac{m'}{1+m} = 2.368 \\
 &T = 1868.022 \\
 &\lambda = 109^\circ 735 \\
 &\Omega = 81.550 \\
 &i = 15.530 \\
 &\varphi = 23.007 \\
 &n = -5.9675
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\frac{m'}{1+m} = 2.368 \\ &T = 1868.022 \\ &\lambda = 109^\circ 735 \\ &\Omega = 81.550 \\ &i = 15.530 \\ &\varphi = 23.007 \\ &n = -5.9675 \end{aligned}} \right\} \text{(VIII)}$$

Ich habe nun mit den Elementen VIII eine Ephemeride gerechnet, die ich, da auf diese sich die folgenden Vergleichen beziehen, hier mittheile. Die folgenden Positionswinkel sind bereits auf das betreffende scheinbare Äquinoctium reducirt.

	app. p		app. p		app. p		app. p		app. p
1826.2	47.49	1841.2	1.97	1856.2	306.63	1867.7	218.69	1875.2	128.38
27.2	44.09	42.2	358.93	57.2	301.62	68.2	212.76	75.2	123.54
28.2	40.83	43.2	355.84	58.2	296.29	68.7	206.66	76.2	118.92
29.2	37.65	44.2	352.69	59.2	290.61	69.2	200.38	76.7	114.53
30.2	34.54	45.2	349.47	60.2	284.50	69.7	194.12	77.2	110.32
31.2	31.50	46.2	346.18	61.2	277.94	70.2	187.80	77.7	106.30
32.2	28.49	47.2	342.82	62.2	270.83	70.7	181.40	78.2	102.45
33.2	25.52	48.2	339.36	63.2	263.11	71.2	174.99	78.7	98.79
34.2	22.58	49.2	335.78	64.2	254.64	71.7	168.63	79.2	95.31
35.2	19.66	50.2	332.09	64.7	250.08	72.2	162.36	79.7	92.01
36.2	16.74	51.2	328.29	65.2	245.31	72.7	156.22	80.2	88.08
37.2	13.82	52.2	324.34	65.7	240.43	73.2	150.23		
38.2	10.90	53.2	320.20	66.2	235.34	73.7	144.40		
39.2	7.95	54.2	315.88	66.7	229.99	74.2	138.78		
40.2	4.98	55.2	311.37	67.2	224.44	74.7	133.46		

Mit dieser Ephemeride habe ich zunächst die Jahresmittel der ersten Zusammenstellung (p. 162) verglichen. Der Kürze wegen theile ich diese Vergleichung nicht mit. Erwähnen will ich nur, dass 27 positive, 24 negative Abweichungen vorhanden und diese Abweichungen so angeordnet waren, dass 18 Zeichenwechsel erscheinen. Es ist also immerhin ein Fortschritt in der Güte der Darstellung zu bemerken. Was die erste Beobachtung von W. Struve betrifft, so ist hierbei $B-R = +10.21$. Es ist demnach diese Beobachtung in der That nicht mit den späteren vereinbar, indem selbst ganz fehlerhafte Elemente und vollständig falsch berechnete Störungswerthe, da diese, sobald der Oculationspunkt auf die Zeit 1836.2 verlegt wird, stets klein sein werden für das Jahr 1826, in der Zeit von $2\frac{1}{2}$ Jahren, welche das erste von dem zweiten Jahresmittel trennt, niemals Fehler, welche bis auf 10 Grad steigen, hervorbringen können. Ob nun ein Versehen von 10 Grad bei der genannten Beobachtung vorliegt, dürfte schwer zu entscheiden sein. In jedem Falle wird eine Ausschliessung derselben vollkommen gerechtfertigt erscheinen, da dieses Verfahren von so verschiedenen Seiten Stützen erhalten hat.

Was die Distanzen betrifft, so habe ich mit Hilfe der auf p. 186 angeführten Störungsbeträge in den Coordinaten, die Veränderungen in der Distanz berechnet, und zwar habe ich nach der strengen Formel:

$$\rho^2 = (x + \Delta)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2$$

gerechnet, obwohl es gewiss vollständig ausreichend gewesen wäre, einfach die Differentialformel anzuwenden. Mit Hilfe der sohergestalt gefundenen Veränderungen wurden die Jahresmittel der beobachteten Distanzen (p. 162) auf die für den Zeitpunkt 1836.2 osculirende Ellipse reducirt und daraus mit Hilfe der Elemente VIII die grosse Halbaxe a dieser osculirenden Ellipse bestimmt. Die folgende Zusammenstellung enthält die Resultate dieser Rechnung.

	g	beob. p	Störung	osc. p	a		g	beob. p	Störung	osc. p	a
1826.22	2	1.120	+0.003	1.123	0.915	1844.28	2	1.202	-0.005	1.197	0.923
28.80	1	1.015	+	1.016	0.795	45.39	2	1.028	—	1.022	0.798
31.27	3	1.020	0	1.020	0.777	46.26	2	1.043	—	1.036	0.819
32.17	4	1.171	0	1.171	0.885	47.29	2	1.023	—	1.013	0.813
33.21	3	1.123	0	1.123	0.843	48.26	5	1.009	—	0.996	0.812
35.31	3	1.121	0	1.121	0.834	49.31	4	0.972	—	0.955	0.793
36.76	2	1.209	0	1.209	0.878	50.29	2	1.002	—	0.982	0.832
40.23	8	1.000	—	0.999	0.747	51.26	4	1.013	—	0.989	0.856
41.16	2	1.093	—	1.092	0.821	52.26	2	0.987	—	0.960	0.851
42.44	4	1.114	—	1.112	0.843	53.36	2	1.033	—	1.002	0.915
43.22	6	1.122	—	1.119	0.854	54.21	1	0.942	—	0.907	0.848

	g	beob. ρ	Störung	osc. ρ	a		g	beob. ρ	Störung	osc. ρ	a
1855.18	4	1.010	-0.042	0.968	0.934	1869.35	2	0.525	-0.033	0.492	0.824
56.28	3	0.989	—	0.940	0.942	70.27	3	0.548	—	0.537	0.873
57.38	2	0.982	—	0.927	0.968	71.24	2	0.568	+	0.581	0.905
58.20	1	0.950	—	0.889	0.960	72.25	3	0.619	+	0.652	0.956
59.30	1	0.876	—	0.809	0.916	73.22	2	0.591	+	0.640	0.883
60.27	1	0.810	—	0.737	0.874	74.16	3	0.629	+	0.691	0.901
61.27	2	0.825	—	0.746	0.931	75.21	6	0.633	+	0.704	0.862
62.31	1	0.675	—	0.591	0.780	76.20	3	0.661	+	0.737	0.854
63.13	2	0.657	—	0.669	0.925	77.26	4	0.645	+	0.724	0.795
64.18	1	0.639	—	0.549	0.805	78.22	4	0.641	+	0.721	0.757
65.38	3	0.696	—	0.609	0.908	79.22	2	0.767	+	0.047	0.852
66.23	2	0.601	—	0.518	0.841	80.23	1	0.767	+	0.846	0.818
68.22	1	0.656	—	0.600	1.019						

Das Mittel aller einzelnen a ist

$$a = 0.8624 \text{ ohne Rücksicht auf die Gewichte}$$

und

$$a = 0.8532 \text{ mit Berücksichtigung der Gewichtszahlen.}$$

Die letztere Bestimmung wird zur Vergleichung, die im Folgenden ausgeführt wird, benutzt.

Ich theile desshalb die Ephemeride der gestörten Distanzen, die also mit den Beobachtungen direct vergleichbar sind, mit.

p	p	p	p	p					
1826.2	1.044	1837.2	1.148	1848.2	1.061	1859.2	0.824	1870.2	0.535
27.2	1.064	38.2	1.147	49.2	1.046	60.2	0.795	71.2	0.536
28.2	1.081	39.2	1.145	50.2	1.029	61.2	0.765	72.2	0.548
29.2	1.096	40.2	1.141	51.2	1.011	62.2	0.735	73.2	0.568
30.2	1.109	41.2	1.136	52.2	0.991	63.2	0.704	74.2	0.594
31.2	1.120	42.2	1.129	53.2	0.969	64.2	0.672	75.2	0.625
32.2	1.129	43.2	1.121	54.2	0.947	65.2	0.639	76.2	0.660
33.2	1.136	44.2	1.112	55.2	0.924	66.2	0.609	77.2	0.696
34.2	1.142	45.2	1.101	56.2	0.901	67.2	0.582	78.2	0.732
35.2	1.146	46.2	1.088	57.2	0.876	68.2	0.560	79.2	0.767
36.2	1.148	47.2	1.075	58.2	0.851	69.2	0.543	80.2	0.802

§. 8.

Die Beobachtungen von B.

Ehe die Untersuchung abgeschlossen werden kann, ist es, wie schon erwähnt, nothwendig, die einzelnen Beobachtungen, aus denen die Jahresmittel auf p. 162 zusammengesetzt sind, näher zu prüfen und zuzusehen, ob sich vielleicht constante Correctionen für die einzelnen Beobachter mit einiger Sicherheit ableiten lassen. Ich werde demgemäss die Messungen der einzelnen Beobachter vornehmen und diese mit dem zuletzt mitgetheilten, aus den Elementen VIII berechneten Positionswinkel und Distanzen vergleichen.

1. W. Struve (W. S.).

Die in den M. M. enthaltenen Messungen wurden im Positionswinkel uncorrectirt beibehalten, während ich an die Distanzen die Correction -0.020 angebracht habe. Diese Correction ist in Folge der Bemerkungen, welche O. Struve in dem IX. Bande der Pulcowaer Beobachtungen über die Messungen seines Vaters macht, entstanden. In der folgenden Zahlenreihe, ebenso wie bei den Vergleichungen der Messungen der anderen Beobachter, ist unter Correction in Positionswinkel und Distanz immer diejenige Grösse zu verstehen, welche an die Beobachtung angebracht werden muss, um den Ephemeridenort zu geben.

	Abende	p	ρ	Correction		corr. Werthe	
				p	ρ	p	ρ
1826.22	3	57.63	1.120	.	-0.076	—	1.144
28.80	2	38.45	1.020	+0.47	+0.070	39.38	1.044
31.28	6	29.80	1.028	+1.46	+0.093	30.73	1.052
32.28	4	27.52	1.130	+0.73	-0.001	28.45	1.154
33.27	3	22.10	1.127	+3.21	+0.009	23.03	1.151
35.31	5	20.22	1.116	-0.88	+0.030	21.15	1.140
36.27	3	15.37	1.177	+1.17	-0.029	16.30	1.201

Es ergibt sich daraus für die Correction im Positionswinkel $+0.93 \pm 0.55$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 2.62 , und die analogen Grössen für die Distanz: $+0.024 \pm 0.019$; Gewichtseinheit ± 0.097 .

2. O. Struve (O. S.).

Bekanntlich sind die von O. S. a. a. O. mitgetheilten Messungen nicht mit den vom Berechner als definitiv angesehenen Formeln von den bedeutenden Einflüssen der Stellung des Sternpaares gegen den Horizont befreit. Ich habe desshalb sämtliche Beobachtungen nach den Vorschriften der Einleitung des genannten Werkes von Neuem reducirt und mich durch doppelte Rechnung von Fehlern, die bei der ziemlich complicirten Form der Correctionsformeln leicht möglich sind, zu schützen gesucht. Inzwischen ist die neue Berechnung der Struve'schen Messungen durch den Druck bekannt geworden.¹ Die dort angegebenen Resultate zeigen im Allgemeinen nur geringe Unterschiede von den meinigen. Ich habe indessen meine Reduction benutzt und führe das Resultat dieser hier an. Durch die Güte des Herrn Struve bin ich in die Lage versetzt worden, die grosse Reihe von Beobachtungen, welche in den Pulewac Beobachtungen bis zum Jahre 1874 hinaufreichen, um volle 5 Jahre weiter zu führen. Ich theile dieselben im Anhange mit, zugleich mit den berechneten Correctionen, die mir Herr Struve ebenfalls mitzutheilen so freundlich war.

	Abende	p	ρ	Correction		corr. Werthe	
				p	ρ	p	ρ
1840.30	7	6.27(-3.03)	0.817(+0.047)	+1.45	+0.276	4.73	.
42.29	4	359.18(-3.90)	1.131(+0.047)	+3.37	-0.050	356.78	.
43.30	3	354.86	1.226	+0.66	-0.105	356.36	1.255
44.28	4	351.04	1.262	+1.37	-0.091	352.54	1.232
45.31	3	348.67	1.028	+0.44	+0.072	350.17	1.058
46.29	3	345.47	1.032	+0.41	+0.055	346.97	1.062
47.33	5	342.40	1.023	-0.03	+0.050	343.90	1.053
48.30	5	338.13	0.972	+0.87	+0.087	339.63	1.002
49.32	4	336.51	0.862	-1.17	+0.182	335.11	0.892
50.29	3	333.14	1.002	-1.39	+0.025	331.74	1.032
51.28	3	327.34	1.080	+0.63	-0.070	325.94	1.110
52.32	2	322.37	0.945	+1.47	+0.043	320.97	0.975
53.30	2	320.11	0.953	-0.39	+0.014	318.71	0.923
55.31	3	315.16	0.878	-0.31	+0.043	309.76	0.848
57.27	3	298.52	0.971	+2.73	-0.097	300.02	0.941
58.28	1	295.77	0.950	+0.07	-0.102	297.27	0.920
59.30	2	286.92	0.876	+3.08	-0.055	288.42	0.846
60.27	2	281.54	0.810	+2.50	-0.017	283.04	0.780
61.27	3	275.20	0.825	+2.24	-0.062	276.70	0.795
62.31	2	266.57	0.675	+3.42	+0.057	268.07	0.645
64.30	2	251.53	0.653	+2.20	+0.016	253.03	0.623
66.27	1	235.88	0.632	-1.29	-0.025	237.38	0.602
68.28	2	212.86	0.656	-1.08	-0.097	214.36	0.626
69.32	2	196.68	0.577	+2.50	-0.035	198.18	0.547
70.28	4	184.60	0.602	+1.98	-0.067	186.10	0.572
71.31	3	168.98	0.577	+4.61	-0.040	170.48	0.547
72.31	3	160.58	0.581	+0.43	-0.021	162.08	0.551

¹ Mesures micrométriques corrigées des étoiles doubles. Pétersbourg 1879.

	Abende p		p	Correction		corr. Werthe	
				p	p	p	p
73·28	4	150·03	0·591	-0·73	-0·020	151·53	0·561
74·28	3	141·94 ¹	0·627	-4·01	-0·031	140·54	0·597
75·28	3	132·47	0·647	-4·86	-0·019	131·97	0·617
76·29	2	119·45	0·690	-1·32	-0·026	118·05	0·660
77·27	3	107·87	0·750	+1·89	-0·051	109·37	0·720
78·29	3	99·17	0·760	+2·62	-0·005	100·67	0·730
79·29	3	91·83	0·767	+2·79	+0·003	93·33	0·737

In den beiden ersten Jahresmitteln wurden bei der Bildung der Mittel auf p. 162 die angeführten Zahlen benutzt. Daneben habe ich in Klammern diejenigen Correctionen gesetzt, von welchen es O. Σ. a. a. O. zweifelhaft liess, ob dieselben mit Vortheil an seine Beobachtungen vor dem Jahre 1843 anzubringen seien. Jetzt sind dieselben, da sie in der That eine bessere Übereinstimmung zu liefern scheinen, mitgenommen worden; bestimmend war ausserdem die Thatsache, dass der Beobachter selbst diese Correctionen in den M. M. corrigées mitgenommen hat.

Die angeführten Positionswinkel zeigen eine Anomalie, die allerdings nur insoferne auffallend ist, als sie bei den andern Beobachtern, wenigstens nicht in gleichem Masse, auftritt. Es zeigt sich nämlich, dass die Positionswinkel von O. Σ. ganz ausgesprochener Massen eine positive Correction erfordern, mit Ausnahme der innerhalb der Striche stehenden Correctionen, welche mehr nach der andern Seite neigen. Wenn es nun auch leicht erklärlich ist, dass die einzelnen Beobachtungen von dem im Mittel folgenden Correctionen bedeutend abweichen, so werden doch so grosse Abweichungen eine eingehendere Überlegung herausfordern. Zuerst werden uns grössere Abweichungen gerade bei O. Σ. weniger überraschen; die sehr grossen von der Neigung des Sternpaares gegen den Horizont abhängigen Fehler bei seinen Beobachtungen sind doch nur mit Hilfe von Formeln corrigirt, die aus gewissen Mittelwerthen abgeleitet worden sind. Es dürfte desshalb nicht auffallen, wenn hier die übrig bleibenden Fehler einen gewissen Gang mit der Zeit befolgen und man wird dann nicht ohne Weiteres berechtigt sein, einen solchen wo anders zu suchen, als in der Unsicherheit der angewandten Formel. Für die erwähnte Anomalie gibt es aber, wie ich glaube, auch einen viel näher liegenden Grund. Es ist leicht zu bemerken, dass der dritte Stern *C* die Ausmessung der Stellung von *B* gegen *A* beeinflussen muss und namentlich dort, wo der Beobachter leichter secundären Einflüssen ausgesetzt ist, wie dies bei O. Σ. der Fall zu sein scheint, wird sich der genannte störende Einfluss bemerkbar machen. Sind die Beobachtungen mit einem Fadenmikrometer angestellt, so ist nicht gut anzunehmen, wie diese Störung eintreten sollte, ausgenommen in dem Falle, wo die drei Sterne näherungsweise in einer geraden Linie stehen. Dann wird aber offenbar, in der Hauptsache wenigstens, nur die Messung des Positionswinkels alterirt werden, indem die Richtung des Fadens, welche den Positionswinkel bestimmt, durch die Nähe des dritten Sternes falsch beurtheilt werden kann. Nun fallen in der That die grössten, oben erwähnten Abweichungen auf die Zeitpunkte, wo die genannte Stellung der drei Sterne stattfindet. Willkürlich bleibt allerdings noch, wie weit man die Ausweichung des Sternes *C* aus der die Sterne *A* und *B* verbindenden Geraden anzunehmen hat, um keinen Einfluss mehr bestreihen zu müssen. Ich habe, und dies scheint genügend zu sein, angenommen, dass sich die Correction, welche die Positionswinkel erfordern, ändert, wenn der Stern *C* einen um etwa 10 Grade anderen Positionswinkel zeigt als *B*. Darnach habe ich die Abtheilungen gemacht. Wer übrigens die gegebene Erklärung der jedenfalls durch die Beobachtungen angezeigten Anomalie für nicht plausibel hält, wird jedenfalls die Berechtigung zu einer Theilung der Beobachtungen in zwei Theile, von denen der eine diejenigen Messungen vereinigt, bei welchen der Stern *C* um weniger als ± 10 Grade von der die Sterne *A* und *B* verbindenden Geraden entfernt ist, der zweite Theil alle anderen Messungen enthält, gewiss nicht in Abrede stellen können. Es kommt ja nur darauf an, im Grossen und Ganzen die nöthigen constanten Correctionen abzuleiten. Wichtig ist dabei nur die Vorsicht, möglichst wenige Unterabtheilungen zu bilden, weil man sich sonst bei der Beurtheilung

¹ Diese, sowie die beiden folgenden beobachteten Positionswinkel sind mit unrichtigen Correctionen versehen in die folgenden definitiven Jahresmittel eingegangen, was übrigens für die Resultate völlig belanglos ist.

der Übereinstimmung der sohergestalt corrigirten Beobachtungen mit der Rechnung leicht in einem logischen Kreise bewegen könnte.

Ich finde nun, wenn mit I der allgemeine Fall, mit II derjenige, wo die specielle gegenseitige Lage der drei Sterne eintritt, bezeichnet wird; für den Fall:

- I. Correction $+1^{\circ}50 \pm 0.28$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 2.57
 II. " -1.40 ± 0.89 " " " " ± 4.43 .

Was die Distanzen betrifft, so schien auch hier eine Theilung des Beobachtungsmateriales in Unterabtheilungen nothwendig. Um aber keine neuen Willkürlichkeiten einzuführen, habe ich die drei Perioden angenommen, in welche O. S. aus triftigen Gründen seine Beobachtungen getheilt hat, nämlich:

- I. Periode bis 1843.0
 II. " 1843.0 bis 1853.0
 III. " von 1853.0 an.

Es ergab sich nun:

- I. Periode. Die beiden Jahresmittel sind zur Ableitung einer Correction nicht ausreichend. Ich habe diese beiden Beobachtungen uncorrigirt gelassen.
 II. Periode. Corr. $+0.030 \pm 0.029$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 0.170
 III. Periode. Corr. -0.030 ± 0.008 " " " " ± 0.062 .

Es wäre vielleicht, gerade bei O. S., vorthellhaft gewesen, die Ableitung der nöthigen Correctionen so vorzunehmen, dass nach der Grösse der beobachteten Distanz die Unterabtheilungen gemacht worden wären. Indessen schien mir dieses Verfahren gefährlich, weil es zu Täuschungen über die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung gar zu leicht Veranlassung geben kann.

