

DER AM 6. DECEMBER 1882 BEVORSTEHENDE  
**VORÜBERGANG DER VENUS VOR DER SONNENSCHIBE.**

VORAUSBERECHNET VON

**DR. CARL FRIESACH.**

(Mit 4 Tafeln und 6 Holzschnitten.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 17. JUNI 1881.

**I. Einleitung. Zeichen und Formeln.**

**a) Geocentrische Coordinaten der Sonne.**

- ⊙ Scheinbare Länge.  
 B „ Breite.  
 A „ Rectascension.  
 D „ Declination.  
 R Entfernung (mittlere Entfernung = 1).  
 R' Scheinbarer Halbmesser.  
 II Äquatorial-Horizontalparallaxe.  
 II' Horizontalparallaxe für die geographische Breite  $\varphi$ .  
 $\varepsilon$  Scheinbare Schiefe der Ekliptik.  
 $\theta$  Winkel zwischen dem Breiten- und Declinationskreise der Sonne:

$$\text{tang } \theta = \text{tang } \varepsilon \cos \odot \quad \dots(1)$$

**b) Geocentrische Coordinaten des Planeten.**

- ⊙ Scheinbare Länge.  
 $\beta$  „ Breite.  
 $\alpha$  „ Rectascension.  
 $d$  „ Declination.  
 r Entfernung.  
 r' Scheinbarer Halbmesser.  
 $\pi$  Äquatorial-Horizontalparallaxe.  
 $\pi'$  Horizontalparallaxe für die geographische Breite  $\varphi$ .  
 $\zeta$  Abstand vom geocentrischen Zenithe.

- v Winkel zwischen dem Declinationskreise des Planeten und dem denselben mit dem geocentrischen Zenithe verbindenden grössten Kreise.
- σ Stundenwinkel für den ersten Meridian (jenen von Paris).
- s Stundenwinkel für die geographische Länge λ.

c) **Coordinten des Beobachtungsortes. Zeit.**

- φ Geographische Breite.
- φ' Geocentrische "
- φ̄ Excentrische "
- λ Geographische Länge (östlich von Paris).
- T Normalzeit (mittlere Pariser Zeit).
- Σ = T+λ mittlere Ortszeit für die Länge λ.
- t Normal (Pariser) Sternzeit.
- t = t+λ Orts-Sternzeit für die Länge λ.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= t - a \\ s &= t - a = t - \lambda - a \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

e Abplattungseoefficient der Erde  $\left( = \frac{1}{300} \right)$ .

$$\text{tang } \varphi' = (1 - e) \text{ tang } \bar{\varphi} = (1 - e)^2 \text{ tang } \varphi. \dots(3)$$

$$\pi' - \Pi' = (\pi - \Pi) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\cos \varphi'}. \dots(4)$$

Tafel zur Auffindung von φ' und φ̄.

φ	φ̄	φ	φ'	φ̄	
0° 0'	0° 0' 0	0° 0' 0	50° 0'	49° 48' 7	49° 54' 3
5 0	4 58·0	4 59·0	55 0	54 49·2	54 54·6
10 0	9 56·1	9 58·0	60 0	59 50·0	59 55·0
15 0	14 54·3	14 57·1	65 0	64 51·2	64 55·6
20 0	19 52·6	19 56·3	70 0	69 52·6	69 56·3
25 0	24 51·2	24 55·6	75 0	74 54·3	74 57·2
30 0	29 50·1	29 55·0	80 0	79 56·4	79 58·0
35 0	34 49·2	34 54·6	85 0	84 57·6	84 59·0
40 0	39 48·7	39 54·4	90 0	90 0·0	90 0·0
45 0	44 48·5	44 54·3			

d) **Relative geocentrische Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne.**

Δ Abstand } stets positiv.  
 K kleinster Abstand }

U } Positionswinkel in Bezug auf den { Breitenkreis } der Sonne.  
 u } { Declinationskreis }

$$u = U - \theta. \dots(5)$$

W } Winkel zwischen der Richtung der relativen Planetenbewegung und dem { Breitenkreise } der  
 w } { Declinationskreise } der Sonne.

v Geschwindigkeit dieser Bewegung (stets positiv).

$$w = W - \theta. \dots(6)$$

Zur Erläuterung dient nebenstehende Figur, in welcher  $S$  der geocentrische Ort  $\left\{ \begin{matrix} \text{der Sonne} \\ \text{des Planeten} \end{matrix} \right\}$ ,  $n's'$  der Breitenkreis,  $ns$  der Declinationskreis der Sonne,  $xy$  eine Tangente der relativen Planetenbahn im Punkte  $P$ ,  $SP = \Delta$ ,  $\sphericalangle s'SP = U$ .

Je nachdem man den Breiten- oder den Declinationskreis der Sonne als Abscissenaxe annimmt, ergeben sich für die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten die Ausdrücke:<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} B &= B - \beta \\ \Lambda &= (\odot - \circ) \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

oder

$$\left\{ \begin{aligned} \delta &= D - d - \cos d \sin D (A - a)^2 \frac{\sin 1''}{2} \\ \alpha &= (A - a) \cos d \end{aligned} \right\} \dots (7')$$

Die Differentialquotienten:

$$M = \frac{dB}{dT}, \quad N = \frac{d\Lambda}{dT}, \quad m = \frac{d\delta}{dT}, \quad n = \frac{d\alpha}{dT}$$

erweisen sich als die rechtwinkligen Componenten der Geschwindigkeit  $v$ .

Zwischen obigen Grössen bestehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} B &= \Delta \cos U \\ \Lambda &= \Delta \sin U \end{aligned} \right\} \dots (8) \quad \left. \begin{aligned} \delta &= \Delta \cos u \\ \alpha &= \Delta \sin u \end{aligned} \right\} \dots (8')$$

$$\left. \begin{aligned} M &= v \cos W \\ N &= v \sin W \end{aligned} \right\} \dots (9) \quad \left. \begin{aligned} m &= v \cos w \\ n &= v \sin w \end{aligned} \right\} \dots (9')$$

e) Der geocentrische Durchgang.

Die Hauptmomente des Vorüberganges sind die zwei äusseren und die zwei inneren Ränderberührungen, welche, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, als äusserer und innerer Eintritt, innerer und äusserer Austritt bezeichnet werden, und die Zeit des kleinsten Abstandes oder der grössten Phase. Die Beziehung auf die vier Berührungen wird der Reihe nach durch die den Grössen  $B, \Lambda, \delta, \alpha, \Delta, u, T$  etc. anzuhängenden Zeiger 1, I, II und 2 angedeutet. Der Zeiger  $k$  bezieht sich auf die grösste Phase. 1, I, II, 2 werden allgemein unter dem Zeichen  $c$  (Contact) zusammengefasst.

Die Berechnung des geocentrischen Durchganges hat sich vornehmlich mit folgenden zwei Aufgaben zu beschäftigen:

Erstens: Für eine gegebene Normalzeit  $T$ , die Werthe  $\Delta$  und  $u$  zu bestimmen.

Zweitens: Zu einem gegebenen  $\Delta$  oder  $u$  die entsprechende Normalzeit  $T$  zu finden.

Die Lösung der ersteren Aufgabe ergibt sich aus den Gleichungen (8') oder aus (8) nebst (5).

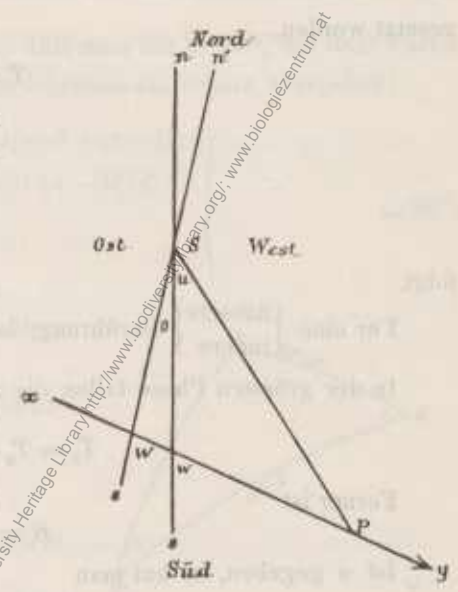
Um die einem gegebenen  $\Delta$  oder  $u$  entsprechende Normalzeit  $T$  zu finden, setze man  $T = T_0 + \tau$ , wo  $T_0$  einen genäherten Werth von  $T$  bezeichnet. Dann ist, für ein gegebenes  $\Delta$ :

$$\Delta^2 = (B_0 + M\tau)^2 + (\Lambda_0 + N\tau)^2 = (\delta_0 + m\tau)^2 + (\alpha_0 + n\tau)^2,$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichungen (8), (9), (8'), (9'), und nachdem

$$\frac{\Delta_0 \sin(W - U_0)}{\Delta} = \frac{\Delta_0 \sin(w - u_0)}{\Delta} = \pm \sin \psi, \dots (10)$$

<sup>1</sup> Bezüglich der Entwicklung der hier angeführten Formeln, erlaube ich mir auf meine „Theorie der Planetenvorübergänge“ (Leipzig 1876, Verlag von W. Engelmann) zu verweisen.



gesetzt worden,

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 - \frac{\Delta_0}{v} \cos(W - U_0) \mp \frac{\Delta \cos \psi}{v} \\ &= T_0 - \frac{\Delta_0}{v} \cos(w - u_0) \mp \frac{\Delta \cos \psi}{v} \end{aligned} \right\} \dots(11)$$

$$dT = \mp \frac{d\Delta}{v \cos \psi} \dots(12)$$

folgt.

Für eine  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{array} \right\}$  Berührung, ist  $\Delta = R \pm r$ .

In der grössten Phase fallen die zwei durch (11) gegebenen Werthe in Einen zusammen, und ist daher:

$$T_k = T_0 - \frac{\Delta_0}{v} \cos(W - U_0) = T_0 - \frac{\Delta_0}{v} \cos(w - u_0). \dots(13)$$

Ferner ist

$$K = \pm \Delta_0 \sin(W - U_0) = \pm \Delta_0 \sin(w - u_0). \dots(14)$$

Ist  $u$  gegeben, so hat man

$$\text{tang}(u + \theta) = \frac{\Lambda_0 + N\tau}{B_0 + M\tau} \text{ oder } \text{tang } u = \frac{\alpha_0 + n\tau}{\delta_0 + m\tau},$$

und hieraus:

$$T = T_0 + \frac{\Delta_0 \sin(u + \theta - U_0)}{v \sin(W - U_0)} = T_0 + \frac{\Delta_0 \sin(u - u_0)}{v \sin(w - u)} \dots(15)$$

$$dT = \frac{\Delta_0 \sin(u - u_0) du}{\sin^2(w - u)} = \frac{K du}{\sin^2(w - u)}. \dots(16)$$

Um die Normalzeit  $T$  befindet sich der Planet im geocentrischen Zenithe des Oberflächenortes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = d \\ \lambda = -\sigma \end{array} \right\}. \dots(17)$$

f) Parallaktische Coordinaten.

Die den geocentrischen  $\Delta, u, a$  etc. analogen parallaktischen Grössen werden durch  $\Delta', u', d, a'$  etc., die Normalzeiten der parallaktischen Berührungen und grössten Phase durch  $T_e$  und  $T_k$  bezeichnet.

Analog den Gleichungen (8), (9') ist:

$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \Delta' \cos u' \\ \alpha' &= \Delta' \sin u' \end{aligned} \right\} \dots(18)$$

$$\left. \begin{aligned} m' &= \frac{d\delta'}{dT} = v' \cos w' \\ n' &= \frac{d\alpha'}{dT} = v' \sin w' \end{aligned} \right\} \dots(19)$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Ausdrücke für  $d', D', a', A'$  ergeben sich für  $\delta', \alpha'$  nachstehende, sehr genaue Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \delta - \Pi [(q-1) \cos d + \delta \sin d \sin 1''] (1-e) \sin \bar{\varphi} - \Pi [(q-1) \sin d - \delta \cos d \sin 1''] \cos \bar{\varphi} \cos s \\ &\quad - \Pi (q-2) \alpha \text{ tang } d \sin 1'' \cos \bar{\varphi} \sin s \\ \alpha' &= \alpha + \Pi q \alpha \sin d \sin 1'' (1-e) \sin \bar{\varphi} + \Pi (1-q \sin d^2) \frac{\alpha \sin 1''}{\cos d} \cos \bar{\varphi} \cos s \\ &\quad + \Pi [q-1 - \delta \text{ tang } d \sin 1''] \cos \bar{\varphi} \sin s \end{aligned} \right\} \dots(20)$$

wo

$$q = \frac{\pi}{\Pi}. \dots(21)$$

Diese Gleichungen können in die folgenden transformirt werden:

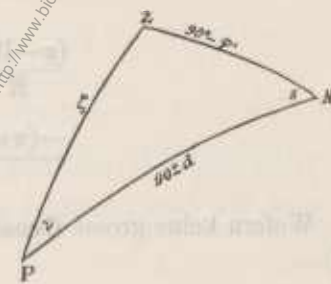
$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \delta + \Pi [\mathfrak{X} \sin \varphi + \mathfrak{B} \cos \bar{\varphi} \cos (\lambda + \mathfrak{C})] = \delta + \Pi x \\ \alpha' &= \alpha + \Pi [\mathfrak{X}' \sin \varphi + \mathfrak{B}' \cos \bar{\varphi} \sin (\lambda + \mathfrak{C}')] = \alpha + \Pi y \end{aligned} \right\} \dots(20')$$

In allen Fällen, wo nicht die äusserste Genauigkeit gefordert wird, darf man die in (20) mit dem Factor  $\sin 1''$  behafteten Glieder vernachlässigen, wodurch diese Gleichungen in folgende einfachere übergehen:

$$\begin{aligned} \delta' &= \delta + (\pi - \Pi) [(1 - e) \cos d \sin \bar{\varphi} - \sin d \cos \bar{\varphi} \cos s] = \delta + (\pi - \Pi) \xi \\ &= \delta + (\pi' - \Pi') [\cos d \sin \varphi' - \sin d \cos \varphi' \cos s] = \delta + (\pi' - \Pi') \xi' \\ \alpha' &= \alpha + (\pi - \Pi) \cos \bar{\varphi} \sin s = \alpha + (\pi - \Pi) \eta \\ &= \alpha + (\pi' - \Pi') \cos \varphi' \sin s = \alpha + (\pi' - \Pi') \eta' \end{aligned} \quad \dots(20'')$$

bei deren Anwendung,  $\alpha'$  und  $d'$  im ungünstigsten Falle, etwa um  $0.1$  fehlerhaft erhalten werden.

In dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Nordpole, dem geocentrischen Zenithe und dem Planeten ist:

$$\begin{aligned} \cos d \sin \varphi' - \sin d \cos \varphi' \cos s &= \sin \zeta \cos \nu = \xi' \\ \cos \varphi' \sin s &= \sin \zeta \sin \nu = \eta' \\ \sin d \sin \varphi' + \cos d \cos \varphi' \cos s &= \cos \zeta = \sqrt{1 - \xi'^2 - \eta'^2} \end{aligned} \quad \dots(22)$$


$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= \cos d \sin \zeta \cos \nu + \sin d \cos \zeta = \xi' \cos d + \sqrt{1 - \xi'^2 - \eta'^2} \cdot \sin d \\ \cos \varphi' \cos s &= \cos d \cos \zeta - \sin d \sin \zeta \cos \nu = \sqrt{1 - \xi'^2 - \eta'^2} \cdot \cos d - \xi' \sin d \\ \cos \varphi' \sin s &= \sin \zeta \sin \nu = \eta' \end{aligned} \quad \dots(23)$$

Aus (18) und (20') folgt:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos u' &= \Delta \cos u + \Pi x \\ \Delta' \sin u' &= \Delta \sin u + \Pi y \end{aligned} \quad \dots(24) \quad \begin{aligned} \Delta' \cos(u' - u) &= \Delta + \Pi(x \cos u + y \sin u) \\ \Delta' \sin(u' - u) &= \Pi(y \cos u - x \sin u) \end{aligned} \quad \dots(25)$$

$$\Delta'^2 = \Delta^2 + 2\Pi(\delta x + \alpha y) + \Pi^2(x^2 + y^2) \quad \dots(26) \quad \text{tang}(u' - u) = \frac{\Pi(y \cos u - x \sin u)}{\Delta + \Pi(x \cos u + y \sin u)} \quad \dots(27)$$

Aus (18), (20'') und (22) erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos u' &= \Delta \cos u + (\pi - \Pi) \xi = \Delta \cos u + (\pi' - \Pi') \xi' \\ \Delta' \sin u' &= \Delta \sin u + (\pi - \Pi) \eta = \Delta \sin u + (\pi' - \Pi') \eta' \end{aligned} \quad \dots(24)$$

$$\text{tang}(u' - u) = \frac{(\pi - \Pi)(\eta \cos u - \xi \sin u)}{\Delta + (\pi - \Pi)(\xi \cos u + \eta \sin u)} = \frac{(\pi' - \Pi') \sin \zeta \sin(\nu - u)}{\Delta + (\pi' - \Pi') \sin \zeta \cos(\nu - u)} \quad \dots(27')$$

$$\Delta'^2 = \Delta^2 + 2(\pi' - \Pi') \Delta \sin \zeta \cos(\nu - u) + (\pi' - \Pi')^2 \sin^2 \zeta \quad \dots(26')$$

Für  $m'$ ,  $n'$  hat man die genäherten Werthe:

$$\begin{aligned} m' &= m + \mu(\pi - \Pi) \sin d \cos \bar{\varphi} \sin s = v' \cos w' \\ n' &= n + \mu(\pi - \Pi) \cos \bar{\varphi} \cos s = v' \sin w' \end{aligned} \quad \dots(28)$$

und hieraus:

$$v' = v \sqrt{1 + \frac{2\mu}{v} (\pi - \Pi) \cos \bar{\varphi} (\cos \omega \sin d \sin s + \sin \omega \cos s) + \frac{\mu^2 (\pi - \Pi)^2}{v^2} \cos^2 \bar{\varphi} (\sin^2 d \sin^2 s + \cos^2 s)} \quad \dots(29)$$

$$\text{tang}(w' - w) = \frac{\mu(\pi - \Pi) \cos \bar{\varphi} (\cos w \cos s - \sin d \sin w \sin s)}{v + \mu(\pi - \Pi) \cos \bar{\varphi} (\sin d \cos w \sin s + \sin w \cos s)} \quad \dots(30)$$

wo

$$\log \mu = 0.86258 - 5 \quad \dots(31)$$

### Der parallaktische Durchgang.

#### g) Der parallaktische Durchgang für einen gegebenen Beobachtungsort.

Die einer gegebenen Normalzeit entsprechenden Grössen  $\delta'$ ,  $\alpha'$  ergeben sich aus den Gleichungen (20'), worauf man  $\Delta'$ ,  $u'$  aus (18) findet.

Für die Normalzeit einer parallaktischen Berührung hat man die allgemeine Formel:

$$T_c = T_c + \tau = T_c + f \sin \bar{\varphi} + g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + h) + h \pm [f \sin \bar{\varphi} + g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + \sigma)]^2 \dots(32)^1$$

Zur Berechnung der  $f, g$  etc. dienen folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta \sin d &= p \cos q \\ \alpha &= p \sin q \\ \Delta_c v \cos(W - U_c) + \frac{v^2 \tau}{2} &= \mathfrak{N} \\ \frac{(\pi - \Pi)p}{\mathfrak{N}} &= g \\ -\frac{(\pi - \Pi)(1 - e)\delta \cos d}{\mathfrak{N}} &= f \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t - a &= \sigma \\ t - a + q &= h \\ -\frac{(\pi - \Pi)^2}{2\mathfrak{N}} &= e \\ \frac{(\pi - \Pi) \sin d}{\sqrt{\pm \mathfrak{N}}} &= f \\ \frac{(\pi - \Pi) \cos d}{\sqrt{\pm \mathfrak{N}}} &= g \end{aligned} \dots(33)$$

Wofern keine grosse Genauigkeit erforderlich ist, kann man sich der Näherungsformel

$$T_c = T_c + f_c \sin \bar{\varphi} + g_c \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + h_c) \dots(34)$$

bedienen.

Diese Formel ist um so weniger genau, je grösser  $K$  ist. Bei dem Venusvorübergange 1874 war  $K = 13'46''$  und konnte obiger Ausdruck im ungünstigsten Falle um  $36'$  fehlerhaft sein. Für den Durchgang 1882 ist  $K = 10'41''$  und kann sonach der Fehler höchstens  $12''$  betragen. Bei Merkurvorübergängen beträgt die Unsicherheit der Formel (33), für  $K = 15'$ , höchstens  $1'3$ . Es folgt hieraus, dass für den Merkurdurchgang 1881, wo  $K < 4'$ , die Berührungszeiten, mit hinreichender Schärfe, nach dieser Formel berechnet werden können.

Eine ähnliche Formel wie (32) kann für die einer beliebigen parallaktischen Distanz  $\Delta'$  entsprechende Normalzeit aufgestellt werden, vorausgesetzt, dass  $\Delta'$  nicht kleiner als  $K$  sei.

Soll die einem gegebenen  $u'$  entsprechende Zeit  $T'$  gefunden werden, so setze man  $T' = T_0 + \tau$ . Dann ist

$$\tau = \frac{\Delta_0 \sin(u' - u_0) + \Pi(x \sin u' - y \cos u')}{v \sin(w - u')} \dots(35)$$

Diese Gleichung kann auf die Form

$$\tau = \mathfrak{D} + a \sin \bar{\varphi} + b \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + c)$$

gebracht werden. Wählt man für  $T_0$  jene Zeit, welcher ein dem gegebenen  $u'$  gleiches  $u$  entspricht, so hat man

$$T = T_0 + a \sin \bar{\varphi} + b \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + c).$$

Für die Zeit der parallaktischen grössten Phase gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu \alpha - m \sin d &= p \cos q \\ \delta \sin d + n &= p \sin q \\ -\frac{(\pi - \Pi)(1 - e)m \cos d}{v^2} &= F \\ -\frac{(\pi - \Pi)p}{v^2} &= G \\ t - a + q &= H \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{p(\pi - \Pi)^2}{v^2} (1 - e) \cos d \sin d &= \mathfrak{F} \\ -\frac{p(\pi - \Pi)^2}{v^2} \cos d &= \mathfrak{G} \\ t - a &= \sigma \end{aligned} \dots(36)$$

$$T_k = T_k + F \sin \bar{\varphi} + G \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + H) + \mathfrak{F} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \sin(\lambda + \sigma) + \mathfrak{G} \cos \bar{\varphi}^2 \cos(\lambda + \sigma) \sin(\lambda + \sigma), \dots(37)$$

ferner die Näherungsformel:

$$T_k = T_k + F_k \sin \bar{\varphi} + G_k \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda + H_k) \dots(37')$$

<sup>1</sup> In (32) hat das quadratische Glied das Zeichen  $\pm$ , je nachdem  $\mathfrak{N} \geq 0$ .

h) Anfang und Ende der Hauptmomente auf der Erde überhaupt. Grösstes und kleinstes  $K'$  Längste und kürzeste Dauer des Vorüberganges.

Anfang und Ende der Berührungen und der grössten Phase entsprechen dem Minimum und Maximum von  $T_c$  und  $T_{k'}$ , welche ich mit  $T_c^-$  und  $T_{k'}^-$  bezeichne.

Für  $T_c^-$  und  $T_c^+$  und die dazu gehörigen Beobachtungsorte gelten die genäherten Werthe:

$$T_c' = T_c \mp \frac{\pi - \Pi}{v \cos \psi}, \text{ wo } \sin \psi = \frac{K}{\Delta_c}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 g_c > 0 \\
 \\
 g_c < 0
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Anfang} \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \bar{\varphi} = -\frac{f_c}{g_c} \\ \lambda = 180^\circ - h_c \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Ende} \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \bar{\varphi} = +\frac{f_c}{g_c} \\ \lambda = -h_c \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Anfang} \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \bar{\varphi} = +\frac{f_c}{g_c} \\ \lambda = -h_c \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Ende} \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \bar{\varphi} = -\frac{f_c}{g_c} \\ \lambda = 180^\circ - h_c \end{array} \right.
 \end{array} \quad \dots(38)$$

Für die grösste Phase hat man, wenn man in den zu (37) gehörenden Gleichungen, die Hilfsgrösse  $q$  so bestimmt, dass  $G < 0$  ist, die Näherungswerte:

$$\text{Anfang} \left\{ \begin{array}{l} T_{k'}^- = T_k - \sqrt{F_k^2 + G_k^2} \\ \text{tang } \bar{\varphi} = \frac{F_k}{G_k} \\ \lambda = -H_k \end{array} \right. \quad \text{Ende} \left\{ \begin{array}{l} T_{k'}^+ = T_k + \sqrt{F_k^2 + G_k^2} \\ \text{tang } \bar{\varphi} = -\frac{F_k}{G_k} \\ \lambda = 180^\circ - H_k \end{array} \right. \quad \dots(39)$$

Genauer findet man diese Werthe, indem man die  $f_c, g_c, F_k$  etc. mit den den näherungsweise gefundenen Zeiten entsprechenden  $f, g, F$  etc. vertauscht. Noch genauer erhält man die Maxima und Minima der Berührungszeiten, nachdem  $\varphi$  aus (38) bereits näherungsweise gefunden worden, aus der Gleichung (11), wenn man daselbst

$$\Delta = \Delta_c + (\pi - \Pi) \frac{\cos \bar{\varphi}}{\cos \varphi'}$$

setzt, und die dazu gehörigen Beobachtungsorte ans:

$$\begin{array}{l}
 \text{Anfang des Eintritts} \\
 \text{und} \\
 \text{Ende des Austritts}
 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi' = -\cos d \cos u \\ \sin(t + \lambda - a) = -\frac{\sin u}{\cos \varphi'} \\ \cos(t + \lambda - a) = \frac{\sin d \cos u}{\cos \varphi'} \end{array} \right. \quad \dots(40)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ende des Eintritts} \\
 \text{und} \\
 \text{Anfang des Austritts}
 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi' = \cos d \cos u \\ \sin(t + \lambda - a) = \frac{\sin u}{\cos \varphi'} \\ \cos(t + \lambda - a) = -\frac{\sin d \cos u}{\cos \varphi'} \end{array} \right.$$

Die wegen Veränderlichkeit des parallaktischen Sonnenhalbmessers

$$R' = R + R \Pi \sin 1'' [\sin D \sin \bar{\varphi} + \cos D \cos \bar{\varphi} \cos (t + \lambda - A)]$$

erforderliche Verbesserung der Berührungszeit kann nach Gleichung (12) berechnet werden.

An den Punkten der Erdoberfläche, wo die grösste Phase zuerst und zuletzt gesehen wird, ist  $K' = K$ , und befinden sich Sonne und Planet in dem nämlichen Höhenkreise. Letzteres gilt auch für den Anfang und das Ende der Berührungen.

Die parallaktische kleinste Distanz  $K'$  liegt zwischen den Grenzen  $K_-(\pi - \Pi)$  und  $K_+(\pi - \Pi)$ , und ist

$$\begin{aligned} \text{deren Minimum } K' &= K - (\pi - \Pi) \\ \text{deren Maximum } K' &= K + (\pi - \Pi) \end{aligned}$$

Diese beiden Werthe finden gleichzeitig mit der geocentrischen grössten Phase, d. i. um die Normalzeit  $T_k$ , statt. Die dazu gehörigen Beobachtungsorte ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} \text{für } K'_{-} &: \left\{ \begin{aligned} \sin \varphi' &= -\cos d \cos u_k \\ \sin (t + \lambda - a) &= -\frac{\sin u_k}{\cos \varphi'} \\ \cos (t + \lambda - a) &= \frac{\sin d \cos u_k}{\cos \varphi'} \end{aligned} \right. \\ \text{für } K'_{+} &: \left\{ \begin{aligned} \sin \varphi' &= \cos d \cos u_k \\ \sin (t + \lambda - a) &= \frac{\sin u_k}{\cos \varphi'} \\ \cos (t + \lambda - a) &= -\frac{\sin d \cos u_k}{\cos \varphi'} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad \dots(41)$$

Bezeichnet man den (äusseren oder inneren) Eintritt durch  $e$ , den Austritt mit  $a$ , so folgt aus (32), indem man  $e, f, g$  vernachlässigt:

$$T_{a'} - T_{e'} = T_a - T_e + \bar{f} \sin \bar{\varphi} + \bar{g} \cos \bar{\varphi} \cos (\lambda + \bar{h}), \quad \dots(42)$$

wo

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{g} \sin \bar{h} &= (g \cos h)_{a'} - (g \cos h)_{e'} \\ \bar{g} \cos \bar{h} &= (g \sin h)_{a'} - (g \sin h)_{e'} \\ \bar{f} &= f_{a'} - f_{e'} \end{aligned} \right. \quad \dots(43)$$

und näherungsweise:

$$\tau = T_{a'} - T_{e'} - (T_a - T_e) = f' \sin \bar{\varphi} + g' \cos \bar{\varphi} \cos (\lambda + h'), \quad \dots(44)$$

wo  $f', g', h'$  jene Werthe von  $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$  bezeichnen, welche sich ergeben, wenn man die Zeiger  $e', a'$  mit  $e, a$  vertauscht.

Die kürzeste und längste Dauer des parallaktischen Durchganges entspricht dem Minimum und Maximum von  $T_{a'} - T_{e'}$ , indem man  $h'$  so wählt, dass  $g' < 0$  ist, findet man:

$$\begin{aligned} \text{kürzeste Dauer} &: \left\{ \begin{aligned} T_{a'} - T_{e'} &= T_a - T_e - \sqrt{f'^2 + g'^2} \\ \text{tang } \bar{\varphi} &= \frac{f'}{g'} \\ \lambda &= -h' \end{aligned} \right. \\ \text{längste Dauer} &: \left\{ \begin{aligned} T_{a'} - T_{e'} &= T_a - T_e + \sqrt{f'^2 + g'^2} \\ \text{tang } \bar{\varphi} &= -\frac{f'}{g'} \\ \lambda &= 180^\circ - h' \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad \dots(45)$$



Genauer findet man diese Grössen, wenn man, mittelst der aus (45) erhaltenen  $\bar{\varphi}, \lambda$ , die Zeiten  $T_a, T_e$  berechnet, die dazu gehörigen  $f, g, h$  aufsucht und aus diesen, nach (43),  $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$  bestimmt, welche nun in (45) an die Stelle der  $f', g', h'$  zu treten haben.

Hierzu bemerkt Br. Peter in seiner „Untersuchung des Venus-Vorüberganges 1882“, Folgendes: „Für die Dauer des Durchganges, analog wie für die Contacte und die grösste Phase, die Coefficienten  $\bar{f}$  und  $\bar{g}$  in eine Tabelle zu bringen, wie Friesach in seiner Theorie der Planetenvorübergänge, S. 30, vorschlägt, ist unmöglich, da in dem Ausdrucke etc.“

Diese Bemerkung beruht offenbar auf einem Missverständnisse, da der gefügte Vorschlag in meinem Buche weder auf S. 30 noch sonst irgendwo vorkommt, und die S. 30 erwähnte Tafel nur auf die Berechnung der einzelnen Contacte Bezug hat.

Wie aus (38), (39) und (45) zu ersehen, liegen die Punkte, wo eine Berührung oder die grösste Phase zuerst und zuletzt gesehen wird, und ebenso die Punkte kürzester und längster Dauer des Durchganges, einander nahezu diametral gegenüber.

Von den zwei durch (39) bestimmten Oberflächenpunkten kommt mindestens Einem nur analytische Bedeutung zu, indem entweder für beide oder für einen derselben der Planet in der grössten Phase unter dem Horizonte steht. Ebenso hat der Ort der längsten Dauer nur analytische Bedeutung, da an demselben weder Anfang noch Ende des Durchganges sichtbar ist.

### v) Grenzcurven

#### α. Sichtbarkeitsgrenzen.

Die Sichtbarkeitsgrenzen eines Planetenvorüberganges bestehen aus zwei Curvenpaaren, welche ich mit  $E, A$  und  $O, U$  bezeichne.

Die Curve  $\left\{ \begin{matrix} E \\ A \end{matrix} \right\}$  begreift jene Punkte der Erdoberfläche, welche den äusseren  $\left\{ \begin{matrix} \text{Eintritt} \\ \text{Austritt} \end{matrix} \right\}$  im Horizonte, also im Auf- oder Untergange erblicken, während auf der Curve  $\left\{ \begin{matrix} O \\ U \end{matrix} \right\}$  die  $\left\{ \begin{matrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{matrix} \right\}$  Culmination des Planeten im Horizonte erfolgt.

Für  $\left\{ \begin{matrix} E \\ A \end{matrix} \right\}$  hat man die Gleichung:

$$\cos[(t - \alpha)_c + 15x\tau + \lambda] = -\tan\varphi \tan d_c, \quad \dots(46)$$

wo  $\tau$  die nämliche Bedeutung hat, wie in (32) und in mittlerer Zeit angegeben ist, während  $x$  den Modulus zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit bezeichnet.

