TAFELN

DER

SYMMETRISCHEN FUNCTIONEN DER WURZELN UND DER COËFFICIENTEN-COMBINATIONEN

VOM GEWICHTE EILF UND ZWÖLF.

BERECHNET VON

W. ŘEHOŘOVSKÝ

IN PRAG.

(Mit 2 Tabellen.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 15. JUNI 1882.

Die von Meier Hirsch im Jahre 1809 in seiner „Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen" in Berlin veröffentlichten Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln enthalten die Ausdrücke für sämmtliche Functionen vom Gewichte eins bis zehn; im Jahre 1857 publicirte H. Cayley in den Philos. Transactions, Vol. 147 eine weitere Serie von Tafeln, in welchen umgekehrt Combinationen der Coëfficienten einer algebraischen Gleichung durch symmetrische Functionen der Wurzeln ausgedrückt werden, wieder für sämmtliche Coëfficienten-Combinationen vom Gewichte eins bis zehn. Herr Faà de Bruno hat in seiner „Théorie des formes binaires" 1876 eine weitere Tafel veröffentlicht, nämlich für die symmetrischen Functionen der Wurzeln vom Gewichte eilf.[1]

Die fortschreitende Entwicklung der Theorie der binären Formen hat mich veranlasst, diesen schon bestehenden Tafeln weitere drei beizufügen, und zwar eine, in welcher die Coëfficienten-Combinationen vom Gewichte eilf durch symmetrische Functionen der Wurzeln und zwei, in welchen die symmetrischen Functionen der Wurzeln vom Gewichte zwölf als Functionen der Coefficienten und umgekehrt Coëfficienten-Combinationen von demselben Gewichte durch die symmetrischen Functionen der Wurzeln ausgedrückt werden. Die erste dieser Tafeln nimmt die rechts von der starken Diagonale stehende Hälfte der mit XI bezeichneten, am Ende beigefügten Tafel ein; die übrigen zwei sind auf der zweiten mit XII bezeichneten Tafel vereinigt. Die Einrichtung der Tafeln ist ganz dieselbe wie die der Tafeln vom Gewichte eins bis zehn in Herrn W. Fiedler's: Elemente der neueren Geometrie etc. 1862, p. 73 u. ff. Zur Bezeichnung der symmetrischen Functionen wurde die bequeme von Meier Hirsch eingeführte Symbolik beibehalten.

[1] Nebenbei sei bemerkt, dass ich diese Tafel controlirt und dabei nur zwei Druckfehler gefunden habe. In der Zeile $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta$, Colonne $a_8 a_1^3$ soll -5 statt $+5$ und in derselben Zeile, Colonne $a_6 a_2^2 a_1$ -16 statt $+16$ stehen.

I.

Die Berechnung der Zahlencoëfficienten in den Ausdrücken für die symmetrischen Functionen der Wurzeln vom Gewichte zwölf wurde auf folgende Weise durchgeführt:

Zunächst ist aus der Theorie der symmetrischen Functionen bekannt, dass die Coëfficienten in der Diagonale von unten links nach oben rechts sämmtlich $+1$ sind. Die Coëfficienten in den ersten vier Colonnen a_{12}, $a_{11}a_1$, $a_{10}a_2$ und $a_{10}a_1^2$ wurden mit Hilfe der vom Herrn Faà de Bruno in dem bereits erwähnten Werke, Seite 58 angegebenen Formeln berechnet;[1] nach dem Cayley'schen Gesetze von der Symmetrie der Tafeln sind hiedurch auch die Coëfficienten in den Zeilen $(\overline{12})$, $(\overline{11}\,1)$, $(\overline{10}\,2)$ und $(\overline{10}\,1^2)$ bestimmt.