3. Dawes (D.).

Nach O. S. sind bei Dawes drei Perioden zu unterscheiden. Die erste geht bis zum Jahre 1840, die zweite bis 1848, die dritte fängt bei 1848 an. Ich habe nun an die Positionswinkel

- der ersten Periode die Correction 0
 " zweiten " " " $+1.80$
 " dritten " " " 0

angebracht. Für die Distanzen habe ich für die von O. S. gegebene Formel, zum Zwecke der leichteren Interpolation, eine neue Curve gezeichnet und aus dieser die Correction entnommen:

Distanz	Periode I u. II	Periode III
1.0	-0.106	-0.041
1.1	-0.095	-0.029
1.2	-0.081	-0.016

Die auf solche Weise reducirten Messungen sind zu Grunde gelegt worden.

	Correction		corr. Werthe	
	g	p	g	p
1831.30	1	$30^{\circ}78$	$0^{\circ}999$	$+0^{\circ}32$ $+0^{\circ}122$ $30^{\circ}87$ $1^{\circ}034$
32.12	10	27.00	.	$+1.73$. 27.09 .
33.21	9, 3	26.23	1.119	-0.74 $+0.017$ 26.32 1.154
36.97	9	16.77	.	-2.28 . 16.86 .
37.23	1, 0	12.40	.	$+1.33$. 12.49 .
38.30	1	11.25	.	-0.65 . 11.34 .
40.20	8, 7	6.16	1.105	-1.13 $+0.036$ 5.62 1.140
41.16	5, 4	2.67	1.093	-0.58 $+0.043$ 2.13 1.128
42.22	6, 6	358.06	1.099	$+0.81$ $+0.030$ 357.52 1.134
43.18	8	356.85	1.027	-0.95 $+0.094$ 356.31 1.062

				Correction		corr. Werthe	
	g	p	ρ	p	ρ	p	ρ
48.13	1	338°50	1.014	+1.10	+0.048	339.10	1.049
48.24	6	338.12	1.027	+1.10	+0.033	338.27	1.062
49.24	5	334.21	1.082	+1.24	—0.038	334.86	1.117
51.25	7, 6	327.90	0.971	+0.20	+0.039	328.55	1.006
52.23	3	324.44	1.022	—0.24	—0.032	325.09	1.057
54.20	3	315.31	0.934	+0.57	+0.013	315.96	0.969

Die in vorstehender Tabelle angewandten Correctionen sind nämlich: Für den Positionswinkel:

I. Periode. Corr. $+0.09 \pm 0.67$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 4.30

II. „ „ -0.54 ± 0.44 „ „ „ „ ± 2.24

III. „ „ $+0.65 \pm 0.24$ „ „ „ „ ± 1.18 .

Für die Distanzen schien mir, schon in Rücksicht auf die Spärlichkeit des Beobachtungsmateriales in den beiden ersten Perioden, eine Aufrechterhaltung der Abtheilungen nicht geboten. Ich habe also alle Distanzen zusammengenommen und erhalten:

Corr. $+0.035 \pm 0.012$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 0.093 .

Ich bemerke übrigens, dass ich fälschlicherweise bei den Distanzen dieselben Gewichte, wie bei den Positionswinkeln genommen habe; ein Fehler, den zu corrigiren ich nicht für nöthig halte.

4. Secchi (S.).

Als provisorische Correctionen für die Messungen dieses Beobachters habe ich angenommen:

Im Positionswinkel -1.30 , in Distanz $+0.080$.

			Correction		corr. Worthe		
	g	p	p	p	p	p	
1855.19	3	311°14	1.147	+0°28	−0.223	312°07	1.093
56.25	2	305.30	0.850	+1.08	+0.050	306.23	0.796
65.23	2	244.00	0.721	+1.16	−0.083	244.93	0.667
66.29	2	233.32	0.480	+1.54	+0.126	234.25	0.426

Corr. im Positionswinkel $+0.93 \pm 0.08$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 0.84

„ in Distanz -0.054 ± 0.080 „ „ „ „ ± 0.240 .

5. Dembowski (Δ.).

Provisorische Correction im Positionswinkel:

Für die Zeit von 1852—58 $+1.20$

„ „ „ „ 1862 an $+0.74$.

und in Distanz: für $\rho = 0.76$. . . Corr. -0.102

„ „ 1.0 . . . „ -0.050 .

				Correction		corr. Werthe	
	\overbrace{g}	\overbrace{p}	\overbrace{p}	\overbrace{p}	\overbrace{p}	\overbrace{p}	\overbrace{p}
1855.10	7	310 ^o 58	.	+1 ^o 14	.	312 ^o 43	.
56.32	10	303.71	.	+2.72	.	305.56	.
58.18	7	295.07	.	+1.33	.	296.92	.
63.13	15, 3	263.85	0 ^o 635	—0.20	+0 ^o 071	263.16	0 ^o 724
64.15	10, 4	255.76	[0.5]	—0.70	+0.174	255.07	0.589
65.21	12, 5	246.50	[0.5]	—1.24	+0.139	245.81	0.589
66.19	9, 5	239.17	[0.5]	—3.73	+0.109	238.48	0.589
67.22	7	225.15	.	—0.94	.	224.46	.
68.20	7	212.23	.	+0.53	.	211.54	.
70.25	9	186.24	.	+0.92	.	185.55	.
71.19	6	176.02	.	—0.90	.	175.33	.

			ρ	Correction		corr. Werthe	
	g	p		p	ρ	p	ρ
72.23	7	163.58	.	-1.59	.	162.89	.
73.19	10	150.97	[0.5]	-0.62	+0.068	150.28	0.589
74.09	5, 2	142.33	0.638	-2.31	-0.047	141.64	0.727
75.14	8, 5	130.80	0.640	-1.81	-0.017	130.11	0.729
76.14	5, 4	120.10	0.621	-0.63	+0.037	119.41	0.710
77.17	7, 4	109.43	0.580	+1.16	+0.115	108.74	0.669
78.18	6	101.07	0.563	+1.53	+0.168	100.38	0.652

Als Correctionen ergaben sich im Positionswinkel:

Für die erste Periode $+1.85 \pm 0.52$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 2.55
 „ „ zweite „ -0.69 ± 0.34 „ „ „ „ ± 3.83
 und in Distanz: Corr. $+0.089 \pm 0.021$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 0.146 .

Die Trennung in die beiden Perioden scheint demnach vollständig gerechtfertigt. Der grössere m. F. der Gewichtseinheit im Positionswinkel für die zweite Abtheilung findet seine Erklärung darin, dass die letzteren Beobachtungen alle bei so kleinen Distanzen gemacht worden sind. Die Übereinstimmung der Distanzen konnte möglicherweise zu einer besseren gemacht werden, wenn man eine Abhängigkeit derselben von ihrer Grösse in Betracht ziehen würde, und namentlich die nur geschätzten Distanzen, welche eingeklammert sind, von den gemessenen trennen würde.

Das letzte Jahresmittel zu bilden, war mir in Folge einer gütigen brieflichen Mittheilung von Seite Dembowski's möglich. Seitdem ist dieser ausgezeichnete, um die Astronomie der Doppelsterne so hochverdiente Beobachter aus dem Leben geschieden. Die Beobachtungen, welche mir Dembowski zusandte, sind folgende:

1877.835	8 ^h 0 ^m	500	0.69	103.5
1878.140	5 55	„	0.62	101.4
.216	8 23	„	0.70	99.7
.260	7 56	„	*0.71	99.6
.298	8 47	„	*0.59	99.0
.320	9 35	„	*0.67	98.8

Die Bedeutung der einzelnen Zahlen ist aus den früheren Publicationen Dembowski's bekannt. In den folgenden Jahren konnte Dembowski in Folge persönlicher Verhältnisse keine Beobachtungen anstellen. Indessen ist ein sehr reiches Beobachtungsmaterial noch unpublicirt. Im Interesse der Wissenschaft wäre es im höchsten Grade wünschenswerth, dass dieses der Öffentlichkeit übergeben werde; in gleicher Weise wäre zu wünschen, dass eine Zusammenstellung sämtlicher Doppelsternmessungen Dembowski's von kundiger Hand veranstaltet werden möchte; die Zugänglichkeit dieser ausgezeichneten und reichhaltigen Beobachtungsreihe wäre gewiss ein bedeutend grösserer Vortheil für die Astronomie, als ihr durch sehr viele Beobachtungsreihen, auf deren Publication alljährlich viel Zeit und Geld verwendet wird, gebracht wird.

6. Dunér (Dn.).

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Positionswinkel durch Messungsfehler entstellt sind, welche von der Lage des Sternpaares gegen den Horizont abhängen. Es wird demnach durch eine constante Correction nur eine mässige Verbesserung der Positionswinkel zu erwarten sein. O. S. gibt für verschiedene Distanzen verschiedene Correctionen an, die an die Dunér'schen Positionswinkel anzubringen sind; nämlich:

Für ρ	0.76 . . .	-2.74
	1.58 . . .	-2.10
	3.16 . . .	-0.88
	6.32 . . .	-1.56.

Ich nehme einfach das Mittel aus allen diesen Zahlen: — $1^{\circ}82$ für den Werth der anzubringenden provisorischen Correction. Die Distanzen lasse ich ungedändert.

	g	p	ρ	Correction		corr. Werthe	
				p	ρ	p	ρ
1869.37	4	201.83	0.482	-3.58	+0.059	200.21	0.496
70.30	3, 4	186.45	0.427	+0.07	+0.108	184.83	0.441
71.29	3	176.38	0.553	-2.53	-0.016	174.76	0.567
72.33	2	161.48	0.690	-0.72	-0.139	159.86	0.704
74.29	2	140.98	0.615	-3.16	-0.018	139.36	0.629
75.33	5	127.64	0.588	-1.00	+0.042	126.02	0.602
76.34	1	116.18	0.82	+1.51	-0.153	114.56	0.834
78.27	1	104.68	0.70	-2.75	+0.034	103.06	0.714

Die corrigirten Werthe sind berechnet mit der Correction:

Im Positionswinkel . . . $-1^{\circ}62 \pm 0.56$, mittl. F. der Gewichtseinheit $\pm 2^{\circ}64$
 in Distanz $+0.014 \pm 0.028$, „ „ „ „ ± 0.130 .

Die beiden zuletzt mitgetheilten Beobachtungen, welche in dem bekannten Werke des Beobachters nicht mehr vorkommen, verdanke ich einer gütigen brieflichen Mittheilung dieses Herrn.

7. Mädler. (M.)

Ich habe diejenigen Beobachtungen, welche in den Dorpater Beobachtungen vorkommen, benutzt und aus ihnen Jahresmittel nach dem einzig rationellen Principe gebildet, dass jeder Abend das Gewicht 1 bekam, ganz gleichgiltig, ob derselbe aus einer mehr oder weniger grossen Anzahl von Positionen zusammengesetzt war. Dadurch sind die folgenden Zahlen um Kleinigkeiten verschieden von den von Mädler selbst angegebenen Mitteln. Eine provisorische Correction enthalten die Angaben für p und ρ nicht; es war eine solche nicht nöthig, weil ich diese Beobachtungen bei der Bildung der Jahresmittel auf p. 162 nicht mit hinzugezogen habe, und zwar aus Gründen, die ich an einem andern Orte¹ bereits auseinandergesetzt habe.

	g	p	ρ	Correction		corr. Werthe	
				p	ρ	p	ρ
1841.31	6, 4	08.99	1.050	+0.65	+0.085	359.00	1.101
42.21	6	338.65	1.070	+0.25	+0.059	356.66	1.121
43.19	4, 6	356.91	1.065	-1.04	+0.056	354.92	1.116
44.39	10	354.40	1.022	-2.32	+0.088	352.41	1.073
47.29	2	343.01	1.026	-0.50	+0.048	341.92	1.077
48.29	7, 6	340.16	1.033	-1.12	+0.027	338.17	1.084
50.72	1	330.05	1.032	+0.06	-0.012	328.06	1.083
51.22	9	329.03	1.005	-0.82	+0.006	327.04	1.056
52.25	6	325.81	1.064	-1.68	-0.074	323.82	0.919
53.26	8, 7	323.63	1.063	-3.69	-0.095	321.64	0.918
54.28	10, 9	318.67	1.077	-3.15	-0.131	316.68	0.932
55.27	4	310.64	1.060	+0.44	-0.137	308.65	0.915
56.29	2	307.50	0.998	-1.32	-0.098	305.51	0.853
57.30	3, 2	304.53	0.964	-3.44	-0.091	302.54	0.819
58.21	3	297.58	1.090	-1.35	-0.239	295.59	0.945
59.26	8	294.94	0.977	-4.70	-0.155	292.95	0.832
60.29	5, 4	285.97	1.017	-2.06	-0.225	283.98	0.872
61.25	2	282.20	0.968	-4.62	-0.205	280.21	0.823
62.31	4	274.43	0.967	-4.45	-0.235	272.44	0.822

Im Mittel ist die Correction:

in Positionswinkel $-1^{\circ}99 \pm 0.39$; m. F. der Gewichtseinheit $\pm 3^{\circ}86$.

¹ Astron. Nachrichten, Nr. 2288.

Bei der Ableitung der Correction für die Distanzen schien es nothwendig, das Beobachtungsmaterial in zwei Particen zu theilen. Nicht ganz willkürlich wenigstens ist es, wenn man die Distanzen, welche grösser als eine Bogensekunde sind, zusammenfasst und auf der andern Seite diejenigen, welche kleiner sind als die genannte Grösse. Thut man dies, so ergibt sich

Für die 1. Abtheilung (bis zum Jahre 1851) die Correction $+0.051 \pm 0.012$; mittl. F. d. Gew. ± 0.083
 „ „ 2. „ (vom Jahre 1852 an) „ „ -0.145 ± 0.017 ; „ „ „ „ ± 0.128 .

Dieses sind die sieben Beobachter, welche ein solch' zahlreiches Beobachtungsmaterial für die Bewegung von ζ Cancri geliefert haben, dass sich die erforderlichen constanten Fehler, wenigstens nicht ganz ohne jede Sicherheit, ableiten liessen. Ausser diesen Beobachtungen liegen nun noch zahlreiche vereinzelte Bestimmungen vor. Bei diesen lassen sich selbstverständlich gar keine Daten mit Sicherheit erlangen, welche eine Verbesserung der Beobachtungsergebnisse liefern können. Ich habe demgemäss bei keinem Beobachter irgend welche Correction angebracht, ausser bei:

Bessel im Positionswinkel 0° , in Distanz -0.120
 und Engelmann „ „ $-1^\circ 72'$, „ „ nach Massgabe der Werthe $\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0.6; \text{ Corr. } -0.034 \\ \rho = 0.8; \text{ „ } -0.047. \end{array} \right.$

Während die erste Correction nach O. S.'s Untersuchungen angenommen wurde, habe ich die Verbesserung für Engelmann, aus den von dem Beobachter¹ angegebenen Vergleichen mit Δ . und S. berechnet, dabei aber bei den Distanzen Δ . das doppelte Gewicht gegeben, während bei den Positionswinkeln S. ganz ausgeschlossen wurde.

Kaiser hat bekanntlich seine Doppelsterubeobachtungen sowohl mit dem Faden- als auch Doppelbildmikrometer angestellt. Ich finde nun mit Hilfe der von Engelmann a. a. O. gegebenen Vergleichen, dass man nicht nöthig hat, an die Kaiser'schen Beobachtungen eine Correction anzubringen. Ich habe weiter zu bemerken, dass ich die Distanzen von J. Herschel (h) und South gar nicht benutzt habe, ein Verfahren, das aus der bekannten Beobachtungsart beider Astronomen und das in Mens. Micr. genügend besprochen wird, sich von selbst rechtfertigt.

Ausser allen diesen Messungen, die von der Mitte der zwanziger Jahre datiren, ist noch ein einziges Abendmittel von W. Herschel, aus dem Jahre 1781, für den Positionswinkel Δ . Es ist dies zugleich der Entdeckungstag, an welchem zuerst die beiden Sterne A und B getrennt worden sind. W. Herschel hat noch einmal, nämlich im Jahre 1802 das System ζ Cancri beobachtet, aber die beiden Sterne nicht getrennt gesehen. Das wird wohl genügender Grund sein, auf die erste Herschel'sche Wahrnehmung kein weiteres Gewicht zu legen. Ich habe desshalb auch die genannte Messung, welche ergibt:

$$1781.91 \quad p = 3^\circ 47',$$

bei den vorliegenden Untersuchungen gar nicht berücksichtigt. Überhaupt halte ich es nicht für rationell, die Messungen von W. Herschel, bei diffiileren Untersuchungen anderswo, als wo es absolut nothwendig, zu benützen und auch dann noch mit grosser Vorsicht. Es ist bekannt, dass sich bei ihm sehr oft Verwechslungen in der Angabe des Quadranten, in welchem der Positionswinkel liegt, vorfinden, von den sehr grossen Beobachtungsfehlern, bei so schwierigen Objecten, wie es viele von den engen Doppelsternen sind, ganz zu geschweigen.

Die im Vorigen als Grundlage benutzten Messungen wurden alle mit Ausnahme von den Mädler'schen zu Jahresmitteln vereinigt, und so die Tabelle auf p. 162 gewonnen. Es wurden dabei die folgenden, allerdings ziemlich willkürlichen Gewichtsannahmen festgesetzt:

¹ Astron. Nachrichten, Bd. LXVIII.

Einem Abend bei W. Σ ., O. Σ ., Δ . wurde das Gewicht 5 gegeben; D., S., Bessel und Δ . in der ersten Periode (wegen geringerer optischer Hilfsmittel) erhielt das Gewicht 4; Du., Engelmann, Kaiser, Auwers 3; Winnecke 2; alle übrigen Beobachter 1.

Nachdem wir aber nun die Messungen derjenigen sieben Beobachter, welche in Folge der überwiegenden Quantität des von ihnen herrührenden Materiales so gut wie allein die Bewegung von ζ Cancri bestimmen, näher betrachtet haben, sind wir in die Lage versetzt, mit ein wenig mehr Sicherheit die relativen Gewichtszahlen zu bestimmen. Es werden diese nämlich ohne Frage dann direct proportional sein den Quadraten der berechneten mittl. Fehler der Gewichtseinheiten, wenn deren Bestimmung keinen Zweifeln unterliegen. In Wirklichkeit wird man aber gut thun, die ausgerechneten Gewichte nach andern Gesichtspunkten auszugleichen, so dass dann allerdings immer wieder eine grosse Willkür übrig bleibt, die nun aber bei dergleichen Rechnungen niemals zu vermeiden sind.

Setzt man nun das Gewicht eines Abendmittels von W. Σ . gleich 5, so ergeben die berechneten mittl. Fehler für die Positionswinkel folgende Gewichtszahlen:

W. Σ .	5	5	
O. Σ .	{ 1 . . . 5.7	5	
	{ 2 . . . 1.8	2	
	{ 1 . . . 1.9	2	
D.	{ 2 . . . 6.9	5	Bessel, Engelmann, Kaiser = 2
	{ 3 . . . 14.1	5	Alle Übrigen = 1.
Δ .	{ 1 . . . 5.3	4	
	{ 2 . . . 2.4		
S.	23.5	5	
Du.	5.0	5	
Mädler	2.3	2	

Diese Zahlen habe ich durch die daneben stehenden ersetzt, deren Berechtigung allerdings zweifelhaft ist. Doch dürfte die aus der Rechnung hervorgegangene Gewichtszahl bei Secchi kein grosses Zutrauen verdienen, wegen der geringen Anzahl (4) von Messungen, welche bei der Ableitung benutzt worden sind, und ganz dasselbe lässt sich bei Dembowski bemerken.

Was die Distanzen betrifft, so ergeben die früheren Rechnungen:

W. Σ .	5	5
O. Σ .	{ 2 . . . 1.7	2
	{ 3 . . . 12	10
D.	5.5	5
Δ .	2.2	2
Du.	2.8	3
S.	0.8	1
Mädler	{ 1 . . . 7	3
	{ 2 . . . 2.9	

Hier ist zu bemerken, dass ich Mädler's erste Periode desshalb mit kleinerem Gewichte angesetzt habe, weil schliesslich die Theilung in die beiden Perioden nicht ganz von Willkürlichkeit frei ist. O. Σ 's erste Beobachtungen erscheinen ohne Gewichtsbestimmung; ich ertheile ihnen das Gewicht 1, während alle anderen Beobachter dasselbe Gewicht, wie bei den Positionswinkeln erhalten. Eine vollständige Zusammenstellung aller Beobachtungen ist wohl kaum nöthig. Ich unterlasse sie desshalb aus Rücksicht auf Raumersparniss, begnüge mich vielmehr damit, die vereinzelter Beobachtungen, die keinem der sieben oben näher betrachteten Beobachter angehören, mitzutheilen.