Um mittelst dieser Gleichung einen beliebigen Punkt der Curve zu bestimmen, verfähre man so: Nachdem man für  $\varphi$  einen beliebigen Werth angenommen, setze man  $\tau = 0$ , worauf man aus (46) für  $\lambda$  einen genäherten Werth erhält. Mittelst  $\varphi$  und des genäherten  $\lambda$  bestimme man  $\tau$  aus (32), worauf man aus (46) für  $\lambda$  einen genaueren Werth findet, n. s. f.

Für die beiden anderen Curven ist:

$$\begin{aligned} \text{Curve } O & \left\{ \begin{matrix} \lambda = \alpha - t \\ \tan\varphi = -\cot d \end{matrix} \right\} \\ \text{Curve } U & \left\{ \begin{matrix} \lambda = 180^\circ - (t - \alpha) \\ \tan\varphi = \cot d \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad \dots(47)$$

$\left\{ \begin{matrix} E \\ A \end{matrix} \right\}$  weicht wenig von dem grössten Kreise ab, an dessen Pole der äussere  $\left\{ \begin{matrix} \text{Eintritt} \\ \text{Antritt} \end{matrix} \right\}$  im Zenithe stattfindet, während  $\left\{ \begin{matrix} O \\ U \end{matrix} \right\}$  nahezu mit dem Parallelkreise zusammenfällt, dessen Breite  $\varphi = \left\{ \begin{matrix} d_k \pm 90^\circ \\ d_x \mp 90^\circ \end{matrix} \right\}$ , wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem  $d_k$  positiv oder negativ ist.  $\left\{ \begin{matrix} O \\ U \end{matrix} \right\}$  schliesst sich dort, wo Anfang und Ende des Vorüberganges in der  $\left\{ \begin{matrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{matrix} \right\}$  Culmination erfolgt, den Curven  $E$  und  $A$  berührend an.

Die Erdoberfläche wird von den Curven  $E, A, O, U$  in sechs Räume getheilt (s. Taf. I), als da sind:  
 die Dreiecke I und IV,  
 die Zweiecke II und III,  
 die kleinen Dreiecke  $egi$  und  $fhk$ ,

wobei die Punkte  $\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$  und  $\begin{Bmatrix} g \\ h \end{Bmatrix}$  den Anfang und das Ende in der  $\begin{Bmatrix} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{Bmatrix}$  Culmination erblicken, während für  $\begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix}$  der Planet gerade vom Anfange bis zum Ende des Durchganges  $\begin{Bmatrix} \text{über} \\ \text{unter} \end{Bmatrix}$  dem Horizonte bleibt.

Jene sechs Räume haben für die Sichtbarkeit des Vorüberganges folgende Bedeutung:

Für die in I liegenden Orte geht der Planet vor dem Anfange des Durchganges auf, und nach dessen Ende unter. Dieselben sehen daher die ganze Erscheinung von Anfang bis zu Ende.

In II geht der Planet vor dem Anfange auf, und während des Vorüberganges unter. In diesem Raume sieht man daher den Anfang, aber nicht das Ende.

In III ist das Ende, aber nicht der Anfang, sichtbar, weil hier der Aufgang des Planeten nach dem Anfange, der Untergang vor dem Ende stattfindet.

Für IV bleibt der Vorübergang gänzlich unsichtbar; denn hier geht der Planet vor dem Anfange unter und erscheint erst nach dem Ende wieder über dem Horizonte.

Innerhalb des Dreieckes  $egi$  sind nur mittlere Partien des Durchganges, aber weder Anfang noch Ende sichtbar, indem hier der Planet nach dem Anfange auf, und vor dem Ende wieder untergeht.

Das Dreieck  $fhk$  endlich sieht sowohl den Anfang als das Ende, aber doch nicht den ganzen Durchgang, weil daselbst der Planet nach dem Anfange untergeht und vor dem Ende wieder aufgeht.

Zur Bestimmung der Punkte  $e, f, g, h, i, k$  hat man nachstehende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Für } e \text{ und } g: & \begin{cases} \text{tang } \varphi = -\cot d_c \\ t_c + \lambda - a_c + 15 \times \tau = 0 \end{cases} \\ \text{für } f \text{ und } h: & \begin{cases} \text{tang } \varphi = \cot d_c \\ t_c + \lambda - a_c + 15 \times \tau = 180^\circ \end{cases} \end{aligned} \quad \dots(48)$$

wobei zu bemerken, dass für  $\begin{Bmatrix} e \text{ und } f \\ g \text{ „ } h \end{Bmatrix}$ ,  $c = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$  zu setzen ist.  $i$  und  $k$  ergeben sich aus dem nämlichen Gleichungspaare:

$$\begin{cases} \cos [t_1 + \lambda - a_1 + 15 \times \tau_1] = -\text{tang } \varphi \text{ tang } d_1 \\ \cos [t_2 + \lambda - a_2 + 15 \times \tau_2] = -\text{tang } \varphi \text{ tang } d_2 \end{cases} \quad \dots(49)$$

Um diese Gleichungen nach  $\varphi$  und  $\lambda$  aufzulösen, setze man anfänglich  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ . Nun findet man aus (49):

$$\begin{aligned} \text{tang } \lambda &= \frac{\text{tang } d_2 \cos (t-a)_1 - \text{tang } d_1 \cos (t-a)_2}{\text{tang } d_2 \sin (t-a)_1 - \text{tang } d_1 \sin (t-a)_2} \\ \text{tang } \varphi &= -\frac{\cos [(t-a)_1 + \lambda]}{\text{tang } d_1} \end{aligned}$$

Mittelst dieser genäherten  $\varphi, \lambda$  findet man  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , worauf sich  $\varphi, \lambda$  aus (49) mit grösserer Genauigkeit ergeben. Man erhält so zwei Punkte, welche einander nahe diametral gegenüber liegen. Zur Unterscheidung, welcher von beiden den Bedingungen von  $i$  oder  $k$  entspricht, dient die Bemerkung, dass für  $i$ ,  $\sin(\lambda+t-a)_1$  negativ und  $\sin(\lambda+t-a)_2$  positiv ist, während für  $k$  die entgegengesetzten Zeichen gelten.

Für die Curven  $E'$  und  $A'$ , auf welchen der innere Ein- und Austritt im Horizonte erfolgt, gilt gleichfalls die Gleichung (46).

Die Sichtbarkeit der grössten Phase wird durch jene Curve begrenzt, auf welcher die grösste Phase im Horizonte erfolgt.

Ihre Gleichung ist:

$$\cos(t_k + \lambda - a_k + 15\tau) = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} d_k, \quad \dots(50)$$

wo  $\tau = T'_k - T_k$ .

Diese Curve weicht wenig von dem grössten Kreise ab, dessen Pol dort liegt, wo der Planet im Augenblicke der geocentrischen grössten Phase, im Zenithe steht.

β. Curven gleichzeitiger Berührung, gleichzeitiger grösster Phase und gleicher Dauer.

Die Curven gleichzeitiger Berührung ergeben sich näherungsweise aus:

$$\tau = f_c \sin \varphi + g_c \cos \varphi \cos(\lambda + h_c) \quad \dots(51)$$

und entspricht jeder dieser Curven ein bestimmter Werth  $\tau$ .

Diese Gleichung kann auf die Form

$$\cos E = \sin \Phi \sin \varphi + \cos \Phi \cos \varphi \cos(\lambda - \Lambda) \quad \dots(52)$$

gebracht werden, und ist dann, unter der Voraussetzung, dass  $P$  das Zeichen von  $g_c$  habe:

$$\operatorname{tang} \Phi = \pm \frac{f_c}{g_c}, \quad \Lambda = \begin{cases} -h_c \\ 180^\circ - h_c \end{cases}, \quad P = \sqrt{f_c^2 + g_c^2}, \quad \cos E = \pm \frac{\tau}{P}.$$

Es erhellt hieraus, dass die Curven gleichzeitiger Berührung näherungsweise durch ein System von Parallelkreisen dargestellt werden können, dessen Pole (die Punkte  $\Phi$ ,  $\Lambda$ ) mit den in Tafel I, II und III mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  bezeichneten Punkten, wo die Berührungen zuerst und zuletzt erblickt werden, zusammenfallen.

Genauer findet man diese Curven, wenn man in obigen Gleichungen die  $f_c$ ,  $g_c$ ,  $h_c$  mit den variablen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  vertauscht, aus

$$\tau = f \sin \varphi + g \cos \varphi \cos(\lambda + h). \quad \dots(51')$$

Zur Construction dieser Curven in der stereographischen Polarprojection diene Folgendes:

Es sei, auf der Karte,  $P$  der Nord- oder Südpol der Erde,  $O$  der in der nämlichen Halbkugel befindliche Pol des Curvensystems,  $\theta$  der Winkelabstand jener beiden Pole,  $k$  der Halbmesser des Äquators. Man ziehe die Gerade  $PO$  und mache  $Pr = \frac{k \sin \theta}{2 \cos \frac{\theta + E}{2} \cos \frac{\theta - E}{2}}$ , so ist  $r$  der Mittel-

punkt und  $\rho = \frac{k \sin E}{2 \cos \frac{\theta + E}{2} \cos \frac{\theta - E}{2}}$  der Halbmesser des zu beschreibenden Kreises. Ergibt sich

für  $Pr$  ein negativer Werth, so liegt  $r$  von  $P$  aus auf der der Richtung  $PO$  entgegengesetzten Seite der Geraden  $xy$ . Wenn der Halbmesser sehr gross ist, was namentlich dann der Fall ist, wenn  $E$   $90^\circ$  überschreitet, ist es zweckmässig, einzelne Punkte der Curve zu bestimmen. Hierzu ertheile man dem  $\varphi$  einen beliebigen Werth, und berechne aus (51') das dazu gehörige  $\lambda$ .

Für die Punkte der Erdoberfläche, welche die grösste Phase in dem nämlichen Augenblicke  $T_k + \tau$  erblicken, gilt die Näherungsgleichung

$$\left. \begin{aligned} \tau &= F_k \sin \varphi + G_k \cos \varphi \cos(\lambda + H_k) \\ \text{oder genauer} \quad \tau &= F \sin \varphi + G \cos \varphi \cos(\lambda + H) \end{aligned} \right\} \quad \dots(53)$$

welche gleichfalls auf die Form (52) gebracht werden kann.

Dieselben bilden ein System von Parallelkreisen, an deren Polen die grösste Phase zuerst und zuletzt gesehen wird.

Die Curven gleicher Dauer des Durchganges ergeben sich näherungsweise aus der Gleichung (44), welche auch in der Form (52) ausgedrückt werden kann. Man erkennt hieraus, dass die Curven gleicher Dauer näherungsweise durch ein System von Parallelkreisen, deren Pole mit den Punkten der kürzesten und längsten Dauer zusammenfallen, dargestellt werden können.



γ. Curven, auf welchen die Berührungen oder irgend eine parallaktische Distanz in gleichen Höhen stattfinden.

Ihre Gleichung ist:

$$\cos z = \sin d' \sin \varphi + \cos d' \cos \varphi \cos(t + \lambda - a'). \quad \dots(54)$$

Da man aber, näherungsweise, für  $t$  die Sternzeit, welcher eine dem gegebenen  $\Delta'$  gleiche geocentrische Distanz  $\Delta$  entspricht, und für  $d', a'$  die dazu gehörigen  $d, a$  setzen kann, sieht man ein, dass auch diese Curven annähernd durch ein Parallelsystem, an deren Pole die gegebene Phase im Zenithe erfolgt, darzustellen sind. Sie können daher auf dieselbe Art verzeichnet werden, wie die Curven gleichzeitiger Berührung.

Dasselbe gilt von den Curven, auf welchen die parallaktische grösste Phase in gleichen Höhen erscheint. Sie weichen wenig von einem Parallelsysteme ab, dessen Pol den Planeten, um die Zeit  $T_k$  im Zenithe hat.

#### δ. Curven gleicher Parallaxe der Distanz.

1. Für ein gegebenes  $\Delta'$ : In diesem Falle erfordert die Bedingung  $\Delta' - \Delta = \text{Const.}$ , dass  $\Delta$ , also auch die Zeit, constant sei. Für  $\Delta' = R \pm r$ , sind daher diese Curven mit jenen gleichzeitiger Berührung identisch. Ihre strenge Gleichung ist

$$\cos(\nu - u) = \frac{\Delta'^2 - \Delta^2 - (\pi' - \Pi')^2 \sin^2 \zeta}{2\Delta \sin \xi (\pi' - \Pi')} \quad \dots(55)$$

[s. Gl. (26').] Um einen beliebigen Punkt der Curve zu bestimmen, nehme man für  $\zeta$  einen beliebigen Werth an, und berechne  $\nu$  aus (55). Mittelst  $\zeta$  und  $\nu$  erhält man dann aus (23)  $\varphi'$  und  $\lambda$ .

Wenn  $\frac{\pi - \Pi}{\Delta}$  sehr klein ist (wie zur Zeit einer Berührung), ist näherungsweise

$$\Delta' - \Delta = (\pi - \Pi) \sin \zeta \cos(\nu - u), \quad \dots(56)$$

woraus die Verwandtschaft dieser Curven mit Hansen's isosthenischen Curven, auf welchen  $\sin \zeta \cos(\nu - u)$  einen constanten Werth hat, erhellt.

Indem man setzt:

$$\left. \begin{aligned} \cos u \sin d &= p \cos q & \cos u \cos d &= \sin \Phi \\ \sin u &= p \sin q & -p &= \cos \Phi \\ \frac{\Delta' - \Delta}{\pi - \Pi} &= \cos E & t - a + q &= -\Lambda, \end{aligned} \right\} \quad \dots(57)$$

wobei  $q$  derart zu bestimmen ist, dass  $p < 0$  wird, verwandelt sich obige Gleichung in:

$$\cos E = \sin \Phi \sin \varphi + \cos \Phi \cos \varphi \cos(\lambda - \Lambda). \quad \dots(58)$$

2. Für ein gegebenes  $\Delta$ : Zur Berechnung dienen die nämlichen Gleichungen, und besteht der Unterschied zwischen beiden Curvensystemen nur darin, dass, in ersterem,  $\Delta'$  constant ist,  $u$  und  $\Delta$  aber von Curve zu Curve andere Werthe annehmen, während in letzterem das Umgekehrte gilt. Für ein constantes  $\Delta$  und  $u$ , stellt die Gleichung (56) ein System von Parallelkreisen dar, an deren Polen  $\Delta' - \Delta = \pi - \Pi$ . Falls  $\frac{\pi - \Pi}{\Delta}$  sehr klein, sind die beiden Systeme wenig von einander verschieden.

#### ε. Curven gleichen Werthes von $K'$ .

Im Augenblicke der parallaktischen grössten Phase ist  $\cos(w' - u') = 0$ , folglich  $u' = w' \mp 90^\circ$ , und ist daher vermöge (24):

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{\pm K' \sin w' - \delta}{\pi' - \Pi'} \\ \eta' &= \frac{\mp K' \cos w' - \alpha}{\pi' - \Pi'} \end{aligned} \right\} \quad \dots(59)$$

Indem man, für eine zwischen  $T_k^-$  und  $T_k^+$  willkürlich angenommene Normalzeit, die Grössen  $\delta, \alpha$  rechnet, dann  $w'$  näherungsweise  $= w$  setzt, erhält man aus (59) genäherte Werthe  $\xi', \eta'$ , mittelst welcher man aus (23)  $\varphi'$  und  $\lambda$  findet. Aus diesen ergibt sich nach (28)  $\omega'$ , worauf man aus (59) für  $\xi', \eta'$  genauere Werthe erhält, etc. In (59) gilt das  $\left\{ \begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$  Zeichen, wenn  $u$  nahe  $= \left\{ \begin{array}{l} w-90^\circ \\ w+90^\circ \end{array} \right\}$ .

Diese Curven fallen nahezu mit jenen zusammen, auf welchen  $\Delta'$  zur Zeit  $T_k$  einen constanten Werth hat. Diese bilden ein System von Parallelkreisen, an deren Polen  $\Delta' = K \pm (\pi - \Pi)$  und entsprechen der Gleichung:

$$\Delta' - K = (\pi - \Pi) \sin \zeta \cos(\nu - u_k). \quad \dots(60)$$

§. Curven gleicher Parallaxe des Positionswinkels.

1. Bei gegebenem  $u'$ : Aus (27') ergibt sich dafür die Gleichung

$$\eta' \cos u' - \xi' \sin u' = \frac{\Delta \sin C'}{\pi - \Pi'}, \quad \dots(61)$$

wobei  $u'$  constant und  $u' - u = C'$ .