Die Coëfficienten für die folgenden drei Functionen (93), (921) und (91^3) können auf Grund der bekannten Recursionsformeln leicht berechnet werden; man erhält für dieselben die Ausdrücke

$$(93) = (3)(9) - (\overline{12}),$$

$$(921) = (1)(92) - (\overline{10}\,2) - (93),$$

$$(91^3) = \frac{1}{3}\left[(1)(91^2) - (\overline{10}\,1^2) - (921)\right].$$

Berechnet man ausserdem noch die Functionen (84), (75), (6^2) nach den Formeln

$$(84) = (4)(8) - (\overline{12}),$$

$$(75) = (5)(7) - (\overline{12}),$$

$$(6^2) = \frac{1}{2}\left[(6)(6) - (\overline{12})\right],$$

so hat man im Ganzen zehn Zeilen, also auch zehn Colonnen bestimmt, und man kann nun auf Grund dieser in jeder Zeile bekannten eilf Coëfficienten (die in der Diagonale eingerechnet) zur Berechnung der übrigen sechsundsechzig Functionen einen anderen Vorgang wählen, welcher systematisch auf einmal ganze Gruppen von symmetrischen Functionen liefert, nämlich solche Gruppen, in welchen der höchste vorkommende Exponent immer derselbe ist. Eine solche Gruppe wäre z. B.

$$(3^4),\ (3^3 21),\ (3^2 2^3),\ (3^3 1^3),\ (3^2 2^2 1^2),\ (32^4 1),\ (3^2 21^4),\ (32^3 1^3),\ (3^2 1^6),\ (32^2 1^5),\ (321^7),\ (31^9).$$

Dieser Vorgang beruht auf der Anwendung der bekannten Differentialgleichung

$$\sum_1^n{}_i \frac{d\varphi}{d\alpha_i} = -\left[n\frac{d\varphi}{da_1} + (n-1)a_1\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + a_{n-1}\frac{d\varphi}{da_n}\right],$$

wobei φ eine symmetrische Function der Wurzeln ist.

In dieser Form würde die Gleichung zur Berechnung der sämmtlichen Zahlencoëfficienten einer symmetrischen Function vom gegebenen Gewichte nicht genügen, da sie zur Bestimmung der Coëfficienten lineare Gleichungen in geringerer Anzahl liefert, als nothwendig ist. Man kann aber dieser Gleichung eine allgemeinere Form geben, wenn man bei der Ableitung derselben das Gewicht v der Function φ vom Grade n der Gleichung, auf welche die Function sich bezieht, unterscheidet; man gelangt so zu der Gleichung

$$\sum_1^n{}_i \frac{d\varphi}{da_i} = -\left[n\frac{d\varphi}{da_1} + (n-1)a_1\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + (n-v+1)a_{v-1}\frac{d\varphi}{da_v}\right]$$

---

[1] In der deutschen Übersetzung dieses Werkes vom Herrn Th. Walter sind im Anhange noch Formeln für die Berechnung der Zahlencoëfficienten in den weiteren Colonnen gegeben; die Anwendung derselben erweist sich aber bei Berechnung einer ganzen Tafel nicht mehr als praktisch, da man auf anderen Wegen schneller zum Ziele gelangen kann.

und wir werden sogleich zeigen, dass sie in dieser Form eigentlich zwei Gleichungen repräsentirt. Zu dem Zwecke ist es nothwendig, das Gesetz anzugeben, nach welchem die Function $\sum \frac{d\varphi}{d\alpha_l}$ aus der Function φ alsogleich gebildet werden kann.[1] Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Function φ enthält keine Wurzeln mit dem Exponenten eins; sie sei z. B. von der Form

$$\varphi = (5^3 432^2).$$

Die Function $\sum \frac{d\varphi}{d\alpha_l}$ besteht dann aus vier neuen Functionen, welche man erhält, indem man die unteren Zahlen successive um Eins erniedrigt; im angeführten Beispiele, also aus den Functionen

$$(5^2 4^2 32^2),\ (5^3 3^2 2^2),\ (5^3 42^3),\ (5^3 4321).$$

Der Coëfficient einer jeden solchen Function ist gleich dem Producte der unteren Zahl vor der Erniedrigung und der oberen Zahl, mit welcher die erniedrigte in der neuen Function behaftet erscheint. So sind die Coëfficienten für die vorangehenden Functionen respective

$$5\times 2,\quad 4\times 2,\quad 3\times 3,\quad 2\times 1,$$

und folglich

$$\sum \frac{d\varphi}{d\alpha_l} = 10(5^2 4^2 32^2) + 8(5^3 3^2 2^2) + 9(5^3 42^3) + 2(5^3 4321).$$