Die Zusammenstellung bedarf nur der einzigen Erklärung, dass neben dem Positionswinkel und der Distanz zuerst die Anzahl der Abende, daneben sogleich die Gewichtszahl steht.

	g		beob. p	$B-R$	IV_6		g		beob.	$B-R$
1843.21	63	6	356.15	+ 0.34	+ 0.67	1846.25	7	1	1.882	-0.015
44.33	40	4	352.47	+ 0.20	+ 0.47	47.31	16	2	1.062	-0.021
45.39	17	2	350.03	+ 1.18	+ 1.38	48.26	63	6	1.058	-0.011
46.26	17	2	346.92	+ 0.94	+ 1.09	49.30	33	3	1.062	+0.009
47.30	32	3	343.36	+ 0.89	+ 0.98	50.43	9	1	1.049	+0.016
48.27	74	7	338.97	- 0.14	- 0.12	51.24	63	6	1.037	+0.018
49.30	33	3	334.93	- 0.48	- 0.52	52.25	39	4	0.981	-0.017
50.40	8	1	330.82	- 0.51	- 0.61	53.30	46	5	0.950	-0.025
51.24	62	6	328.10	- 0.04	- 0.16	54.25	43	4	0.946	-0.008
52.23	33	3	324.37	+ 0.15	- 0.02	55.29	51	5	0.900	-0.031
53.31	27	3	320.83	+ 1.16	+ 0.93	56.25	21	2	0.980	+0.071
54.25	36	4	316.48	+ 0.83	+ 0.55	57.20	37	4	0.927	+0.045
55.17	57	6	311.52	+ 0.01	- 0.27	58.25	19	2	0.932	+0.075
56.29	74	7	306.38	+ 0.20	- 0.08	59.28	44	4	0.838	+0.010
57.36	24	2	300.61	- 0.16	- 0.43	60.28	32	3	0.814	+0.016
58.20	39	4	296.76	+ 0.47	+ 0.22	61.27	36	4	0.800	+0.032
59.28	26	3	291.17	+ 1.05	+ 0.82	62.31	32	3	0.711	-0.025
60.28	27	3	283.39	- 0.59	- 0.79	63.14	11	1	0.742	+0.032
61.27	19	2	277.44	0	- 0.17	64.24	32	3	0.610	-0.065
62.31	18	2	270.01	+ 0.03	- 0.15	65.48	30	3	0.640	+0.004
63.13	62	6	263.31	- 0.34	- 0.24	66.26	33	3	0.613	0
64.18	50	5	254.66	- 0.15	- 0.42	68.28	20	2	0.626	+0.063
65.36	77	8	244.05	+ 0.30	0.17	69.34	32	3	0.528	-0.021
66.24	57	6	236.98	+ 2.08	+ 1.58	70.23	52	5	0.542	+0.001
67.22	28	3	224.46	+ 0.25	- 0.34	71.31	39	4	0.556	+0.014
68.22	38	4	212.28	- 0.24	- 0.89	72.30	40	4	0.584	+0.028
69.35	30	3	199.53	+ 1.03	+ 0.34	73.24	70	7	0.573	-0.002
70.28	73	7	185.42	- 1.36	- 1.83	74.25	43	4	0.621	+0.019
71.25	57	6	173.97	0.38	- 0.71	75.26	62	6	0.646	+0.012
72.25	60	6	162.68	+ 0.93	+ 0.74	76.24	35	4	0.692	+0.024
73.22	60	6	150.70	+ 0.70	+ 0.56	77.24	42	4	0.705	+0.001
74.17	42	4	140.33	+ 1.21	+ 1.01	78.25	58	6	0.701	-0.040
75.23	65	7	128.28	+ 0.09	0	79.29	30	3	0.737	-0.042
76.20	29	3	118.20	- 0.72	- 0.89	80.22	12	1	0.829	+0.018
77.21	43	4	108.96	- 1.30	- 1.50					
78.23	51	5	100.82	- 1.41	- 1.78					
79.29	15	2	93.33	- 1.39	- 1.88					
80.22	12	1	89.64	+ 0.88	+ 0.39					

Die Fehler in den Positionswinkeln unter der Rubrik $B-R$ sind das Resultat der Vergleichen der nach Elementen VIII berechneten Ephemeride. Die Übereinstimmung ist eine bereits ziemlich genügende. Mit Ausschluss der ersten Beobachtung ergibt die Abzählung, dass, wenn der Fehler 0 als negativ angenommen wird, die 28 positiven und 22 negativen Abweichungen so angeordnet sind, dass 20 Zeichenwechsel und 29 Zeichenfolgen entstehen. Die Abweichung von einer vollständig zufälligen Vertheilung der Vorzeichen ist demnach nur noch gering. Allerdings herrschen im Allgemeinen die positiven Fehler vor; und es wäre demnach geboten, die Ausgleichung noch einmal nach den corrigirten Jahresmitteln vorzunehmen. Die geringe erforderliche Rechnung habe ich aber nicht mehr ausgeführt. Vielmehr bleibe ich bei den gefundenen Resultaten stehen, indem diese voraussichtlich erst dann wirklich der Wahrheit gemäss modificirt oder bestätigt werden können, nachdem die nächsten Jahre die störenden Einflüsse des Sternes C auf die Bewegung von B um A mehr entwickelt haben werden.

Bildet man die Quadrate der übrig gebliebenen Fehler, so findet man den mittl. Fehler einer Beobachtung, die eben so genau ist wie das Mittel aus zwei Abenden von Struve $\pm 1^{\circ}62$, also der mittl. Fehler eines Abendes $\pm 2^{\circ}29$, ein Betrag, gegen dessen Grösse man kaum etwas einzuwenden haben dürfte.

Die Distanzen habe ich noch einmal mit Hilfe der zuletzt angenommenen Störungswerthe auf die Osculationsepoche 1836.2 reducirt und von Neuem einen Werth für a abgeleitet. Es ergab sich mit Rücksicht auf die abgerundeten Gewichtszahlen:

$$\text{oscul. } a = 0.8608$$

und mit diesem Werthe wurden nun die gemessenen Distanzen in der letzten Zusammenstellung verglichen. Das Resultat der Vergleichung steht unter der Rubrik $B-R$. Was nun die Grösse der übrig bleibenden Fehler betrifft, so ist dieselbe sehr befriedigend, ja vielleicht auffallend klein. Es ergibt sich die mittlere Abweichung für eine mit dem Mittel aus zwei Struve'schen Abenden gleich genauen Distanzmessung zu ± 0.059 , und in Ganzen sind vorhanden:

25 positive und 22 negative Fehler, wenn der Fehler 0 als positiv und
24 „ „ 23 „ „ „ „ „ 0 „ negativ betrachtet wird.

Im ersten Falle wird man 18, im zweiten Falle 20 Zeichenwechsel abzählen. Diese Vertheilungsweise gibt auch zu keinen Befürchtungen Anlass, nur dürfte vielleicht die Anhäufung der negativen Fehler in der Zeit 1840—1848 auffallen. Indessen ist zu bemerken, was selbstverständlich auch von den Positionswinkeln gilt, dass eine Abänderung der acht angenommenen Gewichtszahlen und noch mehr der in einzelnen Fällen noch ganz problematisch gebliebenen constanten Correctionen, die eben nicht ganz die persönlichen Fehler beseitigen können, die gerügten Unvollkommenheiten vollständig fortbringen können.

Obwohl nun also, wie bemerkt, gegen die hier gewonnenen Resultate, dass nämlich eine grosse Masse für den Stern C , den Beobachtungen über die Bewegung des Sternes mehr entspricht, als ein kleinerer Massenwerth, und dass ausserdem (was für die Darstellung der Beobachtungen sich nicht als unwichtig herausgestellt hat) die Beobachtung von 1826 eine grosse negative Correction fordert, gewiss nichts einzuwenden ist, habe ich doch noch eine kleine Nachtragsrechnung für die Positionswinkel vorgenommen, indem ich die Elemente IV_a , welche die Beobachtungen durch eine rein elliptische Bewegung darzustellen suchen, so verbesserte, dass das oft genannte Jahresmittel ausgeschlossen und die früheren uncorrectirten Messungsmittel der Ausgleichung zu Grunde gelegt wurden. Das Verfahren, dass nicht die neuen Jahresmittel benutzt worden sind, rechtfertigt sich dadurch, dass doch die angewandten Correctionen auf der Annahme beruhen, die Elemente $VIII$ seien eine beträchtliche Annäherung an die Wahrheit, was nicht zugegeben wird, wenn man den Versuch macht, die Beobachtungen durch eine feste Ellipse darzustellen. In seinen Folgen ist freilich diese Annahme nicht so gefährlich, wie aus leicht zu überschendenden Gründen zu schliessen ist.

Die neu anzustrebende Ausgleichung, welche sehr einfach anzuführen ist, weil bei der Bildung der Normalgleichungen die früheren in §. 2 mitgetheilten Rechnungen zum grösseren Theile benutzt werden können, gestaltet sich folgendermassen:

$$\begin{array}{rccccccc} +1.960 d\Omega & +0.344 d\lambda & +1.919 d\lambda & +0.692(10dT) & -0.535(100dn) & -2.146 d\varphi & = +16.464 \\ +0.344 & +0.060 & +0.337 & +0.122 & -0.094 & -0.377 & + 2.893 \\ +1.919 & +0.337 & +1.880 & +0.677 & -0.524 & -2.102 & +16.123 \\ +0.692 & +0.122 & +0.677 & +0.244 & -0.189 & -0.757 & + 5.809 \\ -0.535 & -0.094 & -0.524 & -0.189 & +0.146 & +0.586 & - 4.492 \\ -2.146 & -0.377 & -2.102 & -0.757 & +0.586 & +2.350 & -18.028 \end{array}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen stellt sich so:

$$\begin{array}{l} d\Omega = -20.840 \\ d\lambda = +19.395 \\ di = -4.950 \\ d\varphi = +0.434 \\ dn = -0.0301 \\ dT = +0.1307 \end{array}$$

und damit ergeben sich die neuen Elemente:

$$\left. \begin{aligned} T &= 1870.0817 \\ \lambda &= 125^{\circ}405 \\ \Omega &= 63.260 \\ \varphi &= 20.774 \\ i &= 15.643 \\ n &= -5.6939 \end{aligned} \right\} IV_b$$

Da möglicherweise auch diese Elemente bei ferneren Untersuchungen von Nutzen sein können, theile ich die aus ihnen folgenden Positionswinkel hier in Form einer Ephemeride mit. Diese gibt gleich die scheinbaren Positionswinkel, indem der Wahrheit gemäss angenommen wird, dass sich die Elemente IV_b auf das Äquinoctium von 1850.0 beziehen.

p		p		p		p	
1826.2	47°50	1845.2	349°26	1863.2	259°20	1873.2	150°37
27.2	44.05	46.2	346.03	64.2	254.91	73.7	144.57
28.2	40.71	47.2	342.72	64.7	250.44	74.2	138.99
29.2	37.46	48.2	339.32	65.2	245.78	74.7	133.66
30.2	34.20	49.2	335.81	65.7	240.91	75.2	128.57
31.2	31.18	50.2	332.18	66.2	235.82	75.7	123.71
32.2	28.13	51.2	328.42	66.7	230.53	76.2	119.09
33.2	25.12	52.2	324.51	67.2	225.03	76.7	114.70
34.2	22.15	53.2	320.42	67.7	219.32	77.2	110.54
35.2	19.21	54.2	316.15	68.2	213.41	77.7	106.58
36.2	16.28	55.2	311.66	68.7	207.33	78.2	102.81
37.2	13.36	56.2	306.91	69.2	201.10	78.7	99.22
38.2	10.43	57.2	301.88	69.7	194.74	79.2	95.80
39.2	7.50	58.2	296.54	70.2	188.29	79.7	92.53
40.2	4.55	59.2	290.84	70.7	181.80	80.2	89.41
41.2	1.57	60.2	284.71	71.2	175.32	80.7	86.42
42.2	358.56	61.2	278.11	71.7	168.90	81.2	83.56
43.2	355.51	62.2	271.01	72.2	162.56		
44.2	352.41	63.2	263.31	72.7	156.37		
45.2	349.26	63.7	259.20	73.2	150.37		

Mit Hilfe dieser Ephemeride wurden nun auch die corrigirten Positionswinkel auf p. 205 verglichen. Das Resultat der Vergleichung ist unter der Rubrik IV_b aufgeführt. Diese Fehlerreihe zeigt, wenn die Null als positiver Fehler betrachtet wird, 24 positive, 26 negative Abweichungen und 18 Zeichenwechsel. Ferner ergibt sich die mittl. Abweichung für eine Positionswinkelbestimmung, welche die Genauigkeit eines Abendmittels von Struve hat: $\pm 2^{\circ}71$; es ist also der mittl. Fehler eines Positionswinkels, gefolgert aus zwei solchen Abenden $= \pm 1.91$. Diese Zahlen sind nicht unmerklich grösser als diejenigen, welche sich unter Berücksichtigung der von C ausgehenden störenden Wirkung ergaben, während die Anzahl der Zeichenwechsel nicht so günstig ist, wie früher. Es scheint demnach ein Vortheil zu Gunsten der Nothwendigkeit, die Störungen von C in der Bewegung von B berücksichtigen zu müssen, vorhanden zu sein. Indessen können, wenn dies auch selbstverständlich nicht wahrscheinlich ist, die Verhältnisse beträchtliche Veränderungen erfahren, wenn die Ausgleichung in beiden Fällen, mit Zugrundelegung der corrigirten Positionswinkel ausgeführt und dann vielleicht noch einmal die constanten Correctionen für die einzelnen Beobachter abgeleitet werden. Ich glaube aber nicht, dass dadurch namentlich die zuletzt genannten Grössen beträchtlich von den gefundenen verschieden ausfallen werden, und zwar aus dem Grunde, weil von allem Anfange an die übrig bleibenden Fehler im Grossen und Ganzen auch nach den verschiedenen Ausgleichungen immer nach derselben Seite hin fielen, also die letzten Abweichungen in den nicht zu beseitigenden Inconsequenzen im Beobachtungsmaterial ihre Entstehung zu haben scheinen, nicht in Mängeln der Rechnung.

Was die viel besprochene Beobachtung von 1826 betrifft, so wird deren Unvereinbarkeit mit den folgenden Bestimmungen auch durch die Elemente IV_b vollständig bestätigt, und zwar scheint eine vollständige Übereinstimmung herstellbar, wenn man annimmt, dass an die Struve'sche Messung eine Correction von -10 Grad anzubringen sei. Ob ein solches Versehen, an drei Abenden begangen, möglich sei, das kann ich natürlich nicht entscheiden.

Die Untersuchung der Bewegung des Sternes B möchte ich mit einer Bemerkung schliessen, die die Absicht verfolgt, zu zeigen, dass den hier angenommenen Verhältnissen, welche sich auf den Stern C beziehen, auch von einer andern Seite her wenigstens nicht widersprochen wird.

Ich hatte angenommen, dass sich der Stern C in der Projectionsebene bewegt, und zwar in einem Kreise, dessen Mittelpunkt genau in der Mitte zwischen A und B liegt. Es ist bereits erwähnt worden, dass implicite in dieser Annahme die Voraussetzung enthalten ist, dass A und B gleiche Massen haben. Sind die Annahmen richtig, so weiss man weiter, dass sich C näherungsweise gemäss den Kepler'schen Gesetzen um den Schwerpunkt von A und B bewegen wird, wenn man sich in ihm beide Massen A und B vereinigt denkt. Bezeichnet also n und a die mittlere Bewegung und grosse Halbaxe der von B um A beschriebenen mittleren Ellipse, n' und a' dieselben Grössen für den Stern C , bei seiner Bewegung um den Schwerpunkt von A und B , so wird näherungsweise die Gleichung stattfinden

$$\frac{n'}{n} = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+m+m'}{1+m}}.$$

Die mittleren Elemente a und n sind uns aber völlig unbekannt; als rohe Näherung werden indess die von den Elementen VIII angegebenen Werthe gelten dürfen, da voraussichtlich zur Zeit der Osculationsepoche die absoluten Störungen nicht allzu gross sind. Ich setze also:

$$n = 5^{\circ}97, \quad a = 0^{\circ}86.$$

Weiter soll gesetzt werden:

$$\begin{aligned} a &= 5^{\circ}6 + x \\ \frac{m}{1+m} &= 2^{\circ}37 + y \\ n' &= 0^{\circ}52 + z, \end{aligned}$$

wo die angesetzten Zahlenwerthe die bei den Störungsrechnungen benützten sind. Vernachlässigt man weiter die zweiten Potenzen von x, y, z , so erhält man einfach durch Differentiation der obigen Kepler'schen Beziehung:

$$2^{\circ}74 x - 1^{\circ}48 y + 15^{\circ}16 z = +2^{\circ}12, \quad (1)$$

eine Gleichung, die also streng erfüllt werden muss, wenn alle die gemachten Voraussetzungen insoweit richtig sind, dass die Geltung der Kepler'schen Gesetze im obigen Sinne bestehen bleibt. Es fragt sich nun, durch welche Abänderungen x, y, z der drei in Frage kommenden Grössen man diese Übereinstimmung erlangen kann. Offenbar kann (1) auf unendlich viele Arten befriedigt werden. Da aber ein möglichst guter Anschluss an die benützten Zahlenwerthe erfolgen soll, so verfolge ich die Annahme, dass x, y, z so bestimmt werden soll, dass $x^2 + y^2 + z^2$ ein Minimum werde.

Hat man aber eine Gleichung von der Form:

$$ax + by + cz = d$$

strenge zu erfüllen, und ausserdem $x^2 + y^2 + z^2$ zu einem Minimum zu machen, so treten zu der Bedingungs-
gleichung noch die beiden anderen:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)y + bcz &= bd \\ bcy + (a^2 + c^2)z &= cd. \end{aligned}$$

Werden diese Vorschriften auf den vorliegenden Fall angewendet, so findet man:

$$\begin{aligned} a' &= 5.63 \\ \frac{m'}{1+m} &= 2.36 \\ n' &= 0.654. \end{aligned}$$

also Werthe, die mit Ausnahme von n' , fast gar nicht von den angenommenen abweichen. Wir können daraus jedenfalls den Schluss ziehen, dass die soeben angestellte Überlegung weder gegen die angenommenen Massenwerthe, noch gegen die Voraussetzung spricht, dass sich C in einer Bahn bewegt, die zum Mindesten nicht stark gegen die Projectionsebene geneigt ist.

§. 10.

Ich will nun zur Untersuchung der Bewegung des entfernteren Sternes C übergehen.

Während bei der Betrachtung der Bewegung von B , die Frage nach der von C ausgeübten störenden Wirkung mehr in den Vordergrund trat, sind es Anomalien anderer Art, welche mich, abgesehen von dem Verlangen das System ζ Cancri auch in diesem Theile zu verfolgen, zu einer etwas eingehenderen Beschäftigung mit dem Sterne C veranlassten. Wir wissen, dass die störenden Einflüsse, die dadurch entstehen, dass die Bewegung nicht um einen einzigen Centalkörper erfolgt, nur unbedeutend sein können, indem die gegenseitige Entfernung der Sterne A und B , vergleichsweise zu der Entfernung von C , sehr klein ist. Ferner ist bekannt, dass sich C um einen Punkt, der die Entfernung AB in einem constanten Verhältnisse theilt, nahezu in einem Kegelschnitte bewegen muss. Diese Bewegung wird nun in den Messungsergebnissen in Folge verschiedener Umstände entstellt erscheinen.

Abgesehen von später näher zu erörternden Verhältnissen, ist a priori einzusehen, dass die Beobachtungsfehler selbst, weil von der Stellung von B gegen A abhängig, eine Complication enthalten werden, die vorderhand nicht vollständig beseitigt werden kann. Während nicht recht abzusehen ist, wie die Beobachtung der Lage des Sternes B gegen A , ausser in Ausnahmefällen, durch den dritten Stern beeinflusst werden soll, werden wir im Gegentheile bei C anzunehmen haben, dass seine Beobachtung dadurch von Fehlern, die sich nicht gehörig übersehen lassen, entstellt werden muss, dass man seine Lage entweder nicht auf einen festen Punkt bezieht, oder auf einen Stern, in dessen unmittelbarer Nähe ein anderer Stern von fast gleicher Helligkeit und obendrein in einer mit der Zeit wechselnden Richtung sich vorfindet. Man wird sich desshalb begnügen müssen, die für die Bewegung von C aufzustellenden Formeln nur mit Wahrscheinlichkeit im Sinne einer mechanischen Auffassung zu interpretiren. Ferner wissen wir, dass die vorliegenden Beobachtungen nur einen kleinen Bogen umfassen. Ein Versuch aus diesem Bogen auf die wahre Bewegung im Raume zu schliessen, wurde desshalb bereits bei früherer Gelegenheit als aussichtslos bezeichnet. Wir werden demgemäss über diesen Punkt nicht ins Klare kommen können und an der übrigens für das Folgende unwesentlichen Voraussetzung festzuhalten haben, dass die Bewegung von C in der Projectionsebene vor sich geht. Die Methoden, welche im Folgenden zu befolgen sind, sind durch die geschilderte Sachlage unzweideutig vorgeschrieben. Man hat zunächst die Bewegung von C , so gut dies geht, durch eine Interpolationsformel darzustellen und daran den Versuch zu knüpfen, die einzelnen Glieder der gefundenen Formel einer sachgemässen Interpretation zu unterwerfen.