Setzt man

$$\left. \begin{array}{l} \sin d \sin u' = p' \cos q' \quad - \cos d \sin u' = \sin \Phi' \\ \cos u' = p' \sin q' \quad \quad \quad p' = \cos \Phi' \\ t - a - q' = -\Lambda' \quad \quad \quad \frac{\Delta \sin C'}{\pi - \Pi} = \cos E' \end{array} \right\} \dots(62)$$

wobei  $q'$  so zu bestimmen, dass  $p' > 0$ , so verwandelt sich obige Gleichung, indem man, von der Abplattung der Erde absehend,  $\varphi'$  mit  $\varphi$  vertauscht, in

$$\cos E' = \sin \Phi' \sin \varphi + \cos \Phi' \cos \varphi \cos(\lambda - \Lambda'). \quad \dots(63)$$

Diese Gleichung gehört zu einem Parallelkreissysteme, an dessen Polen  $\sin(u' - u) = \pm \frac{\pi - \Pi}{\Delta}$ .

2. Bei gegebenem  $u$ : Es gelten hier die nämlichen Gleichungen, wenn man in denselben  $u'$  mit  $u + C'$  vertauscht. Die beiden Kreissysteme unterscheiden sich von einander darin, dass in ersterem  $u'$ , in letzterem  $u$  für das ganze System constant bleibt, während  $C'$  in beiden von Curve zu Curve sich ändert. Im zweiten Falle ist die Lage des Poles  $\Phi', \Lambda'$  wegen der Veränderlichkeit von  $u'$  variabel, und sind darum die Curven nicht parallel. Wenn  $\Delta$  gross ist, unterscheiden sich beide Systeme wenig von einander.

Um die Beziehungen zwischen den Curven (63) und (58) kennen zu lernen, berechne man den Winkelabstand der Pole  $\Phi, \Lambda$  und  $\Phi', \Lambda'$ , welcher durch die Gleichung

$$\cos S = \cos \Phi \cos \Phi' + \sin \Phi \sin \Phi' \cos(\Lambda - \Lambda')$$

ausgedrückt wird. Mit Rücksicht auf (62) und (57) findet man

$$\cos S = -\sin C'.$$

Für  $C' = 0$  geht die Curve (63) in einen grössten Kreis über, und wird zugleich  $S = 90^\circ$ . Hieraus ist zu erschen, dass die Ebenen der beiden grössten Kreise, auf welchen, in dem nämlichen Augenblicke, einerseits  $u' - u = 0$ , andererseits  $\Delta' - \Delta = 0$  ist, auf einander senkrecht stehen, und darum die Pole des einen im Umfange des anderen liegen. Aus (62) folgt ferner  $\sin \Phi' \sin d + \cos \Phi' \cos d \cos(t + \Lambda' - a) = 0$ . Dies beweist, dass der Pol  $\Phi', \Lambda'$  und sein Gegenpunkt den Planeten in der Phase  $\Lambda' = \Delta$  im Horizonte erblicken. Für  $\Delta = R \pm r$  fallen diese Pole in die Grenzcurven  $\left\{ \begin{array}{l} E, A \\ E', A' \end{array} \right\}$ , und zwar an jene Stellen, wo die parallaktische Berührung gleichzeitig mit der geocentrischen erfolgt.

## 7. Haupthöhencurven.

Da die Parallaxe im Höhenkreise wirkt, ist der absolute Werth von  $\Delta' - \Delta$  um so grösser, je weniger  $\nu - u$  von 0 oder  $180^\circ$  abweicht, und erreicht, wie aus (56) ersichtlich, für  $\nu - u = \begin{cases} 0 \\ 180^\circ \end{cases}$ , ihr Maximum. Die Curve, auf welcher, für eine gegebene Distanz  $\Delta'$ , dies stattfindet, bezeichnet Hansen als Haupthöhencurve. Zu deren Berechnung hat man aus (56) das Gleichungspaar:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= u \\ \sin \zeta &= \frac{\Delta' - \Delta}{\pi' - \Pi'} \end{aligned} \right\} \text{ und } \left. \begin{aligned} \nu &= 180^\circ + u \\ \sin \zeta &= \frac{\Delta - \Delta'}{\pi' - \Pi'} \end{aligned} \right\} \dots(64)$$

Für jede zulässige Normalzeit erhält man daraus  $\zeta$  und  $\nu$ , folglich zwei Punkte der Curve.

Etwas davon verschieden ist die Curve, auf welcher, zu einer gegebenen Zeit,  $\nu - u = \begin{cases} 0 \\ 180^\circ \end{cases}$ , wo also  $\Delta'$  variabel und  $\Delta$  constant ist. Ihre Gleichung ist:

$$\text{tang } \nu = \text{tang } u \quad \text{oder} \quad \eta' \cos u - \xi' \sin u = 0,$$

woraus erhellt, dass sie mit der Curve, wo  $u' - u = 0$ , zusammenfällt.

Für die Haupthöhencurve der parallaktischen grössten Phase folgt aus  $m' \delta' + n' \alpha' = 0$ , mit Rücksicht auf (24) und (28), wenn man  $\nu = \begin{cases} u \\ 180^\circ + u \end{cases}$  setzt und das mit  $(\pi' - \Pi')^2$  behaftete Glied vernachlässigt:

$$\Delta v \cos(w - u) \pm (\pi' - \Pi') v \sin \zeta + \mu \Delta (\pi' - \Pi') \sin u \cos d \cos \zeta = 0. \dots(65)$$

Setzt man nun  $\frac{\mu \Delta}{v} \sin u \cos d = \text{tang } x$ , so hat man, zur Bestimmung eines beliebigen Punktes der Curve:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= u \\ \sin(\zeta + x) &= -\frac{\Delta \cos x \cos(w - u)}{\pi' - \Pi'} \end{aligned} \right\} \text{ und } \left. \begin{aligned} \nu &= 180^\circ + u \\ \sin(x + \zeta) &= -\frac{\Delta \cos x \cos(w - u)}{\pi' - \Pi'} \end{aligned} \right\}$$

Im Allgemeinen weicht dieselbe wenig von jener Curve ab, auf welcher, um die Zeit der geocentrischen grössten Phase,  $\nu - u = \begin{cases} 0 \\ 180^\circ \end{cases}$ . Man hat dafür die Gleichung:

$$\text{tang } \nu = \text{tang } u_k \quad \text{oder} \quad \eta' \cos u_k - \xi' \sin u_k = 0,$$

woraus man erkennt, dass sie mit dem grössten Kreise, welchem die Bedingung  $(u' - u)_k = 0$  entspricht, identisch ist.

Curven, auf welchen  $\nu - u = \pm 90^\circ$ .

An den Punkten, welche dieser Bedingung entsprechen, ist die Parallaxe des Positionswinkels am grössten. Hier ist, vermöge Gleichung (26'),  $\Delta'^2 = \Delta^2 + (\pi' - \Pi')^2 \sin^2 \zeta$ .

1. Für ein constantes  $\Delta'$  hat man sonach zur Bestimmung einzelner Punkte der Curve:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= u \pm 90^\circ \\ \sin \zeta &= \frac{\sqrt{\Delta'^2 - \Delta^2}}{\pi' - \Pi'} \end{aligned} \right\} \dots(66)$$

2. Für eine gegebene Zeit hingegen ist

$$\text{tang } \nu = \frac{\eta'}{\xi'} = -\text{cotg } u \quad \text{oder} \quad \eta' \sin u + \xi' \cos u = 0. \dots(67)$$

Wird auf diese Gleichung die schon wiederholt gebrauchte Transformation angewendet, so erweist sich die Curve identisch mit dem grössten Kreise, auf welchem, um dieselbe Zeit,  $\Delta' = \Delta$ .

Für die Bedingung  $v-u = \pm 90^\circ$  in der parallaktischen grössten Phase ist:

$$\Delta v \cos(w-u) + \mu \Delta (\pi' - \Pi') (\pm \sin d \sin \zeta + \cos d \cos \zeta \cos u), \quad \dots(68)$$

welche Gleichung in ähnlicher Weise wie (65) zu behandeln ist.

Ähnlich gestaltet ist die Curve, auf welcher, um die Zeit  $T_k$ ,  $v-u = \pm 90^\circ$  ist. Sie fällt mit dem grössten Kreise zusammen, wo um die nämliche Zeit  $\Delta' = \Delta$  ist.

Curve einer gegebenen Phase im Meridian.

Im Meridian ist  $s = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 180^\circ \end{smallmatrix} \right\}$ , also auch  $v = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 180^\circ \end{smallmatrix} \right\}$ . Zur Bestimmung eines einzelnen Punktes aus  $v$  und  $\zeta$  hat man daher für ein gegebenes  $\Delta'$ :

$$v = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 180^\circ \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \Delta'^2 = \Delta^2 \pm 2(\pi' - \Pi') \Delta \sin \zeta \cos u + (\pi' - \Pi')^2 \sin^2 \zeta,$$

wo  $\Delta'$  constant,  $\Delta$  und  $u$  aber variabel sind.

Wäre aber  $\Delta$  gegeben, so fiel die Curve mit dem Erdmeridiane zusammen, dessen östliche Länge  $= a - t$ .

Wenn  $\frac{\pi - \Pi}{\Delta}$  klein ist, sind die beiden Curven wenig von einander verschieden.

Für die parallaktische grösste Phase im Meridian gelten die Gleichungen:

$$v = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 180^\circ \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \Delta v \cos(w-u) \pm (\pi' - \Pi') v \sin \zeta (\cos u - \Delta \sin u) + (\pi' - \Pi') \mu \Delta \cos d \sin u \cos \zeta = 0,$$

zu deren bequemerer Auflösung man

$$\frac{v \cos u - \mu \Delta \sin d \sin u}{\mu \Delta \cos d \sin u} = \tan x$$

setzen kann, worauf sich  $\xi$  aus

$$\cos(\xi \mp x) = \frac{v \cos x \cos(w-u)}{\mu \cos d \sin u}$$

ergibt.

Wenn  $\frac{\pi - \Pi}{\Delta}$  klein ist, weicht die Curve sehr wenig von dem Erdmeridiane von der geographischen Länge  $\lambda = (a - t)_k$  ab.

k. Berechnung der Sonnenparallaxe aus den Erscheinungen eines Venusvorüberganges.

Wenn man, an einem Orte von genau bekannter geographischer Position, die Ortszeit einer inneren Ränderberührung beobachtet, kennt man die der Beobachtung entsprechende Normalzeit, wodurch auch die Grössen  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $R'^{-1}$  [s. Gleichung (20)] gegeben sind, und kann daher  $\Pi$  aus der Gleichung

$$(R' - r)^2 = (\delta + \Pi x)^2 + (\alpha + \Pi y)^2 \quad \dots(69)$$

gefunden werden. Da  $\Pi$  schon näherungsweise bekannt ist, und es sich daher nur um eine Verbesserung  $d\Pi$  des genäherten Werthes  $\Pi$  handelt, kann man sich hierzu auch der Gleichung

$$d\Pi = \frac{(R' - r)^2 - (\delta + \Pi x)^2 - (\alpha + \Pi y)^2}{2(\delta x + \alpha y) + 2\Pi(x^2 + y^2)} \quad \dots(70)$$

bedienen. In beiden Fällen ist eine genaue Kenntniss der geographischen Länge erforderlich, weil man zur Bestimmung von  $\delta$  und  $\alpha$ , die Normalzeit benöthigt. Um eine mangelhafte Längenbestimmung möglichst unschädlich zu machen, kann man, nach Halley, folgendes Verfahren einschlagen:

Es sei  $\lambda$  die näherungsweise bekannte Länge,  $\lambda + d\lambda$  ihr genauer Werth,  $\mathcal{T}_c$  die Ortszeit einer inneren Berührung, folglich  $T_c = \mathcal{T}_c - \lambda - d\lambda$  die dazu gehörige Normalzeit. Beziehen sich  $\delta$ ,  $\alpha$  auf die Normalzeit

<sup>1</sup> Für  $R'$  hat man den Ausdruck:  $R' = R + R \Pi \sin 1''$  [sin  $D \sin \varphi + \cos D \cos \varphi \cos(t + \lambda - A)$ ].

$\mathcal{E}_c - \lambda$ , so ist in (70), statt dieser Werthe,  $\delta - m d\lambda$ ,  $\alpha - n d\lambda$  zu setzen. Bedenkt man nun, dass  $d\lambda$  jedenfalls klein sein wird, und dass die  $x$ ,  $y$  innerhalb eines kleinen Intervalles als constant betrachtet werden dürfen, so sieht man ein, dass an die Stelle von (70) folgende Gleichung tritt:

$$[\delta x + \alpha y + \Pi(x^2 + y^2)] 2d\Pi - [\delta m + \alpha n + \Pi(mx + ny)] d\lambda = (R' - r)^2 - (\delta + \Pi x)^2 - (\alpha + \Pi y)^2. \quad \dots(71)$$

Wird, nebst dem Eintritte, auch der Austritt beobachtet, so hat man für jede der beiden Berührungen eine Gleichung wie (71), und kann aus diesen beiden Gleichungen sowohl  $d\Pi$  als  $d\lambda$  finden.

Liessen sich die äusseren Berührungen ebenso scharf, wie die inneren, beobachten, so könnte man, da man dann vier Gleichungen hat, auch die von den Tafelfehlern herrührenden Fehler  $d\delta$ ,  $d\alpha$  bestimmen. Da aber dies nicht der Fall ist, so thut man besser, wenn es sich um die Berichtigung der Tafelörter handelt, die inneren Berührungen an solchen Punkten der Erdoberfläche zu beobachten, wo sie nahe am Zenithe stattfinden und dadurch der Einfluss der Parallaxe verschwindet. Sind die beiden geographischen Längen genau bekannt, so hat man dann zur Bestimmung von  $d\alpha$  und  $d\delta$ , zwei Gleichungen von der Form:

$$(R' - r)^2 = \delta^2 + \alpha^2 + 2\delta d\delta + 2\alpha d\alpha.$$

Über die mehr oder weniger günstige Lage des Beobachtungsortes, zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus der Beobachtung eines Berührungsmomentes, geben die isosthemischen oder die damit nahe übereinstimmenden Curven gleichzeitiger Berührung Anschluss. Die günstigsten Beobachtungsorte liegen in der Nähe jener Punkte, wo die Berührung zuerst und zuletzt gesehen wird, weil dort der numerische Werth von  $\Delta' - \Delta$  am grössten ist.

Soll die Sonnenparallaxe aus der Dauer des Vorüberganges abgeleitet werden, so wird man am zweckmässigsten in der Nähe der Punkte der längsten und kürzesten Dauer, namentlich des letzteren, beobachten, und entscheiden die Curven gleicher Dauer über den Grad der Günstigkeit.

Es ist klar, dass das eben Gesagte auch auf die Beobachtung einer beliebigen Phase, deren Distanz  $\Delta'$  durch Messung bestimmt wurde, Anwendung findet. Auch bei den Contactbeobachtungen wird  $\Pi$  aus  $\Delta'$  abgeleitet, dessen Werth aber hier schon im Voraus bekannt ist. Die Messung der Distanz kann sowohl durch geeignete Apparate am Fernrohre als an photographischen Abbildungen einzelner Durchgangsmomente ausgeführt werden. Die am Fernrohre ausgeführten Messungen gestatten eine grosse Schärfe; da sie aber Zeit erfordern, ist man dabei auf die Nähe der grössten Phase beschränkt, wo sich  $\Delta'$  sehr langsam ändert. Derlei Beobachtungen werden darum am besten in der Nähe jener Punkte angestellt, wo  $K'$  seinen grössten oder kleinsten Werth hat.

Nach Oppolzer wäre es zweckmässig, an photographischen Abbildungen, die Messung der Distanz mit jener des Positionswinkels zu verbinden, weil, wie die Gleichungen (25) und (27) zeigen,  $\Pi$  auch aus  $u' - u$  abgeleitet werden kann. Diese Gleichungen zeigen ferner, dass  $u' - u$ , wie  $\Delta' - \Delta$ , im Horizonte seinen grössten numerischen Werth hat, und dass  $u' - u$  im Allgemeinen um so grösser ist, je kleiner  $\Delta' - \Delta$ . Indem man sowohl  $\Delta'$  als  $u'$  misst, erreicht man daher den Vortheil, dass man, aus jeder in geringer Höhe angestellten Beobachtung, günstige Daten für die Parallaxenbestimmung erhält.