2. Die Function φ enthält Wurzeln mit dem Exponenten eins, sie sei also von der Form

$$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_j^{\pi_j} 1^m);$$

der Vorgang bleibt hier ganz derselbe wie in (1), nur der Zahlencoëfficient der letzten neuen Function

$$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_j^{\pi_j} 1^{m-1})$$

wird anders gebildet; derselbe ist nämlich gleich

$$n - (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_j + m - 1),$$

enthält also die Grösse n. So z. B. entstehen aus der Function

$$\varphi = (5^2 3^4 21^3)$$

die neuen Functionen

$$(543^4 21^3),\ (5^2 3^3 2^2 1^3),\ (5^2 3^4 1^4),\ (5^2 3^4 21^2)$$

mit den Coëfficienten

$$5\times 1,\quad 3\times 2,\quad 2\times 4,\quad n-9,$$

so dass

$$\sum \frac{d\varphi}{d\alpha_l} = 5(543^4 21^3) + 6(5^2 3^3 2^2 1^3) + 8(5^2 3^4 1^4) + (n-9)(5^2 3^4 21^2).$$

Wir können also allgemein setzen

$$\sum \frac{d\varphi}{d\alpha_l} = \psi + n\chi,$$

wenn wir mit ψ die Summe aller Glieder, welche ohne den Coëfficienten n erscheinen, und mit χ die einzige Function, deren Coëfficient n ist, bezeichnen; im Falle (1) kommt diese Function gar nicht vor und es ist dann

$$\sum \frac{d\varphi}{d\alpha_l} = \psi.$$

[1] Bezüglich der Begründung des bereits Angeführten und des Nachfolgenden verweisen wir auf des Verfassers „Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln von algebraischen Gleichungen", welche als erster Theil der im Verein mit Herrn Prof. Ed. Weyr verfassten „Grundzüge der höheren Algebra" demnächst in böhmischer Sprache erscheinen wird.

Auf Grund dieser Erwägungen ist dann

$$\psi+n\chi=-\left[n\frac{d\varphi}{da_1}+(n-1)a_1\frac{d\varphi}{da_2}+\ldots+(n-v+1)a_{v-1}\frac{d\varphi}{da_v}\right].$$

Beachtet man nun, dass n nur auf die einzige Bedingung gebunden ist, dass es nicht kleiner sein kann als die Anzahl der in jedem Gliede der Function φ vorkommenden Wurzeln, sonst aber ganz willkürlich ist, so folgt daraus, dass auf beiden Seiten dieser Gleichung die Glieder ohne n für sich, sowie die Glieder mit n ebenfalls für sich einander gleich sein müssen, d. h. wir haben die Gleichungen

$$\psi=a_1\frac{d\varphi}{da_2}+2a_2\frac{d\varphi}{da_3}+\ldots+(v-1)a_{v-1}\frac{d\varphi}{da_v},$$

$$\chi=-\left[\frac{d\varphi}{da_1}+a_1\frac{d\varphi}{da_2}+\ldots+a_{v-1}\frac{d\varphi}{da_v}\right].$$

Diese beiden Gleichungen liefern nun zur Berechnung der Zahlencoëfficienten eine mehr als nothwendige Anzahl von linearen Gleichungen, welche also nicht nur zur Bestimmung, sondern auch zur Controle derselben verwendet werden können.