Der Stern C ist von den verschiedenen Beobachtern, theils mit einem der beiden Sterne A und B , theils mit dem in der Mitte von A und B liegenden Punkte $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ verglichen worden. Es ist desshalb zuerst nothwendig zuverlässige Grundlagen zur Reduction der Beobachtungen von AC , BC und $\frac{A+B}{2}$, C auf einander zu gewinnen. Ich habe zu diesem Zwecke die weiter unten angeführten Beobachtungen, jedoch mit Ausnahme der den letzten Jahren angehörigen und den Mädler'schen, mit provisorischen Reductionselementen auf AC reducirt und in die folgenden Jahresmittel vereinigt. Hierauf wurden die Elemente II zur Berechnung der Positionen von B gegen A benützt und mit ihnen aus den erwähnten Jahresmitteln die Correctionen berechnet,

welche an AC angebracht werden müssen, um auf die Mitte von $\frac{A+B}{2}$ zu beziehen, d. h. um $\frac{A+B}{2}, C$ zu erhalten. In der folgenden Zusammenstellung sind die genannten Zahlen enthalten.

	AC	Red. auf $\frac{A+B}{2}, C$	$\frac{A+B}{2}, C$	Rech. $B-H$				
	\underbrace{p}	\underbrace{p}	\underbrace{p}	\underbrace{p}				
1826.22	154.7	5.54	+4.9	+0.11	159.6	5.65	159.6	+0.0
28.99	151.4	5.54	+4.9	+0.19	156.3	5.73	158.1	-1.8
31.27	149.1	5.62	+4.7	+0.24	153.8	5.86	155.6	-1.8
32.21	148.7	5.62	+4.6	+0.27	153.3	5.89	154.5	-1.2
33.24	148.5	5.69	+4.5	+0.30	153.0	5.99	153.5	-0.5
35.31	145.4	5.51	+4.4	+0.33	149.8	5.84	151.1	-1.3
36.27	144.1	5.43	+4.4	+0.35	148.5	5.78	150.5	-2.0
40.24	143.8	5.02	+3.6	+0.45	149.4	5.47	149.8	-0.4
41.07	145.6	4.98	+3.5	+0.46	149.1	5.44	150.0	-0.9
42.32	145.3	5.01	+3.0	+0.48	148.3	5.49	150.2	-1.9
43.90	147.0	5.04	+2.6	+0.49	149.6	5.53	150.2	-0.6
44.28	148.9	4.99	+2.2	+0.51	151.1	5.50	150.1	+1.0
45.37	149.8	4.93	+1.7	+0.52	151.5	5.45	149.7	+1.8
46.26	148.7	5.03	+1.5	+0.52	150.2	5.55	149.1	+1.1
47.33	148.3	5.08	+1.2	+0.52	149.5	5.61	148.2	+1.3
48.25	146.7	5.03	+0.5	+0.52	147.7	5.55	147.4	+0.3
49.32	146.0	5.08	+0.5	+0.52	146.7	5.60	146.0	+0.7
50.29	146.1	5.03	+0.3	+0.51	146.4	5.54	144.9	+1.5
51.28	143.3	5.21	+0.2	+0.51	143.5	5.72	143.7	-0.2
52.32	142.8	5.05	-0.1	+0.50	142.7	5.55	142.5	+0.2
53.29	140.6	4.98	-0.3	+0.49	140.3	5.47	141.5	-1.2
54.07	140.5	5.13	-0.5	+0.48	140.0	5.61	141.0	-1.0
55.25	141.1	5.04	-1.0	+0.46	140.1	5.60	140.5	-0.4
56.30	142.0	5.01	-1.5	+0.44	140.5	5.45	140.2	+0.3
57.31	141.5	5.03	-1.8	+0.41	139.7	5.44	140.2	-0.5
58.19	141.9	4.95	-2.2	+0.39	139.7	5.34	140.3	-0.6
59.30	144.4	5.06	-2.6	+0.34	141.8	5.40	140.5	+0.3
60.27	144.2	5.11	-2.9	+0.31	141.3	5.42	140.6	+0.7
61.27	144.0	5.25	-3.0	+0.27	141.0	5.52	140.7	+0.3
62.33	143.5	5.12	-3.3	+0.23	140.2	5.35	140.5	-0.3
63.06	142.5	5.50	-3.4	+0.19	139.1	5.69	140.3	-1.2
64.30	143.6	5.19	-3.5	+0.13	140.1	5.32	139.6	+0.5
65.35	141.6	5.66	-3.2	+0.08	138.4	5.74	138.7	-0.3
66.52	140.4	5.77	-3.1	+0.02	137.3	5.79	137.5	-0.2
68.25	138.7	5.82	-2.8	-0.07	135.9	5.75	135.4	+0.5
69.34	136.9	5.75	-2.5	-0.12	134.4	5.63	134.0	+0.4
70.45	135.6	5.95	-2.1	-0.18	133.5	5.77	132.8	+0.7
71.31	135.4	5.87	-1.7	-0.22	133.7	5.65	132.1	+1.6
72.56	133.6	5.92	-1.2	-0.26	132.4	5.66	131.2	+1.2
73.27	134.5	5.67	-0.8	-0.28	133.7	5.39	130.9	+2.8
74.52	131.9	5.92	-0.1	-0.30	131.8	5.62	130.7	+1.1
75.31	131.1	5.96	+0.3	-0.31	131.4	5.65	130.7	+0.7
76.73	129.6	5.84	+1.0	-0.32	130.6	5.52	130.8	-0.2
78.29	128.7	5.82	+1.8	-0.32	130.5	5.50	131.1	-0.6

Die in der sechsten Spalte stehenden auf $\frac{A+B}{2}$ bezogenen Positionswinkel habe ich zuerst graphisch aufgetragen, um vielleicht dadurch gleich am Anfange die Form zu erkennen, welcher der aufzunehmenden Interpolationsformel für die Positionswinkel zu geben ist. Es hat sich dabei auf den ersten Blick gezeigt, dass die Vermuthung, welche Otto Struve¹ aus seinen eigenen Messungen gefolgert hat, auch durch die hier

¹ Mesures micrométriques de l'étoile triple de ζ Cancri. Comptes rendus, Bd. LXXIX, p. 1463—1471.

angeführten Mittel bestätigt wird. Aus der genannten graphischen Darstellung habe ich zunächst die Formel gewonnen:

$$p = 145^{\circ}20' - 0^{\circ}53't - 2^{\circ}04' \sin(20^{\circ}t), \quad (\text{I})$$

wobei t in Jahren von 1850.0 an gezählt, angegeben werden muss. Die Vergleichung mit dieser Formel ist in der obigen Zusammenstellung unter der Überschrift $B-R$ enthalten und zeigt, dass diese wenigstens ungefähr die Beobachtungen darstellt, was vorderhand vollständig ausreichend ist. Übrigens ist die Vergleichung nur beiläufig gemacht.

In gleicher Weise habe ich die Distanzen graphisch aufgetragen. Die betreffende Curve bleibt zwar in einzelnen Theilen ziemlich willkürlich, jedoch zeigt auch sie eine der bei den Positionswinkeln auftretenden ähnliche Periodicität mit unverkennbarer Deutlichkeit. Da jedoch die aus der Curvenzeichnung hervorgehenden Werthe der Distanzen nur zu Reductionsrechnungen benützt werden sollen, so wird die von ihr dargebotene Genauigkeit voraussichtlich eine genügende sein, und dieses um so mehr, da es ja nur darauf ankommen kann, ein einheitliches Zahlensystem als Grundlage zu gewinnen, das sich nicht allzu sehr von der Wahrheit entfernt. Die aus der Curve sich ergebenden Distanzen waren:

1826.0	5.60	1837.0	5.76	1848.0	5.61	1859.0	5.35	1870.0	5.70
27.0	5.63	38.0	5.67	49.0	5.64	60.0	5.36	71.0	5.69
28.0	5.75	39.0	5.59	50.0	5.65	61.0	5.40	72.0	5.66
29.0	5.79	40.0	5.51	51.0	5.65	62.0	5.46	73.0	5.62
30.0	5.83	41.0	5.47	52.0	5.64	63.0	5.51	74.0	5.56
31.0	5.86	42.0	5.44	53.0	5.61	64.0	5.58	75.0	5.51
32.0	5.87	43.0	5.43	54.0	5.57	65.0	5.63	76.0	5.47
33.0	5.88	44.0	5.45	55.0	5.50	66.0	5.66	77.0	5.44
34.0	5.88	45.0	5.46	56.0	5.41	67.0	5.69	78.0	5.42
35.0	5.86	46.0	5.51	57.0	5.37	68.0	5.70	79.0	5.41
36.0	5.82	47.0	5.56	58.0	5.35	69.0	5.71	80.0	5.41

Mit Hilfe der in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen und der aus der Formel (I) folgenden Positionswinkel habe ich nun mit Hinzuziehung der aus den Elementen IV_a folgenden Coordinaten des Sternes B , die Reductionen berechnet, welche auf A bezogene Positionswinkel und Distanzen des Sternes C auf $\frac{A+B}{2}$, und solche die von $\frac{A+B}{2}$ aus gemessen sind, auf den Stern B zu reduciren ermöglichen.

Ich habe nur zu bemerken, dass diese Correctionen ganz nach den strengen Formeln direct berechnet worden sind.

	von A auf $\frac{A+B}{2}$		von $\frac{A+B}{2}$ auf B			von A auf $\frac{A+B}{2}$		von $\frac{A+B}{2}$ auf B	
1826.2	+4.92	+0.130	+4.66	+0.169	1845.2	+2.07	+0.517	+1.71	+0.523
27.2	+4.87	+0.165	+4.57	+0.202	46.2	+1.75	+0.521	+1.45	+0.525
28.2	+4.82	+0.196	+4.40	+0.232	47.2	+1.46	+0.523	+1.20	+0.525
29.2	+4.76	+0.223	+4.38	+0.259	48.2	+1.17	+0.522	+0.97	+0.524
30.2	+4.70	+0.247	+4.29	+0.283	49.2	+0.91	+0.519	+0.76	+0.520
31.2	+4.64	+0.268	+4.21	+0.304	50.2	+0.67	+0.513	+0.56	+0.514
32.2	+4.58	+0.288	+4.12	+0.322	51.2	+0.41	+0.506	+0.34	+0.507
33.2	+4.52	+0.308	+4.04	+0.342	52.2	+0.13	+0.498	+0.10	+0.499
34.2	+4.45	+0.329	+3.96	+0.362	53.2	-0.18	+0.488	-0.16	+0.488
35.2	+4.37	+0.350	+3.86	+0.381	54.2	-0.51	+0.475	-0.43	+0.475
36.2	+4.28	+0.370	+3.75	+0.399	55.2	-0.87	+0.459	-0.73	+0.460
37.2	+4.18	+0.391	+3.63	+0.418	56.2	-1.24	+0.439	-1.05	+0.441
38.2	+4.06	+0.412	+3.49	+0.436	57.2	-1.62	+0.415	-1.38	+0.418
39.2	+3.89	+0.433	+3.31	+0.454	58.2	-2.00	+0.386	-1.73	+0.392
40.2	+3.66	+0.453	+3.09	+0.472	59.2	-2.34	+0.355	-2.05	+0.361
41.2	+3.38	+0.471	+2.84	+0.487	60.2	-2.65	+0.316	-2.35	+0.326
42.2	+3.07	+0.487	+2.56	+0.500	61.2	-2.88	+0.275	-2.59	+0.288
43.2	+2.74	+0.500	+2.27	+0.510	62.2	-3.05	+0.231	-2.79	+0.246
44.2	+2.40	+0.510	+1.98	+0.518	63.2	-3.15	+0.184	-2.94	+0.201

Überblickt man die durch die angeführten Beobachtungen angezeigten Veränderungen des Positionswinkels p , so sieht man, dass im Allgemeinen p mit wachsender Zeit abnimmt, dass diese Abnahme aber keineswegs gleichförmig vor sich geht, sondern, und dies ist ein für das Folgende wichtiger Umstand, sich sogar zu einigen Zeiten in eine Zunahme umkehrt. Die Curve also, welche den Positionswinkel als Function der Zeit darstellt, wird eine Linie sein, die wir mit Recht als eine Schlangenlinie bezeichnen dürfen. Fragen wir nun aber, ob diese letztere Eigenschaft wirklich verbürgt ist, so glaube ich, dass in der That darüber kein Zweifel bestehen kann. Die Umkehrung der Abnahme in eine Zunahme wird nämlich nicht durch ein, sondern stets durch mehrere auf einander folgende Jahresmittel in der unzweideutigsten Weise angezeigt. Wir haben nun zunächst zuzusehen, ob Anomalien der genannten Art eine physische Erklärung zulassen, oder ob sie sich vielleicht ungezwungener, als blosser Ausfluss einer eigenthümlichen Accumulation von Messungsfehlern auffassen lassen.

Am nächsten liegt der Gedanke, dass die genannte Schlangenlinie als eine Bewegungsform in dem hier thatsächlich vorhandenen Probleme der drei Körper anzusehen ist. Obwohl wir bereits überlegt haben, dass die Abweichung von der Bewegung nach den Kepler'schen Gesetzen nur gering sein kann, so ist doch die Möglichkeit, eine Erklärung der bemerkten Bewegungcurve in der angedeuteten Richtung zu finden, zuzugestehen; jedenfalls bedarf der Gegenstand einer näheren Betrachtung. Lassen wir aber die charakteristische Eigenschaft der in dem vorliegenden Falle auftretenden Schlangencurve in den Vordergrund treten, so wird es uns gelingen, nachzuweisen, dass solche Linien niemals die Bewegung in einem dreifachen Sternsysteme darstellen können. Dass sich im Allgemeinen ein Punkt, der von zwei anderen angezogen wird, in gewissen Schlangenlinien bewegen kann, das ist selbstverständlich und bedarf keines Nachweises. — Die erwähnte charakteristische Eigenschaft besteht nun darin, dass die Umkehrung einer Abnahme des Positionswinkels in eine Zunahme zu gleicher Zeit stattfindet, sowohl in dem auf A , als auch in dem auf B bezogenen Positionswinkel des Sternes C . Diese Erscheinung tritt an den beiden ersten der in der obigen Tabelle durch verticale Striche kenntlich gemachten Stellen, in unzweifelhafter Gestalt hervor, während die dritte Zunahme sich erst in dem Beginne ihrer Entwicklung zu befinden scheint. Dass die drei erwähnten Stellen durch nahe gleiche Zeiträume getrennt sind, ist eine Bemerkung, die uns, nach dem in §. 10 bereits Erwähnten, nicht mehr überraschen kann und die durch das Folgende genügende Erklärung finden wird.

Ich behaupte nun also, dass solche Verhältnisse, wie sie hier auftreten, nicht allein aus dynamischen Beziehungen entstehen können.

Zu diesem Zwecke bezeichne ich mit 1 , m und m' die respectiven Massen der drei Sterne A , C und B . Ich lege ferner in den Stern A als Mittelpunkt ein sonst beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem der xyz , bezeichne mit xyz die Coordinaten von C , und $x'y'z'$ diejenigen von B , mit r und r' die Entfernungen AC und AB und schliesslich mit ρ die Entfernung BC . Dann wird die Bewegung von C durch die Differentialgleichungen defnirt.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{x}{r^3} = k^2m' \left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{y}{r^3} = k^2m' \left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right),$$

indem ich die z -Coordinate unberücksichtigt lasse. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = k^2m' (x'y - y'x) \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3} \right). \quad (1)$$

In analoger Weise betrachte ich die relative Bewegung von C um B . Ich lege also nach B den Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystemes, bezeichne mit $x''y''z''$ und $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten von C und von A .

Werden dann die früheren Bezeichnungen für die vorkommenden Entfernungen beibehalten, so ergeben sich die neuen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x''}{dt^2} + k^2(m+m') \frac{x''}{\rho^3} = k^2 \left(\frac{\xi - x''}{r^3} - \frac{\xi}{r'^3} \right)$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} + k^2(m+m') \frac{y''}{\rho^3} = k^2 \left(\frac{\eta - y''}{r^3} - \frac{\eta}{r'^3} \right)$$

und demnach:

$$\frac{d}{dt} \left\{ y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right\} = k^2 (\xi y'' - \eta x'') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \quad (2)$$

Nun ist aber:

$$\begin{array}{l|l|l} x = x' + x'' & x'' = x + \xi & x' = -\xi \\ y = y' + y'' & y'' = y + \eta & y' = -\eta \end{array}$$

also:

$$\xi y'' - \eta x'' = -x'(y - y') + y'(x - x') = (x' y - y' x). \quad (3)$$

Die gegenseitigen Entfernungen der drei Sterne sind aber bei ζ Cancri so beschaffen, dass für alle Zeiten, über welche sich die Beobachtungen erstrecken:

$$\rho > r' \quad \text{und} \quad r > r'.$$

Es ist also auch stets:

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{r'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} < \frac{1}{r'}.$$

Die in (1) und (2) vorherrschenden Differenzen

$$\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}$$

sind in Folge dessen stets negativ.

Da sich nun weiter in Folge von (3) die Gleichung (2) schreiben lässt:

$$\frac{d}{dt} \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = -k^2 (x' y - y' x) \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

so können wir sagen, es muss immer sein:

$$\frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = +T$$

$$\frac{d}{dt} \left(y'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dy''}{dt} \right) = -T_1,$$

wobei T und T_1 zwei Functionen der Zeit bedeuten, die beide zu gleicher Zeit entweder positiv, oder zu gleicher Zeit negativ sind.

Bezeichnet man nun mit p und ρ Positionswinkel und Distanz des Sternes C von A aus gemessen, p'' und ρ'' dieselben Grössen von B aus, so hat man also:

$$\rho^2 \frac{dp}{dt} = C + \int T dt$$

$$\rho''^2 \frac{dp''}{dt} = C_1 - \int T_1 dt,$$

oder wenn man die Werthe von ρ , p , ρ'' und p'' für die Zeit $t = t_0$ durch dieselben Buchstaben, mit dem Index Null versehen, bezeichnet und ausserdem setzt:

$$\delta \left(\rho^2 \frac{dp}{dt} \right) = \rho^2 \frac{dp}{dt} - \rho_0^2 \frac{dp_0}{dt}$$

$$\delta \left(\rho''^2 \frac{dp''}{dt} \right) = \rho''^2 \frac{dp''}{dt} - \rho_0''^2 \frac{dp_0''}{dt},$$

so kann man die letzten Relationen auch schreiben:

$$\delta \left(\rho^2 \frac{dp}{dt} \right) = + \int_{t_0}^t T' dt$$

$$\delta \left(\rho''^2 \frac{dp''}{dt} \right) = - \int_{t_0}^t T_1 dt.$$

So lange sich die beiden bestimmten Integrale aus lauter Grössen mit demselben Vorzeichen zusammensetzen, müssen also

$$\delta \left(\rho^2 \frac{dp}{dt} \right) \quad \text{und} \quad \delta \left(\rho''^2 \frac{dp''}{dt} \right)$$

stets verschiedene Zeichen haben.

Dass diese Bedingung, welche vom Problem der drei Körper gefordert wird, bei ζ Cancri gerade in den hervorgehobenen kritischen Punkten nicht erfüllt wird, ist leicht einzusehen. Für gewöhnlich ist sowohl $\frac{dp}{dt}$, ebenso wie auch $\frac{dp''}{dt}$ negativ. Nimmt man nun für t_0 einen solchen Zeitpunkt, so wird also für alle Zeiten t , für welche $\frac{dp}{dt}$, also auch $\rho^2 \frac{dp}{dt}$ positiv ist, $\rho''^2 \frac{dp''}{dt}$ in keinem Falle positiv sein dürfen. Und gerade dieses war jene charakteristische Eigenschaft, welche an die Spitze gestellt worden ist.

Die bemerkte eigenthümliche Abhängigkeit der Positionswinkel von der Zeit kann man demnach durchaus nicht aus dem Probleme der drei Körper ableiten, vielmehr deutet sie mit Bestimmtheit auf eine andere Ursache hin.