Nebst diesen Messungen empfiehlt Oppolzer die Beobachtung der Rectascensionsdifferenz  $A' - a'$ , welche sich aus der zwischen den Durchgängen der beiden Gestirne durch einen senkrecht auf die tägliche Bewegung im parallaktisch aufgestellten Fernrohre angebrachten Faden verfliessenden Zeit ergibt. Bezeichnen  $t_1$  und  $t$  die Sternzeiten des Durchganges der Sonne und des Planeten,  $x$  den Modulus zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit, so ist, für den Augenblick des Sonnedurchganges,  $A' - a' = 15(t_1 - t) \left(1 + \frac{n'}{x}\right)$ .  $n'$  hat hier die in  $f)$  angegebene Bedeutung. Nachdem  $A' - a'$  gefunden, hat man  $\alpha' = (A' - a') \cos d'$ , und endlich  $\Pi = \frac{\alpha' - \alpha}{y}$ . [S. Gleichung (20').]

Da es sich hier darum handelt, dass  $\alpha' - \alpha$  und  $y$  möglichst gross seien, und  $y$  nahe  $= (q - 1) \eta = (q - 1) \cos \bar{\varphi} \sin s$  [s. Gleichung (20')], eignen sich zu dieser Parallaxenbestimmung alle Punkte von geringer



geographischer Breite, wo irgend eine Phase des Durchganges in der Nähe des Horizonts erfolgt und liegen die günstigsten Beobachtungsstellen in der Nähe des Zusammentreffens der Sichtbarkeitsgrenzen mit dem Äquator.

7. Berücksichtigung der Refraction.

Die Contactmomente sind von der Strahlenbrechung unabhängig, nicht aber Distanz und Positionswinkel. Wenn diese Grössen durch Messung gefunden werden sollen, ist darinn der Einfluss der Refraction in Rechnung zu ziehen. Um die von der Refraction befreiten  $\Delta'$ ,  $u'$  etc. aus den damit behafteten, unmittelbar aus der Beobachtung erhaltenen  $\Delta''$ ,  $u''$  etc. abzuleiten, kann man so verfahren:

Ans der geographischen Position des Beobachtungsortes und der Orts-Sternzeit kann man sowohl die geocentrischen ( $D, A$ ), als die parallaktischen Sonnencoordinaten  $D', A'$  finden, und ist dann in den sphärischen Dreiecke „ $S'$ —Zenith—Nordpol“, wo  $S'$  den parallaktischen Sonnenort bezeichnet:

$$\cos Z' = \sin \varphi \sin D' + \cos \varphi \cos D' \cos(t - A') \quad \dots(72)$$

$$\cotg \Omega' = \frac{\tan D' \cos \varphi - \sin \varphi \cos(t - A')}{\sin Z'} \quad \dots(73)$$

$$\sin \Omega' = \frac{\cos D' \sin(t - A')}{\sin Z'}$$

Ähnliche Gleichungen hat man für die analogen, auf den Planeten Bezug habenden  $z', \omega'$ .

Ferner ist:

$$\sin D' = \sin \varphi \cos Z' + \cos \varphi \sin Z' \cos \Omega' \quad \dots(74)$$

$$\cotg N' = \frac{\tan \varphi \sin Z' \cos \Omega'}{\sin \Omega'} \quad \dots(75)$$

$$\sin N' = \frac{\cos \varphi \sin \Omega'}{\cos D'} \quad \dots(76)$$

Es sei nun  $S''$  und  $P''$  der mit der Refraction behaftete Ort der Sonne und des Planeten, und man setze  $Z'' = Z' - dZ$ ,  $z'' = z' - dz$ ,  $N'' = N' - dN$ ,  $\Delta'' = \Delta' - d\Delta$ ,  $u'' = u' - du$ . Da  $\Omega'$  von der Refraction unabhängig ist, erhält man durch Differentiiren von (75):

$$-\frac{dN}{\sin N'^2} = \frac{(\tan \varphi \cos Z' + \sin Z' \cos \Omega') dZ}{\sin \Omega'} = \frac{\sin D' \cdot dZ}{\cos \varphi \sin \Omega'}$$

und mit Rücksicht auf (76):

$$dN = -\tan D' \sin N' \cdot dZ,$$

folglich

$$N'' = N' + \tan D' \sin N' \cdot dZ. \quad \dots(77)$$

Nun ist  $\sphericalangle P'' S'' n = u'' - N''$ , und bestehen die Gleichungen:

$$\cos \Delta'' = \cos z'' \cos Z'' + \sin z'' \sin Z'' \cos(\Omega' - \omega') \quad \dots(78)$$

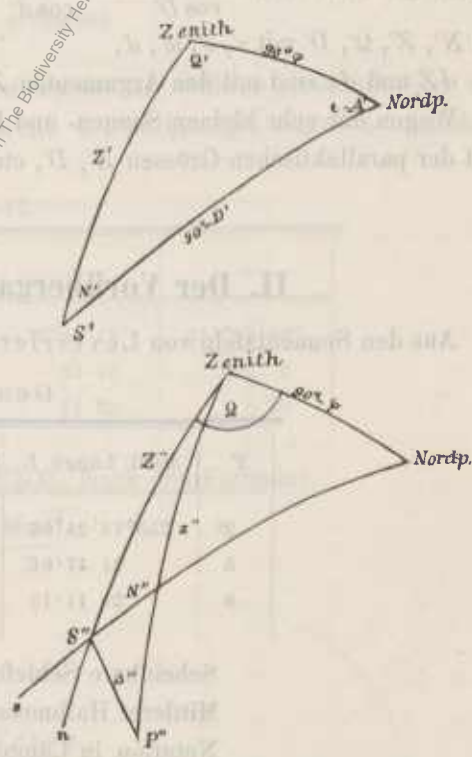
$$\left. \begin{aligned} \sin \Delta'' \cos(u'' - N'') &= -\cos z'' \sin Z'' + \sin z'' \cos Z'' \cos(\Omega' - \omega') \\ \sin \Delta'' \sin(u'' - N'') &= \sin z'' \sin(\Omega' - \omega') \end{aligned} \right\} \quad \dots(79)$$

Ans (78) folgt:

$$d\Delta = [\cos z'' \sin Z'' - \sin z'' \cos Z'' \cos(\Omega' - \omega')] \frac{dZ}{\sin \Delta''} + [\sin z'' \cos Z'' - \cos z'' \sin Z'' \cos(\Omega' - \omega')] \frac{dz}{\sin \Delta''} \quad \dots(80)$$

Ist  $\Omega' - \omega'$  sehr klein, so hat man sehr nahe:

$$d\Delta = \frac{(Z'' - z'')(dZ - dz)}{\Delta''} \quad \dots(81)$$



Aus (79) erhält man

$$\cotg(u'' - N'') = \frac{-\cotg z'' \sin Z'' + \cos Z'' \cos(\Omega' - \omega')}{\sin(\Omega' - \omega')}$$

und, wenn man diese Gleichung differentiirt, und dabei auf (78) und (79) Rücksicht nimmt:

$$du - dN = \frac{\sin(\Omega' - \omega')}{\sin \Delta''^2} (\sin z'' dZ - \sin Z'' dz) \quad \dots(82)$$

folglich

$$du = -\tan g D' \sin N' dZ + \frac{\sin(\Omega' - \omega')}{\sin \Delta''^2} (\sin z'' dZ - \sin Z'' dz) \quad \dots(83)$$

Um bei der Beobachtung von Rectascensionsdifferenzen die Refraction in Rechnung zu ziehen, hat man nur dem nach der Formel:  $A' - a' = 15(t_1 - t) \left(1 + \frac{z'}{z}\right)$  (s. Abschnitt *k*) gefundenen Rectascensionsunterschiede die Correction  $\frac{\sin N' dZ}{\cos D'}$   $\frac{\sin v' dz}{\cos d'}$  hinzuzufügen.  $v'$  ergibt sich aus (75) und (76) durch Vertauschung von  $N', Z', \Omega', D'$  mit  $v', z', w', d'$ .

$dZ$  und  $dz$  sind mit den Argumenten  $Z'$  und  $z'$  einer Refractionstafel zu entnehmen.

Wegen der sehr kleinen Sonnen- und Planeten-Parallaxe, kann man, in den Gleichungen (72) bis (76), statt der parallaktischen Grössen  $Z', D', etc.$ , die geocentrischen  $Z, D, etc.$  setzen.

## II. Der Vorübergang der Venus am 6. December 1882.

Aus den Sonnentafeln von Leverrier erhalte ich folgende Werthe:

### Geocentrischer Sonnenort.

$T$	Mittl. Länge $L$	Scheinb. Länge $\odot$	$\log \mathfrak{R}$	Breite $B$
2 <sup>h</sup>	255° 14' 24.506	254° 23' 39.49	0.9934338-1	-0.12
5	21 47.61	31 16.74	0.9934269-1	-0.10
8	29 11.15	38 53.99	0.9934201-1	-0.08

- Scheinbare Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon = 23^\circ 27' 9.73$
- Mittlerer Halbmesser  $R \dots \dots = 0 \ 16 \ 0.00$
- Nutation in Länge  $\psi \dots \dots = +12.48$
- Aberration in Länge  $\dots \dots = 20.76.$

Für die Äquatorial-Horizontalparallaxe  $\bar{\Pi}$  in der Entfernung  $t$ , gibt Leverrier 8.95 an. Ich habe in Übereinstimmung mit den neueren Untersuchungen,  $\bar{\Pi} = 8.85$  angenommen.

Aus  $\odot$  und  $B$  wurde  $A$ , und mittelst der Formeln:

- Wahre Länge =  $\odot +$  Aberration,
- Zeitgleichung =  $A - L - \psi \cos \varepsilon$ ,
- Wahre Zeit =  $T -$  Zeitgleichung,
- $t \dots \dots = A +$  wahre Zeit.

$$\sin \bar{\Pi} = \frac{\sin \bar{\Pi}}{\mathfrak{R}}$$

$$\sin R = \frac{\sin \bar{R}}{\mathfrak{R}},$$

die wahre Länge, die Zeitgleichung,  $\bar{\Pi}$  und  $R$ , wie folgt, gefunden:

$T$	Wahre Länge	Zeitgleichung	$R$	$\log \Pi$	$A$
2 <sup>h</sup>	254°25' 0" 25	— 8 <sup>m</sup> 42' 44	974' 625	} 0.953518	16 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 15" 93
5	31 37.50	39.22	40		48.75
8	39 14.70	36.00	55		21.51

Aus den Venustafeln von Leverrier ergibt sich:

Heliocentrischer Vennsort.

$T$	Länge	Breite	Entfernung
2 <sup>h</sup>	74°19' 58" 28	— 4' 38" 09	0.7205246
5	32 3.61	— 3 55.08	0.7205104
8	44 8.97	— 3 12.09	0.7204963

Aus den wahren Sonnen- und den heliocentrischen Vennsortern wurden die wahren geocentrischen, und durch Hinzufügen der Aberration, welche in Länge — 3' 33, in Breite + 1' 43 beträgt, folgende scheinbare geocentrische Coordinaten gefunden:

Geocentrischer Vennsort.

$T$	$\odot$	$\beta$	$\lg r$	$d$	$a$
2 <sup>h</sup>	254°35' 2" 80	— 12' 39" 50	0.422383—1	— 22° 46' 15"	253° 14' 40"
5	30 29.70	— 10 42.25	0.422378—1	43 47	10 0
8	25 56.53	— 8 45.04	0.422378—1	41 20	5 20

Nach Leverrier ist der mittlere scheinbare Halbmesser  $\bar{r} = 8' 305$ . Nach den Formeln:

$$\sin r = \frac{\sin \bar{r}}{r} \quad \text{und} \quad \sin \pi = \frac{\sin \Pi}{r}$$

findet man, für die ganze Dauer des Durchganges:

$$r = 31' 402$$

$$\pi = 33' 463.$$

Relative Coordinaten der Venns.

Aus den scheinbaren Sonnen- und Venusörtern wurden, nach Gleichung (8), zunächst die Grössen  $B$ ,  $A$  berechnet, und durch Interpolation nachstehende Tabelle, in welche auch die Werthe von  $\theta$  und  $t$  aufgenommen wurden, entworfen:

$T$	$B$	$A$	$\theta$	$t$
2 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	789' 38	— 683' 31	— 6° 39' 24"	19 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup> 58' 37
30	739.84	561.59	38 53	31 3.30
3 0	720.30	439.87	38 21	20 1 8.23
30	700.76	318.14	37 50	31 13.16
4 0	681.22	196.42	37 19	21 1 18.09
30	661.68	— 74.69	36 47	31 23.01
5 0	642.15	+ 47.04	36 16	22 1 27.94
30	622.61	168.77	35 44	31 32.87
6 0	603.08	290.50	35 13	23 1 37.80
30	583.55	412.24	34 41	31 47.73
7 0	564.02	533.98	34 10	0 1 47.66
30	544.49	655.72	33 38	31 52.58
8 0	524.96	777.46	33 7	1 1 57.51
30	503.43	899.20	32 36	32 2.44

Wie man sieht, können die Änderungen der Grössen  $B, \Lambda$ , innerhalb der halbstündigen Intervalle, der Zeit proportional angenommen und mittelst obiger Tabelle, für jede beliebige Normalzeit mit genügender Genauigkeit gefunden werden. Die Grössen  $M, N, v, W$  sind darum nahezu constant. Für die Zeiten der Hauptmomente finde ich:

	$\log - M$	$\log N$	$\log v$	$W$
Eintritt . . . . .	0.035674 -2	0.830086 -2	0.835612 -2	99° 7' 44"
Grösste Phase . . . . .	0.035519 -2	0.830199 -2	0.835649 -2	6 39
Austritt . . . . .	0.035408 -2	0.830172 -2	0.835688 -2	6 48

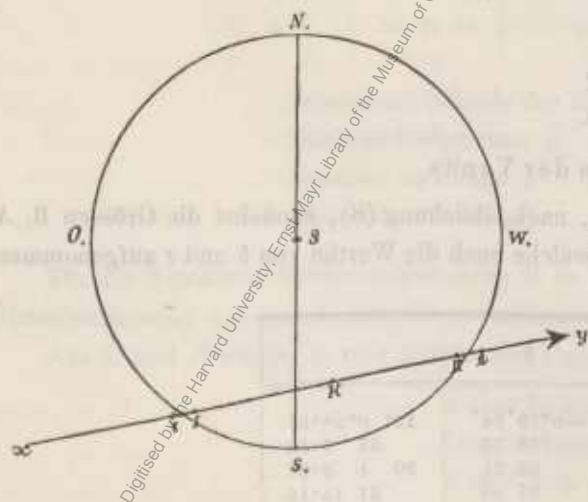
$M, N$  sind hier die Änderungen von  $B, \Lambda$  in 1<sup>s</sup> mittl. Zeit.

Der geocentrische Durchgang.

Mittelst der Tabelle S. 255 und den Gleichungen (8) können zu jeder beliebigen Normalzeit die entsprechenden  $\Delta, U, u$  gefunden werden.

Für die fünf Hauptmomente ist:

	$T$	$\Delta$	$u$
Äusserer Eintritt . . . . .	$T_0 = 2^h 4^m 52.8$	1006.03	-34° 36' 31"
Innerer „ . . . . .	$T_I = 2 25 11.6$	943.23	-31 22 48
Grösste Phase . . . . .	$T_k = 5 13 27.3$	641.49	+15 43 2
Innerer Austritt . . . . .	$T_{II} = 8 1 42.6$	943.25	+62 48 54
Äusserer „ . . . . .	$T_2 = 8 22 1.6$	1006.06	+66 2 43



Die beigefügte Figur zeigt die Sonnenscheibe, deren Mittelpunkt in  $S$ , die relative Bahn  $xy$  der Venus und die Positionen des Venuscentrums in den fünf Hauptmomenten.

In diesen Augenblicken befindet sich die Venus im geocentrischen Zenithe folgender Punkte:

	$\varphi$	$\lambda$
Äusserer Eintritt . . . . .	-22° 54' 4"	- 33° 14' 7"
Innerer „ . . . . .	54.1	- 38 19.5
Grösste Phase . . . . .	51.8	- 80 34.7
Innerer Austritt . . . . .	49.5	-122 49.8
Äusserer „ . . . . .	49.2	-127 56.7

Der parallaktische Durchgang.

Für einen gegebenen Beobachtungsort.