Eine von diesen Gleichungen würde zur Berechnung der Zahlencoëfficienten einer Function φ im Allgemeinen nicht genügen; hat man aber auf irgend eine Art eine gewisse Anzahl dieser Coëfficienten schon bestimmt, so ist zur Berechnung der übrigen eine dieser Gleichungen hinreichend, und zwar wird man jedenfalls die bedeutend einfachere benützen, nämlich

$$\frac{d\varphi}{da_1}+a_1\frac{d\varphi}{da_2}+\ldots+a_{v-1}\frac{d\varphi}{da_v}=-\chi, \tag{1}$$

da die rechte Seite entweder gleich Null ist, oder aus einer einzigen Function vom Gewichte $v-1$ besteht.

Mit Hilfe dieser Gleichung und der schon früher berechneten zehn Coëfficienten, sowie der bekannten Coëfficienten $+1$ in der Diagonale, haben wir die übrigen Functionen ohne verhältnissmässig grossen Zeitaufwand gruppenweise berechnet, wobei auf folgende Weise systematisch vorgegangen werden kann:

Bezeichnet man die Zahlencoëfficienten der einzelnen Coëfficienten-Combinationen, wie sie in der Tafel nach einander folgen, und welche den achten Grad nicht übersteigen, mit $A, B, \ldots, Z, A_1, B_1, \ldots, Z_1, \ldots$, so ist für alle noch zu bestimmenden Functionen

$$\varphi=Aa_{12}+Ba_{11}a_1+Ca_{10}a_2+\ldots+T_2a_2^5a_1^2+U_2a_2^4a_1^4.$$

Führt man die durch die linke Seite der Gleichung (1) angezeigte Operation ein für allemal aus ($v=12$ vorausgesetzt) und ordnet nach den Coëfficientenverbindungen $a_{11}, a_{10}a_1, \ldots, a_2^4a_1^3, a_2^3a_1^5$, so übergeht (1) in

$$\begin{aligned}(A+B)a_{11}+(B+C+2D)a_{10}a_1+\ldots+(Q_2+5T_2+4U_2)a_2^4a_1^3+\\+(R_2+4U_2)a_2^3a_1^5=-\chi.\end{aligned} \tag{2}$$

Die weitere Rechnung gestaltet sich nun folgendermassen: Da die sämmtlichen Functionen, deren höchster Exponent zwei ist, durch die schon früher berechneten zehn Zeilen — also auch Colonnen — berechnet erscheinen, so kommt zunächst die Gruppe derjenigen Functionen in Betracht, deren höchster Exponent drei ist. Man leite für diese Functionen

$$(3^4),\ (3^321),\ (3^22^3),\ (3^31^3), \ldots$$

die ihnen entsprechenden Functionen χ ab, nämlich

$$0\ ,\ (3^32)\ ,\ 0\ ,\ (3^31^2), \ldots,$$

deren Werthe in der schon bekannten Tafel für Functionen vom Gewichte eilf gegeben sind, und vergleiche dann die Coëfficienten der gleichen Coëfficienten-Combinationen auf beiden Seiten der Gleichung (2). Dabei ist es aber nicht nothwendig, alle Glieder zu vergleichen, denn der höchste vorkommende Exponent der Functionen der Gruppe sowie der χ ist drei und somit enthalten die ihnen entsprechenden Ausdrücke — nach dem bekannten Satze vom Grade derselben — nur solche Combinationen, deren Grad drei nicht übersteigt; es werden somit nur Coëfficienten bei denjenigen Combinationen in (2) verglichen, deren Grad höchstens gleich drei ist, und in den so erhaltenen Gleichungen werden zugleich auch alle Coëfficienten $L, M, Q, \ldots$ ausgelassen, welche sämmtlich gleich Null sind, da sie bei Coëfficienten-Combinationen stehen, deren Grad drei übersteigt. Auf diese Art erhält man Systeme von Gleichungen, welche in folgendes Schema zusammengestellt werden können:

		Für die Function				
		(3^4)	$(3^3 21)$	$(3^2 2^3)$	$(3^3 1^3)$	. . .
a_{11}	$A+\ B=$	0	−11	0	+22	. . .
$a_{10}a_1$	$B+C+2D=$	0	+11	0	−12	. . .
$a_9 a_2$	$C+E+\ F=$	0	+ 6	0	−19	. . .
. . . .	. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$a_5 a_3^2$	$Y+\ H_1=$	0	− 2	0	+ 1	. . .
$a_4^2 a_3$	$H_1+3T_1=$	0	+ 1	0	0	. . .