In welcher Richtung man diese zuerst zu suchen geneigt sein dürfte, habe ich schon erwähnt. Es wird indessen das Bemühen, den systematischen Beobachtungsfehlern einen so überwiegenden Einfluss auf die Messungsergebnisse einzuräumen, auf grosse Schwierigkeiten stossen, welche diesen Erklärungsgrund als sehr unwahrscheinlich hinstellen dürften. Es ist nämlich zu beachten, dass die meisten der angeführten Jahresmittel auf Messungen mehrerer Beobachter beruhen. In solchen Mittelwerthen werden aber in jedem Falle die systematischen Fehler nur in sehr verkleinertem Massstabe zu Tage treten können, und es ist wohl nicht sehr wahrscheinlich, dass dieses in ausgebildeter Regelmässigkeit geschehen wird, wenn sich, wie dies bei ζ Cancri thatsächlich der Fall ist, die Beobachtungen über einen Zeitraum von beinahe 60 Jahren erstrecken, und in dieser langen Zeit, wie zu erwarten, sehr verschiedene Beobachter in den früheren oder späteren Zeitabschnitten zu einem Mittel mitgewirkt haben. Wenn demnach trotzdem eine gewisse Regelmässigkeit übrigbleibt, so wird die Grösse des Betrages, innerhalb dessen sich Schwankungen nach beiden Seiten hin bewegen, nur klein sein dürfen, und die Periodicität selbst wird sich nicht mit Sicherheit bestimmen lassen. Weit wichtiger aber ist der Umstand, dass voraussichtlich die Dauer der Periode der regelmässigen Schwankungen zusammenhängen muss, mit der Periode, von welcher der wechselnde Einfluss auf die systematischen Fehler abhängt. Es ist bereits erwähnt worden, dass ein solcher in der gegenseitigen Stellung der beiden Sterne A und B liegt, und dass dieses der einzige ist, der sich in den Mittelwerthen aussprechen kann, ist leicht zu übersehen. Besteht also eine regelmässige Periodicität in den Schwankungen der Positionswinkel des Sternes C , so wird diese in einfacher Weise mit einem Viertel derjenigen Zeit zusammenhängen, innerhalb welcher sich die beiden Sterne A und B um einander drehen. Nun beträgt die genannte Umlaufszeit nahe 60 Jahre, es muss also der Zeitraum

von 15 Jahren entweder ein Multiplum der betreffenden Periode sein oder umgekehrt. Wir werden sehen, dass sich diese mit ziemlicher Sicherheit auf 18 Jahre stellt, sie ist desshalb nicht wohl als Ausfluss eines merkwürdigen Zusammenwirkens von systematischen Messungsfehlern zu betrachten und dies wird mit um so kleinerer Wahrscheinlichkeit der Fall sein, je grösser die Sicherheit ist, mit der dieselbe sich bestimmen lässt und je grösser der Betrag ist, um welchen sich der Positionswinkel nach beiden Seiten hin ändert.

Ich komme endlich zu einer dritten Erklärungsweise, gegen welche, wie ich gleich jetzt mittheilen will, sich kein gewichtiges Bedenken zu erheben scheint, und die ich für sehr wahrscheinlich halte. Es hat nämlich bereits O. Struve a. a. O. die Vermuthung ausgesprochen, dass sich der Stern U um einen dunkeln, ihm nahe stehenden Stern bewegt, so dass der Schwerpunkt beider nur wenige Zehntel einer Bogensecunde von C entfernt liegt. Ich will diese Hypothese hier weiter verfolgen und zeigen, dass dieselbe die genannten Unregelmässigkeiten so vollständig erklärt, als man nur wünschen kann.

Bei so kleinen Veränderungen, wie die hier auftretenden, wird es sich sachgemäss nur darum handeln können, die einfachsten Annahmen, die über eine solche Revolutionsbewegung gemacht werden können, aufzustellen, da kleine Abweichungen von diesen aus solch' diffieilen Beobachtungen, wie die Messungen von ζ Cancri sind, herauszurechnen, diesen Zwang anthun hiesse. Ich will demgemäss annehmen, dass C sich in einem Kreise mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den unbekannten Punkt bewegt.

Bezeichnet p und ρ Positionswinkel und Distanz von C , gemessen von dem betreffenden, die Entfernung AB in einem constanten Verhältnisse theilenden Punkte, p_0 , ρ_0 , α Positionswinkel, Distanz und Radius des Kreises, α den Winkel, welchen a zur Zeit t mit der Richtung ρ_0 bildet, so ist:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + a^2 + 2a\rho_0 \cos \alpha;$$

$\frac{a}{\rho_0}$ ist sehr klein, und zwar immer kleiner als $\frac{1}{25}$. Man wird desshalb vorthailhaft nach Potenzen dieser kleinen Grösse entwickeln. Auf diese Weise ergibt sich:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{a}{\rho_0} \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\rho_0^2} \dots \right)$$

oder:

$$\rho = \rho_0 + a \cos \alpha + \frac{a}{\rho_0} \frac{a}{2} \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

Ferner ist

$$\rho \sin (p - p_0) = a \sin \alpha,$$

und wenn bei den Gliedern 2. Ordnung stehen geblieben wird:

$$p - p_0 = \frac{a}{\rho} \sin \alpha = \frac{a}{\rho_0} \sin \alpha \left(1 - \frac{a}{\rho_0} \cos \alpha \right). \quad (5)$$

Da es werthlos wäre, die Glieder 2. Ordnung mitzunehmen, so kann man also setzen:

$$b \begin{cases} \rho = \rho_0 + a \cos \alpha \\ p = p_0 + \frac{a}{\rho} \sin \alpha. \end{cases} \quad (6)$$

Ist die betrachtete Kreisbewegung gleichförmig, so ist α eine lineare Function der Zeit t , also:

$$\alpha = b(t - t_0),$$

und es müssen sich dann p und ρ in die allgemeine Form bringen lassen:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + A \sin bt + B \cos bt \\ \rho &= \rho_0 \pm (A \rho_0 \cos bt - B \rho_0 \sin bt). \end{aligned}$$

Nun werden p_0 und ρ_0 auch Functionen der Zeit sein. Nehmen wir an, dass sich diese Grössen als nach t fortschreitende Potenzreihen darstellen lassen, so werden strenge genommen unter dem Sinus- und Cosinuszeichen auch die höheren Potenzen von t vorkommen, wenn anders die Revolutionsbewegung als gleichförmig gelten gelassen wird. Indessen wird bei ζ Cancri schon das quadratische Glied so klein, dass wir von seiner Berücksichtigung unter dem Sinus- und Cosinuszeichen absehen können.

Was die Elemente der Kreisbewegung betrifft, so werden diese durch A , B und b bestimmt; diese drei Coefficienten können sowohl aus den Positionswinkeln als auch aus den Distanzen abgeleitet werden. Ich werde sie, aus bereits angeführten Gründen, vorläufig aus den ersteren allein berechnen. Die Übereinstimmung der mit diesen Werthen berechneten und den beobachteten Distanzen wird dann eine sehr wichtige Controle abgeben für die Beurtheilung der Sicherheit der Hypothese.

§. 12.

Es handelt sich demnach darum, die Coefficienten der Formel (I), p. 210 zu verbessern, und diese selbst durch ein Cosinusglied zu completiren. Ich habe nun zunächst die aus (I) folgenden Positionswinkel mit den auf p. 211 angeführten Positionswinkeln verglichen. Die Differenzen wurden nach Massgabe der abtheilenden Striche in Normalörter vereinigt, jedoch ohne Rücksicht auf die Gewichte und ohne die Beobachtungen vor dem Jahre 1823 zu benutzen. Aus diesen Normalörtern werden nun die Coefficienten bestimmt, und zwar in der angestrebten Form für p :

$$p = p_0 + \gamma t + f x + A \sin bt + B \cos bt.$$

Als Näherungswerthe gibt die Formel (I):

$$p_0 = 145^\circ 20'$$

$$\gamma = -0^\circ 53'$$

$$A = -2.04; \quad b = 20^\circ; \quad B = 0$$

und durch Differentiation der Gleichung (7) ergibt sich eine lineare Relation für die an die fünf Unbekannten p_0 , γ , A , B und b anzubringenden Correctionen. Ich habe ausser diesen fünf noch eine sechste Unbekannte eingeführt. Die Bewegung des Mittelpunktes der von C beschriebenen Kreisbahn wird sich um einen die Strecke AB in einem constanten Verhältnisse theilenden Punkte näherungsweise nach den Kepler'schen Gesetzen bewegen. Es wurde bis jetzt dieser Schwerpunkt der beiden Massen A und B mit der Mitte $\frac{A+B}{2}$ identifiziert. Liegt der Schwerpunkt ausserhalb dieses Punktes, so muss sich in dem Positionswinkel p auch eine Abhängigkeit von der gegenseitigen Stellung der beiden Sterne A und B zeigen. Ich bezeichne nun mit x das Verhältniss der Entfernung des Schwerpunktes von der Mitte $\frac{A+B}{2}$ zu der halben Strecke AB . Der Factor f lässt sich dann aus den bereits angeführten Zahlen leicht finden. Ist x klein, was voraussichtlich der Fall ist, so wird man für f das Mittel der für die betreffenden Zeiten berechneten Reduction von $\frac{A+B}{2}$ auf A und von $\frac{A+B}{2}$ auf B setzen dürfen. Übrigens ist klar, dass ein sehr merklicher Werth für x , wenn sich dieser ergeben sollte, durchaus nicht mit Sicherheit darauf zu schliessen erlaubt, dass die Massen A und B wirklich sehr ungleich sind, denn wir wissen, dass sich in ähnlicher Weise wie diese Abweichung, der etwa übrig bleibende Einfluss der systematischen Fehler aussprechen wird. Es wird demnach das Glied x die beiden Einflüsse vereinigt geben, und wir werden, wenn sich x als sehr klein herausstellen sollte, schliessen können, dass wahrscheinlicher Weise weder eine bedeutende Ungleichheit der beiden Massen A und B vorhanden, noch ein bedeutender Einfluss solcher systematischer Fehler zu befürchten ist, welche von der gegenseitigen Stellung der Sterne A und B herrührt.

Die Bedingungsgleichungen für die sechs Correctionen sind nun:

$1 dp_0$	$-1.25 (20dy)$	$-1.21 (4x)$	$-0.67 dA$	$-0.75 dB$	$-1.26 (30db)$	$= -0.19$
1	-0.96	-1.11	-0.41	-0.91	-1.19	-1.47
1	-0.76	-1.03	$+0.86$	$+0.52$	$+0.53$	-1.21
1	-0.41	-0.74	-0.25	-0.97	-0.54	-1.42
1	-0.21	-0.41	-0.99	$+0.11$	$+0.03$	$+1.45$
1	$+0.01$	-0.15	$+0.10$	-1.00	-0.02	$+0.77$
1	$+0.21$	$+0.12$	$+0.99$	$+0.11$	-0.03	-0.77
1	$+0.36$	$+0.38$	$+0.57$	-0.82	$+0.41$	-0.33
1	$+0.52$	$+0.63$	-0.43	$+0.90$	$+0.63$	$+0.80$
1	$+0.72$	$+0.78$	-0.96	$+0.28$	-0.27	-0.07
1	$+0.97$	$+0.64$	$+0.45$	$+0.89$	-1.17	$+0.38$
1	$+1.12$	$+0.39$	$+1.00$	$+0.07$	-0.10	$+1.79$
1	$+1.25$	$+0.01$	$+0.67$	-0.75	$+1.26$	$+0.65$
1	$+1.38$	-0.37	-0.19	-0.98	$+1.84$	-0.05
1	$+1.47$	-0.62	-0.76	-0.77	$+1.31$	$+1.22$

Daraus ergeben sich die Normalgleichungen:

$+15.00 (dp_0)$	$+4.42 (20dy)$	$-2.69 (4x)$	$-0.02 (dA)$	$-4.07 (dB)$	$+1.43 (30db)$	$= +1.96$
$+4.42$	$+12.04$	$+4.46$	$+1.42$	-0.28	$+7.59$	$+7.81$
-2.69	$+4.46$	$+6.73$	$+1.50$	$+4.12$	$+0.76$	$+3.62$
-0.02	$+1.42$	$+1.50$	$+7.08$	$+1.09$	$+0.94$	-1.17
-4.07	-0.28	$+4.12$	$+1.09$	$+8.08$	-1.80	$+1.22$
$+1.43$	$+7.59$	$+0.76$	$+0.94$	-1.80	$+12.30$	$+4.17$

aus deren Anflösung die Correctionen folgen:

$$\begin{aligned} db &= -0.002 \\ dB &= +0.197 \\ dA &= -0.336 \\ x &= -0.0021 \\ dy &= +0.038 \\ dp_0 &= -0.028. \end{aligned}$$

Dass sich die die Dauer der Periode bestimmende Grösse b mit ziemlicher Sicherheit ergibt, folgt aus der letzten Eliminationsgleichung:

$$169.8 db = -0.37 \text{ und der mittl. Fehler von } b \text{ wird demnach nur } \pm 0.08.$$

Es lässt sich deshalb, wie zu erwarten, diese Correction aus dem vorhandenen Beobachtungsmateriale mit sehr grosser Sicherheit ableiten.

Ich habe nun aber die gefundenen Correctionen nicht direct angewandt. Das b ist so wenig von 20° verschieden, dass eine nur irgendwie bemerkbare schlechtere Übereinstimmung mit den Beobachtungen gewiss nicht zu fürchten ist, wenn dieser abgerundete Werth, der aber für die Rechnung bedeutend bequemer ist, in Anwendung gebracht wird. Ferner ist x sehr klein. Darnach würde die Bewegung des Sternes C auf einen Punkt zu beziehen sein, der um etwa 0.04 von der Mitte entfernt liegt, eine Abweichung, die keineswegs irgendwie verbürgt werden kann und in Folge ihrer Kleinheit möglicher Weise einem Einflusse der systematischen Fehler zugeschrieben werden kann. Ich kann demnach wohl das Resultat aussprechen, dass die Positionswinkel von C durchaus nicht gegen die Annahme, dass A und B sehr nahe gleiche Massenwerthe besitzen, spricht. Um ganz unnöthige Rechnungen zu vermeiden, habe ich x einfach $= 0$ gesetzt. Auf diese Weise entsteht also die neue Formel für p :

$$p = 145.172 - 0.492 t - 2.376 \sin 20^\circ t + 0.197 \cos 20^\circ t. \quad (II)$$

Zur Erleichterung der Vergleichung dieser Formel mit den Beobachtungen seien die darnach berechneten Positionswinkel hier aufgeführt:

p	p	p	p	p	p	p	p
1820.0	157.78	1831.0	155.53	1841.0	149.41	1851.0	144.05
21.0	157.77	32.0	154.23	42.0	149.74	52.0	142.81
22.0	157.96	33.0	152.91	43.0	150.00	53.0	141.74
23.0	158.27	34.0	151.67	44.0	150.09	54.0	140.90
24.0	158.60	35.0	150.60	45.0	149.92	55.0	140.34
25.0	158.86	36.0	149.76	46.0	149.52	56.0	140.06
26.0	158.95	37.0	149.20	47.0	148.81	57.0	140.05
27.0	158.78	38.0	148.92	48.0	147.84	58.0	140.24
28.0	158.38	39.0	148.91	49.0	146.67	59.0	140.55
29.0	157.67	40.0	149.10	50.0	145.37	60.0	140.86
30.0	156.70						

Die Formel (II) habe ich nun direct mit den einzelnen vorliegenden Beobachtungen verglichen und aus diesen Vergleichen die constanten Fehler, insoweit sie sich auf diese Weise überhaupt bestimmen lassen, zu ermitteln gesucht. Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, werde ich später, was sich auf die Beobachtungen bezieht, zusammenfassen. Jetzt führe ich einfach die aus den corrigirten Beobachtungen abgeleiteten Jahresmittel an und vergleiche diese mit der Formel II. Die Bedeutung der übrigen Spalten wird aus dem Folgenden hervorgehen.

g	Bp	$B-R$ II	$B-R$ III	g	Bp	$B-R$ II	$B-R$ III
1781.89	181.73	.	-4.34	1854.23	141.73	+0.96	+0.84
1802.11	171.78	.	+0.23	55.22	140.30	+0.02	-0.11
21.98	160.03	+2.07	+0.01	56.31	140.60	+0.54	+0.45
23.97	160.42	+1.83	+0.20	57.28	139.76	-0.35	-0.37
26.22	160.55	+1.64	+0.48	58.19	140.07	-0.23	-0.16
28.99	157.11	-0.57	-1.39	59.28	140.15	-0.49	-0.29
31.19	155.04	-0.24	-1.02	60.28	140.97	+0.02	+0.34
32.20	153.80	-0.17	-0.97	61.27	141.02	-0.15	+0.30
33.25	153.83	+1.23	+0.37	62.31	139.63	-1.55	-1.02
35.31	150.76	+0.42	-0.50	63.06	140.09	-0.97	-0.39
36.27	149.36	-0.25	-1.22	64.30	140.02	-0.43	+0.17
40.25	148.81	-0.37	-0.87	65.26	138.95	-0.75	-0.18
41.12	149.68	-0.23	-0.13	66.55	137.50	-0.84	-0.36
42.34	148.56	-1.27	-1.41	68.25	135.71	-0.47	-0.21
43.25	150.18	+0.16	+0.17	69.35	134.32	-0.44	-0.33
44.32	150.84	+0.80	+0.95	70.47	133.68	+0.23	+0.18
45.39	151.25	+1.49	+1.73	71.30	133.58	+0.95	+0.66
46.25	150.06	+0.72	+1.04	72.55	132.58	+0.85	+0.59
47.32	149.07	+0.57	+0.93	73.26	133.33	+1.92	+1.62
48.20	147.68	+0.07	+0.39	74.51	131.79	+0.60	+0.28
49.32	146.47	+0.22	+0.47	75.30	131.75	+0.50	+0.21
50.29	146.32	+1.33	+1.50	76.85	130.90	-0.74	-0.94
51.25	143.67	-0.07	0	78.23	131.13	-0.95	-1.04
52.29	142.43	-0.07	-0.08	79.48	132.03	-0.29	-0.31
53.27	140.70	-0.81 ¹	-0.89				

Die Fehler, welche die Formel (II) in den Positionswinkeln zurücklässt, wurden nun mit Rücksicht auf die Gewichte und nach Massgabe der abtheilenden Striche in Mittelwerthe vereinigt. Dadurch ergeben sich folgende Differenzen im Sinne Beobachtung—Rechnung:

¹ In der folgenden Rechnung wurde für diese Abweichung die fehlerhafte Differenz +0.19 genommen, welches Versehen indess jedenfalls ohne Belang ist.

	\underline{g}	$\underline{B-R}$		\underline{g}	$\underline{B-R}$		\underline{g}	$\underline{R-B}$
1824.60	4	+1 ^o 79	1848.54	17	+0 ^o 30	1864.17	11	-0 ^o 82
31.45	14	-0.25	52.35	13	+0.03	67.44	14	-0.68
35.00	7	+0.45	55.25	16	+0.39	71.33	14	+0.57
41.21	16	-0.30	58.17	13	-0.36	74.57	12	+0.49
44.15	14	+0.62	61.17	9	-0.40	77.86	16	-0.73

Mit Ausnahme der ersten und vielleicht der dritten Differenz haben die übrigen nahe gleiche Gewichte. Ich habe desshalb allen dasselbe Gewicht gegeben, und ihnen gemäss der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Formel:

$$dp = dp_0 + d\gamma t + \delta \cdot t^2 + dA \sin bt + dB \cos bt + db \cdot t (A \cos bt - B \sin bt)$$

zu genügen gesucht. Dieser Ansatz unterscheidet sich von dem früher gebrauchten durch den Hinzutritt eines quadratischen Gliedes für die Bewegung des Mittelpunktes der Kreisbewegung und durch das Wegfallen der Reduction des Positionswinkels auf einen von der Mitte $\frac{A+B}{2}$ verschiedenen Punkt, die weiter zu berücksichtigen als unnöthig erkannt wurde. Für eine etwaige Benützung der vorliegenden Rechnungen für zukünftige Untersuchungen wird es genügen, nicht die Bedingungs-, sondern gleich die Normalgleichungen anzuführen. Diese sind:

$$\begin{array}{rccccccc} +15.00 dp_0 & +2.91 (20d\gamma) & +13.06 (300\delta) & +0.73 (dB) & +5.43 (30db) & +0.31 (dA) & = +1.38 \\ +2.91 & +9.76 & +5.00 & -3.13 & -1.10 & +1.28 & -3.35 \\ +13.06 & +5.00 & +21.46 & +0.72 & +11.01 & +0.33 & +2.92 \\ +0.73 & -3.13 & +0.72 & +8.59 & -2.54 & -0.15 & +1.69 \\ +5.43 & -1.10 & +11.02 & -2.54 & +14.74 & -0.51 & +2.51 \\ +0.31 & +1.28 & +0.33 & -0.15 & -0.51 & +6.44 & +1.56 \end{array}$$

und die Auflösung ergibt:

$$\begin{array}{l} dp_0 = -0.098 \\ d\gamma = -0.0311 \\ 100\delta = +0.1400 \\ dB = -0.097 \\ db = -0.005 \\ dA = +0.336 \end{array}$$

Der neue Werth von b zeigt genau dieselbe Eigenschaft wie früher. Aus den damals angeführten Gründen lasse ich es auch jetzt fort, so dass also die neue Formel wird:

$$p = 145.074 - 0.523t + 0.001400t^2 - 2.040 \sin 20^\circ t + 0.100 \cos 20^\circ t. \quad (\text{III})$$

Diese Formel stimmt, bis auf die neu hinzugefügten Glieder, beinahe vollkommen mit der ersten (I) aus uncorrigirten und provisorisch reducirten Jahresmitteln gewonnenen überein. Die Vergleichung der Formel III mit den Beobachtungen habe ich bereits in der obigen Tabelle (p. 214) mit aufgenommen. Die Übereinstimmung lässt vielleicht noch zu wünschen übrig, indem bei 25 positiven und 24 negativen Vorzeichen nur 16 Zeichenwechsel erscheinen. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, also einer mit zwei Struve'schen Abenden gleich genauen Beobachtungen ist ± 1.34 oder ein Struve'scher Abend hat den mittl. Fehler ± 1.90 . Gegen die Grösse dieses mittl. Fehlers wird sich aus den öfter schon auseinandergesetzten Gründen auch hier nichts einwenden lassen. Was nun die schlechte Vertheilung der Vorzeichen betrifft, so bleibt, wie es scheint, nichts Anderes übrig, als dieselbe durch die Unmöglichkeit, die systematischen Fehler vollständig zu beseitigen und die relativen Gewichte der Beobachtungen verschiedener Astronomen genügend genau zu bestimmen, zu erklären.