Um die einer gegebenen Normalzeit entsprechenden  $\Delta', u'$  zu finden, suche man zunächst  $B, \Lambda$  und  $\theta$  aus der Tafel S. 255, rechne  $\Delta, U$  aus (8), dann  $\delta = \Delta \cos(U - \theta)$  und  $\alpha = \Delta \sin(U - \theta)$ . Für  $\delta', \alpha'$  hat man die Gleichungen (20'), wobei die  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  etc. nachstehender Tafel zu entnehmen sind:

$T$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{A}'$	$\mathfrak{B}'$	
2 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	2.50205	1.05817	32° 6' 39"	+0.0041	2.72606	31° 58' 11"
30	224	772	39 37 15	33	595	39 30 33
3 0	243	727	47 7 56	26	588	47 2 55
30	261	682	54 38 37	17	582	54 35 16
4 0	280	637	62 9 16	+ 08	575	62 7 38
30	299	592	69 39 56	00	568	69 40 0
5 0	318	547	77 10 36	- 08	562	77 12 21
30	337	502	84 41 15	16	554	84 44 42
6 0	356	457	92 11 54	24	546	92 17 4
30	374	412	99 42 34	33	539	99 49 25
7 0	393	367	107 13 13	41	531	107 21 46
30	412	322	114 43 53	49	524	114 54 8
8 0	430	278	122 14 33	58	516	122 26 30
30	449	233	129 45 12	68	508	129 58 53

$\Delta', u'$  erhält man schliesslich aus (18).

Die Zeiten der Berührungen und der grössten Phase sind nach Gleichung (32) und (37) zu berechnen, wobei zu bemerken ist, dass das quadratische Glied  $[f \sin \bar{\varphi} + g \cos \bar{\varphi} \cos (\lambda + \sigma)]^2$  für den Eintritt das Zeichen  $-$ , für den Austritt das Zeichen  $+$  erhält. Die  $f, g$  etc. sind den folgenden Tafeln zu entnehmen:

Äusserer Eintritt.

$\tau$	$\log f$	$\log g$	$h$		$\log (-f)$	$\log g$	$\sigma$
-8 <sup>m</sup>	2.54077	2.49013	92° 59' 4	5.53	0.9590-1	0.3360	31° 14' 10"
7	132	8891	93 7.1		595	65	29 14
6	187	769	14.6		601	71	44 18
5	242	646	22.0		607	77	59 22
4	297	2.48523	29.2	5.58	612	82	32 14 26
3	352	397	36.4		17	87	29 30
2	408	272	43.5		23	93	44 34
-1	464	144	50.5		29	99	59 38
0	521	018	57.5	5.65	35	0.3405	14 42
+1	578	2.47890	64.4		40	11	29 46
2	634	761	11.2		46	16	44 50
3	691	632	17.9		52	22	59 54
4	749	504	24.5	5.71	59	28	33 14 58
5	807	373	31.0		64	34	30 2
6	865	241	37.4		70	40	45 6
7	922	107	43.7		76	46	35 0 10
8	981	1.46974	49.9	5.77	0.9682-1	52	15 14

Äusserer Austritt.

$\tau$	$\log (-f)$	$\log (-g)$	$h$	$-c$	$\log (-f)$	$\log g$	$\sigma$
-8 <sup>m</sup>	2.25713	2.62840	46° 12' 7	5.76	0.9666-1	0.3454	125° 56' 40"
7	481	906	23.5		60	48	126 11 14
6	248	972	34.3		54	42	26 18
5	015	2.63037	45.2		48	36	41 22
4	2.24788	101	56.1	5.70	42	31	56 26
3	550	165	47 7.0		36	25	127 11 30
2	317	229	18.0		30	19	26 34
-1	084	293	29.0		24	13	41 38
0	2.23852	356	40.1	5.64	19	08	56 42
+1	619	419	51.2		13	02	128 11 46
2	387	481	48 2.3		07	0.3396	26 50
3	154	543	13.4		01	91	41 54
4	2.22922	605	24.5	5.58	0.9596-1	85	56 58
5	689	666	35.7		90	79	129 12 2
6	457	727	46.9		85	73	27 6
7	224	788	58.2		79	67	42 10
8	2.21992	848	49 9.5	5.52	74	62	57 14

Innerer Eintritt.

$\tau$	$\log f$	$\log g$	$h$	$c$	$\log(-f)$	$\log g$	$\sigma$
-8 <sup>m</sup>	2.57722	2.48875	95°14'2	6.18	0.9831-1	0.3602	36°18'59"
7	788	745	19.7		37	08	34 3
6	855	614	25.1		44	15	49 7
5	922	480	30.6		50	21	37 4 11
4	990	346	36.0	25	57	28	19 15
3	2.58058	212	41.2		63	34	34 19
2	127	077	46.2		70	41	49 23
-1	195	2.47941	51.1		76	47	38 4 27
0	263	803	56.0	32	83	54	19 31
+1	332	665	96 0.7		89	60	34 35
2	401	527	5.2		95	67	49 39
3	470	387	9.6		9.9901-1	73	39 4 43
4	540	246	13.9	40	08	80	19 47
5	610	104	18.0		14	86	34 51
6	681	2.46962	22.0		21	93	49 55
7	752	820	25.9		27	99	4 59
8	823	667	29.6	48	34	0.3706	20 3

Innerer Austritt.

$\tau$	$\log(-f)$	$\log(-g)$	$h$	$-c$	$\log(-f)$	$\log g$	$\sigma$
-8 <sup>m</sup>	2.33051	2.64024	42°41'2	6.48	0.9920-1	0.3707	120°49'18"
7	2.32810	089	51.2		13	701	121 4 22
6	569	154	43 1.2		07	694	19 26
5	328	219	11.2		00	88	34 30
4	088	284	21.3	40	0.9894-1	81	49 34
3	2.31847	349	31.5		88	75	122 4 38
2	607	414	41.7		81	68	19 42
-1	366	478	51.9		75	62	34 46
0	126	542	44 2.2	32	68	55	49 50
+1	2.30885	606	12.5		62	49	123 4 54
2	645	669	22.8		55	42	19 58
3	404	732	33.2		49	36	35 2
4	163	794	43.6	25	42	29	50 6
5	2.29923	856	54.1		36	23	124 5 10
6	684	917	45 4.6		29	16	20 14
7	444	978	15.1		23	10	35 18
8	205	2.65039	25.6	18	16	04	50 22

Grösste Phase.

$\tau$	$\log F$	$\log -G$	$-H$	$\log \mathcal{F}$	$\log(-\mathcal{G})$	$\sigma$
-5 <sup>m</sup>	1.94937	2.40365	5°52'5	0.5195	0.8989	79°19'23
4		416	17.4			34 27
3		470	4 42.3			49 31
2		523	7.2			80 4 35
-1		577	3 32.1			19 39
0	1.94937	631	2 57.1	0.5195	0.8989	34 43
+1		688	22.2			49 47
2		746	1 47.3			81 4 51
3		805	12.4			19 35
4		869	0 37.6			34 59
5	1.94937	932	2.8	0.5195	0.8989	50 3

Die Anwendung der Formeln (32) und (37) lässt sich am besten an einem numerischen Beispiele zeigen:  
 Es sei der innere Eintritt für Graz  $\left\{ \begin{matrix} \varphi = +47^\circ 4'5 \\ \lambda = +15^\circ 28.8 \end{matrix} \right\}$  zu berechnen. Nach der Tafel S. 238 ist  $\bar{\varphi} = 46^\circ 58'8$ . Indem man zuerst  $\tau = 0$  setzt, ist:

$$\begin{array}{rcl}
 \log f = 2.58263 & \lambda = + 15^{\circ}28'8 & \log g = 2.47803 \\
 \log \sin \bar{\varphi} = 0.86440-1 & h = + 95 56.0 & \log \cos \bar{\varphi} = 0.83395-1 \\
 \log (f \sin \bar{\varphi}) = 2.44703 & \lambda+h = 111 24.8 & \log -\cos(\lambda+h) = 0.56221-1 \\
 & & \log -g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+h) = 1.87419 \\
 & f \sin \bar{\varphi} = +279.9 & \\
 & g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+h) = - 74.8 & \\
 & \tau = 205.1 = +3^m25.1 & 
 \end{array}$$

Mittelst dieses Näherungswerthes findet man nun genauer:

$$\begin{array}{rcl}
 \log f = 2.53499 & \lambda = 15^{\circ}24'8 & \log g = 2.47362 \\
 \log \sin \bar{\varphi} = 0.86400-1 & h = 96 11.4 & \log \cos \bar{\varphi} = 0.88395-1 \\
 \log f \sin \bar{\varphi} = 2.44939 & \lambda+h = 111 40.3 & \log -\cos(\lambda+h) = 0.56733-1 \\
 & & \log -g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+h) = 1.87490 \\
 \log(-f) = 0.9904-1 & \sigma = 39^{\circ}11' & \log g = 0.3676 \\
 \log \sin \bar{\varphi} = 0.8640-1 & \lambda+\sigma = 54 40 & \log \cos \varphi = 0.8340-1 \\
 \log -f \sin \bar{\varphi} = 0.8545-1 & & \log -\cos(\lambda+\sigma) = 0.7623-1 \\
 & & \log -g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+\sigma) = 0.9639-1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 f \sin \bar{\varphi} = +281.44 & & f \sin \bar{\varphi} = -0.72 \\
 g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+h) = - 74.97 & & g \cos \varphi \cos(\lambda+\sigma) = +0.98 \\
 e = + 6.39 & & \\
 [f \sin \bar{\varphi} + g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+\sigma)] = - 0.07 & & [f \sin \bar{\varphi} + g \cos \bar{\varphi} \cos(\lambda+\sigma)] = +0.26
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \tau = +212.78 = + 3^m32.8 \\
 T_1 = 2^h25 11.6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Normalzeit } T_1 = 2 28 44.4 \\
 \lambda = +1 1 55
 \end{array}$$

$$\text{Ortszeit } T_1 = 3 30 39$$

Eine abermalige Wiederholung der Rechnung wird selten nöthig sein.

Anfang und Ende der Berührungen und der grössten Phase. Grösstes und kleinstes  $K'$ .  
Kürzeste und längste Dauer des Durchganges.

Folgende Tabelle gibt die Zeiten des Anfanges und des Endes der fünf Hauptmomente nebst den dazu gehörigen Beobachtungsorten.

	Pariser mittl. Zeit	Mittl. Ortszeit	$\varphi$	$\lambda$	
Äusserer Eintritt . . .	zuerst . . . . .	1 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup> 12.2	7 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 10.0	-48° 39' 3	+ 86° 59' 5
	zuletzt . . . . .	2 12 39.0	19 53 20.8	+50 30.3	- 94 47.3
Innerer Eintritt . . .	zuerst . . . . .	2 17 10.2	7 56 14.0	-51 4.4	+ 84 46.0
	zuletzt . . . . .	2 33 23.8	20 7 3.9	+53 12.8	- 96 35.0
Grösste Phase . . .	zuerst . . . . .	5 8 58.7	5 31 19.0	-19 24.5	+ 5 35.1
	zuletzt . . . . .	5 17 58.7	17 19 19.8	+19 11.8	-179 39.8
Innerer Austritt . . .	zuerst . . . . .	7 53 29.8	5 2 52.9	+26 22.3	- 42 39.2
	zuletzt . . . . .	8 9 44.7	17 8 0.1	-23 52.1	+134 33.8
Äusserer Austritt . .	zuerst . . . . .	8 14 13.9	5 9 10.8	+23 13.2	- 46 15.7
	zuletzt . . . . .	8 29 41.6	17 13 21.8	-21 6.9	+130 55.0

hh \*

Der Ort, welcher die grösste Phase zuletzt erblickt, hat insofern nur eine analytische Bedeutung, als daselbst der Planet um die angegebene Ortszeit, etwa  $14^\circ$  unter dem Horizonte steht.

Für den kleinsten und grössten Werth von  $K'$ , welche zugleich mit der geocentrischen grössten Phase stattfinden, und die entsprechenden Beobachtungsorte und Zeiten, erhalte ich:

	$\varphi$	$\lambda$	Mittl. Ortszeit	Pariser mittl. Zeit
$K' = 10' 17'' 08 \dots$	$-62^\circ 45' 8$	$+135' 29' 4$	$14^h 15^m 24^s 9$	} $5^h 13^m 27^s 3$
$K' = 11' 5'' 91 \dots$	$+62' 45' 8$	$- 44' 30' 6$	$2^h 15^m 24^s 9$	

Die Beobachtungsorte für die kürzeste und längste Dauer (vom inneren Eintritte bis zum inneren Austritte) und die dazu gehörigen Normal- und Ortszeiten sind:

	$\varphi$	$\lambda$	Pariser mittl. Zeit		Mittl. Ortszeit	
			Eintritt	Austritt	Eintritt	Austritt
Kürzeste Dauer = $5^h 21^m 29^s \dots$	$+42^\circ 37'$	$- 63^\circ 56'$	$2^h 32^m 42^s$	$7^h 54^m 11^s$	$22^h 16^m 58^s$	$3^h 38^m 27^s$
Längste „ = $5^h 51^m 13^s \dots$	$-40' 3$	$+114' 35$	$2^h 17^m 51^s$	$8^h 9^m 4^s$	$9^h 55^m 11^s$	$15^h 46^m 24^s$

Der Ort längster Dauer hat nur analytische Bedeutung, da mit Rücksicht auf dessen geographische Breite und die angegebenen Ortszeiten, Eintritt und Austritt, unter dem Horizonte dieses Ortes erfolgt.

Grenzkurven. Sichtbarkeitsgrenzen.

Anfang im Horizonte (B)			Ende im Horizonte (A)		
$\varphi$	$\lambda$		$\varphi$	$\lambda$	
$+67^\circ 13'$	$- 34^\circ 52'$	} in der oberen Culmination (e)	$+67^\circ 19'$	$-127^\circ 9'$	} in der oberen Culmination (g)
$+60 0$	$+ 9 1$		$+60 0$	$- 82 56$	
$+40 0$	$+ 35 47$	} im Untergange	$+40 0$	$- 56 38$	} im Untergange
$+20 0$	$+ 48 22$		$+20 0$	$- 44 45$	
$0 0$	$+ 57 51$		$0 0$	$- 36 10$	
$-20 0$	$+ 67 9$	} in der unteren Culmination (f)	$-20 0$	$- 27 49$	} in der unteren Culmination (h)
$-40 0$	$+ 79 19$		$-40 0$	$- 15 41$	
$-60 0$	$+105 14$	} im Aufgange	$-60 0$	$+ 8 35$	} im Aufgange
$-67 13$	$+148 20$		$-67 19$	$+ 51 19$	
$-60 0$	$-168 50$		$-60 0$	$+ 94 23$	
$-40 0$	$-143 35$		$-40 0$	$+119 44$	
$-20 0$	$-132 29$		$-20 0$	$+131 22$	
$0 0$	$-124 21$		$0 0$	$+140 18$	
$+20 0$	$+116 4$		$+20 0$	$+149 28$	
$+40 0$	$+104 30$		$+40 0$	$+161 53$	
$+60 0$	$- 78 30$		$+60 0$	$-171 48$	

Obere Culmination im Horizonte (O)		Untere Culmination im Horizonte (U)	
$\varphi$	$\lambda$	$\varphi$	$\lambda$
$+67^\circ 13'$	$- 34^\circ 52'$	$-67^\circ 19'$	$+ 51^\circ 19'$
15	$- 54 36$	17	$+ 70 11$
16	$- 77 12$	16	$+102 48$
17	$-109 49$	15	$+125 24$
19	$-127 9$	13	$+148 20$



Für die Punkte  $i, k$ , in welchen sich die Curven  $E$  und  $A$  schneiden, ergeben sich folgende geographische Positionen, Normal- und Ortszeiten:

	$\varphi$	$\lambda$	Pariser mittl. Zeit		Mittl. Ortszeit	
			Eintritt	Austritt	Eintritt	Austritt
i	+59° 1'	-80° 48'	2 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup>	8 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 22 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 19 <sup>s</sup>	2 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> 10 <sup>s</sup>
k	-57 27	+99 45	1 57 23	8 27 25	8 36 23	15 6 2

Grenzcurven der inneren Berührungen.

Innerer Eintritt im Horizonte ( $E'$ )			Innerer Austritt im Horizonte ( $A'$ )		
$\varphi$	$\lambda$		$\varphi$	$\lambda$	
+67° 14'	- 40° 6	in der oberen Culmination	+67° 10'	-121° 51'	in der oberen Culmination
+60 0	+ 3 45		+60 0	- 77 41	
+40 0	+ 30 32	in Untergange	+40 0	- 51 31	in Untergange
+20 0	+ 43 14		+20 0	- 39 32	
0 0	+ 52 44		0 0	- 31 1	
-20 0	+ 62 4		-20 0	- 22 44	
-40 0	+ 74 22	in der unteren Culmination	-40 0	- 11 37	in der unteren Culmination
-60 0	+100 16		-60 0	+ 13 21	
-67 14	+143 22	in Aufgange	-67 10	+ 56 17	in Aufgange
-60 0	-173 44		-60 0	+ 99 19	
-40 0	-148 35		-40 0	+124 42	
-20 0	-137 28		-20 0	+136 24	
0 0	-129 23		0 0	+145 22	
+20 0	-121 10		+20 0	+154 34	
+40 0	-109 38		+40 0	+167 15	
+60 0	- 83 44		+60 0	-166 10	

Für die den  $i, k$  analogen Punkte  $i', k'$ , ergeben sich nachstehende Werthe:

	$\varphi$	$\lambda$	Pariser mittl. Zeit		Mittl. Ortszeit	
			Eintritt	Austritt	Eintritt	Austritt
$i'$	+61° 12'	-80° 42'	2 <sup>h</sup> 33 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup>	7 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup>	21 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup> 25 <sup>s</sup>	2 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 55 <sup>s</sup>
$k'$	-59 48	+99 47	2 17 21	8 7 32	8 56 30	14 46 41

Grenzcurve der grössten Phase.