Einige von den Gleichungen enthalten **nur** bekannte Coëfficienten $A, B, C, \ldots$, können also zur Controle benützt oder auch beim Aufschreiben des Schema's ganz ausgelassen werden.

Dass die Anzahl der Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten genügend ist, ersieht man aus Folgendem: Die grösste Anzahl von Gliedern hat die Function (3^4), nämlich so viel als es Zusammenstellungen erster, zweiter und dritter Classe aus den Zahlen $12, 11, \ldots, 2, 1$ zur Summe 12 gibt; diese Anzahl ist gleich 19, es sind somit im Ganzen 19 Coëfficienten zu bestimmen; die Anzahl der Bestimmungsgleichungen ist gleich sechszehn, nämlich gleich der Anzahl der Combinationen erster, zweiter und dritter Classe aus den Zahlen 11, $10, \ldots, 2, 1$ zur Summe 11; da aber 11 Coëfficienten schon bekannt sind, so hat man 27 Gleichungen zur Bestimmung von 19 Unbekannten, was mehr als genügend ist.

Ähnliche Betrachtungen zeigen, dass die Anzahl der Gleichungen auch für die weiteren Gruppen genügend sei.

Nach Berechnung der Functionen, deren höchster Exponent drei ist, und Übertragung der gewonnenen Resultate in die entsprechenden Colonnen werden auf dieselbe Weise die weiteren Gruppen mit dem höchsten Exponenten $4, 5, \ldots, 8$ successive behandelt, wobei in Folge der sofortigen Übertragung der Coëfficienten in die respectiven Colonnen die Zahl der zu bestimmenden Coëfficienten, von der Gruppe mit dem höchsten Exponenten 5 angefangen, immer kleiner wird, wie aus folgendem Schema ersichtlich ist:

Gruppe mit dem höchsten Exponenten	Die grösste Anzahl der Glieder	Anzahl der bekannten Coëfficienten	Anzahl der noch zu bestimmenden Coëfficienten
3	19	11	8
4	34	11	23
5	47	21	26
6	58	39	19
7	65	56	9
8	70	68	2

Es ist nicht nothwendig, ausdrücklich hervorzuheben, dass die Coëfficienten jeder berechneten Zeile controlirt werden müssen, bevor sie in die entsprechende Colonne eingetragen und zur weiteren Rechnung benützt werden. Zu einer solchen Controle eignet sich am besten der bekannte Satz:

Die algebraische Summe der Zahlencoëfficienten in dem Ausdrucke für eine symmetrische Function

$$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_i^{\pi_i})$$

ist gleich

$$\frac{(-1)^k \Gamma(k+1)}{\Gamma(\pi_1+1)\,\Gamma(\pi_2+1)\ldots\Gamma(\pi_i+1)},$$

wobei

$$k = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_i$$

und

$$\Gamma(h+1) = 1.2\ldots(h-1)h\,, \quad \Gamma(1) = 1.$$

II.

Bei Berechnung der Zahlencoëfficienten in den andern Hälften der Tafeln, in welchen Coëfficienten-Combinationen durch symmetrische Functionen ausgedrückt werden, wurde zuerst die Tafel vom Gewichte eilf und dann die vom Gewichte zwölf berechnet, wobei zwei Methoden angewendet wurden.

Die erste derselben war die von Herrn Cayley in den Phil. Transactions 1857, Vol. 147, p. 489 u. ff. angegebene, nach welcher aus schon bekannten Coëfficienten-Combinationen durch Multiplication mit den Coëfficienten der Gleichung neue Combinationen vom höheren Gewichte berechnet werden können. Herr Cayley begnügt sich an der angeführten Stelle mit der Andeutung, wie eine solche Multiplication mit dem Coëfficienten a_1 mechanisch durchgeführt werden kann; wir wollen hier kurz die Multiplication mit einem beliebigen Coëfficienten a_m hinzufügen.