Ich glaube aber, dass Eines durch die Darstellung mit Evidenz hervorgeht, das ist die periodische Veränderung des Positionswinkels innerhalb einer Zeitraumes, der sich nur um Bruchtheile eines Jahres von 18 Jahren unterscheiden kann, und demzufolge scheint die Hypothese, dass der Stern sich um einen dunklen

Begleiter in nahe gleichförmiger Weise dreht, so wahrscheinlich gemacht zu sein, als es für jetzt zu erwarten war.

Die Möglichkeit, dass die Formel (III) bei weiteren Untersuchungen über die Bewegung von ζ Caneri als Ausgangspunkt dienen könne, veranlasst mich, die betreffende Ephemeride hierher zu setzen.

	p		p		p		p		p		p
1820.0	160.20	1831.0	156.31	1841.0	149.79	1851.0	143.95	1861.0	140.72	1871.0	133.00
21.0	160.03	32.0	155.03	42.0	149.95	52.0	142.80	62.0	140.71	72.0	132.36
22.0	160.02	33.0	153.76	43.0	150.03	53.0	141.80	63.0	140.51	73.0	131.77
23.0	160.11	34.0	152.56	44.0	149.97	54.0	141.01	64.0	140.06	74.0	131.52
24.0	160.22	35.0	151.52	45.0	149.72	55.0	140.48	65.0	139.37	75.0	131.50
25.0	160.25	36.0	150.68	46.0	149.21	56.0	140.17	66.0	138.45	76.0	131.64
26.0	160.14	37.0	150.09	47.0	148.47	57.0	140.10	67.0	137.38	77.0	131.88
27.0	159.83	38.0	149.73	48.0	147.51	58.0	140.19	68.0	136.21	78.0	132.14
28.0	159.28	39.0	149.61	49.0	146.39	59.0	140.38	69.0	135.05	79.0	132.32
29.0	158.49	40.0	149.65	50.0	145.17	60.0	140.59	70.0	133.94	80.0	132.36
30.0	157.47										

§. 13

Wird die Hypothese, dass sich der Stern C um einen dunklen Begleiter in einer Kreisbahn bewegt, acceptirt, so ist durch den gefundenen periodischen Theil in der Bewegung des Positionswinkels auch sofort das periodische Glied, welches in Distanz erscheint, gegeben. Dem ersteren:

$$-2^{\circ}040 \sin 20^{\circ} t + 0^{\circ}100 \cos 20^{\circ} t$$

entspricht nach p. 215 ein Glied in der Distanz, das sich, wenn ρ_0 constant zu $5^{\circ}610$ angenommen wird, so gestaltet:

$$\rho = \rho_0 + 0^{\circ}196 \cos 20^{\circ} t + 0^{\circ}010 \sin 20^{\circ} t,$$

und zwar wird das Vorzeichen der periodischen Glieder, welches die Theorie unbestimmt lässt, sofort nach dem ersten Blick auf die vorliegenden Distanzmessungen festgestellt werden können.

Es wurden nun, in ganz ähnlicher Verfahrungsweise wie bei den Positionswinkeln, die mit provisorischen Reductionselementen berechneten Distanzmessungen in Jahresmittel vereinigt. An diese habe ich die angeführten periodischen Glieder mit umgekehrtem Zeichen angebracht und also, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass ρ_0 constant und nicht viel von $5^{\circ}61$ verschieden ist, für jedes Jahresmittel das betreffende ρ berechnet. Es wird sich nun herausstellen, dass diese Annahme nicht gerechtfertigt ist, sondern, dass auch die Distanz ρ_0 als mit der Zeit veränderlich angenommen werden muss.

Es wird, da diese Rechnungen nur als Zwischenstation zu betrachten sind, überflüssig sein, die provisorischen Jahresmittel und die einzelnen Reductionen auf ρ_0 mitzutheilen. Vielmehr wird es genügen, bereits die Mittelwerthe, wie sie sich aus passend gewählten Gruppen ergeben, zu erwähnen. Es wurde gefunden:

	ρ_0	g	\sqrt{g}		ρ_0	g	\sqrt{g}		ρ_0	g	\sqrt{g}
1825.73	5.712	6	2	1848.78	5.472	16	4	1866.28	5.588	20	4
31.80	5.714	10	3	53.08	5.574	9	3	70.39	5.623	12	3
35.00	5.823	7	3	56.56	5.615	20	4	73.48	5.681	14	4
41.02	5.633	14	4	60.58	5.676	10	3	76.24	5.742	13	4
44.50	5.569	10	3	63.28	5.557	8	3	78.68	5.628	11	3

Dass hier eine Abhängigkeit von ρ von der Zeit vorhanden ist, bemerkt man sofort auch lässt sich ohne Weiteres vermuthen, dass diese Abhängigkeit durch ein der Zeit proportionales Glied allein nicht dargestellt werden kann, dass dieses aber durch einen quadratischen Ausdruck möglich sein dürfte. Ich versuche deshalb den Ansatz:

$$\rho = 5^{\circ}61 + a + bt + ct^2$$

und die Bedingungsgleichungen für die Auflösung dieser Aufgabe werden:

2 a	-2.42 (20b)	+2.94 (400c)	= +0.20	3 a	+1.59 (20b)	+0.84 (400c)	= +0.20
3	-2.73	+2.48	+0.31	3	+1.98	+1.32	-0.16
3	-2.25	+1.68	+0.64	4	+3.24	+2.64	-0.09
4	-1.80	+0.84	+0.09	3	+3.06	+3.12	+0.04
3	-0.81	+0.24	-0.13	4	+4.68	+5.40	+0.28
4	-0.24	+0.02	-0.55	4	+5.24	+6.88	+0.53
3	+0.45	+0.06	-0.11	3	+4.29	+6.18	+0.05
4	+1.32	+0.44	+0.02				

Daraus findet man die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} +172.00 a &+ 61.66 (20b) + 118.52 (400c) = +4.04 \\ + 61.66 &+ 118.34 &+ 91.12 &+ 1.41 \\ +118.52 &+ 91.12 &+ 152.40 &+ 7.78 \end{aligned}$$

deren Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} a &= -0.032 \\ b &= -0.00277 \\ c &= +0.0002719. \end{aligned}$$

Es stellt sich also der Ausdruck für ρ_0 jetzt so:

$$\rho_0 = 5.578 - 0.0277 \left(\frac{t}{10} \right) + 0.02719 \left(\frac{t}{10} \right)^2 \quad (A)$$

Die Formel (A) in Verbindung mit:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0}{5.610} (0.196 \cos 20^\circ t + 0.010 \sin 20^\circ t)$$

gibt also die Distanzen des Sternes C, von der Mitte $\frac{A+B}{2}$ aus gemessen.

Die Berechnung von ρ scheint demnach etwas verwickelt zu sein; man wird sie aber in Wirklichkeit durch — dem geübten Rechner — wohlbekannte Kunstgriffe recht bequem dadurch gestalten, dass man zuerst ρ_0 in der zweiten Formel constant = 5.610 setzt und dann die Correction, welche in Folge der falschen Annahme über ρ_0 zu machen ist, berechnet. Diese letztere Berechnung ist dann, weil sie sich nur auf kleine Zahlen bezieht, stets im Kopfe ausführbar. Die Ephemeride, welche sich auf diese Weise für die Distanzen ergibt, ist folgende:

ρ	ρ	ρ	ρ	ρ	ρ
1820.0 5.810	1830.0 5.897	1840.0 5.454	1850.0 5.784	1860.0 5.393	1870.0 5.794
21.0 5.767	31.0 5.925	41.0 5.431	51.0 5.771	61.0 5.417	71.0 5.750
22.0 5.682	32.0 5.916	42.0 5.432	52.0 5.736	62.0 5.476	72.0 5.693
23.0 5.650	33.0 5.904	43.0 5.455	53.0 5.681	63.0 5.544	73.0 5.632
24.0 5.644	34.0 5.857	44.0 5.498	54.0 5.615	64.0 5.618	74.0 5.577
25.0 5.657	35.0 5.792	45.0 5.555	55.0 5.546	65.0 5.690	75.0 5.534
26.0 5.690	36.0 5.697	46.0 5.620	56.0 5.481	66.0 5.753	76.0 5.508
27.0 5.741	37.0 5.634	47.0 5.682	57.0 5.430	67.0 5.800	77.0 5.506
28.0 5.799	38.0 5.559	48.0 5.735	58.0 5.392	68.0 5.824	78.0 5.525
29.0 5.852	39.0 5.491	49.0 5.772	59.0 5.383	69.0 5.820	79.0 5.568
30.0 5.897	40.0 5.454	50.0 5.784	60.0 5.393	70.0 5.794	80.0 5.631

Die Vergleichung dieser Ephemeride mit den provisorischen Beobachtungsmitteln setze ich hier her, ebenso wie eine zweite Vergleichung, die aus einer gleich mitzutheilenden Rechnung hervorgeht.

			$B-R$	$B-R$				$B-R$	$B-R$
			A	B				A	B
1821.98	2	5.564	-0.168	-0.079	1855.22	7	5.578	+0.046	+0.024
26.22	2	5.655	-0.046	-0.014	56.32	4	5.521	+0.056	+0.029
28.99	2	5.757	-0.094	-0.050	57.31	5	5.521	+0.103	+0.069
31.27	4	5.892	-0.030	+0.016	58.19	4	5.390	0	-0.038
32.22	6	5.919	+0.006	+0.042	59.30	2	5.476	+0.090	+0.055
33.25	2	6.003	+0.112	+0.148	60.27	3	5.464	+0.064	+0.030
35.31	3	5.894	+0.131	+0.142	61.27	5	5.570	+0.137	+0.106
36.27	2	5.828	+0.148	+0.140	62.33	1	5.338	-0.161	-0.176
40.25	7	5.421	-0.028	-0.054	63.06	5	5.684	+0.100	+0.128
41.07	3	5.448	+0.017	-0.014	64.30	2	5.319	-0.321	-0.314
42.32	4	5.484	+0.045	+0.014	65.28	9	5.738	+0.030	+0.046
43.29	4	5.536	+0.068	+0.041	66.51	9	5.796	+0.019	+0.045
44.28	2	5.502	-0.013	-0.033	68.25	3	5.745	-0.078	-0.041
45.37	2	5.448	-0.131	-0.145	69.35	3	5.621	-0.190	-0.152
46.26	2	5.544	-0.092	-0.099	70.45	6	5.766	-0.008	+0.033
47.33	2	5.612	-0.087	-0.089	71.50	3	5.661	-0.072	-0.041
48.24	7	5.643	-0.100	-0.096	72.53	6	5.667	-0.005	+0.032
49.32	4	5.670	-0.106	-0.087	73.27	2	5.447	-0.171	-0.149
50.29	3	5.646	-0.130	-0.126	74.51	6	5.607	+0.052	+0.071
51.28	3	5.839	+0.078	+0.083	75.30	5	5.649	+0.123	+0.142
52.32	3	5.631	-0.088	-0.088	76.83	8	5.497	-0.009	+0.012
53.29	2	5.615	-0.055	-0.055	78.24	7	5.491	-0.045	-0.015
54.07	1	5.602	-0.008	-0.022	79.45	4	5.439	-0.157	-0.114

Mit der Übereinstimmung, welche die Formel liefert, wird man sich noch nicht begnügen dürfen. Indessen ist die Vertheilung der Fehler schon derart, dass man von einer neuen Ausgleichung eine bessere Übereinstimmung wird erwarten dürfen, wenn dieselbe mit den provisorischen Jahresmitteln überhaupt zu erreichen ist.

Die folgende Rechnung ist nun insofern wieder nicht ganz genau, als auch jetzt noch in dem Ansatz:

$$d\rho = a + bt + ct^2$$

die Coefficienten a , b und c als constant betrachtet werden; indessen wird diese Vernachlässigung nicht viel zu bedenten haben, da diese neuen Correctionen voraussichtlich klein sein werden, und es thatsächlich, wie das Folgende zeigen wird, auch sind.

Ich habe übrigens hauptsächlich aus einem anderen Grunde die Ausgleichung von Neuem durchgeführt. Ich hatte es bereits als eine sehr wichtige Bestätigung der Hypothese, dass sich C um einen dunklen Begleiter bewegt, bezeichnet, dass sich die periodischen Veränderungen, deren Elemente aus den Positionswinkeln hervorgegangen sind, auch in den Distanzen zeigen und durch die berechneten dargestellt werden müssen. Betrachtet man aber die Fehlerreihe, welche die Formel A übrig lässt, so ist in diesen durchaus nichts von einer Periode von 18 Jahren zu bemerken. Es scheint diese also den Beobachtungen vollständig zu genügen. Um aber diesen wichtigen Punkt noch klarer zu stellen, habe ich die übrigbleibenden Fehler (A) durch die Formel:

$$\Delta = a + bt + ct^2 + d \cos(20^\circ t)$$

darzustellen gesucht, indem der früher für das Sinusglied angegebene Zahlencoefficient sehr klein ist und bei dieser Untersuchung wohl vernachlässigt werden darf. Ergibt sich dann für d ein Werth, der dem aus den Positionswinkeln berechneten nahe genng ist, so erhält man demnach durch diese Rechnung eine neue und wichtige Stütze für die gemachte Hypothese.

Die Fehler A wurden, wie dies durch Striche in der obigen Tabelle angezeigt ist, in Mittelwerthe vereinigt und diesen Mittelwerthen gleiches Gewicht gegeben, da diese Vereinfachung nicht weit von der Wahrheit entfernt liegt.

Es wurden also folgende Fehler durch die obige Formel ausgeglichen:

1825.73	-0.103	1848.78	-0.107	1866.28	+0.009
31.80	-0.008	52.38	-0.016	70.39	-0.070
35.00	+0.130	56.56	+0.053	73.41	-0.004
41.02	+0.003	60.58	+0.106	76.24	+0.042
44.52	-0.020	63.28	-0.038	78.68	-0.086

Die betreffenden Normalgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned}
 +15.000a + 3.732(20b) + 10.841(400c) - 1.347d &= -0.109 \\
 + 3.732 + 10.841 + 5.813 - 2.558 &= -0.045 \\
 + 10.841 + 5.813 + 14.099 - 3.282 &= -0.249 \\
 - 1.347 - 2.558 - 3.282 + 8.287 &= -0.115.
 \end{aligned}$$

Und ihre Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned}
 a &= +0.0172 \\
 10b &= +0.00238 \\
 100c &= -0.00965 \\
 d &= -0.025
 \end{aligned}$$

Es ist also der Formel A die Correction hinzuzufügen:

$$d\rho = +0.0172 + 0.00238 \left(\frac{t}{10}\right) - 0.00965 \left(\frac{t}{10}\right)^2 - 0.025 \cos 20^\circ t.$$

Wie man sieht, ist also der Coefficient von $\cos 20^\circ t$ in der That sehr klein, und der den Positionswinkeln am besten genügende Coefficient ist sehr nahe derjenige, welcher auch den Distanzen am besten Genüge leistet. Man erhält demnach jetzt die neue Formel für die Distanzen:

$$\rho = 5.595 - 0.0253 \left(\frac{t}{10}\right) + 0.01754 \left(\frac{t}{10}\right)^2 + (0.171 \cos 20^\circ t + 0.010 \sin 20^\circ t) \frac{\rho}{5.610}. \quad (B)$$

Mit dieser Formel nun wurden die Beobachtungen verglichen, und zwar mit Hilfe der nachfolgenden Ephemeride.

ρ	ρ	ρ	ρ	ρ	ρ
1820.0 5.748	1830.0 5.849	1840.0 5.481	1850.0 5.775	1860.0 5.427	1870.0 5.757
21.0 5.686	31.0 5.875	41.0 5.462	51.0 5.764	61.0 5.453	71.0 5.718
22.0 5.642	32.0 5.881	42.0 5.463	52.0 5.734	62.0 5.495	72.0 5.664
23.0 5.617	33.0 5.864	43.0 5.484	53.0 5.688	63.0 5.552	73.0 5.610
24.0 5.613	34.0 5.827	44.0 5.521	54.0 5.628	64.0 5.614	74.0 5.557
25.0 5.629	35.0 5.773	45.0 5.572	55.0 5.567	65.0 5.677	75.0 5.515
26.0 5.659	36.0 5.706	46.0 5.628	56.0 5.507	66.0 5.731	76.0 5.490
27.0 5.706	37.0 5.638	47.0 5.685	57.0 5.461	67.0 5.770	77.0 5.484
28.0 5.756	38.0 5.573	48.0 5.732	58.0 5.461	68.0 5.787	78.0 5.498
29.0 5.808	39.0 5.518	49.0 5.763	59.0 5.418	69.0 5.782	79.0 5.532
30.0 5.849	40.0 5.481	50.0 5.775	60.0 5.427	70.0 5.757	80.0 5.581

Mit dieser Ephemeride wurden nun zunächst die Jahresmittel (p. 224) verglichen. Die dort unter B angeführten Fehler zeigen, dass sich in der That die Formel B schon so gut den Beobachtungen anschliesst, dass man damit die Rechnungen abschliessen darf. Indessen werden vorher auch hier die constanten Messungsfehler, so gut das eben angeht, zu ermitteln sein. Es geschieht das in folgenden Paragraphen gleichzeitig mit der Untersuchung der Positionswinkel. Vorerst führe ich die corrigirten, also für diese Arbeit definitiven Jahresmittel und ihre Vergleichung mit Formel B an.

	<i>g</i>	Beob.	Rechn. nach <i>B</i>	<i>R-R</i>	ang. <i>g</i>		<i>g</i>	Beob.	Rechn. nach <i>B</i>	<i>B-R</i>	ang. <i>g</i>
1821.98 ²	6	5.564	5.643	-0.079	1	1855.22	73	5.573	5.554	+0.019	7
26.22 ²	15	5.578	5.669	-0.091	2	56.32	37	5.471	5.492	-0.021	4
28.99 ²	15	5.679	5.807	-0.128	2	57.29	51	5.545	5.452	+0.093	5
31.27	34	5.825	5.877	-0.052	3	58.19	35	5.361	5.429	-0.068	4
32.20	52	5.905	5.878	+0.027	5	59.30 ¹	20	5.526	5.421	+0.105	2
33.27	15	5.925	5.857	+0.068	2	60.27 ¹	25	5.514	5.434	+0.080	3
35.31 ²	25	5.816	5.752	+0.064	3	61.27	42	5.582	5.464	+0.118	4
36.27 ²	15	5.750	5.688	+0.062	2	62.33 ¹	10	5.388	5.514	-0.126	1
40.26	49	5.440	5.476	-0.036	5	63.06	48	5.626	5.556	+0.070	5
41.07	24	5.458	5.462	-0.004	2	64.30 ¹	15	5.369	5.633	-0.264	2
42.31	32	5.498	5.470	+0.028	3	65.28	65	5.699	5.692	+0.007	7
43.29	35	5.539	5.495	+0.044	4	66.53	86	5.747	5.752	-0.005	9
44.28	20	5.552	5.535	+0.017	2	68.24	30	5.720	5.786	-0.066	3
45.31	15	5.498	5.589	-0.091	2	69.34	19	5.643	5.773	-0.130	2
46.26	17	5.588	5.643	-0.055	2	70.52	53	5.755	5.732	+0.023	5
47.33 ¹	20	5.662	5.701	-0.039	2	71.31	21	5.681	5.701	-0.020	2
48.23 ¹	59	5.614	5.739	-0.125	6	72.54	54	5.637	5.635	+0.002	5
49.32 ¹	40	5.720	5.767	-0.047	4	73.28 ¹	15	5.497	5.595	-0.098	2
50.29 ¹	30	5.696	5.772	-0.076	3	74.54	58	5.582	5.534	+0.048	6
51.28 ¹	30	5.889	5.756	+0.133	3	75.29	35	5.643	5.508	+0.135	4
52.32	25	5.671	5.719	-0.048	3	76.89	72	5.492	5.485	+0.007	7
53.29	23	5.660	5.670	-0.010	2	78.23	65	5.489	5.506	-0.017	7
54.07	4	5.612	5.624	-0.012	0	79.45	36	5.480	5.554	-0.074	4

Unter den übrigbleibenden Fehlern zähle ich 20 positive, 26 negative und 22 Zeichenwechsel. Die mittlere Abweichung für die Gewichtseinheit ergibt sich zu ± 0.135 , also der mittlere Fehler einer Distanzmessung von derselben Genauigkeit wie ein Struve'sches Abendmittel: ± 0.191 .