$\varphi$	$\lambda$		$\varphi$	$\lambda$	
+67° 16'	-80° 51	in der oberen Culmination	-67° 16'	+ 99° 42'	in der unteren Culmination
+60 0	-37 0		-60 0	+142 50	
+40 0	-10 35	in Untergange	-40 0	+168 17	in Aufgange
+20 0	+ 1 31		-20 0	+179 46	
0 0	+10 29		0 0	-172 8	
-20 0	+19 17		+20 0	-162 53	
-40 0	+30 58		+40 0	-150 58	
-60 0	+56 34		+60 0	-124 43	

## Curven gleichzeitiger innerer Berührung.

Dieselben wurden nach der Formel (51') berechnet. In dem folgenden Schema haben  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $Pr$  und  $\Lambda$  die S. 247 angegebene Bedeutung. Bezüglich des Zeichens  $\Lambda$  sei noch bemerkt, dass dasselbe die geographische Länge des Punktes  $r$  bezeichnet. Der Halbmesser  $k$  des Äquators in den beigegebenen stereographischen Planigloben wurde = 3 Zoll angenommen.

## Innerer Eintritt.

Nördliche Halbkugel				Südliche Halbkugel			
$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$	$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$
0	— 95° 56'	2 <sup>7</sup> 36	3 <sup>7</sup> 82	0	+ 84° 4'	2 <sup>7</sup> 36	3 <sup>7</sup> 82
+2 <sup>m</sup>	— 96 5	1 <sup>7</sup> 78	2 <sup>7</sup> 81	—2 <sup>m</sup>	+ 84 14	1 <sup>7</sup> 81	2 <sup>7</sup> 82
+4	— 96 14	1 <sup>7</sup> 42	2 <sup>7</sup> 03	—4	+ 84 24	1 <sup>7</sup> 47	2 <sup>7</sup> 05
+6	— 96 22	1 <sup>7</sup> 19	1 <sup>7</sup> 31	—6	+ 84 35	1 <sup>7</sup> 24	1 <sup>7</sup> 33
+8	— 96 30	1 <sup>7</sup> 01	0 <sup>7</sup> 26	—8	+ 84 46	1 <sup>7</sup> 08	0 <sup>7</sup> 30
—2	— 95 46	3 <sup>7</sup> 50	5 <sup>7</sup> 42	+2	+ 83 55	3 <sup>7</sup> 40	5 <sup>7</sup> 36
—4	— 95 36	6 <sup>7</sup> 51	9 <sup>7</sup> 06	+4	+ 83 46	6 <sup>7</sup> 14	8 <sup>7</sup> 74

## Innerer Austritt.

Nördliche Halbkugel				Südliche Halbkugel			
$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$	$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$
0	— 44° 2'	6 <sup>7</sup> 41	7 <sup>7</sup> 13	0	+135° 58'	6 <sup>7</sup> 41	7 <sup>7</sup> 13
—2 <sup>m</sup>	— 43 42	4 <sup>7</sup> 04	4 <sup>7</sup> 33	+2 <sup>m</sup>	+135 37	4 <sup>7</sup> 12	4 <sup>7</sup> 39
—4	— 43 21	2 <sup>7</sup> 93	2 <sup>7</sup> 83	+4	+135 16	3 <sup>7</sup> 03	2 <sup>7</sup> 89
—6	— 43 1	2 <sup>7</sup> 30	1 <sup>7</sup> 72	+6	+134 55	2 <sup>7</sup> 40	1 <sup>7</sup> 77
—8	— 42 41	1 <sup>7</sup> 89	0 <sup>7</sup> 34	+8	+134 34	1 <sup>7</sup> 98	0 <sup>7</sup> 40
+2	— 44 23	16 <sup>7</sup> 12	17 <sup>7</sup> 17	—2	+136 18	15 <sup>7</sup> 18	16 <sup>7</sup> 26
+4	+135 36	33 <sup>7</sup> 58	32 <sup>7</sup> 06	—4	— 43 21	43 <sup>7</sup> 03	41 <sup>7</sup> 46
+6	+134 55	8 <sup>7</sup> 26	6 <sup>7</sup> 10	—6	— 43 1	8 <sup>7</sup> 86	6 <sup>7</sup> 62

Die Austrittscurven für  $\tau = \pm 2^m$  und  $\pm 4^m$ , welchen sehr grosse Halbmesser entsprechen, wurden durch je drei Punkte bestimmt, welche hier folgen:

$$\begin{array}{l}
 \tau = + 2^m \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0^\circ 0' \quad \lambda = + 61^\circ 20' \\ \varphi = 0 0 \quad \lambda = -150 5 \\ \varphi = +51 11 \quad \lambda = +135 37 \end{array} \right. \\
 \tau = + 4^m \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 0 \quad \lambda = + 77 57 \\ \varphi = 0 0 \quad \lambda = -167 24 \\ \varphi = +36 16 \quad \lambda = +135 16 \end{array} \right. \\
 \tau = - 2^m \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0^\circ 0' \quad \lambda = -117^\circ 54' \\ \varphi = 0 0 \quad \lambda = + 30 30 \\ \varphi = -50 34 \quad \lambda = - 43 31 \end{array} \right. \\
 \tau = - 4^m \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 0 \quad \lambda = -100 15 \\ \varphi = 0 0 \quad \lambda = + 13 32 \\ \varphi = -34 58 \quad \lambda = - 43 21 \end{array} \right.
 \end{array}$$

## Curven gleicher Dauer des Vorüberganges

(vom inneren Eintritte bis zum inneren Austritte).

In der folgenden Tabelle ist  $\tau = T_{IV} - T_I - (T_{II} - T_I)$ , und haben  $\Lambda$ ,  $Pr$  und  $\rho$  eine ähnliche Bedeutung, wie bei den soeben behandelten Curven:

Nördliche Halbkugel				Südliche Halbkugel			
$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$	$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$
-14 <sup>m</sup>	-64° 42'	1' 41	0' 63	+12 <sup>m</sup>	+115° 18'	1' 54	1' 21
-12		1' 54	1' 21	+10		1' 69	1' 67
-10		1' 69	1' 67	+8		1' 88	2' 41
-8		1' 88	2' 11	+6		2' 12	2' 58
-6		2' 12	2' 58	+4		2' 43	3' 11
			+2	2' 84		3' 74	
			0	3' 42		4' 55	
			-2	4' 31		5' 67	
			-4	5' 79		7' 41	

Anmerkung. Es sei hier bemerkt, dass in der Peter'schen Darstellung dieser Curven (Untersuchung des Venus-Vorüberganges im Jahre 1882 von Bruno Peter) auf der nördlichen Halbkugel die den Curven beigesetzten Werthe von  $\tau$  sämmtlich um 2<sup>m</sup> zu gross angegeben sind.

$$\begin{aligned}
 \tau = -6^m & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0^\circ 0' \\ \varphi = 0 \quad 0 \\ \varphi = -24 \quad 58 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \lambda = -7^\circ 11' \\ \lambda = -122 \quad 13 \\ \lambda = -64 \quad 42 \end{array} \right. \\
 \tau = -8^m & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \quad 0 \\ \varphi = 0 \quad 0 \\ \varphi = -16 \quad 12 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \lambda = -20 \quad 0 \\ \lambda = -109 \quad 24 \\ \lambda = -64 \quad 42 \end{array} \right. \\
 \tau = -10^m & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \quad 0 \\ \varphi = 0 \quad 0 \\ \varphi = -6 \quad 29 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \lambda = -38 \quad 9 \\ \lambda = -91 \quad 14 \\ \lambda = -64 \quad 42 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Curven gleichzeitiger grösster Phase.

Nördliche Halbkugel				Südliche Halbkugel			
$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$	$\tau$	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$
+4 <sup>m</sup>	-179° 23'	2' 34	1' 12	-4 <sup>m</sup>	+ 5° 17'	2' 34	
+2	-178 13	3' 67	3' 48	-2	+ 4 7	3' 65	
0	-177 3	8' 58	9' 09	0	+ 2 57	8' 58	
-4	+ 5 17	5' 12	2' 44	+4	-174 43	5' 09	
			$\lambda$		$\varphi$		$\lambda$
-2	+44° 53'	+ 4° 7'		+2	-44° 48'		-178° 13'
	0 0	+65 57			0 0		-116 14
	0 0	-57 43			0 0		+119 48

Curven gleichen Werthes von  $\Delta'$  zur Zeit  $T_k$ .

$E$	$Pr$	$\rho$	$E$	$Pr$	$\rho$
0°	0' 73	0' 00	60°	0' 99	1' 87
10	0' 74	0' 28	70	1' 12	2' 29
20	0' 75	0' 56	80	1' 30	2' 78
30	0' 78	0' 86	90	1' 55	3' 37
40	0' 83	1' 17	100	1' 93	4' 13
50	0' 90	1' 50	110	2' 52	5' 16

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \text{für die nördliche Halbkugel} & \left\{ \begin{array}{l} \Phi = + 62^{\circ} 46' \\ \Lambda = - 44 31 \end{array} \right. \\ \text{„ „ stüdliche „} & \left\{ \begin{array}{l} \Phi = - 62 46 \\ \Lambda = + 135 29 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$E$  bezeichnet den Abstand der Curve vom Punkte  $\Phi, \Lambda$ .

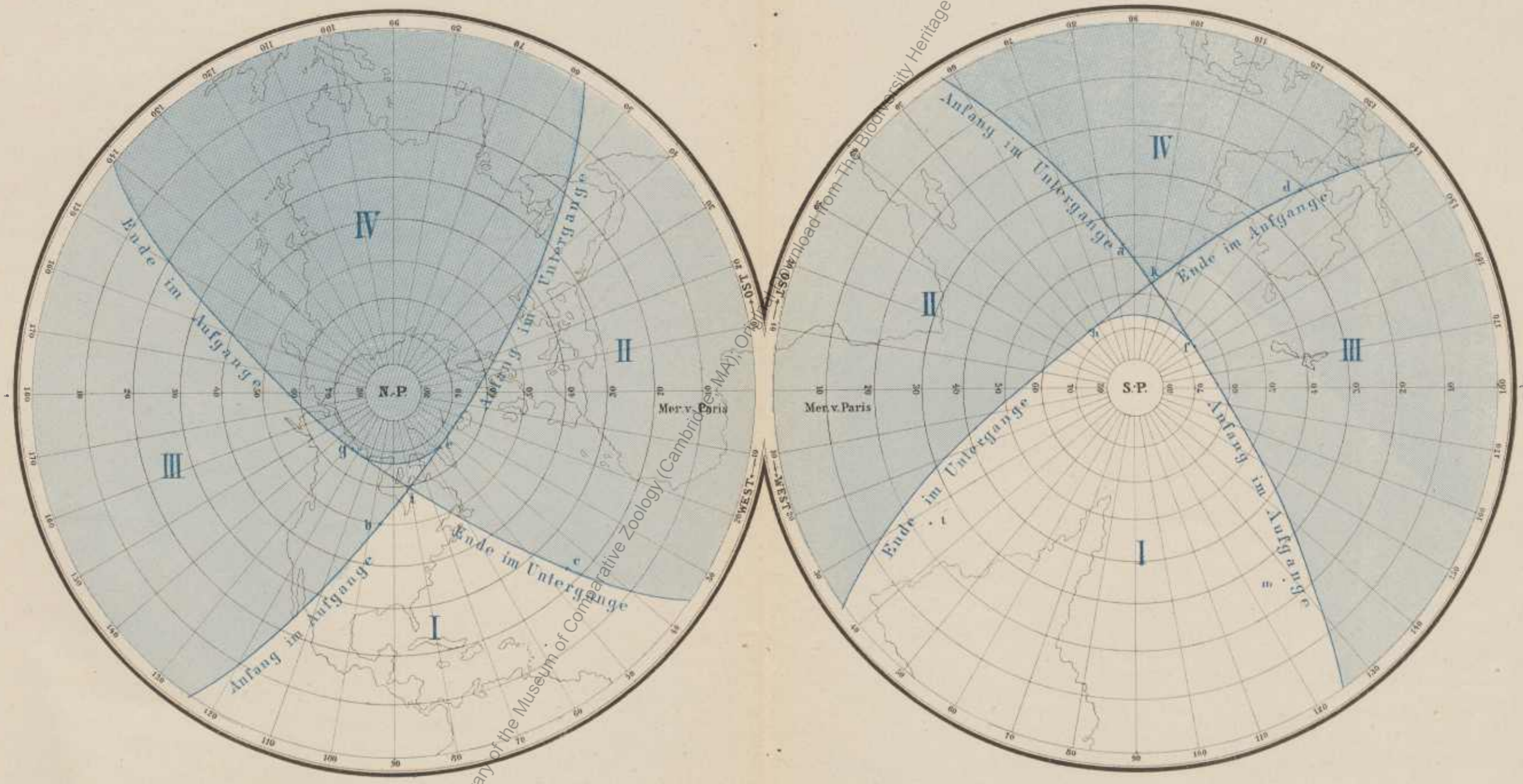
Haupthöhencurven.

	$\Lambda$	$Pr$	$\rho$
Innerer Eintritt . . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} + 38^{\circ} 24' \\ - 141 36 \end{array} \right.$	5.67	6.42
Innerer Austritt . . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} - 175 55 \\ + 4 5 \end{array} \right.$	2.09	3.65
Grösste Phase . . . . .	$\left\{ \begin{array}{l} - 114 23 \\ + 15 37 \end{array} \right.$	11.63	12.01

Diese Curven wurden mittelst der Näherungsgleichung:  $\eta \cos u - \xi \sin u = 0$  berechnet.