Bekanntlich führt eine solche Multiplication auf die Aufgabe, eine gegebene symmetrische Function

$$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_i^{\pi_i})$$

mit einer andern von der Form (1^m) zu multipliciren. Es entstehen dadurch Functionen vom Gewichte

$$\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \ldots + \pi_i p_i + m\,;$$

um alle diese Functionen zu erhalten, verfahre man auf folgende Weise, wie wir auf einem Beispiele erklären wollen: Es sei $(3^2 21)$ zu multipliciren mit (1^3); man schreibe die Function vollständig aus, und füge noch drei Nullen bei, also in der Form (3321000); hierauf addire man die Function (111) zu der vorhergehenden auf alle möglichen Arten so, dass nur von einander verschiedene Summen sich ergeben, welche dann die einzelnen durch Multiplication entstandenen Functionen angeben. Die ganze Rechnung kann schematisch, wie folgt, zusammengestellt werden:

3	3	2	1	0	0	0	Resultirende Functionen	Zahlencoëfficienten derselben
1	1	1					$(4^2 31)$	$\binom{2}{2}\binom{1}{1}\binom{1}{0} = 1$
1	1		1				$(4^2 2^2)$	$\binom{2}{2}\binom{2}{1} = 2$
1	1			1			$(4^2 21^2)$	$\binom{2}{2}\binom{1}{0}\binom{2}{1} = 2$
1		1	1				$(43^2 2)$	$\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 2$
1		1		1			$(43^2 1^2)$	$\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 4$
		1	1	1			$(3^3 21)$	$\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} = 3$
		1		1	1		$(3^3 1^3)$	$\binom{3}{1}\binom{3}{2} = 9$
			1	1	1		$(3^2 2^2 1^2)$	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} = 2$
				1	1	1	$(3^2 21^4)$	$\binom{2}{0}\binom{1}{0}\binom{4}{3} = 4$

Das Gesetz zur Bestimmung der Zahlencoëfficienten der einzelnen Functionen kann folgendermassen allgemein ausgesprochen werden:

Wenn durch Multiplication der Functionen

$$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_i^{\pi_i})(1^m)$$

die neue Function

$$(r_1^{\rho_1} r_2^{\rho_2} \ldots r_k^{\rho_k})$$

entsteht, und wenn von den zuaddirten m Einheiten σ_1 derselben in r_1, σ_2 in $r_2, \ldots, \sigma_k$ in r_k sich befinden, wobei $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k = m$, so ist der Zahlencoëfficient der Function $(r_1^{\rho_1} r_2^{\rho_2} \ldots r_k^{\rho_k})$ gleich $\binom{\rho_1}{\sigma_1}\binom{\rho_2}{\sigma_2}\ldots\binom{\rho_k}{\sigma_k}$.

Im oberen Beispiele ist also

$$(3^2 21)(1^3) = (4^2 31) + 2(4^2 2^2) + 2(4^2 21^2) + 2(43^2 2) + 4(43^2 1^2)$$
$$+ 3(3^3 21) + 9(3^3 1^3) + 2(3^2 2^2 1^2) + 4(3^2 21^4).$$

Nach dieser Methode wurden zuerst alle Coëfficienten-Combinationen, welche wenigstens ein a_1 als Factor enthalten, aus der bekannten Tafel vom Gewichte 10 und alle Combinationen, welche wenigstens ein a_2 als Factor besitzen, aus jener vom Gewichte 9 berechnet. Nur die letzte Colonne a_1^{11} wurde nicht auf diese Art berechnet, da die einzelnen Coëfficienten dieser Colonne nichts Anderes sind als die Polynomialcoëfficienten eines zur eilften Potenz erhobenen Polynoms von eilf Gliedern.

Im Verlaufe der Rechnung ergibt es sich von selbst, wie dieselbe am vortheilhaftesten arrangirt werden kann.