Die Vertheilung der Vorzeichen lässt nichts zu wünschen übrig und selbst die kleineren Abweichungen von einer zufälligen Vertheilung werden plausibel, wenn man bedenkt, dass einige von den obigen Jahresmitteln nur auf den Messungen eines Beobachters beruhen. So sind die mit ¹ bezeichneten nur aus Beobachtungen von O.Σ., die mit ² bezeichneten nur aus solchen von W.Σ. zusammengesetzt.

Auf diese Weise kann z. B. die kleine Anhäufung der negativen Zeichen in den Jahren 1846—51 plausibel erklärt werden durch eine systematische Correction, welche die O.Σ.'schen Beobachtungen, bei der in dieser Zeit stattfindenden Lage der beiden Sterne *A* und *B*, erfordern.

Im Allgemeinen ist also das Resultat, was die Distanzen betrifft, ein vollständig zufriedenstellendes; es haben diese nicht nur das aus den Positionswinkeln erhaltene Resultat vollkommen bestätigt, sondern mit Hilfe desselben eine Darstellung gefunden, die ich fast als eine überraschend gute bezeichnen möchte.

Wir dürfen desshalb behaupten, dass die Hypothese, der Stern *C* bewege sich um einen dunklen Begleiter, durch die vorhergehende Untersuchung so vollkommen gestützt worden ist, als wir es nur immer erwarten konnten. An dem Vorhandensein von Gliedern, welche in 18 Jahren sich periodisch verändern, ist sowohl in Positionswinkel als auch in Distanz nicht zu zweifeln, und erscheint sowohl die Amplitude als auch die Dauer der Periode sehr sicher bestimmt. Was die Erklärung dieser periodischen Veränderungen betrifft, so wird sie einzig und allein durch die erwähnte Hypothese geleistet, während die einzige andere noch discutable Annahme, dass jene periodische Veränderung ein Überrest systematischer Fehler ist, sich als höchst unwahrscheinlich herausgestellt hat, weil die Dauer der Periode damit nicht vereinbar ist, und weil es ferner ein merkwürdiges Spiel des Zufalls wäre, wenn die systematischen Fehler in Distanz und Positionswinkel so genau den analytischen Bedingungen genügen würden, wie sie aus jener Hypothese hervorgehen, und wie sie sich in dem Vorhergehenden herausgestellt haben.

Nehmen wir also wirklich an, dass der Stern einen dunklen Begleiter hat, so erhält das vorliegende Störungsproblem dadurch eine neue Complication, wenn es in aller Strenge verfolgt werden soll. Indessen wird dies in Wirklichkeit kaum nöthig sein. Jedenfalls ist der dunkle Begleiter in grosser Nähe vom Sterne *C* zu

suchen. Dann wird aber der nun als Doppelstern zu betrachtende Stern C auf A und B näherungsweise so einwirken, als ob seine und des dunklen Begleiters Masse im Schwerpunkt beider, also in dem Mittelpunkte der betrachteten Kreisbewegung, vereinigt wäre. Man hat demgemäss, wenigstens wird dies genügen, auch dürfte eine andere Behandlungsweise nicht leicht durchführbar sein, in den Formeln III) und B) die periodischen Glieder fortzulassen, und den übrigbleibenden Ausdruck für die Bewegung der störenden Masse (welche in der den Stern B betreffenden Untersuchung mit C bezeichnet worden ist) anzunehmen. Der aus der Berechnung hervorgegangene Massenwerth gehört demnach dem erwähnten Schwerpunkte an, er ist also gleich der Summe der Massen des Sternes C und seines dunklen Begleiters.

Lässt man die periodischen Glieder in den Formeln III) (p. 221) und B) (p. 225) fort, so hat man:

$$p = 145^{\circ}074 - 0^{\circ}523t + 0^{\circ}001400t^2$$

$$\rho = 5^{\circ}595 - 0^{\circ}0253\left(\frac{t}{10}\right) + 0^{\circ}01754t^2$$

Ich hatte für die Störungsrechnungen angenommen (§. 4):

$$p = 145^{\circ}20 - 0^{\circ}53t$$

$$\rho = 5^{\circ}55,$$

Werthe, die für die dort verfolgten Zwecke ausreichend sein dürften.

§. 14.

Die Beobachtungen von C .

Ich habe noch zum Schlusse die gebrachten Beobachtungen in analoger Weise mitzutheilen, wie dies bei dem Sterne B geschehen ist. Es wird auch im Einzelnen so vorgegangen werden, wie früher. Zuerst also werden die provisorischen Correctionen, welche benutzt worden sind zur Bildung der Jahresmittel auf p. 220 und 224, erwähnt. Diese beruhen zum grössten Theile auf den von O. S. ausgeführten Vergleichen. Daraus wird die constante Correction, so gut dies geht abgeleitet und zwar für die Positionswinkel durch Vergleichung mit Formel II) p. 219, für die Distanzen mit Hilfe von B , p. 225.

C wurde von den verschiedenen Beobachtern auf verschiedene Weise gemessen. Während es z. B. von W. S., S., D. mit dem Sterne A verglichen wurde, wurde es von Δ . und den meisten neueren Beobachtern auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$ bezogen, während O. S., ausser diesen Vergleichen, auch noch solche mit dem Sterne B ausgeführt hat. Im Folgenden sind nun gleich die, nach der Hilfstafel p. 222, auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$ reducirten Beobachtungsergebnisse, und zwar für jeden Beobachter zu Jahresmitteln zusammengezogen und mit den provisorischen Correctionen versehen, als Ausgangspunkt gewählt worden.

1. W. Struve.

Provisorische Correction im Positionswinkel $0^{\circ}00$, in Distanz $+0^{\circ}224$.

	g	p	ρ	Corr.		corr. Werthe	
1821.98	3	160°03	5°564	—	—	160°03	5°564
26.22	3	159°59	5°655	—0°68	+0°014	160°55	5°578
28.99	3	156°15	5°757	+1°52	+0°050	157°11	5°679
31.27	6	153°21	5°895	+1°97	—0°022	154°17	5°817
32.28	4	153°18	6°033	+0°98	—0°149	154°14	5°955
33.27	3	152°12	6°003	+0°46	—0°146	153°08	5°925
35.31	5	149°80	5°894	+0°54	—0°142	150°76	5°816
36.27	3	148°40	5°828	+1°21	—0°140	149°36	5°750

Corr. im Positionswinkel $+0^{\circ}96 \pm 0^{\circ}32$; mittl. F. der Gewichtseinheit $\pm 1^{\circ}68$

„ in Distanz $-0^{\circ}078 \pm 0^{\circ}033$ „ „ „ „ $\pm 0^{\circ}170$.

Die erste Beobachtung wurde bei der Ableitung der Correction nicht berücksichtigt, weil sie bekanntlich mit einem viel kleineren Instrumente gemacht worden ist. Auch wurde bei ihr einem Abende nur das Gewicht 2 gegeben, während, wie noch erwähnt werden wird, die anderen Abende das Gewicht 5 erhielten.

2. Otto Struve.

Auch hier habe ich die von mir ausgeführte Berechnung des umfangreichen Beobachtungsmateriales zu Grunde gelegt, und alle Beobachtungen auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$ bezogen. Die Beobachtungen vom Jahre 1875 an, welche ich einer brieflichen Mittheilung des Herrn Beobachters verdanke, sind ebenfalls im Anhange mitgetheilt.¹

	g	p	p	Corr.		corr. Werthe	
1840.30	7	149.60	5.353	-0.41	+0.122	149.21	5.403
42.29	4	149.13	5.394	+0.69	+0.075	148.74	5.444
43.30	3	151.68	5.411	-1.65	+0.084	151.29	5.461
44.28	7,4	151.18	5.502	-1.14	+0.033	150.79	5.552
45.31	5,3	151.49	5.448	-1.69	+0.141	151.10	5.498
46.29	3	150.58	5.567	-1.38	+0.078	150.19	5.617
47.33	5,4	149.70	5.612	-1.21	+0.089	149.31	5.662
48.30	10,7	147.90	5.651	-0.41	+0.090	147.51	5.701
49.32	8	146.86	5.670	0.47	+0.097	146.47	5.720
50.29	6	146.71	5.646	-1.72	+0.126	146.32	5.696
51.28	6	143.79	5.839	+0.21	-0.083	143.40	5.889
52.32	4	142.58	5.668	-0.11	+0.051	142.19	5.718
53.30	4	140.31	5.601	+1.19	+0.049	139.92	5.651
55.31	6	140.19	5.589	-0.22	-0.041	139.80	5.639
57.27	6	139.18	5.527	+0.92	-0.074	138.79	5.577
58.28	2	140.02	5.540	+0.31	-0.113	139.63	5.590
59.30	4	141.65	5.476	-1.00	-0.055	141.26	5.526
60.27	5	141.36	5.464	-0.41	-0.029	140.97	5.514
61.27	6	141.56	5.472	-0.49	-0.008	141.17	5.522
62.33	2	140.33	5.338	+0.85	+0.176	139.94	5.388
64.30	3	140.41	5.319	+0.04	+0.314	140.02	5.369
66.27	2,1	136.98	5.610	+1.68	+0.132	136.59	5.660
68.28	4,2	134.96	5.735	+1.18	+0.051	134.57	5.785
69.32	2	135.80	5.685	-1.02	+0.089	135.41	5.735
70.28	8,4	133.68	2.743	-0.03	+0.003	133.29	5.793
71.32	3	133.67	5.643	-1.26	+0.058	133.28	5.693
72.31	3	132.90	5.683	-1.03	-0.036	132.51	5.733
73.28	3	134.37	5.447	-2.97	+0.148	133.98	5.497
74.28	3	132.63	5.500	-1.43	+0.045	132.24	5.550
75.28	3	132.27	5.643	-1.03	-0.135	131.88	5.693
76.29	2	132.10	5.420	-0.63	+0.068	131.71	5.470
77.27	6	130.97	5.450	+0.81	+0.038	130.58	5.500
78.29	6	132.17	5.369	-0.07	+0.139	131.78	5.419
79.29	6	132.48	5.455	-0.17	+0.091	132.09	5.505

Corr. im Positionswinkel -0.39 ± 0.16 ; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 1.93

„ in Distanz $+0.050 \pm 0.015$ „ „ „ „ ± 0.175 .

Dass bei O. Σ . Beeinflussungen, welche von der gegenseitigen Lage der beiden Sterne A und B herühren, stattgefunden haben, ersieht man aus dem sich zeigenden Gang in den gefundenen Correctionen. Struve hat, wie schon erwähnt, C sowohl mit den Sternen A und B , als auch mit der Mitte $\frac{A+B}{2}$, verglichen.

¹ Zu bemerken ist noch, dass ich bei der Reduction der Beobachtungen vor 1843.0 das constante Glied, welches fraglich ist, mitgenommen habe.

Sammelt man die betreffenden gleichzeitigen Beobachtungen und reducirt man alle auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$, so ergibt sich:

	aus A		aus B		direct $\frac{A+B}{2}$		aus A		aus B		direct $\frac{A+B}{2}$	
1844.28	151°12	—	151°25	—		1859.30	141°81	5.464	141°48	5.487		
45.31	151.91	—	151.07	—		60.27	140.75	5.427	141.77	5.488		
48.30	147.97	5.625	147.82	5.717		61.27	141.41	5.463	141.70	5.480		
49.32	146.54	5.583	147.17	5.757		62.33	140.44	5.231	140.21	5.444		
50.29	146.91	5.553	146.51	5.738		64.30	139.82	5.280	140.31	5.187	141°10	
51.28	143.71	5.706	143.87	5.972		66.27	136.91	—	137.05	—		
52.32	143.10	5.572	142.05	5.764		68.28	134.29	—	135.62	—		
53.30	140.54	5.543	140.07	5.658		70.28	133.69	—	133.66	—		
55.31	140.28	5.517	140.09	5.660		77.27	130.97	5.456	130.96	5.443		
57.27	139.07	5.478	139.28	5.576		78.29	132.53	5.342	131.81	5.395		
58.28	140.09	5.455	139.95	5.624		79.29	132.81	5.375	132.14	5.535		

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, dass zwischen den von B aus und den von A aus gemessenen Positionswinkeln keine merkbare Differenz stattfindet. Man findet sie ohne Rücksicht auf die gar nicht mitgetheilten Gewichte, im Sinne $A-B$ zu $+0.04$.

Dagegen ist in Distanz $A-B = -0.106$ und dieser Unterschied ist so ausgesprochen, dass von 17 Differenzen 15 negativ sind. Diese Differenz ist geeignet zu zeigen, durch welche merkwürdigen Fehler die Ausmessung eines dreifachen Sternsystemes beeinflusst werden kann. Es wäre vielleicht besser gewesen, wenn die constanten Fehler in den O. S. 'schen Distanzen getrennt für die beiden Messungsmethoden durch die directe Vergleichung mit der Formel abgeleitet worden wäre. In dem corrigirten Jahresmittel wäre aber dadurch kaum ein Unterschied eingetreten.

3. Dawes.

Provis. Corr.: Positionswinkel 0.0 , Distanz in den beiden ersten Perioden $+0.011$, 3. Periode $+0.076$.

	g	p	p	Corr.		corr. Werthe	
1831.30	1	154.91	5.823	$+0.23$	$+0.004$	155.20	5.883
32.18	5	153.43	5.887	$+0.56$	-0.010	153.72	5.897
41.07	6	149.00	5.448	$+0.12$	$+0.014$	149.29	5.458
43.22	2	149.75	5.444	$+0.27$	$+0.048$	150.04	5.454
48.14	6	147.51	5.478	$+0.17$	$(+0.258)$	147.80	5.488
54.07	1	140.08	5.602	$+0.86$	$+0.022$	140.29	5.612

Corr. im Positionswinkel $+0.29 \pm 0.10$; mittl. F. der Gewichtseinheit ± 0.43

„ in Distanz $+0.010 \pm 0.060$ „ „ „ „ ± 0.27 .

Der mittl. F. der Gewichtseinheit in Distanz ist zweifelhaft. Ich habe nämlich den eingeklammerten Werth bei der Bildung des Mittels: $+0.010$ ausgeschlossen, bei der Bildung des betreffenden mittl. F. aber wieder benutzt, ein Verfahren, welches allerdings willkürlich ist. Indessen scheint sich ohnehin mit Sicherheit nur herauszustellen, dass die Distanzen von Dawes, wenn überhaupt, dann jedenfalls eine sehr kleine positive Correction erfordern.

4. Secchi.

Provis. Corr.: -0.60 , $+0.138$.

Aus der Curve, welche O. S. für die Abweichungen der Secchi'schen Beobachtungen von den seinigen angibt, habe ich diese Correctionen nicht direct entnommen, sondern wenigstens für die Distanzen eine neue Formel abgeleitet, welche für die an Secchi anzubringenden Correctionen ergab:

4.5	$+0.121$
5.0	$+0.132$
5.5	$+0.144$
6.0	$+0.157$.

Das Mittel aus diesen vier Werthen wurde einfach als provisorische Correction betrachtet.

	g	p	ρ	Corr.		corr. Werthe	
1855.19	3	139°73	5.526	+0.55	+0.029	140°11	5.492
57.29	4	140.60	5.541	-0.49	-0.089	140.98	5.507
65.23	2	139.11	5.693	+0.62	-0.004	139.49	5.659
66.29	2	137.01	5.788	+1.63	-0.046	137.39	5.754

Corr. im Positionswinkel +0.38 ±0.33; mittl. F. der Gewichtseinheit ±1.08
 „ in Distanz -0.034 ±0.028 „ „ „ „ ±0.094.

5. Dembowski.

Es sind auch bei dem Sterne *C* der beiden Perioden, welche sich durch die angewandten instrumentalen Hilfsmitteln von einander so sehr unterscheiden, von einander zu trennen.

Provis. Corr. für die Zeit 1852-58 0°0 +0.139; von 1862 ab -0.90 +0.207.

	g	p	ρ	Corr.		corr. Werthe	
1855.11	5	140°44	5.613	-0.13	-0.053	140°92	5.551
56.34	6	140.21	5.554	-0.15	-0.063	140.69	5.492
58.15	5	139.49	5.332	+0.80	+0.097	139.97	5.270
63.05	9	139.66	5.684	+1.40	-0.131	140.14	5.622
65.17	5	138.82	5.673	+0.97	+0.013	139.30	5.611
66.84	7	137.43	5.794	+0.57	-0.030	137.91	5.732
68.22	4	136.15	5.749	+0.07	-0.037	136.63	5.687
70.70	6	133.48	5.817	-0.26	-0.087	133.96	5.755
72.73	6	132.10	5.639	-0.47	-0.015	132.58	5.577
74.71	7	131.07	5.692	+0.12	-0.165	131.55	5.630
76.99	4	130.72	5.519	+0.66	-0.035	131.20	5.457
78.12	4	130.03	5.652	+2.00	-0.153	130.51	5.590

Corr. im Positionswinkel +0.48 ±0.21; mittl. F. der Gewichtseinheit ±1.74
 „ in Distanz -0.062 ±0.021 „ „ „ „ ±0.174.

Es zeigt sich nämlich, dass nach Anbringung der provisorischen Correctionen die zwei genannten Perioden auseinanderzuhalten nicht mehr notwendig ist.

Das letzte angeführte Jahresmittel verdanke ich einer brieflichen Mittheilung Dembowski's. Ich lasse die mitgetheilten Beobachtungen, ebenso wie ich es bei dem Sterne *B* gethan habe, folgen.

$\frac{A+B}{2}$. . C		
1877.835	8 ^h 14 ^m	500	5.41	130.9
78.140	6 10	500	5.27	131.8
78.216	8 38	500	5.53	130.2
78.298	9 0	500	5.57	130.8

6. Dunér.

Provis. Corr.: -1.82, +0.187.

	g	p	ρ	Corr.		corr. Werthe	
1869.37	3	133°06	5.578	+1.68	+0.195	133°59	5.541
70.27	1	134.08	5.547	-0.41	+0.199	134.61	5.510
71.28	2	133.53	5.687	-0.99	+0.026	134.06	5.650
72.33	2	132.58	5.772	-0.72	-0.126	133.11	5.735
74.29	2	131.53	5.574	-0.33	-0.029	132.06	5.537
75.31	6	131.18	5.675	+0.07	-0.168	131.71	5.638
76.29	4	130.08	5.585	+1.37	-0.097	130.61	5.548
78.29	3	130.23	5.500	+1.88	+0.008	130.76	5.463

Corr. im Positionswinkel $+0^{\circ}53 \pm 0^{\circ}38$; mittl. F. der Gewichtseinheit $\pm 1^{\circ}84$
 „ in Distanz $-0^{\circ}037 \pm 0^{\circ}048$ „ „ „ „ $\pm 0^{\circ}228$.

Die ermittelten Correctionen sind hier ganz unsicher und ein Gang in den Differenzen zu bemerken, der noch auf eine andere Fehlerquelle schliessen lässt.