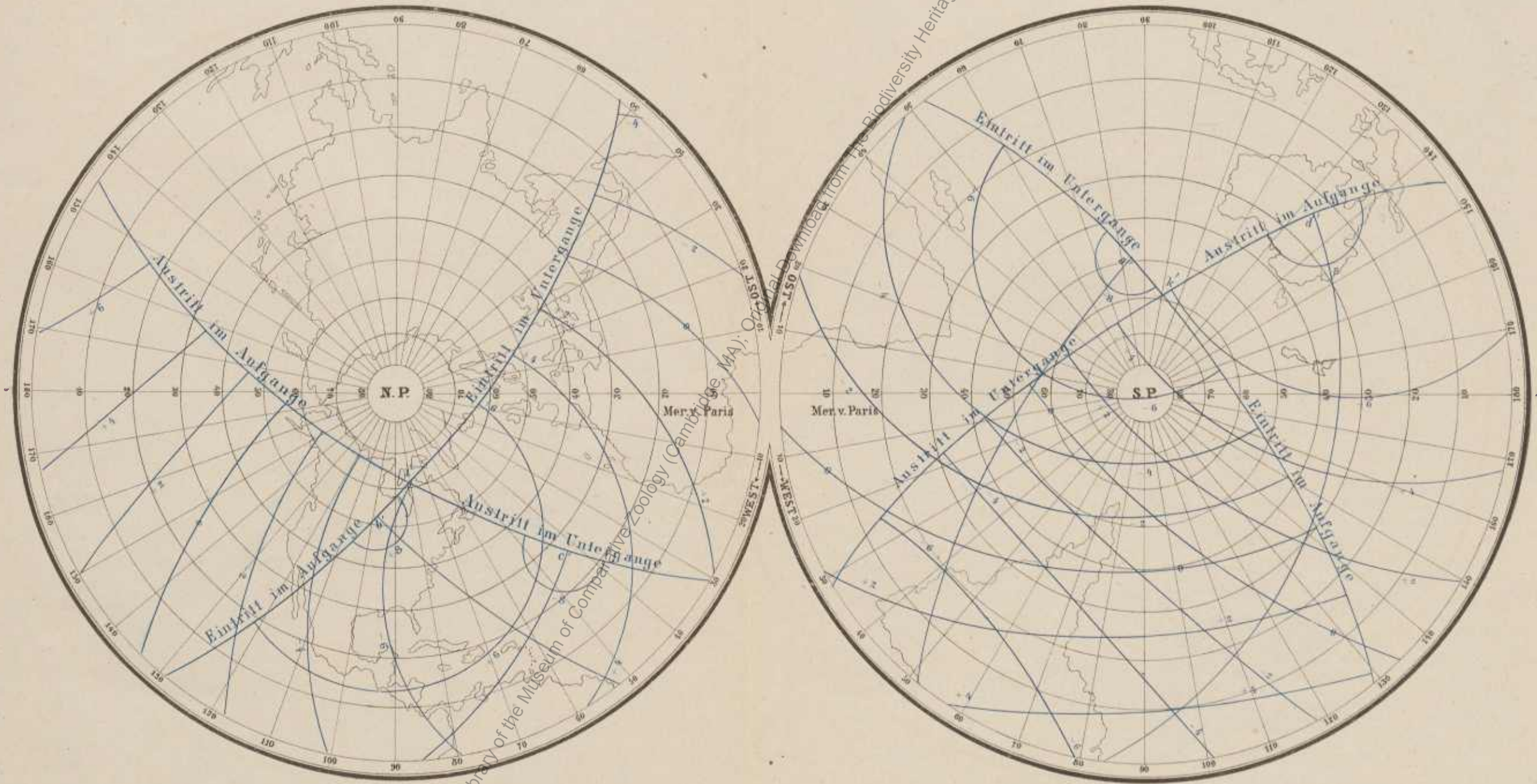
Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from the Biodiversity Library (http://www.biodiversitylibrary.org)

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA); Original Download from The Biodiversity Heritage Library <http://www.biodiversitylibrary.org/>; [www.biologiezentrum.at](http://www.biologiezentrum.at)



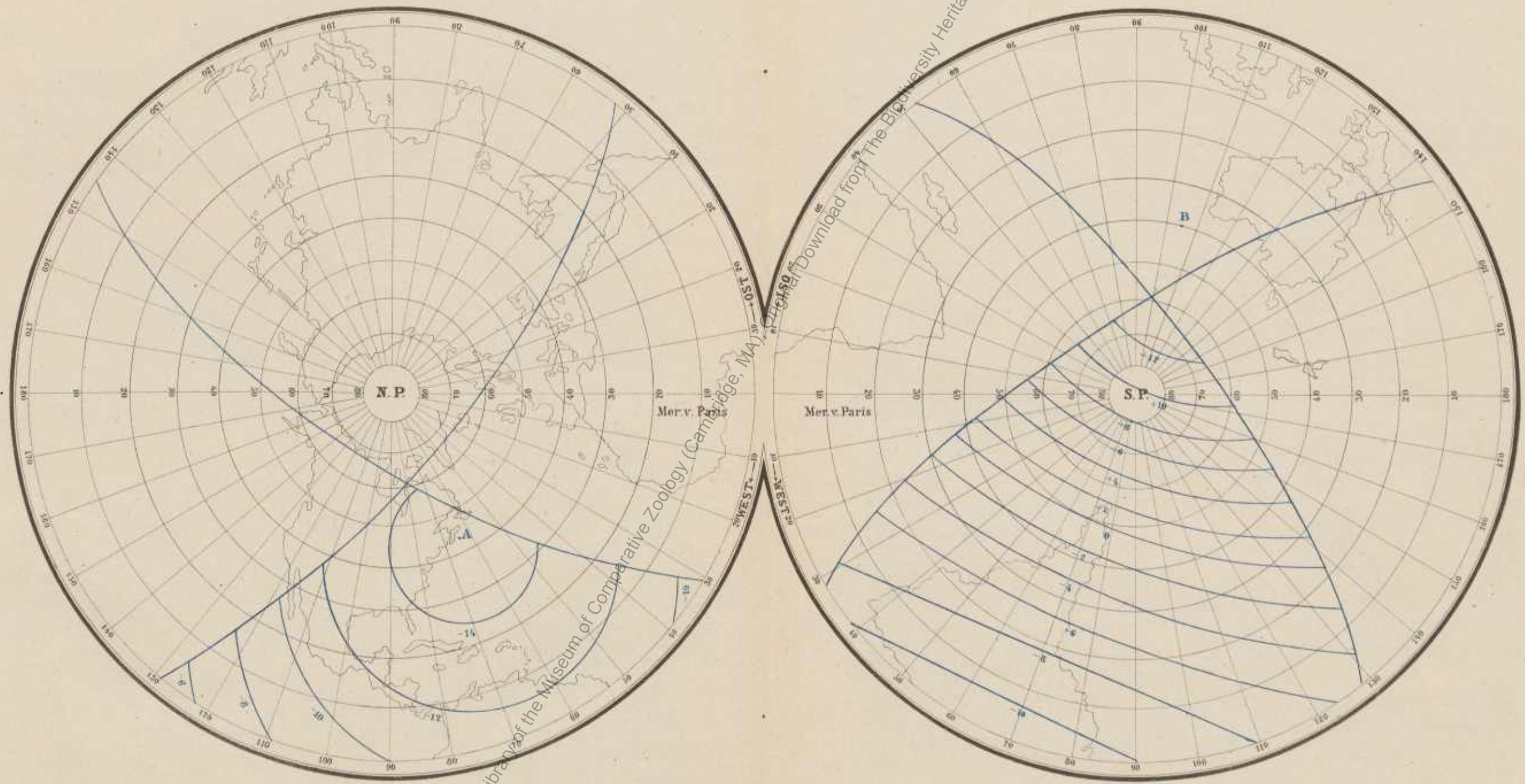
1882, F. F. W. H. m. a.

Druck v. J. Wagner in Wien



lith. v. F. Schima

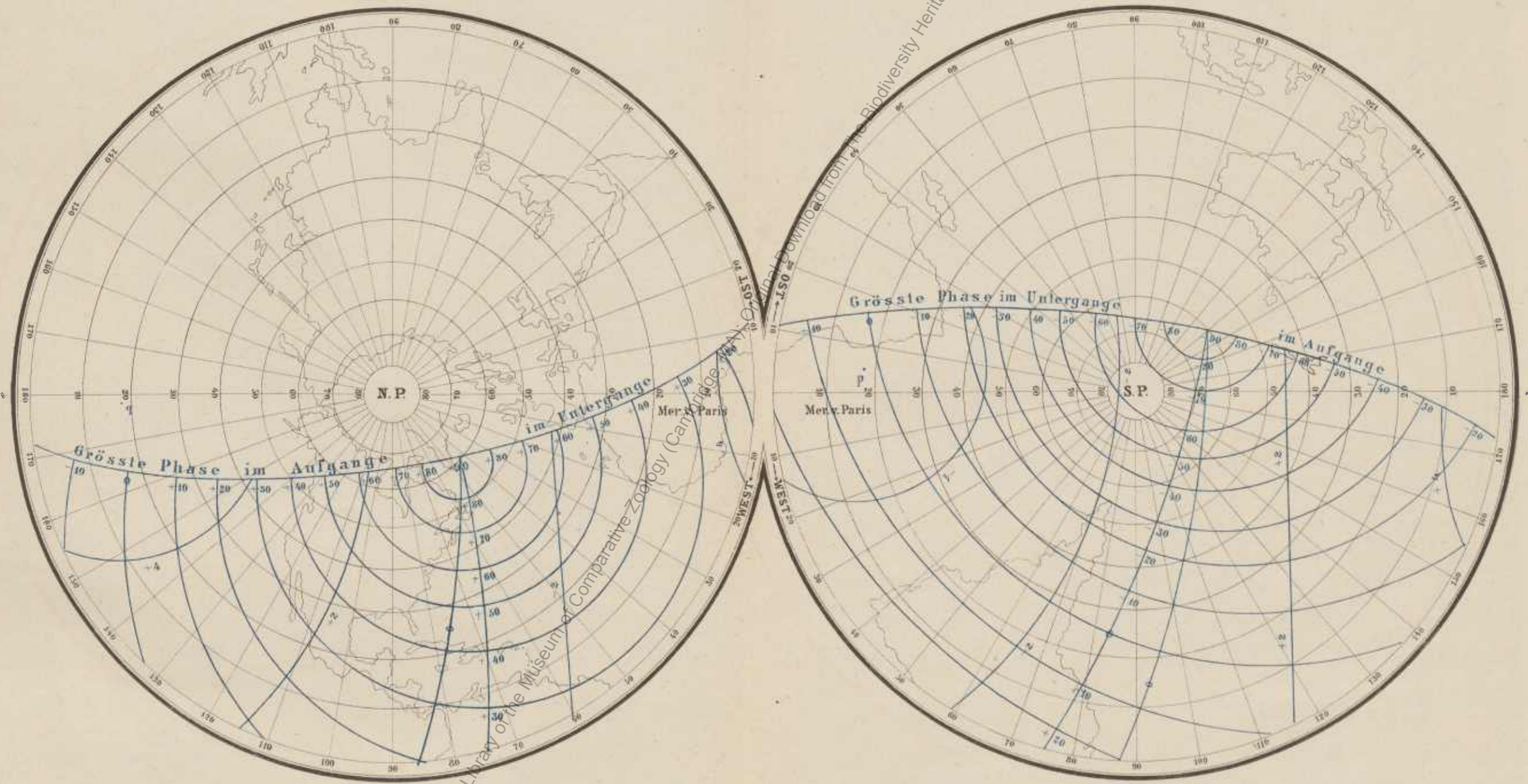
Druck v. J. Wagner in Wien



11th v. F. Hellma

Druck v. J. Wagner in Wien





118 v. F. Schima

Druck v. J. Wagner in Wien.

## Erklärung der Karten.

### Tafel I

zeigt die Sichtbarkeitsgrenzen des Venusvorüberganges vom 6. December 1882. (Siehe für über den Abschnitt  $\alpha$ . Sichtbarkeitsgrenzen.) Bezüglich der Punkte  $a, b, c, d, l, m$ , gilt Folgendes:

$a$	sieht den Anfang	zuerst
$b$	"	"
$c$	das Ende	zuerst
$d$	"	"
$l$	den Anfang	im geocentrischen Zenithe
$m$	das Ende	"

Die Punkte  $e, f, g, h, i, k$  haben die im Abschnitte  $i$  ( $\alpha$  Sichtbarkeitsgrenzen) angegebene Bedeutung. Dasselbe gilt von den Flächen I, II, III, IV und den kleinen Dreiecken  $egi$  und  $fhk$ .

### Tafel II

enthält die Grenzcurven  $E'$  und  $A'$ , auf welchen der innere Ein- und Austritt im Horizonte erfolgt, nebst den Curven gleichzeitiger innerer Berührung. Die beigefügten Zahlen bezeichnen, die zwischen der geocentrischen und der parallaktischen Berührung verfließende Zeit, in mittleren Zeitminuten ausgedrückt, und sind positiv oder negativ, je nachdem die parallaktische Berührung nach oder vor der geocentrischen stattfindet. Diese Karte dient hauptsächlich dazu, über die mehr oder weniger günstige Lage des Beobachtungsortes Aufschluss zu geben, wenn die Sonnenparallaxe aus der Beobachtung eines einzelnen Contactmomentes abgeleitet werden soll. Wie in der Einleitung nachgewiesen ward, liegen die günstigen Beobachtungsorte in der Nachbarschaft der den  $a, b, c, d$  analogen Punkte  $a', b', c', d'$ . Für die Beobachtung des verzögerten Eintrittes eignet sich daher am besten das centrale Nord-Amerika, namentlich Westcanada und die Umgebung der fünf grossen Seen. Minder günstig gestaltet sich die Beobachtung des beschleunigten Eintrittes, indem der Punkt  $a'$  in eine insellose Region des indischen Oceans fällt. Die beste Beobachtungsstation wäre Kerguelen-Eiland. Auch die Beobachtung des beschleunigten Austrittes ist minder günstig, weil der Punkt  $c'$  auf eine insellose Stelle des atlantischen Oceans fällt, und der Austritt für die nächste Inselgruppe — die Azoren — unsichtbar ist. Die besten Beobachtungsstationen auf den westlichen Antillen. Für die Beobachtung des verzögerten Austrittes eignet sich das ganze östliche Australien.

Die durch die Punkte  $a, b$  und  $c, d$  gehenden Curven sind die Haupthöhencurven der beiden inneren Berührungen.

### Tafel III.

In Tafel III sind die Curven gleicher Dauer des Vorüberganges (vom inneren Eintritte bis zum inneren Austritte) ersichtlich gemacht. Die beigetzten Zahlen bezeichnen, in Minuten ausgedrückt, den Unterschied zwischen der parallaktischen und geocentrischen Dauer, welcher positiv oder negativ ist, je nachdem erstere grösser oder kleiner als letztere ist.  $A$  und  $B$  sind die Punkte kürzester und längster Dauer. Ersterer liegt in der Nähe von Neu-Schottland, wesshalb sowohl diese Halbinsel als Neufundland und das ganze östliche Nord-Amerika vom südlichen Ende der Hudsonsbai bis Florida, ferner die Bahama- und Bermudas-Inseln günstige Stationen abgeben. Der Punkt  $B$  liegt in dem in Tafel I mit IV bezeichneten Raume, wo der ganze Durchgang unsichtbar bleibt, und fallen die Curven, wo der Vorübergang um 4–14<sup>m</sup> länger dauert, als für das Erdcentrum, in ihrer ganzen Ausdehnung in das südliche Polarmeer. Beobachtungen der Dauer werden daher nur in der Nachbarschaft des Punktes  $A$  von Vortheil sein.

### Tafel IV

zeigt die Curve, auf welcher die grösste Phase im Horizont stattfindet, und ansserdem zwei Parallelbogensysteme, deren Pole sich einerseits an den Punkten  $p$  und  $q$ , wo die grösste Phase zuerst und zuletzt gesehen wird, andererseits an den mit  $+90$  und  $-90$  bezeichneten Punkten befinden. Ersteres besteht aus den Curven gleichzeitiger grösster Phase, und bedeuten die beigetzten Zahlen, in Minuten ausgedrückt, den Unterschied, welcher sich ergibt, wenn man die Zeit der geocentrischen grössten Phase von jener der parallaktischen abzieht, d. i.  $T_k - T_k'$ .

Ungleich wichtiger ist das zweite Curvensystem. Auf jeder dieser Curven hat  $\Delta'$ , um die Zeit  $T_k$ , einen constanten Werth. Auf dem mit 0 bezeichneten Äquator dieses Systems ist  $\Delta' - K = 0$ . Mit dem Abstände von diesem Äquator wächst

sowohl der numerische Werth der Differenz  $\Delta' - K$ , als die Günstigkeit der Lage zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus derselben. Die jeder Curve beige-setzte Zahl bezeichnet, in Graden ausgedrückt, deren Abstand von der Curve, wo  $\Delta' = K$ .

Das der Gradzahl vorgesetzte Zeichen  $\{\pm\}$  bedeutet, dass  $\Delta' - K$   $\left. \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$  ist.

Auf den genannten Curven hat  $\Delta' - K$  folgende numerische Werthe:

Curve	$\Delta' - K$	Curve	$\Delta' - K$
90°	24 <sup>7</sup> / <sub>5</sub>	40°	15 <sup>7</sup> / <sub>7</sub>
80	24·1	30	12·2
70	23·0	20	8·4
60	21·2	10	4·2
50	18·7	0	0·0

Jene durch die mit +90 und -90 bezeichneten Pole gehenden grössten Kreise, an deren Durchschnittspunkten mit den eben erwähnten Curven die Abstände dieser letzteren von ihrem Äquator angegeben sind, sind die Hauptthöhencurven für die grösste Phase. Aus Tafel IV erkennt man, dass die grösste Phase am vortheilhaftesten im östlichen Nord-Amerika zu beobachten ist.

Die übrigen in der Einleitung besprochenen Curven wurden nicht verzeichnet. Nach dem Gesagten hat es jedoch keine Schwierigkeit, sich von deren Verlaufe eine richtige Vorstellung zu machen.

Digitised by the Harvard University, Ernst Mayr Library of the Museum of Comparative Zoology (Cambridge, MA). Original Download from The Biodiversity Library http://www.biodiversitylibrary.org/ www.biologiezentrum.at

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Denkschriften der Akademie der Wissenschaften.Math.Natw.Kl. Frueher: Denkschr.der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften. Fortgesetzt: Denkschr.oest.Akad.Wiss.Mathem.Naturw.Klasse.](#)

Jahr/Year: 1882

Band/Volume: [44\\_2](#)

Autor(en)/Author(s): Friesach Carl

Artikel/Article: [Der am 6. December 1882 bevorstehende Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe. \(Mit 4 Tafeln und 6 Holzschnitten\). 237-266](#)