Die noch übrig bleibenden Combinationen könnten ähnlich berechnet werden, jedoch stellt sich die Rechnung nicht mehr als vortheilhaft heraus, weil die Multiplication mit den Functionen $a_3 = -(1^3)$, $a_4 = (1^4)$ u. s. w. immer complicirter wird, und weil es nicht mehr nothwendig ist, ganze Colonnen zu berechnen, da nach dem Cayley'schen Symmetriegesetze in den noch zu berechnenden Colonnen eine grosse Anzahl von Coëfficienten schon bekannt ist. Zur Berechnung der noch unbekannten Zahlencoëfficienten in diesen Colonnen haben wir eine zweite Methode verwendet, welche auf folgendem Satze beruht:

Der Zahlencoëfficient der symmetrischen Function S in der Colonne der Coëfficienten-Combination A ist gleich der mit $(-1)^{v-1}$ multiplicirten algebraischen Summe der Producte der vorangehenden Zahlen derselben Zeile S mit den über ihnen stehenden Zahlen in der Zeile derjenigen symmetrischen Function, welche zur Combination A conjugirt ist.

Dabei bedeutet v wieder das Gewicht der Combination; die conjugirte symmetrische Function trifft mit der zu berechnenden Colonne in der Diagonale zusammen.

Wären z. B. die Combinationen a_{11}, $a_{10}a_1$, a_9a_2 und $a_9a_1^2$ nach dem Früheren schon berechnet

	11	$\overline{10}1$	92	91^2	83	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. .	. . .	. . .
$(2^3 1^5)$	+77	−27	+ 7	0	− 1	. . .
(31^8)				− 1	x	. . .
$(2^2 1^7)$			− 1	− 2	y	. . .
(21^9)		− 1	− 9	− 19	z	. . .
(1^{11})	− 1	−11	−55	−110	u	. . .

so hätte man für die Zahlencoëfficienten x, y, z, u der Combination $a_8\,a_3$ die Werthe

$$x = 0.(-\ 1) = 0,$$
$$y = 0.(-\ 2) + (+7)(-\ 1) = -7,$$
$$z = 0.(-\ 19) + (+7)(-\ 9) + (-27)(-\ 1) = -36,$$
$$u = 0.(-110) + (+7)(-55) + (-27)(-11) + (+77)(-1) = -165.$$

Der erwähnte Satz folgt alsogleich, wenn man, um bei dem Beispiele zu bleiben, in den Ausdruck

$$(2^3 1^5) = 77\,a_{11} - 27\,a_{10}a_1 + 7\,a_9 a_2 + 0.a_9 a_1^2 - a_8 a_3$$

die schon bekannten Werthe

$$a_{11} = -(1^{11}),$$
$$a_{10}a_1 = -(21^9) - 11(1^{11}),$$
$$a_9\,a_2 = -(2^2 1^7) - 9(21^9) - 55(1^{11}),$$
$$a_9 a_1^2 = -(31^8) - 2(2^2 1^7) - 19(21^9) - 110(1^{11})$$

und ausserdem

$$a_8 a_3 = -(2^3 1^5) + x(31^8) + y(2^2 1^7) + z(21^9) + u(1^{11})$$

einsetzt, und in der erhaltenen Identität die Coëfficienten der einzelnen Functionen $(2^3 1^5), \ldots, (1^{11})$ mit Null vergleicht; und ebenso allgemein.

Zur Controle der einzelnen Colonnen eignet sich am besten der folgende Satz:

Wenn die einzelnen Coëfficienten einer Colonne mit den gleichliegenden (in derselben Zeile liegenden) Coëfficienten in der ersten Colonne unter a_n multiplicirt werden, so ist die algebraische Summe dieser Producte gleich Null.

Man erhält diesen Satz, wenn man statt der allgemeinen Form einer Gleichung n-ten Grades eine binomische Gleichung von der Form

$$x + 1 = 0$$

voraussetzt. Ausnahme macht nur die erste Colonne.

Auf dieselbe Art wurden dann die Zahlencoëfficienten für die Coefficienten-Combinationen vom Gewichte zwölf aus den schon bekannten der Tafel vom Gewichte elf berechnet.