Die letzten beiden Jahresmittel sind ebenfalls einer gütigen brieflichen Mittheilung des Herrn Beobachters entnommen, nämlich den Messungen:

	$\frac{A+B}{2} \dots C$				$\frac{A+B}{2} \dots C$		
1876.25	5.63	132.4		1878.27	5.64	132.4	
27	5.37	130.6		28	5.35	131.5	
31	5.29	133.1		31	4.95	132.2	
34	5.30	131.5					

7. Mädler.

		p	ρ	Corr.		Corr. Werthe.
1841.31	5,2	151.15	5.621	-1.64	-0.146	151.26
42.20	5	149.34	5.179	+0.45	+0.388	149.45
43.19	6	150.86	5.280	-0.84	+0.212	150.97
44.39	6	150.82	5.623	-0.75	-0.082	150.93
47.29	1	147.33	5.501	+1.19	+0.198	147.44
51.20	4,3	144.09	5.695	+0.29	+0.063	144.20
52.25	6	141.84	5.491	+0.70	+0.232	141.95
53.25	7,5	140.81	5.256	+0.72	+0.417	140.92
54.28	10	142.10	5.051	-0.36	+0.560	142.21
55.27	4	140.25	5.103	+0.01	+0.448	140.36
56.29	2	139.78	5.428	+0.28	+0.365	139.89
57.27	2	139.28	5.180	+0.78	+0.373	139.39
58.21	3	140.61	4.752	-0.31	+0.674	140.72
59.26	8,6	139.30	4.963	+1.34	+0.457	139.41
60.29	4	140.86	5.050	+0.09	+0.385	140.97
61.25	2	141.43	5.059	-0.27	+0.404	141.54
62.31	3	139.25	5.349	+1.93	+0.164	139.36

Corr. im Positionswinkel $+0^{\circ}11 \pm 0^{\circ}22$; mittl. F. der Gewichtseinheit $\pm 1^{\circ}91$.

Die obigen Jahresmittel sind aus den einzelnen in den Dorpater Beobachtungen mitgetheilten Beobachtungen gebildet worden. Leider ist nicht immer deutlich genug angegeben, auf welchen Punkt der Stern C bezogen worden. Dass offenbare Missverständnisse in dieser Beziehung obgewaltet haben, ist mir sehr wahrscheinlich geworden, denn unter der Bezeichnung II, welche in den späteren Jahren ohne Frage Messungen enthalten, die den Ort von C in Bezug auf $\frac{A+B}{2}$ geben, ist es unter dieser Voraussetzung nicht möglich, einige der früheren Beobachtungen in Einklang zu bringen. Die Mädler'schen Angaben bei anderen Gelegenheiten geben auch keine Aufklärung. So gibt derselbe in Bd. XV der Dorpater Beobachtungen in seinen Zusammenstellungen ausdrücklich auf die Mitte reducirte Werthe. Diese beruhen aber auf einer durchaus unrichtigen Reduction, die mit keiner der verschiedenen möglichen Annahmen auch nur näherungsweise passt.

Die Distanzen stellen sich auf den ersten Blick als wenig zuverlässig dar. Abweichungen von 0.5 bis 0.7 sind keine Seltenheit. In den obigen Correctionen stellt sich diese geringe Genauigkeit der Distanzen auch dar; man kann aber kein gutes Bild davon erhalten, weil, wie gesagt, Unklarheit darüber herrscht, auf welchen Punkt sich die Messungen beziehen und zum Theil gerade dort, wo eine Verschiedenheit in der Annahme gerade auf die Distanzen stark einwirkt. Im Allgemeinen scheint die erforderliche Correction äusserst bedeutend zu sein, und zwar hat Mädler um einen Betrag zu klein gemessen, der wohl als sehr gross bezeichnet werden kann. Aus allen diesen Gründen habe ich die Mädler'schen Distanzen bei der Bildung der corrigirten

Jahresmittel ganz ausgeschlossen. Es wäre vielleicht auch besser gewesen, wenn ich dasselbe mit den Positionswinkeln gethan hätte.

Ausser diesen Messungen sind noch vereinzelte Bestimmungen von verschiedenen Beobachtern vorhanden. Ich habe die meisten uncorrectirt gelassen, nur für einige wenige Beobachter wurden Correctionen angesetzt, die von anderer Seite her gewonnen wurden. Es ist freilich zweifelhaft, ob diese eine wirkliche Verbesserung enthalten.

Mit denselben Hilfsmitteln, die bei dem Sterne *B* gebraucht wurden und in §. 8 ganz kurz angedeutet wurden, habe ich folgende Correctionen gefunden:

Auwers	—1°00	5.0	—0.008	
		5.5	+0.027	
		6.0	+0.052	
Bessel	0°0	—0.040		
Engelmann	—1°24	5.0	+0.203	
		5.5	+0.243	
		6.0	+0.268	
Kaiser	—0°60	5.0	+0.394	+0.357
		5.5	+0.429	+0.392
		6.0	+0.454	+0.417

wobei die zweite Correctionsreihe für die Distanzen sich auf Beobachtungen mit dem Airy'schen Doppelbildmikrometer, die erste auf solche mit dem Fadenmikrometer bezieht.

Ich führe nun diejenigen Beobachtungen an, die im Früheren nicht vorkommen, und die zur Bildung der Jahresmittel herangezogen worden sind, und bemerke, dass bei ihrer Sammlung ebenso wenig Vollständigkeit garantirt wird, wie bei den den Stern *B* betreffenden. Alle einzelnen Bestimmungen beruhen auf neu gebildeten Mittelwerthen und sind auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$ bereits reducirt.

		p	Anzahl	g	p	Anzahl	g
W. Herschel	1781.89	181.73	1	—	—	—	—
"	1802.11	171.78	1	—	—	—	—
<i>h</i> & South	1822.14 ¹	158.28	—	2	—	—	—
South	24.49 ¹	159.75	—	3	—	—	—
"	25.27 ¹	163.27	—	3	—	—	—
<i>h</i>	30.29	159.22	4	4	—	—	—
<i>h</i>	31.15	157.67	3	3	—	—	—
<i>h</i>	32.15	157.07	2	2	—	—	—
Bessel	32.19	153.40	6	12	5.837	6	12
<i>h</i>	33.13	157.25	3	3	—	—	—
Kaiser	40.15	148.00	7	14	5.533	7	14
"	42.35	147.22	6	12	5.589	6	12
"	43.33	148.10	6	12	5.691	6	12
Dölln ²	45.31	149.90	1	1	—	—	—
Hind	45.91	152.69	3	3	—	—	—
Jacob	46.00	149.31	2	2	5.370	2	2
Miller	52.08	146.67	2	2	5.704	2	2
Fletcher	52.49	143.72	3	3	5.337	3	3
Wrottesley	53.23	142.85	3	3	5.723	3	3
Winnecke	55.33	139.91	3	3	5.426	3	3
Jacob	56.21	139.92	4	4	5.389	3	3
Winnecke	56.24	141.73	4	4	5.373	4	4

¹ Da mir die Philos. Trans. nicht zur Hand waren, ist die angenommene Gewichtsahl für *h* & South und South ganz willkürlich.

² Angeführt von O. Σ. im IX. Bande der Pulcow. Beobachtungen.

		p	Anzahl	g	p	Anzahl	g
Jacob	57.90	140.04	3	3	5.335	1	1
Auwers	61.28	140.45	6	12	5.733	6	12
Romberg	63.18	138.50	2	2	5.811	2	2
Knott	63.13	140.81	1	1	5.423	1	1
Kaiser	65.36	—	—	—	5.875	8	24
Engelmann	65.42	138.06	8	16	5.682	7	14
Kaiser	66.24	137.66	5	10	5.752	5	10
"	66.33	136.91	7	14	5.891	9	18
Barclay's Observ.	67.14	138.05	1	1	5.375	2	2
Wilson	72.21	131.36	3	3	5.542	3	3
Wilson & Seabrooke	73.22	131.38	4	4	—	—	—
Gledhill	74.13	132.39	2	2	5.105	2	2
W. & S.	74.17	131.67	2	2	—	—	—
W. & S.	75.27	131.44	2	2	5.351	2	2
Jedzejewicz ¹	78.26	131.30	6	6	5.644	6	6
" ¹	80.22	131.79	6	6	5.357	6	6

Aus allen den im Vorhergehenden angeführten Messungsergebnissen wurden die provisorischen Jahresmittel dadurch gewonnen, dass die mit den provisorischen Correctionen versehenen Messungen zu Mitteln vereinigt worden sind und zwar nach Massgabe folgender relativer Gewichtszahlen:

ein Abend bei W. Σ , O. Σ , D, Δ , Du und S erhielt das Gewicht 5
 " " " Auwers, Bessel, Engelmann, Kaiser " " " 3,

alle übrigen das Gewicht 1. Immer wurden die Beobachtungen desselben Jahres zusammengefasst, mit Ausnahme der Jahre 1822—25, 30—31, 66—67, 76—77, 79—80, welche wegen zu geringer Anzahl in Mittelwerthe zusammengezogen worden sind.

In gleicher Weise sind die corrigirten Jahresmittel aus den corrigirten, im Vorhergehenden angeführten, Positionswinkeln und Distanzen gebildet worden, es sind also auch, wie erwähnt, die Mädler'schen Positionswinkel benutzt, dagegen dessen Distanzen ausgeschlossen worden. Was die bei Bildung der Mittelwerthe in Anwendung gebrachten Gewichte betrifft, so ergeben die Quadrate der mittl. F. der Gewichtseinheiten, welche mit den reciproken Gewichten übereinstimmen, die erste Reihe, während die zweite Reihe die wirklich angewandten Gewichte bedeuten.

	Positionswinkel			Distanz	
W. Σ	2.8	5	W. Σ	0.029	5
O. Σ	3.7	4	O. Σ	0.031	5
D.	0.2	10	D.	0.052	4
Δ	3.0	5	Δ	0.075	5
Du.	3.4	4	Du.	0.009	3
S.	2.7	5	S.	0.030	5
Mädler	3.6	3	Mädler	0	0

Die Abweichung der angenommenen von den berechneten Gewichten bedarf keiner weiteren Erklärung, da die letzteren nach denselben Maximen entstanden sind, wie bei der betreffenden Abschätzung bei dem Sterne B.

¹ Laut Angabe des Beobachters in den Astron. Nachr. wurde die Distanz um +0.061 corrigirt.

N a c h t r a g.

Herr Geheimrath O. Struve hatte die grosse Gefälligkeit, auf mein Ersuchen, in den Originaltagebüchern von W. Struve nachzusehen, aber nichts gefunden, was auf ein Versehen von 10° bei den Beobachtungen von 1826 hindeuten könnte. Jedoch theilt mir genannter Herr weiter mit: „Eine feste Beobachtungsmethode, besonders für nahe Objecte, hat sich für W. Struve offenbar erst im Frühjahr 1827 herausgebildet. Aus diesem Grunde dürfen alle Mikrometermessungen aus den Jahren 1825 und 1826 nicht auf denselben Grad von Genauigkeit Anspruch machen, wie die späteren, und Sie wären daher vollkommen gerechtfertigt, wenn Sie den Messungen von 1826 ein geringeres Gewicht ertheilen oder dieselben ganz ausschliessen.“

A n h a n g.

1. f-Tafel.

q	$\log f$	q	$\log f$	q	$\log f$	q	$\log f$
-0.125	0.6352 ⁷⁴	+0.030	0.4456 ⁵¹	+0.125	0.3571 ⁴²	+0.220	0.2822 ³⁷
-0.120	0.6278 ⁷³	+0.035	0.4405 ⁵¹	+0.130	0.3529 ⁴²	+0.225	0.2785 ³⁶
-0.115	0.6205 ⁷³	+0.040	0.4355 ⁵⁰	+0.135	0.3487 ⁴²	+0.230	0.2749 ³⁶
-0.110	0.6134 ⁷¹	+0.045	0.4305 ⁵⁰	+0.140	0.3445 ⁴²	+0.235	0.2713 ³⁶
-0.105	0.6063 ⁷¹	+0.050	0.4256 ⁴⁹	+0.145	0.3403 ⁴²	+0.240	0.2678 ³⁵
-0.100	0.5994 ⁶⁹	+0.055	0.4207 ⁴⁸	+0.150	0.3362 ⁴¹	+0.245	0.2642 ³⁶
-0.095	0.5925 ⁶⁹	+0.060	0.4159 ⁴⁸	+0.155	0.3322 ⁴⁰	+0.250	0.2607 ³⁵
-0.090	0.5857 ⁶⁸	+0.065	0.4111 ⁴⁸	+0.160	0.3281 ⁴¹	+0.255	0.2572 ³⁵
-0.085	0.5791 ⁶⁶	+0.070	0.4064 ⁴⁷	+0.165	0.3241 ⁴⁰	+0.260	0.2538 ³⁴
-0.080	0.5725 ⁶⁶	+0.075	0.4017 ⁴⁷	+0.170	0.3202 ³⁹	+0.265	0.2503 ³⁵
-0.075	0.5659 ⁶⁶	+0.080	0.3970 ⁴⁷	+0.175	0.3162 ⁴⁰	+0.270	0.2469 ³⁴
-0.070	0.5595 ⁶⁴	+0.085	0.3924 ⁴⁶	+0.180	0.3123 ³⁹	+0.275	0.2435 ³⁴
-0.065	0.5532 ⁶³	+0.090	0.3879 ⁴⁵	+0.185	0.3085 ³⁸	+0.280	0.2402 ³³
-0.060	0.5469 ⁶³	+0.095	0.3834 ⁴⁵	+0.190	0.3046 ³⁸	+0.285	0.2368 ³⁴
-0.055	0.5407 ⁶²	+0.100	0.3789 ⁴⁵	+0.195	0.3008 ³⁸	+0.290	0.2335 ³³
-0.050	0.5346 ⁶¹	+0.105	0.3745 ⁴⁴	+0.200	0.2970 ³⁸	+0.295	0.2302 ³³
-0.045	0.5285 ⁶⁰	+0.110	0.3701 ⁴⁴	+0.205	0.2933 ³⁷	+0.300	0.2269 ³³
-0.040	0.5225 ⁵⁹	+0.115	0.3657 ⁴⁴	+0.210	0.2895 ³⁸	+0.305	0.2237 ³²
-0.035	0.5166 ⁵⁸	+0.120	0.3614 ⁴³	+0.215	0.2858 ³⁷		
-0.030	0.5108 ⁵⁸	+0.125	0.3571 ⁴³	+0.220	0.2822 ³⁶		

2. Die neuesten Beobachtungen von O. Struve.

Nach brieflicher Mittheilung.

				Observ.		Corrig.	
				A. B.			
1875.27	April 8	8 ^h 19 ^m	VI	$\rho = 0.69$	$p = 124.2$	$\rho = 0.64$	$p = 131.4$
.27	9	8 15	"	.69	124.6	.65	131.6
.29	17	9 2	"	.70	126.2	.65	134.4
76.29	15	8 50	"	.77	110.3	.70	117.6
.29	17	8 52	"	.75	113.5	.68	121.3
77.25	3	8 8	"	.79	100.7	.72	107.5
.25	4	8 1	"	.87	103.3	.50	110.7
.31	26	10 7	"	.79	102.6	.73	105.4
78.27	10	7 56	"	.84	95.9	.74	102.1
.29	18	9 1	"	.85	95.9	.76	99.3
.32	29	10 10	"	.85	94.1	.78	96.1
79.27	7	7 40	"	.84	86.4	.77	91.2
.27	8	7 50	"	.82	88.1	.75	92.8
.33	30	12 10	"	.81	89.6	.78	91.5

				Observ.		Corrig.	
				A. C.			
1877·25	April 3	8 ^h 13	VI	$\rho = 5^{\circ}77$	$p = 130^{\circ}2$	$\rho = 5^{\circ}83$	$p = 129^{\circ}9$
·25	4	8 6	"	·79	130·4	·86	130·0
·31	26	10 12	"	·62	128·5	·64	129·2
78·27	10	8 1	"	·63	132·0	·70	131·4
·29	18	9 5	"	·67	131·0	·71	131·2
·32	29	10 18	"	·54	128·9	·56	129·6
79·27	7	7 45	"	·71	132·3	·80	131·5
·27	8	7 56	"	·68	130·6	·75	130·0
·33	30	10 17	"	·47	129·4	·49	130·1

				B. C.			
1877·25	April 3	8 ^h 15	VI	$\rho = 5^{\circ}11$	$p = 134^{\circ}0$	$\rho = 5^{\circ}18$	$p = 133^{\circ}2$
·25	4	8 8	"	·12	133·1	·19	132·3
·31	26	10 14	"	·00	130·9	·01	131·6
78·27	10	8 4	"	·07	134·6	·15	133·6
·29	18	9 8	"	·01	134·8	·05	134·7
·32	29	10 20	"	4·94	132·6	4·96	133·2
79·27	7	7 47	"	5·14	136·4	5·24	135·0
·28	8	7 58	"	·14	135·2	·16	134·1
·33	30	10 19	"	·06	134·5	·08	135·0

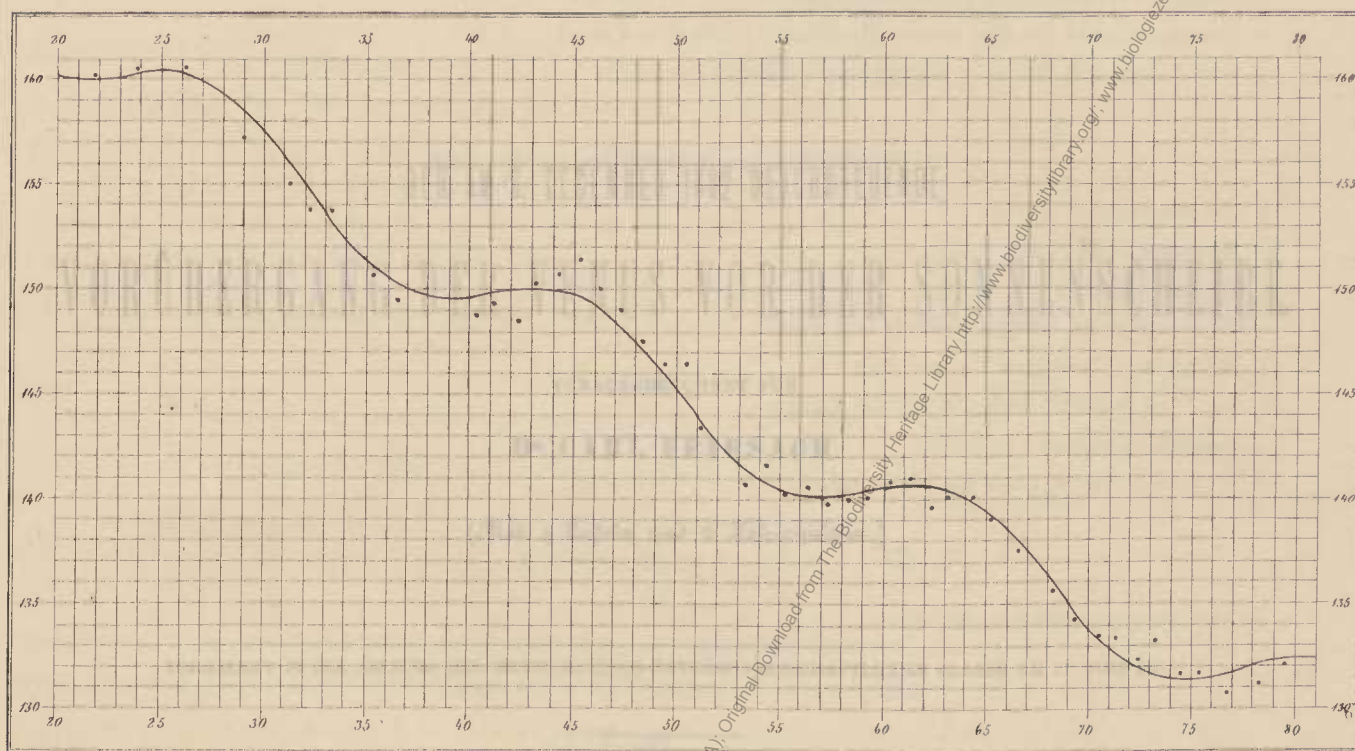
				$\frac{A+B}{2} \cdot C.$			
1875·27	April 8	8 ^h 24	VI	$\rho = 5^{\circ}64$	$p = 133^{\circ}6$	$\rho = 5^{\circ}68$	$p = 133^{\circ}2$
·27	9	8 24	"	·80	132·5	·86	132·1
·29	17	9 8	"	·35	131·3	·39	131·5
76·29	15	8 56	"	·37	132·7	·41	132·6
·29	17	8 57	V	·40	131·7	·43	131·6

Erklärung der Tafel.

Die erste Figur stellt die Positionswinkel des Sternes *C*, bezogen auf die Mitte von *A* und *B*, als Function der Zeit dar. Die gezeichnete Curve ist nach der Ephemeride III (p. 222) construirt, während die einzelnen Punkte die beobachteten aber wegen der constanten Fehler corrigirten Jahresmittel (p. 220) darstellen. Für die Ordinaten wurde der Grad, für die Abscissen ein Jahr als Längeneinheit genommen.

Die zweite Figur verdeutlicht die analogen Verhältnisse für die Distanzen. Die Curve bezieht sich also auf die Formel *B* (p. 225), die Punkte auf die corrigirten Jahresmittel (p. 226). Während die Längeneinheit für die Abscissen dieselbe geblieben ist wie früher, sind die Ordinaten in 0^m02 ausgedrückt worden.

POSITIONSWINKEL.



DISTANZEN.

